УДК 681.5.015

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Русак Л.В.

Международный институт дистанционного образования БНТУ
г. Минск, Беларусь, meshii@tut.by

Основной трудностью при решении нелинейных многопараметрических задач оптимального управления является вычисление градиента целевой функции в пространстве оптимизируемых параметров. Эта трудность связана не столько с большими затратами на численное определение составляющих градиента (они действительно весьма велики), сколько с невозможностью не только обеспечить, но и даже контролировать точность вычисления этих составляющих.

В такой ситуации градиентные методы оказываются практически неприменимыми: ошибки в вычислении градиента нарушают механизм их действия; наиболее эффективны методы минимизации функции многих переменных.

Этот выход был найден в работах Кураева А.А., где на основе вариационного подхода эвристически получены аналитические формулы для градиента целевой функции, в которых использованы решения сопряженной по Гамильтону системы уравнений (сопряженные переменные). Однако эти формулы придают более строгое обоснование для двух–и многоточечного функционала в задаче с подвижными границами.

Интеграл движения. Пусть нелинейный управляемый процесс задан следующим образом (“уравнение движения”):

$$\frac{d\vec{X}}{dT} = \vec{f}(\vec{\mu},\vec{x},T); \quad T(\vec{\mu}) \le T \le T_1(\vec{\mu}),$$

где $\vec{X} = (X_i)$ –вектор переменных состояния, $\vec{\mu} = (\mu_k)$ – вектор параметров управления.

Дифференцируем уравнение движения для X_i по параметру μ_k :

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\partial X_i}{\partial \mu_k}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial \mu_k} + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial \mu_k}. \tag{1}$$

Параллельно этому рассматриваем сопряженную систему

$$\Psi_i = -\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Psi_i . \tag{2}$$

Умножаем (1) на Ψ_i, а (2) – на $\frac{\partial X_i}{\partial \mu_k}$ и суммируем по всем i :

$$\sum_j \left[\Psi_i \frac{d}{dT}\left(\frac{\partial X_i}{\partial \mu_k}\right) + \frac{\partial X_i}{\partial \mu_k}\Psi_i\right] = \sum_j \Psi_i \frac{\partial f_i}{\partial \mu_k}.$$

Интегрируя по параметру T, имеем

$$\left(\vec{\Psi}_i \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \mu_k}\right)_{T_1 - 0} - \left(\vec{\Psi}\frac{\partial \vec{X}}{\partial \mu_k}\right)_{T_0 - 0} = \int_{T_0}^{T_1} \vec{\Psi}\frac{d\vec{f}}{\partial \mu_k} dT . \tag{3}$$

Это равенство записано для локальных производных, т.е. вычисляемых при мысленно заданных границах T_0 и T_1.

Добавляя к левой части (3) выражение $\left(\vec{\Psi}\frac{\partial\vec{X}}{\partial T}\right)_{T_1-0}\cdot\frac{dT_1}{d\mu_k}-\left(\vec{\Psi}\frac{\partial\vec{X}}{\partial T}\right)_{T_0-0}\cdot\frac{dT_0}{d\mu_k}$, а к правой части – равное выражение $\left(\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T_1-0}\cdot\frac{dT_1}{d\mu_k}-\left(\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T_0-0}\cdot\frac{dT_0}{d\mu_k}$, получаем интеграл движения для задачи с подвижными границами

$$\begin{gathered}\left(\vec{\Psi}\frac{\partial\vec{X}}{d\mu_k}\right)_{T_1-0}-\left(\vec{\Psi}\frac{\partial\vec{X}}{d\mu_k}\right)_{T_0-0}=\\ =\int\limits_{T_0}^{T_1}\vec{\Psi}\frac{d\vec{f}}{\partial\mu_k}dT+\left(\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T_1-0}\cdot\frac{dT_1}{d\mu_k}-\left(\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T_0+0}\cdot\frac{dT_0}{d\mu_k}\end{gathered}. \qquad (4)$$

Дифференцирование по параметру двухточечного функционала интегрального типа. Пусть дано

$$\vec{X}=\vec{f}(\vec{\mu},\vec{X},T),T_0(\vec{\mu})\le T\le T_1(\vec{\mu});$$

$$J=\int\limits_{T_0}^{T_1}f_j(\vec{\mu},\vec{X},T)dT.$$

Вводим вспомогательную переменную

$$X_j=\int\limits_{T_0}^{T_1}f_j(\vec{\mu},\vec{X},T)dT;\quad X_j(T_0)=0;\quad X_j(T_1)=J,$$

и рассматриваем расширенную дифференциальную задачу $X_j=f_j(\vec{\mu},\vec{X},T);\quad \vec{X}=\vec{f}(\vec{\mu},\vec{X},T)$.

Расширенный интеграл движения зададим как

$$\begin{gathered}\left(\frac{dX_i}{d\mu_k}+\vec{\Psi}\frac{d\vec{X}}{d\mu_k}\right)_{T1-0}-\left(\vec{\Psi}\frac{d\vec{X}}{d\mu_k}\right)_{T0+0}=\int\limits_{T0}^{T1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial\mu_k}+\vec{\Psi}\frac{\partial\vec{f}}{\partial\mu_k}\right)dT+\\ +\left(f_j+\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T1-0}\frac{dT_1}{d\mu_k}-\left(f_j+\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T0+0}\frac{dT_0}{d\mu_k},\end{gathered}$$

откуда находится $(dX_j/d\mu_k)_{T_1-0}$ или равное ему выражение d_j/μ_k:

$$\begin{gathered}\frac{dJ}{d\mu_k}=\left(\vec{\Psi}\frac{d\vec{X}}{d\mu_k}\right)_{T0+0}-\left(f_j+\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T+0}\cdot\frac{dT}{d\mu_k}+\int\limits_{T0}^{T}\left(\frac{\partial f_j}{\partial\mu_k}+\vec{\Psi}\frac{\partial f}{\partial\mu_k}\right)dT+\\ +\left(f_j+\vec{\Psi}\vec{f}\right)_{T1-0}\cdot\frac{dT_1}{d\mu_k}--\left(\vec{\Psi}\frac{d\vec{X}}{d\mu_k}\right)_{T1-0}\end{gathered}. \qquad (5)$$

Дифференцирование по параметру многоточечного функционала смешанного типа. Пусть теперь дано

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{f}\left(\vec{\mu},\overrightarrow{X},T\right);T_0\left(\vec{\mu}\right) < T_1\left(\vec{\mu}\right) < \ldots < T_n\left(\vec{\mu}\right) \;;$$

$$J = \sum_{n=0}^{N-1}\int_{Tn}^{Tn+1} f_j\left(\vec{\mu},\overrightarrow{X},T\right)dT + \Phi\left(\vec{\mu},\overrightarrow{X},(T_0)\right),\overrightarrow{X}\left(T_n\right),T_0,T_1,\ldots,T_n).$$

Введением $T_0,T_1,\ldots,T_n$ учитываются все точки функций $\vec{f}$ и f_j и, кроме того, $T_0,\ldots,T_n$ могут быть обычными точками.

Зададим положения точек $T_0,T_1,\ldots,T_n$ неявным уравнением вида

$$Y_n\left(\vec{\mu},\overrightarrow{X}\left(T_n\right),T_n\right) = 0\,, \tag{6}$$

и учтем их влияние на функционал с помощью штрафных функций:

$$J = \sum_{N=0}^{N-1}\int_{Tn}^{Tn+1} f_j\left(\vec{\mu},\overrightarrow{X},T\right)dT + +\Phi\left(\vec{\mu},\overrightarrow{X},\left(T_0\right),\overrightarrow{X}\left(T_1\right),\ldots,\overrightarrow{X}\left(T_n\right),T_0,T_1,\ldots,,T_n\right) + \sum_{n=0}^{N}\lambda_n Y_n\left(\vec{\mu},\overrightarrow{X}\left(T_n\right),T_n\right),$$

где весовые коэффициенты $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ пока произвольны.

Применяя формулу (5) к каждому из интегральных слагаемых функционала *J*, и устраним слагаемые с $dX_j/d\mu_k$ (кроме $\left(d\overrightarrow{X}/d\mu_k\right)_{T0}$) и $dT_n\,/\,d\mu_k$.

Последовательно вычислим весовые коэффициенты

$$\lambda_n = \begin{cases} 0, T_n = const \\ -\dfrac{f_j + \dfrac{\partial\Phi}{\partial T_n} + \sum\limits_j\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial X_j}f_j\right)_{Tn}}{\dfrac{\partial Y_n}{\partial T_n} + \sum\limits_j\left(\dfrac{\partial Y_n}{\partial X_j}f_j\right)_{Tn}}, T_n = var; \end{cases}$$

$$\Psi_i(T_n) = \frac{\partial\left(\Phi - \lambda_n Y_n\right)}{\partial X_{j(Tn)}};$$

$$\lambda_0 = \begin{cases} 0, T_0 = \text{const} \\ \dfrac{\left(f_j + \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{f}\right)_{T0} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial T_0}}{\partial Y_0/\partial T_0}, T_0 = \text{var}; \end{cases}$$

В результате получаем

$$\frac{dJ}{d\mu_k} = \sum_j\left[\left(\Psi_j + \frac{\partial\Phi}{\partial X_j} + \lambda_0\frac{\partial Y_0}{\partial X_j}\right)\frac{dX_j}{d\mu_k}\right] + \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_k} + \sum_{n=0}^{N}\lambda n\frac{\partial Yn}{\partial\mu_k} + \sum_{n=0}^{N-1}\int_{Tn}^{Tn+1}\left(\frac{\partial f_j}{\partial\mu_k} + \overrightarrow{\Psi}\frac{\partial\overrightarrow{f}}{\partial\mu_k}\right)dT. \tag{7}$$

Предложен метод оптимального управления дискретных фазовых систем с использованием эффективного метода минимизации функции многих переменных.

Список литературы:

1 Батура М. П. Дискретные системы с фазовым управлением/М. П. Батура. – Минск : Институт технической. кибернетики НАН Беларуси, 2002. – 152 с.
2 Казаков И. Е., Методы оптимизации стохастических систем/ И. Е. Казаков, Д. И. Гладков. – М.: Наука, 1987. – 304 с.