

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ LINEPLOTTER3D

Клименко П.В., Дерюжкова О.М.

УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»,
г. Гомель, Беларусь, artstudioexp@gmail.com, dom@gsu.by

На практических занятиях по теоретической механике студентам иногда требуются приложения, которые способны построить траекторию движения тела (материальной точки) для качественного и количественного анализа. Существует достаточно много хороших программ для построения графиков: простых в использовании, но мощных.

Рассмотрим порядок работы с программой LinePlotter3D, разработанной самостоятельно в помощь студентам и предназначенной для онлайн построения графиков параметрических функций и траекторий движения. Программа создана на базе движка с открытым исходным кодом Godot 3.2.3, находящегося в свободном доступе.

Программа находится на этапе тестинга и скомпилирована с системой отладки, чем объясняется повышенный объем занимаемой памяти и окно консоли для вывода сообщений об исключениях. В случае, если вы нашли ошибку, то можно отправить сообщение об исключении из консоли и описание процесса получения ошибки разработчику.

Программа скомпилирована отдельно для двух версий графической библиотеки OpenGL: GLES2.0 и GLES3.0. Это сделано для поддержки работы в более старых операционных системах Windows. Если не получается запустить программу, имеющую библиотеку GLES3.0, запуск версии с библиотекой GLES2.0, как правило, решает проблему. Однако же рекомендуется, по возможности, запускать программу с более современной графической библиотекой GLES3.0. Каждая версия программы находится в папках с соответствующими именами. Программа скомпилирована отдельно для двух видов систем: 32- и 64-разрядных. Каждая версия программы находится в папках с соответствующими именами.

Продемонстрируем работу программы, в соответствии с данными, представленными на рисунке 1. После запуска программы необходимо вызвать интерфейс нажатием клавиши [Q] или, подведя указатель мыши к левому нижнему углу экрана, нажатием на появившуюся кнопку “UI”. Уравнения движения по осям вводятся в соответствующие поля (1) (рисунок 1). Для использования стандартных функций в своих выражениях можно воспользоваться примером синтаксиса (20). Переменную, подразумевающую под собой время, обозначают как “t”. Пустые поля расцениваются как поля, в которые введен ноль “0”. Чтобы отобразить график после ввода выражений необходимо нажать на кнопку (5). Если на экране напротив поля ввода появились три восклицательных знака, то это означает, что введенное ранее выражение содержит ошибку синтаксиса, и программа рассматривает его как ноль “0”.

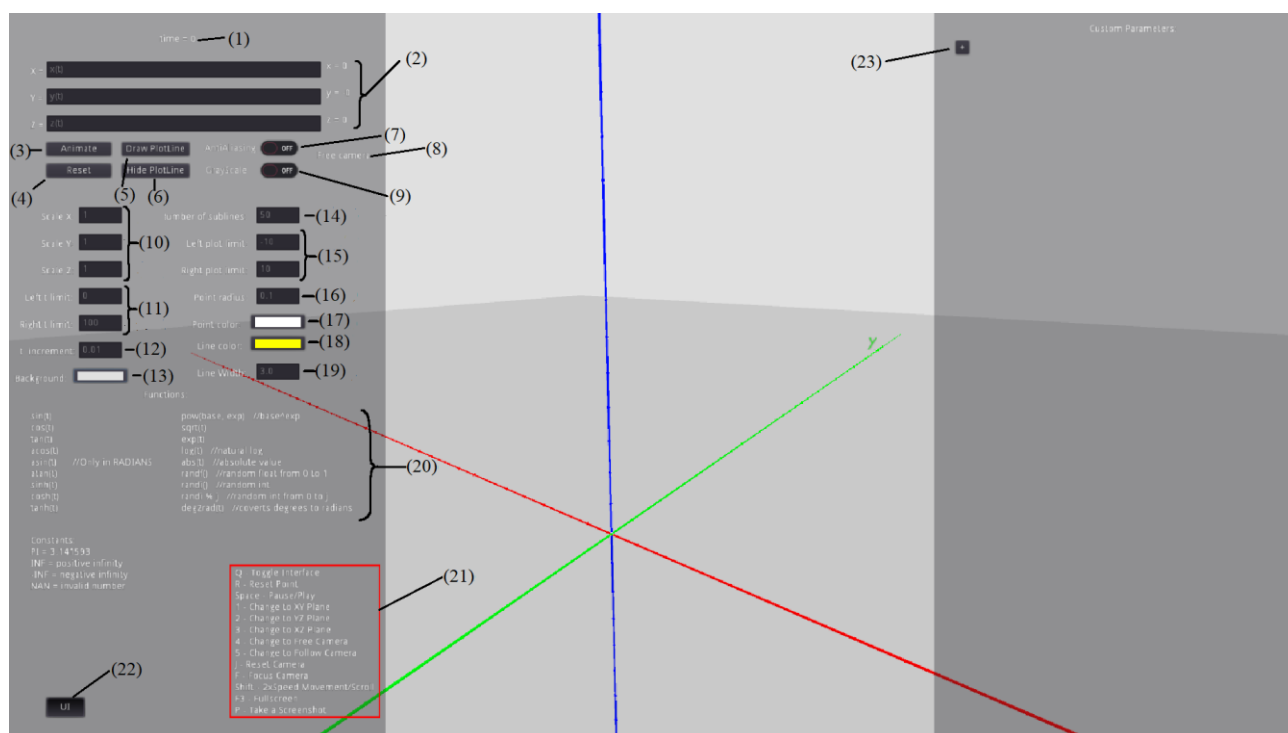
С помощью полей (15) необходимо настроить границы отображения траектории во времени. Поля (10) служат для изменения масштаба траектории по осям. В поле (14) можно указать количество разбиений траектории на прямые линии для отрисовки (под-линии). Однако, большое количество под-линий может сильно замедлить программу на слабых компьютерах. Это особенно заметно на компьютерах с 32-разрядной операционной системой. Из соображений безопасности количество под-линий ограничено числом 24000.

Настроить цвет линии траектории можно с помощью поля (18). Настроить ширину линии траектории можно с помощью поля (19). Настроить цвет фона можно с помощью поля (13).

Переключатель (7) включает и выключает сглаживание отрисовки линии траектории. При этом сглаживание добавляет дополнительную нагрузку на систему.

Переключатель (9) включает и выключает черно-белый фильтр экрана. Эта функция полезна для предварительной оценки вида графика при использовании черно-белой распечатки.

Для включения полноэкранного режима необходимо нажать клавишу [F3]. Для выхода из полноэкранного режима – клавишу [Esc], или [F3].



- (1) – поле информации о текущем моменте времени.
- (2) – поля для ввода параметрических функций.
- (3) – кнопка запуска анимации движения.
- (4) – кнопка сброса анимации в исходное положение.
- (5) – кнопка отображения траектории (графика).
- (6) – кнопка, скрывающая траекторию (график).
- (7) – переключатель сглаживания отрисовки графика.
- (8) – информация о состоянии камеры.
- (9) – переключатель черно-белого фильтра.
- (10) – поля для изменения масштаба осей координат.
- (11) – поля для изменения начального и конечного момента времени движения точки.
- (12) – поле для изменения скорости протекания времени.
- (13) – поле для выбора цвета фона.
- (14) – поле для изменения количества делений траектории на под-линии.
- (15) – поля для изменения временных границ отрисовки траектории.
- (16) – поле для изменения радиуса точки.
- (17) – поле для выбора цвета точки.
- (18) – поле для выбора цвета траектории.
- (19) – поле для изменения ширины линии траектории.
- (20) – примеры ввода поддерживаемых стандартных функций.
- (21) – список клавиш управления.
- (22) – кнопка вызова интерфейса.
- (23) – панель создания пользовательских параметров.

Рисунок 1 – Рабочее пространство программы LinePlotter3D

Систему координат с графиками можно вращать, перемещать и масштабировать в реальном времени. Для передвижения камеры достаточно нажать правую кнопку мыши и вос-

пользоваться клавишей [WASD]. Зажатие клавиши [SHIFT] ускоряет все типы передвижения камеры в два раза. Клавиши выбора режима камеры:

- [1] – плоскость XY (ортографический режим).
- [2] – плоскость YZ (ортографический режим).
- [3] – плоскость XZ (ортографический режим).
- [4] – свободный режим.
- [5] – режим слежения за точкой.
- [F] – сфокусироваться на точке.
- [J] – сброс камеры в исходное положение.

В режиме слежения за точкой необходимо двигать мышью, зажав правую кнопку для вращения камеры вокруг точки. Для приближения и отдаления камеры в любом из режимов необходимо использовать колесо мыши. Для перемещения вдоль плоскости в ортографических режимах можно двигать мышью, зажав правую кнопку. Для переключения из любого режима в режим свободной камеры достаточно начать двигаться, зажав правую кнопку мыши и используя клавишу [WASD]. Для запуска и приостановки анимации необходимо использовать кнопку (3) (рисунок 1) или клавишу [Space].

Для сброса точки в исходное положение необходимо нажать кнопку (4) (рисунок 1) или клавишу [R]. Исходное и конечное положение точки во времени можно настроить с помощью полей (11). Радиус точки настраивается с помощью поля (16). Цвет точки можно изменить с помощью поля (17).

Если зажать левую кнопку, а затем двигать мышью влево и вправо, то можно перематывать время назад и вперед, соответственно.

Панель (23) (рисунок 1) позволяет задавать пользовательские параметры, необходимые в уравнениях движения. Количество параметров не может превышать 20. В общем случае параметры могут зависеть от времени и даже от других пользовательских параметров. Однако при использовании зависимостей от других параметров и времени всегда нужно иметь в виду порядок расчета программой выражений, чтобы не получить устаревшие значения параметров на настоящий момент времени. Программа производит расчет каждый кадр. Порядок расчета осуществляется следующим образом:

Пользовательские параметры (рассчитываются по порядку “сверху вниз”) => уравнение движения X => уравнение движения Y => уравнение движения Z.

Т. е., для использования параметра A в определении параметра B, параметр A должен находиться выше параметра B в иерархии. Если же параметр A не меняется во времени, то порядок расположения параметров значения не имеет, параметры могут “видеть” все другие параметры из любого положения.

Для добавления нового параметра необходимо нажать на кнопку с символом “+” на панели параметров, ввести имя параметра в появившемся поле. Имя параметра не может начинаться с цифр, а также использовать какие-либо символы кроме латинских букв, цифр и нижнего подчеркивания. Так же запрещено использовать имя “t”, так как оно зарезервировано для переменной времени. Нижний и верхний регистры символов учитываются. После ввода имени параметра надо нажать клавишу [Enter]. Далее в появившемся справа от имени параметра поле можно определять значение параметра.

Чтобы переименовать параметр необходимо дважды нажать левую кнопку мыши на имени параметра. Чтобы удалить параметр, надо нажать на кнопку с символом “-”, находящуюся слева от параметра.

Программа LinePlotter3D позволяет отслеживать и выводить координаты курсора на плоскости или в трехмерной системе координат, наблюдать в онлайн режиме перемещение тела (материальной точки) вдоль линии траектории движения.

Рассмотрим возможности программы LinePlotter3D для построения траекторий движения материальных точек, изучаемых в рамках механики Ньютона, на примере движения под действием силы тяжести, электрического и магнитного полей, а также в среде с сопротивлением.

Чтобы получить траекторию движения точки, необходимо решить уравнения движения этой точки. В механике Ньютона уравнения движения свободной материальной точки записываются в форме второго закона Ньютона [1]:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x, \\ m\ddot{y} = F_y, \\ m\ddot{z} = F_z. \end{cases} \quad (1)$$

Они представляют собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка для трех неизвестных функций времени $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Уравнения, задаваемые вторым законом Ньютона, позволяют решить целый ряд задач. Важнейшей является основная, или прямая задача динамики материальной точки, состоящая в том, чтобы в каждом конкретном случае найти ее кинематический закон движения или изменение положения точки с течением времени:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad (2)$$

где (2) – система параметрических уравнений.

Для решения этой задачи помимо массы m точки должны быть известны формулы для всех действующих на нее сил. Макроскопические тела, движение которых изучают в механике Ньютона, участвуют в гравитационном и электромагнитном взаимодействиях. При этом электромагнитные силы проявляют себя во взаимодействии не только заряженных, но и нейтральных тел: межмолекулярные взаимодействия электромагнитной природы приводят к возникновению упругих сил и сил трения, которые также рассматривают в механике Ньютона.

Согласно теории дифференциальных уравнений, общее решение системы (1) содержит шесть произвольных постоянных [2]. Это означает, что материальная точка данной массы под действием данных сил может двигаться по одной из бесчисленного множества траекторий, каждой из которых соответствуют свои значения констант C_1, \dots, C_6 . Чтобы определить траекторию однозначно, необходимо задать шесть дополнительных условий, которым должна удовлетворять траектория. В качестве таких условий обычно выбирают начальные условия, т. е. значения координат и проекций скорости в начальный момент времени $t=0$:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, v_x(0) = v_{0x}, v_y(0) = v_{0y}, v_z(0) = v_{0z}.$$

Задание начальных условий выделяет из множества траекторий, удовлетворяющих данным уравнениям движения, единственную, которая соответствует этим условиям.

Найдем кинематический закон движения и траекторию материальной точки массы m и заряда q , которая влетает в область действия однородного, стационарного электрического поля с напряженностью $\vec{E} = (0,0,E)$ в начало координат со скоростью $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$. В программе LinePlotter3D построим траекторию движения материальной точки.

Для однозначного определения траектории запишем начальные условия в виде:

$$\vec{r}_0 = (0,0,0), \vec{v}_0 = (v_0, 0,0).$$

Векторное уравнение движение в форме второго закона Ньютона имеет вид: $m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}$, а в проекциях на оси координат с учетом условия задачи, получим:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q * 0 = 0, \\ m\ddot{y} = q * 0 = 0, \\ m\ddot{z} = qE. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = 0, \\ \ddot{z} = \frac{qE}{m}. \end{cases}$$

После интегрирования:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1, \\ \dot{y} = C_2, \\ \dot{z} = \frac{qE}{m}t + C_3. \end{cases} \quad (3)$$

Найдем константы интегрирования, для этого используем начальные условия по скорости: при $t = 0$, $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$, тогда

$$\begin{cases} v_0 = C_1, \\ 0 = C_2, \\ 0 = \frac{qE}{m} * 0 + C_3, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} C_1 = v_0, \\ C_2 = 0, \\ C_3 = 0. \end{cases}$$

Подставим полученные константы в уравнения для скоростей (3). Конечные выражения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{z} = \frac{qE}{m}t. \end{cases}$$

Еще раз проинтегрировав, получим:

$$\begin{cases} x = v_0 t + C_4, \\ y = C_5, \\ z = \frac{qE}{2m} t^2 + C_6. \end{cases} \quad (4)$$

Найдем константы интегрирования. Теперь воспользуемся начальными условиями по координате: при $t = 0$, $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$, тогда

$$\begin{cases} 0 = v_0 * 0 + C_4, \\ 0 = C_5, \\ 0 = \frac{qE}{2m} * 0^2 + C_6. \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} C_4 = 0, \\ C_5 = 0, \\ C_6 = 0. \end{cases}$$

Подставим полученные константы в уравнения для координат (4). Конечные выражения или кинематический закон движения заряженной материальной точки имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t, \\ y(t) = 0, \\ z(t) = \frac{qE}{2m} t^2. \end{cases} \quad (5)$$

Для получения траектории движения материальной точки в электрическом поле выразим из первого уравнения системы (5) параметр время: $t = \frac{x}{v_0}$ и подставим в третье уравнение системы (5). Тогда $z = ax^2$, где константа $a = \frac{qE}{2mv_0^2}$, т. е. траекторией движения в плоскости ZX является парабола. Движения вдоль оси y не происходит.

С помощью разработанной программы LinePlotter3D в интерактивном режиме осуществим визуализацию траектории движения материальной точки в электрическом поле. Изменяя пользовательские параметры: начальные условия по координате и скорости, константы, приведенные в условии задачи (масса m и электрический заряд q материальной точки, напряженность электрического поля E), можно пронаблюдать заданные изображения параболы. Используя возможности программы LinePlotter3D вращать, перемещать и масштабировать в реальном времени систему координат с графиками и выбирая различные типы или режимы передвижения камеры можно добиться наиболее информативного и наглядного изображения (рисунок 2).

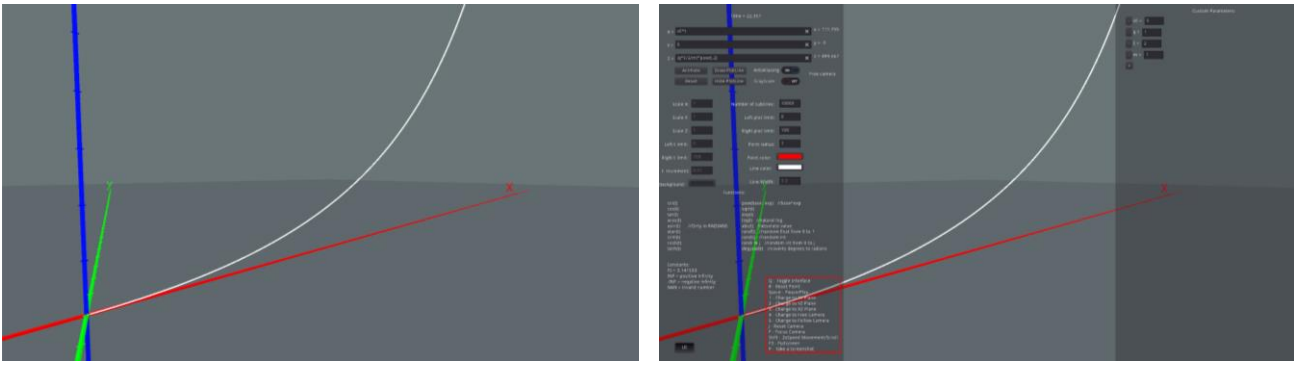


Рисунок 2 – Визуализация траектории движения материальной точки в электрическом поле в программе LinePlotter3D

Проведя аналогичные вычисления для уравнений движения

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB}{m} \dot{y} - \frac{\gamma}{m} \dot{x} = \omega \dot{y} - k \dot{x}, \\ \dot{y} = -\omega \dot{x} - k \dot{y}, \\ \ddot{z} = -k \dot{z} - mg \end{cases}$$

и кинематических уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} e^{-kt} \cos \omega t - \frac{v_0}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \\ y = -\frac{v_0}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} e^{-kt} \sin \omega t, \\ z = -\frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (6)$$

заряженной материальной точки, движущейся в магнитном поле в среде с сопротивлением (диссипативная сила пропорциональная скорости) под действием силы тяжести, с учетом начальных условий: $\vec{r}_0 = (0,0,0)$; $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, 0)$, также можно получить траекторию движения. В уравнениях системы (6) введены обозначения $\omega = \frac{qB}{m}$ – электронная или циклотронная частота, $k = \frac{\gamma}{m}$ – коэффициент затухания. Траекторией движения частицы в плоскости XU является окружность со смещенным по оси x центром и сужающимся радиусом:

$$\left(x + \frac{v_0}{\sqrt{k^2 + \omega^2}}\right)^2 + y^2 = \frac{v_0^2}{k^2 + \omega^2} e^{-2kt}.$$

В пространстве за счет действия силы тяжести траектория движения имеет вид спирали.

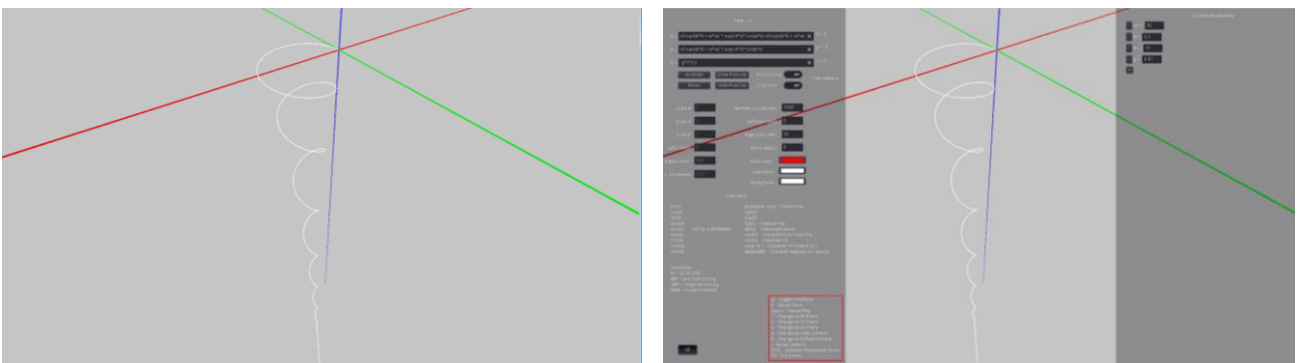


Рисунок 3 – Визуализация траектории заряженной материальной точки, движущейся в магнитном поле в среде с сопротивлением под действием силы тяжести в программе LinePlotter3D

Компьютерное моделирование траектории в программе LinePlotter 3D представлено на рисунке 3. Используя возможности программы можно рассмотреть траекторию-спираль с различных точек зрения. Пронаблюдать сечение в плоскости на любом уровне оси z . Составить представление о характере изменения радиуса окружности за счет диссипативной силы сопротивления среды $\vec{v} = -\gamma \vec{v}$.

В результате, использование на практических занятиях возможностей разработанной программы LinePlotter3D позволяет студентам в интерактивном режиме осуществить визуализацию траектории движения тел (материальных точек), изучаемых в рамках механики Ньютона. При этом можно изменять пользовательские параметры, проводя анализ полученного результата, что делает процесс обучения более информативным и насыщенным. Работа в программе LinePlotter3D по визуализации траекторий материальной точки не требует больших временных затрат, доступа к Интернету, углубленных знаний предмета. Даже при минимальной первичной подготовке студентов наличие кинематического закона движения тела позволяет без вывода формулы для траектории движения построить эту траекторию.

Список литературы:

1. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика в 10 томах. Т.1. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Физматлит, 2018. – 224 с.
2. Белов, Д.В. Механика: Учебное пособие / Д.В. Белов. – М.: Физический ф-т МГУ,