

## ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ В MS EXCEL

Листопад В.В.

*Национальный университет пищевых технологий, г. Киев, Украина, [vlstopad@ukr.net](mailto:vlstopad@ukr.net)*

**Аннотация.** В статье рассмотрены отдельные случаи применения пакета Ms Excel в процессе обучения высшей математике, в частности, поиск обратной матрицы согласно определения и методом преобразований (метод Жордана-Гаусса). Решение системы линейных уравнений (СЛР) выполнено матричным методом (два действия) и методом преобразований (Жордана-Гаусса).

**Введение.** Современное общество ставит перед системой образования новые задачи, связанные с формированием новой педагогической стратегии в условиях массовой компьютеризации и информатизации всех сфер жизнедеятельности человека, в частности:

- добиться успешной социализации человека через погружение его в компьютерную культуру – в пределах насыщенного активного информационной среды научить человека жить, создав условия для его непрерывного образования;

- обеспечить получение широкого базового высшего образования, что позволит достаточно быстро переключаться на смежные области профессиональной деятельности.

В процессе изучения фундаментальных курсов математики, к которым относится линейная алгебра, сегодня накоплен достаточный опыт и значительный фактический материал методических систем усвоения таких курсов. Однако не все методики обучения используют современные компьютерные технологии в учебном процессе. В работе представлено пример использования пакета Ms Excel в одной из тем линейной алгебры.

**Анализ актуальных исследований.** Анализ работ М. И. Жалдака, Ю.С. Рамського, В.И. Клочко, Ю.В. Горошка, С. А. Ракова, Ю. В. Триуса, А. В Спиваковского и других позволил сделать вывод, что наиболее популярными программными продуктами для обучения высшей математике у вузах Украины является GRAN, MathCAD, MathLab, Maple, Mathematica, STATISTICA; офисные приложения: Microsoft Office Word, Excel, Power Point.

**Изложение основного материала.** Выполнение любых операций с матрицами (сложение, вычитание, умножение, вычисление обратной, транспонирования и т.д.) являются достаточно громоздкими и продолжительными во времени. На практическом занятии по теме «Действия с матрицами и вычисления обратной матрицы» удастся разобрать максимально 2 – 3 примера. Если при изучении этой темы воспользоваться компьютерной поддержкой, то количество выполненных заданий возрастет в 4 – 5 раз. Для работы каждый преподаватель выбирает программу (для компьютерной поддержки), которая есть в наличии, или ту, с которой соискатели образования ознакомились на практических/лабораторных занятиях по информатике раньше.

Квадратная матрица  $A^{-1}$  называется обратной к матрице  $A$ , если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \quad (1)$$

где  $E$  - единичная матрица соответствующей размерности.

Квадратная матрица  $A^{-1}$ , называется обратной к матрице  $A$ , если

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $A_{ij}$  – алгебраические дополнения транспонированной относительно элементов заданной матрицы  $A$ .

В случае  $n = 3$  для матрицы  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  обратной будет матрица (2).

Квадратная матрица называется невырожденной или не особенной, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрица  $A$  называется вырожденной, или особенной и не имеет обратной матрицы.

Теорема 1. Произвольную невырожденная матрица  $A$  с помощью элементарных преобразований можно свести к единичной матрицы  $E$ .

$$A \rightarrow E. \quad (3)$$

Теорема 2. Если к единичной матрицы порядка  $n$  применить те же элементарные преобразования только над строками и в том же порядке, с помощью которых невырожденная квадратная матрица  $A$  порядка  $n$  сводится к единичной, то полученная при этом матрица  $A^{-1}$  будет обратной матрице  $A$ .

Описанная в теореме 2 схема дает способ нахождения обратной матрицы к данной с помощью элементарных преобразований. При этом удобно записывать матрицы  $A$  и  $E$  рядом, разделяя их вертикальной чертой (рассматривая расширенную матрицу  $(A|E)$ ), и одновременно проводить элементарные преобразования над строками матриц  $A$  и  $E$ . В результате преобразования строк матрица  $(A|E)$  преобразуется в матрицу  $(E|A^{-1})$ , то есть

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1}). \quad (4)$$

Этот метод вычисления обратной матрицы называют методом Жордана-Гаусса. Проиллюстрируем его реализацию на примере, пользуясь средствами Ms Excel.

Пример 1. [5] Найти обратную матрицу к матрице  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ .

Решение.

Таблица 1 – Вычисление обратной матрицы методом Жордана – Гаусса.

	A				E							
3												
4	1	2	3	4	1	0	0	0				
5	2	3	1	2	0	1	0	0				
6	1	1	1	-1	0	0	1	0				
7	1	0	-2	-6	0	0	0	1				
8												
9	1	2	3	4	1	0	0	0				
10	0	-1	-5	-6	-2	1	0	0				
11	0	1	2	5	1	0	-1	0				
12	0	2	5	10	1	0	0	-1				
13												
14	1	0	-7	-8	-3	2	0	0				
15	0	1	5	6	2	-1	0	0				
16	0	0	-3	-1	-1	1	-1	0				
17	0	0	-5	-2	-3	2	0	-1				
18												
19	1	0	0	-5 2/3	-2/3	-1/3	2 1/3	0				
20	0	1	0	4 1/3	1/3	2/3	-1 2/3	0				
21	0	0	1	1/3	1/3	-1/3	1/3	0				
22	0	0	0	-1/3	-1 1/3	1/3	1 2/3	-1				
23												
24	1	0	0	0	22	-6	-26	17				
25	0	1	0	0	-17	5	20	-13				
26	0	0	1	0	-1	0	2	-1				
27	0	0	0	1	4	-1	-5	3				
28												
					E				A <sup>-1</sup>			

В закрашенных клетках помечены разрешимые элементы для каждого шага перехода.

Замечание 1. Для перехода к следующей таблице пользуемся правилом прямоугольника (Жордановы исключения) с обязательной фиксацией (клавиша F4) в создаваемой формуле элементов разрешающего столбца. Проверку можно выполнить, пользуясь функцией МУМНОЖ.

Замечание 2. Теорема 2 выполняется также, если элементарные преобразования выполнять над столбцами (Жордановы исключения по вертикали), то есть матрицу  $E$  располагают под

матрицей  $A$ , тогда 
$$\left[ \begin{array}{c} A \\ E \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{c} E \\ A^{-1} \end{array} \right]. \quad (5)$$

Пример 2. Найти обратную матрицу к матрице  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

Решение.

Таблица 2 – Вычисление обратной матрицы по вертикале методом Жордана – Гаусса по формуле (5).

3		A				Шаг 1		
4		1	-1	-2		1	0	0
5		2	-1	-1		2	1	3
6		-1	3	2		-1	2	0
7		1	0	0		1	1	2
8		0	1	0		0	1	0
9		0	0	1		0	0	1
10		Шаг 2 E				Шаг 3 E		
11						1	0	0
12		1	0	0		0	1	0
13		0	1	0		0	0	1
14		-5	2	-6		-1/6	2/3	1/6
15		-1	1	-1		1/2	0	1/2
16		-2	1	-3		-5/6	1/3	-1/6
17		0	0	1				
18						A <sup>-1</sup>		

За три шага мы нашли обратную матрицу. Выполним проверку действием умножения.

Таблица 3 – Проверка правильности вычисления обратной матрицы в примере 2.

21												
22	A · A <sup>-1</sup> =	1	-1	-2		-1/6	2/3	1/6	1	0	-0	
23		2	-1	-1	*	1/2	0	1/2	=	0	1	-0
24		-1	3	2		-5/6	1/3	-1/6		0	0	1

Замечание 3. Если в соотношении (4) на место единичной матрицы справа от вертикальной черты поставить матрицу  $B$  (это матрица-столбец правой части системы), то в результате соответствующих преобразований получим матрицу  $A^{-1} \cdot B$ :

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1} \cdot B), \quad (6)$$

где  $A^{-1} \cdot B$  является решением системы в матричном виде.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений 
$$\begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

Решение.

Таблица 4 – Решение примера 3 по формуле (6).

27					
28			<b>A</b>		<b>B</b>
29		1	-1	1	3
30		2	1	1	11
31		1	1	2	8
32	Крок 1	1	-1	1	3
33		0	3	-1	5
34		0	-2	-1	-5
35	Крок 2	1	0	2/3	4 2/3
36		0	1	-1/3	1 2/3
37		0	0	-1 2/3	-1 2/3
38	Крок 3	1	0	0	4
39		0	1	0	2
40		0	0	1	1
41			<b>E</b>		$A^{-1}B$

Ответ.  $x = 4, y = 2, z = 1$ .

Замечания 4. Если в соотношении (5) вместо единичной матрицы под горизонтальной чертой поставить матрицу  $B$ , то в результате соответствующих преобразований получим матрицу  $A^{-1}B$ :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} E \\ A^{-1}B \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Предлагаем читателю самостоятельно решить систему из примера 3, по формуле (7).

Обратная матрица используется при решении матричных уравнений вида  $AX = B$  (решение  $X = A^{-1}B$ ) и  $YA = B$  (решение  $Y = BA^{-1}$ ).

### Выводы и перспективы дальнейших научных исследований.

Очертим преимущества применения электронных таблиц Ms Excel при реализации метода Жордана - Гаусса на занятиях по высшей математике:

1. Процесс решения занимает считанные минуты по сравнению с подсчетом вручную.
2. Параллельно хорошо усваивается теоретический материал.
3. Формируются:
  - навыки реализации алгоритмических процедур;
  - умение формулировать учебную задачу, планировать деятельность по ее решению;
  - умение подбирать и использовать готовые программные средства (математические пакеты прикладных программ и отдельные функции);
  - умение составлять программы для решения типовых учебных задач;
  - навыки владения основами логического программирования;
  - умение подбирать эффективный метод для решения поставленной задачи.
4. Возможность за достаточно короткое время составить систему контрольных заданий для проведения тематического и итогового контроля.
5. Достаточно широкий спектр применения в методах решения задач линейного программирования.

Предлагаемое в статье более широкое внедрение пакета Ms Excel позволит обогатить содержание и разнообразить формы и способы овладения новыми темами, повысит мотивацию учебно-творческой деятельности студентов на занятиях, позволит им самостоятельно изучать определенные темы и получить принципиально новые знания для их дальнейшего использования

в практической деятельности. Такой подход создает условия для непрерывного образования и самообразования, обучения в течение жизни.

Дальнейшие исследования видим в расширении использования пакета Ms Excel для решения прикладных задач в экономике, логистике, механике, технологических процессах, социальных исследованиях и т.п.

Список литературы:

1. Співаковський О.В. Теорія й практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей: Монографія. – Херсон: Айлант. – 2003 – 229 с.
2. Жалдак М.І., Рамський Ю.С. Чисельні методи математики: Посібник для самоосвіти вчителів. - К.: Рад. шк., 1984. - 206 с.
3. Раков С.А., Горох В.П., Осенко К.О. Роль доведень у навчанні математики та їх підтримка засобами комп'ютерного моделювання у пакетах динамічної геометрії.//Науковий часопис НПУ ім. М.П.Драгоманова.Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. Наук. Праць/Ред рада. К.;НПУ імені М.П.Драгоманова, 2012. - №12(19).- с.16-29.
4. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике: Справ. - Мн.: Наука і техніка, 1991. - 480 с.
5. Алгебра і теорія чисел. Практикум: В 2-х частинах/Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.А. – К.: Вища школа. Головне вид-тво, 1983. – ч. 1. 232 с.-Укр.