

6. Mamedov R. N., El'darov V. S., Mustafayev A. M. Pressure influence to the heat conductivity of electrolytes water solutions // Trans. of 4<sup>th</sup> Baku International Congress, Baku, September 23–26. – Baku, 1997. – P. 5–6.

7. П е п и н о в Р. И. Теплофизические свойства водных растворов солей – основных компонентов природных соленых вод в широком интервале параметров состояния: Автореф. дис. ... докт. техн. наук. – Баку, 1994. – 68 с.

8. Магомедов У. Б. Теплопроводность водных растворов солей при высоких параметрах // Геотермия, геологические и теплофизические задачи. – Махачкала, 1992. – С. 168–187.

9. Absolute measurements of the thermal conductivity of aqueous NaCl solutions at pressures up to 40 Мра / T. Nagasaka, A. Okada, Z. Suzuki et al. // Ber. Bursenges. Phys. Chem. – 1983. – V. 87. – P. 859–866.

10. Андрианова И. С., Самойлов О. Я., Фишер И. З. Теплопроводность и структура воды // Журнал структ. химии. – 1967. – Т. 8, № 5. – С. 813–816.

Представлена кафедрой  
промышленной теплоэнергетики  
и технологии воды

Поступила 1.11.2002

УДК 536.2.001.24

## **ПРОБЛЕМА ТЕПЛОВОГО УДАРА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

**Докт. физ.-мат. наук, проф. КАРТАШОВ Э. М.,  
РЕМИЗОВА О. И.**

*Московская государственная академия тонкой химической технологии  
им. М. В. Ломоносова*

В настоящей работе продолжены начатые в [1] исследования динамической реакции массивного тела в случае резкого теплового воздействия на его поверхность.

В ряде важных практических режимов работы элементов конструкций в условиях повышенных температур встречаются случаи, когда имеет место достаточно быстрый и интенсивный нагрев объектов. Такая ситуация возникает, например, при высокоинтенсивном теплообмене в устройствах импульсной и лазерной техники, лазерной обработке материалов, в процессах плазменного напыления, в энергетических каналах ядерных реакторов, псевдоожигенном слое, дисперсных системах и зернистых материалах, слоистых полупроводниковых структурах, кристаллах катализатора и при выращивании гомоэпитаксиальных пленок германия и др. Характерной особенностью материалов, находящихся в условиях перечисленных тепловых воздействий, является наличие больших по абсолютной величине градиентов температур, приводящих к появлению напряжений, которые в свою очередь могут вызвать разрушение материала. Для описания возни-

кающих температурных полей авторы использовали в [1] уравнение теплопроводности гиперболического типа, в основе которого лежит обобщенный закон теплопроводности для изотропных тел, учитывающий инерцию теплового потока [2]. В настоящей работе изучается вопрос о роли температурных полей и температурных напряжений в проблеме термической прочности с учетом эффекта конечной скорости распространения теплоты в твердых телах в рамках гиперболических моделей нестационарного теплопереноса.

Следует отметить, что влияние конечной скорости распространения теплоты на теплообмен становится заметным не только при высоких, но и при очень низких температурах (например, в жидком гелии  $v_T = 19 \text{ м/с}$  при  $T = 1,4 \text{ К}$ ), а также при обычных температурах в твердых телах, когда в нестационарном процессе рассматривается малый период времени [3], что может стать предметом дальнейших исследований в данной области. Именно эта ситуация характерна для проблемы теплового удара в терминах динамической термоупругости [4].

**Уравнение совместности в напряжениях для динамического случая.** Пусть  $D$  – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства  $M(x_1, x_2, x_3)$ , находящаяся в условиях термонапряженного состояния;  $S$  – кусочно-гладкая поверхность, которая ограничивает область  $D$ ;  $\bar{n}$  – внешняя нормаль к  $S$ ;  $T(M, t)$  – распределение температуры в области  $D$  при  $t > 0$ ;  $T_0$  – начальная температура, при которой тело находится в недеформируемом и ненапряженном состоянии.

Пусть  $\sigma_{i,j} = \sigma_{i,j}(M, t)$ ;  $\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{i,j}(M, t)$ ;  $U_{i,j} = U_{i,j}(M, t)$  ( $i, j = x_1, x_2, x_3$ ) – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям термомеханики [4]: уравнениям движения (с учетом объемных сил  $F_i(M, t)$ ), геометрическим соотношениям и физическим уравнениям (в индексных обозначениях):

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{U}_i; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)(U_{i,j} + U_{j,i}); \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha_T (T - T_0) \delta_{ij}. \quad (3)$$

Из (3) следует

$$\varepsilon_{ij} \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{kk} + 3\alpha_T (T - T_0), \quad (4)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha_T$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $E$  – модуль упругости;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Дифференцируя (2) по  $x_n$  и  $x_m$

$$\varepsilon_{ij,nn} = \frac{1}{2}(U_{i,jnn} + U_{j,inn}),$$

совершая циклическую перестановку индексов и компоненты вектора перемещения, приводим к известному уравнению совместности в деформациях

$$\varepsilon_{ij,nn} - \varepsilon_{im,jn} - \varepsilon_{nj,mi} + \varepsilon_{nm,ji} = 0. \quad (5)$$

Подставим (3) в (5), полагая (5) при  $m = n$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{ij,nn} - \sigma_{in,jn} - \sigma_{nj,ni} + \sigma_{nn,ji}) + \frac{\nu}{E}(-\sigma_{kk,nn}\delta_{ij} + \sigma_{kk,jn}\delta_{in} + \sigma_{kk,ni}\delta_{nj} - \sigma_{kk,ji}\delta_{nn}) + \\ & + \alpha_{\tau}(T-T_0)_{nn}\delta_{ij} - \alpha_{\tau}(T-T_0)_{jn}\delta_{in} - \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ni}\delta_{nj} + \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji}\delta_{nn} = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Далее, используя (1) и свойства тензоров:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{in,jn} &= -F_{i,j} + \rho\ddot{U}_{i,j}; & \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji}\delta_{in} &= \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji}; \\ \sigma_{nj,ni} &= -F_{j,i} + \rho\ddot{U}_{j,i}; & \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ni}\delta_{nj} &= \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji}; \\ \sigma_{kk,jn}\delta_{in} &= \sigma_{kk,ji}; & \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji}\delta_{nn} &= 3\alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji}; \\ \sigma_{kk,ni}\delta_{ni} &= \sigma_{kk,ji}; & & \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

подставим (7) в (6). Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{ij,nn} + F_{i,j} - \rho\ddot{U}_{i,j} + F_{j,i} - \rho\ddot{U}_{j,i} + \sigma_{nn,ji}) + \\ & + \frac{\nu}{E}(-\sigma_{kk,nn}\delta_{ij} + \sigma_{kk,ji} + \sigma_{kk,ji} - 3\sigma_{kk,ji}) + \\ & + \alpha_{\tau}(T-T_0)_{nn}\delta_{ij} - \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji} - \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji} + 3\alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij,nn} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk,nn}\delta_{ij} + \frac{1}{E}\sigma_{nn,ji} + \frac{1+\nu}{E}(F_{j,i} + F_{i,j}) + \\ & + \alpha_{\tau}[(T-T_0)_{nn}\delta_{ij} + (T-T_0)_{ji}] = \frac{1+\nu}{E}\rho(\ddot{U}_{i,j} + \ddot{U}_{j,i}). \quad (8) \end{aligned}$$

Если положить  $i = j$ , то можно выразить  $\sigma_{kk,nn}$

$$\sigma_{kk,nn} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}F_{i,i} - \frac{2\alpha_{\tau}E}{1-\nu}(T-T_0)_{nn} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\rho\ddot{U}_{i,i}. \quad (9)$$

Подставим (9) в (8)

$$\begin{aligned}
& (1+\nu)\sigma_{ij,nn} + \sigma_{mn,ji} + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)} F_{n,n} \delta_{ij} + (1+\nu)[F_{i,j} + F_{j,i}] + \\
& + E\alpha_{\tau} \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} (T-T_0)_{,nn} \delta_{ij} + (T-T_0)_{,ji} \right] = \\
& = (1+\nu)\rho \left[ (\ddot{U}_{i,j} + \ddot{U}_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu} \ddot{U}_{n,n} \delta_{ij} \right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Но:  $\ddot{U}_{i,j} + \ddot{U}_{j,i} = 2\ddot{\epsilon}_{ij} = \frac{2(1+\nu)}{E} \ddot{\sigma}_{ij} - \frac{2\nu}{E} \ddot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + 2\alpha_{\tau} (T-T_0)_{,i^2} \delta_{ij}$ ;

$$\ddot{U}_{i,i} = \ddot{\epsilon}_{ii} = \frac{1-2\nu}{E} \ddot{\sigma}_{kk} + 3\alpha_{\tau} (T-T_0)_{,i^2}. \tag{11}$$

Подставив в (10) выражение (11), находим:

$$\begin{aligned}
& (1+\nu)\sigma_{ij,nn} + \sigma_{mn,ji} + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)} F_{n,n} \delta_{ij} + (1+\nu)[F_{i,j} + F_{j,i}] + \\
& = E\alpha_{\tau} \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} (T-T_0)_{,nn} \delta_{ij} + (T-T_0)_{,ji} \right] = \\
& = \frac{(1+\nu)\rho}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ 2\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma_{nn} \delta_{ij} + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu} \alpha_{\tau} (T-T_0) \delta_{ij} \right],
\end{aligned} \tag{12}$$

или в координатной форме  $(x, y, z)$

$$\begin{aligned}
& (1+\nu)\Delta\sigma_{ij}(M, t) + \sigma_{ij}(M, t) + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)} \operatorname{div}\bar{F}(M, t)\delta_{ij} + \\
& + (1+\nu)[F_{i,j}(M, t) + F_{j,i}(M, t)] + E\alpha_{\tau} \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta T(M, t)\delta_{ij} + (T(M, t) - T_0)_{,ij} \right] = \\
& = \frac{\rho(1+\nu)}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ 2\sigma_{ij}(M, t) - \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma(M, t)\delta_{ij} + \right. \\
& \left. + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu} \alpha_{\tau} (T(M, t) - T_0)\delta_{ij} \right], \quad M \in G, t > 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $i, j = x, y, z$ ;  $M = M(x, y, z)$ ;  $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ ;

$$\bar{F} = \{F_x, F_y, F_z\}, \quad \operatorname{div}\bar{F} = F_{n,n} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Уравнение (13) может быть названо обобщенным уравнением динамической термоупругости в напряжениях. Этот случай впервые рассмотрел В. Новацкий [5], используя уравнения эластокинетики в напряжениях, однако конечный результат в [5] имеет форму, отличную от (13). Частный случай уравнения (13) для квазистатических задач (в (1) следует считать

$\rho=0$ ) указан в [4], а при отсутствии объемных сил ( $F_i = 0$  квазистатика) в [5]. В конкретных случаях теплового удара (характер нагрева; область термонапряженного состояния; случаи симметрии) соотношение (13) приводит к известным результатам динамической термоупругости, описанным в [4].

Представляет интерес получить аналогичное соотношение и для плоской задачи динамической термоупругости. Для этого случая в (1), (2) индексы  $i, j = x, y$ , а соотношение (3) следует записать в виде

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = \frac{1 + \nu_1}{\nu_1} \sigma_{ij}(M, t) - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{nn}(M, t) \delta_{ij} + \alpha_{\tau_1} [T(M, t) - T_0] \delta_{ij}, \quad (14)$$

где  $M = M(x, y)$  а параметры в (14) есть:

- для плоской деформации:

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}; \quad E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad \alpha_{\tau_1} = \alpha_{\tau}(1 + \nu); \quad (15)$$

- для плосконапряженного состояния:

$$\nu_1 = \nu; \quad E_1 = E; \quad \alpha_{\tau_1} = \alpha_{\tau}. \quad (16)$$

Уравнение совместности в деформациях (5) вырождается и теперь имеет вид  $\varepsilon_{ii,nn}(M, t) = \varepsilon_{in,in}(M, t)$ .

Повторяя предыдущие рассуждения, приходим к конечному результату в виде

$$\Delta \sigma_{i,j}(M, t) + (1 + \nu_1) F_{n,n}(M, t) + E_1 \alpha_{\tau_1} [T(M, t) - T_0]_{,nn} = \frac{\rho(1 + \nu_1)}{E_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \times \left[ (1 - \nu_1) \sigma(M, t) + 2\alpha_{\tau_1} (T(M, t) - T_0) \right] \quad (17)$$

одновременно для случая плоской деформации (15) и плосконапряженного состояния (16).

**Динамическая реакция упругого полупространства на тепловой удар.** Рассмотрим упругое полупространство, первоначально находящееся при температуре  $T_0$ . Нагрев происходит температурным или тепловым путем либо нагревом средой. Пусть  $T(z, t)$  – температура полупространства. Возникающие вследствие наличия температурного градиента напряжения будут зависеть только от  $z$  и  $t$ , т. е.  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$ ; при этом перемещения:  $U_x = U_y = 0$ ;  $U_z = U_z(z, t)$ . Уравнение (12) (без учета объемных сил  $F_i = 0$ ) дает для этого случая:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \alpha_{\tau} \rho \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial t^2}, \quad z > l; \quad t > 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) впервые получили Даниловская из соотношений (1)...(3) и (независимо от нее) Т. Мура ([4]), который, по-видимому, не знал о ранней и более общей работе Даниловской. Уравнение (18) явилось

предметом многочисленных исследований в зависимости от условий нагрева изучаемой области, геометрической формы тела и особенностей физико-механических характеристик нагреваемого материала. Наиболее детально изучено упругое полупространство,  $z \geq 0$ , что объясняется многочисленными приложениями этой области и возможностью записать аналитическое решение задачи в достаточно обозримой форме. Последнее имеет немаловажное значение для целей качественного параметрического анализа динамической реакции области на тепловой удар. При этом предполагается, что в исходной постановке задачи в начальный момент область свободна от напряжений и что в процессе нагревания на границе области напряжения отсутствуют.

Рассмотрим уравнение (18) при следующих условиях:

$$\sigma_{zz}(z,0) = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} /_{t=0}, \quad z > l; \quad \sigma_{zz}(l,t) = \sigma_{zz} /_{z=\infty} = 0, \quad t > 0. \quad (19)$$

Здесь  $T(z,t)$  является решением тепловых задач для уравнения теплопроводности гиперболического типа:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad z > l, \quad t > 0 \quad (20)$$

с постоянными начальными условиями:

$$T(z,t) /_{t=0} = T_0, \quad z \geq l, \quad \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} /_{t=0} = 0, \quad z \geq l \quad (21)$$

и граничными условиями:

$$T(z,t) /_{z=l} = T_c; \quad t > 0 \quad - \text{температурный нагрев}; \quad (22)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(z,\tau)}{\partial z} /_{z=l} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = -\frac{1}{\lambda} \varphi_0, \quad t > 0 \quad - \text{тепловой нагрев}; \quad (23)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(z,\tau)}{\partial z} /_{z=l} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h[T(z,t) /_{z=l} - T_c], \quad t > 0 \quad - \text{нагрев средой}. \quad (24)$$

Необходимо также учесть условие

$$|T(z,t)| < \infty, \quad z \geq l, \quad t \geq 0. \quad (25)$$

В безразмерных переменных:

$$z' = \frac{V_p}{a}(z-l); \quad Fo = \frac{V_p^2 t}{a}; \quad \beta = \frac{V_p}{V_t}; \quad V_t = \sqrt{\frac{a}{\tau_r}}; \quad \sigma_{z'z'}(z',Fo) = \frac{\sigma_{zz}(z,t)}{S(T_c - T_0)};$$

$$T(z',Fo) = \frac{T(z,t) - T_0}{T_c - T_0}; \quad Bi = \frac{ha}{V_p}; \quad S = \alpha_t(3\lambda + 2\mu) = \frac{\alpha_t E}{1 - 2\nu}; \quad V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (26)$$

соотношения (18)...(25) выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{z'z'}}{\partial z'^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{z'z'}}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 T(z', Fo)}{\partial Fo^2}, \quad z' > 0; \quad Fo > 0; \quad (27)$$

$$\sigma_{z'z'}(z', Fo) /_{Fo=0} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{z'z'}(z', Fo)}{\partial Fo} /_{Fo=0} = 0, \quad z' \geq 0; \quad (28)$$

$$\sigma_{z'z'}(z', Fo) /_{z'=0} = \sigma_{z'z'}(z', Fo) /_{z'=\infty} = 0, \quad Fo > 0; \quad (29)$$

$$\frac{\partial T(z', Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T(z', Fo)}{\partial z'^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 T(z', Fo)}{\partial Fo^2}, \quad z' > 0; \quad Fo > 0; \quad (30)$$

$$T(z', Fo) /_{Fo=0} = 0; \quad \frac{\partial T(z', Fo)}{\partial Fo} /_{Fo=0} = 0; \quad (31)$$

$$T(z', Fo) /_{z'=0} = 1, \quad Fo > 0 \text{ – температурный нагрев}; \quad (32)$$

$$\int_0^{Fo} \frac{\partial T(z', \tau')}{\partial z'} /_{z'=0} \exp\left(-\frac{Fo - \tau'}{c}\right) d\tau' = -q^*, \quad Fo > 0 \text{ – тепловой нагрев}; \quad (33)$$

$$\int_0^{Fo} \frac{\partial T(z', \tau')}{\partial z'} /_{z'=0} \exp\left(-\frac{Fo - \tau'}{c}\right) d\tau' = \beta^2 \text{Bi} [T(z', Fo) /_{z'=0} - 1],$$

$$Fo > 0 \text{ – нагрев средой}; \quad (34)$$

$$|T(z', Fo)| < \infty, \quad z' \geq l, \quad Fo \geq 0. \quad (35)$$

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{T}(z', p) = \int_0^{\infty} \exp(-pFo) T(z', Fo) dFo \quad (36)$$

решение уравнения (30) с учетом (35) сводится к выражениям вида  $\bar{f}(p) \exp(-k\sqrt{(p\beta)^2 + p})$ , где вид зависимости  $\bar{f}(p)$  определяется типом граничного условия (32)...(34).

Используя формулы операционного исчисления, полученные в [1], выпишем аналитические решения всех трех краевых задач нестационарной теплопроводности, рассмотренных в (30)...(35).

Имеем

$$\bar{T}(z', Fo) = \bar{f}(p) \exp(-z'\beta\sqrt{p^2 + p/\beta^2}), \quad (37)$$

где

$$\bar{f}(p) = \begin{cases} \frac{1}{p} \text{ – температурный нагрев;} \\ q^* \frac{\sqrt{\beta^2 p + 1}}{p\sqrt{p}} \text{ – тепловой нагрев;} \\ \text{Bi} \frac{\sqrt{\beta^2 p + 1}}{p(\sqrt{p} + \text{Bi}\sqrt{\beta^2 p + 1})} \text{ – нагрев средой.} \end{cases}$$

Находим из (27)...(29) для  $\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p)$  в случае:

- температурного нагрева

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p) = \frac{1}{p(\beta^2 - 1) + 1} \left\{ \exp(-z' \sqrt{(p\beta)^2 + p}) - \exp(-z'p) \right\}; \quad (38)$$

- теплового нагрева

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p) = q^* \frac{\sqrt{\beta^2 p + 1}}{\sqrt{p(p(\beta^2 - 1) + 1)}} \left\{ \exp(-z' \sqrt{(p\beta)^2 + p}) - \exp(-z'p) \right\}; \quad (39)$$

- нагрева средой

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p) = \text{Bi} \frac{\sqrt{p\beta^2 + 1}}{(\text{Bi} \sqrt{p\beta^2 + 1} + \sqrt{p})(p(\beta^2 - 1) + 1)} \times \left\{ \exp(-z' \sqrt{(p\beta)^2 + p}) - \exp(-z'p) \right\}. \quad (40)$$

Используя основные теоремы операционного исчисления и таблицы изображений [6], получим оригиналы для (38)...(40):

$$\sigma_{z'z'}(z', \text{Fo}) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < \text{Fo} < z'\beta; \\ \sigma_{z'z'}^{(1)}, & \text{если } z'\beta < \text{Fo} < z'; \\ \sigma_{z'z'}^{(1)} - \sigma_{z'z'}^{(2)}, & \text{если } \text{Fo} > z' \end{cases} \quad (41)$$

при  $\beta \in (0, 1)$ ;

$$\sigma_{z'z'}(z', \text{Fo}) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < \text{Fo} < z'; \\ \sigma_{z'z'}^{(2)}, & \text{если } z' < \text{Fo} < z'\beta; \\ \sigma_{z'z'}^{(1)} - \sigma_{z'z'}^{(2)}, & \text{если } \text{Fo} > z'\beta \end{cases} \quad (42)$$

при  $\beta > 1$ , где

$$\sigma_{z'z'}^{(1)} = f(\text{Fo} - z'\beta) \exp\left(-\frac{z'}{2\beta}\right) + \frac{z'}{2\beta} \int_{z'\beta}^{\text{Fo}} f(\text{Fo} - \tau) \exp\left(-\frac{z'}{2\beta}\right) \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{\tau^2 - (z'\beta)^2}}{2\beta^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - (z'\beta)^2}} d\tau, \quad (43)$$

$$\sigma_{z'z'}^{(2)} = f(\text{Fo} - z'), \quad (44)$$

$$f(t) = \frac{1}{\beta^2 - 1} \exp\left(\frac{t}{1 - \beta^2}\right) - \text{в условиях температурного нагрева}; \quad (45)$$



$$f(t) = \frac{q^* \beta}{(\beta^2 - 1)} \int_0^t \left[ \frac{\exp\left(-\frac{\tau}{\beta^2}\right)}{\sqrt{\pi\tau}} + \frac{\exp\left(\frac{\tau}{1-\beta^2}\right)}{\sqrt{\beta(1-\beta^2)}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\tau}{\beta(1-\beta^2)}}\right) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} -$$

в условиях теплового нагрева;

(46)

$$f(t) = \frac{\operatorname{Bi}}{((\operatorname{Bi}\beta)^2 - 1)(\beta^2 - 1)} \left[ \frac{\operatorname{Bi}^2}{\operatorname{Bi}^2 - 1} \times \right.$$

$$\times \left( (1 - \beta^2) \exp\left(\frac{\operatorname{Bi}}{1 - (\operatorname{Bi}\beta)^2} t\right) - (1 - (\operatorname{Bi}\beta)^2) \exp\left(\frac{1}{1 - \beta^2} t\right) \right) -$$

$$- \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[ \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{\operatorname{Bi} \exp\left(\frac{\operatorname{Bi}}{1 - (\operatorname{Bi}\beta)^2} (t-\tau)\right)}{\sqrt{1 - (\operatorname{Bi}\beta)^2}} \operatorname{erf}\left(\operatorname{Bi} \sqrt{\frac{t-\tau}{1 - (\operatorname{Bi}\beta)^2}}\right) \right] \times$$
(47)

$$\times \left[ \frac{\exp\left(-\frac{\tau}{\beta^2}\right)}{\sqrt{\tau}} + \frac{\exp\left(\frac{\tau}{1-\beta^2}\right)}{\beta\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\tau}{(1-\beta^2)\beta^2}}\right) \right] dt \left. \right] - \text{в условиях}$$

нагрева  
средой.

При  $\beta = 0$  (имея в виду классическую феноменологию Фурье) получим в случае:

- температурного нагрева

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p) = \frac{1}{1-p} \left\{ \exp(-z'\sqrt{p}) - \exp(-z'p) \right\}; \quad (48)$$

- теплового нагрева

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p) = \frac{q^*}{\sqrt{p(1-p)}} \left\{ \exp(-z'\sqrt{p}) - \exp(-z'p) \right\}; \quad (49)$$

- нагрева средой

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p) = \frac{\operatorname{Bi}}{(\operatorname{Bi} + \sqrt{p})(1-p)} \left\{ \exp(-z'\sqrt{p}) - \exp(-z'p) \right\}; \quad (50)$$

Используя основные теоремы операционного исчисления и таблицы изображений [6], получим оригиналы для (48)...(50):

$$\sigma_{z'z'} = \begin{cases} \sigma_{z'z'}^{(1)}, & \text{если } 0 < \operatorname{Fo} < z'; \\ \sigma_{z'z'}^{(1)} + \sigma_{z'z'}^{(2)}, & \text{если } \operatorname{Fo} > z', \end{cases} \quad (51)$$

где

$$\sigma_{z'z'}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{\exp\left(-\frac{z'}{\pi}(Fo - \tau)\right)}{\sqrt{Fo - \tau}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} + \exp(\tau) \operatorname{erf}(\sqrt{\tau}) \right] d\tau,$$

$$\sigma_{z'z'}^{(2)} = \exp(Fo - z') \text{ — для температурного нагрева;} \quad (52)$$

$$\sigma_{z'z'}^{(1)} = -\frac{q^*}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \exp\left(-\frac{Fo - \tau - z'^2}{4\tau}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}},$$

$$\sigma_{z'z'}^{(2)} = -\frac{q^*}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \exp(Fo - z') \frac{d\tau}{\sqrt{Fo - \tau}} \text{ — для теплового нагрева;} \quad (53)$$

$$\sigma_{z'z'}^{(i)} = \int_0^{Fo} f_1(Fo - \tau) f_2(\tau) d\tau,$$

$$f_1(t) = \int_0^{Fo} \exp\left(-\frac{z'^2}{4(t - \tau)}\right) \left[ -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \exp(t) \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(Fo - \tau)}} \text{ при } i = 1,$$

$$f_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \exp(t) \operatorname{erf}(\sqrt{t})$$

и

$$f_1(t) = \exp(t - z'),$$

$$f_2(t) = \operatorname{Bi} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \operatorname{Bi} \exp(\operatorname{Bi}^2 t) \operatorname{erfc}(\operatorname{Bi} \sqrt{t}) \right] \text{ при } i = 2 \text{ — для нагрева средой.} \quad (54)$$

Остальные компоненты тензора напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{y'y'} = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{z'z'} - \frac{E\alpha_p T(z', Fo)}{(1 - \nu)ST_0}; \quad \sigma_{x'z'} = \sigma_{x'y'} = \sigma_{y'z'} = 0. \quad (55)$$

**Физический анализ решений.** Как видно из выражений (41), (42), напряжение  $\sigma_{z'z'}(z', Fo)$  в фиксированной точке полупространства возникает спустя время  $Fo = z'\beta$ , если  $\nu_p < \nu_i$ , или  $Fo = z'$ , если  $\nu_p > \nu_i$ , после начала воздействия источника теплоты на границу полупространства. Но в отличие от классической феноменологии Фурье соотношения (41), (42) показывают наличие двух скачков напряжения: один — на фронте тепловой, другой — на фронте упругой волны, идущие соответственно со скоростями  $\nu_i$  и  $\nu_p$ .

На рис. 1...3 приведены графики зависимости динамического температурного напряжения от безразмерного времени при фиксированном значении координаты  $z' = 2$ . На этих рисунках, в частности, приведены результаты при  $\beta = 3,4$ , что соответствует стали;  $\beta = 1,84$  — алюминию;  $\beta = 0,6$  — кристаллу. Кривые при  $\beta = 0$  соответствуют случаю, когда скорость распространения теплоты бесконечно велика (классическая феноменология Фурье). Числовые расчеты проведены по формулам (51)–(54).

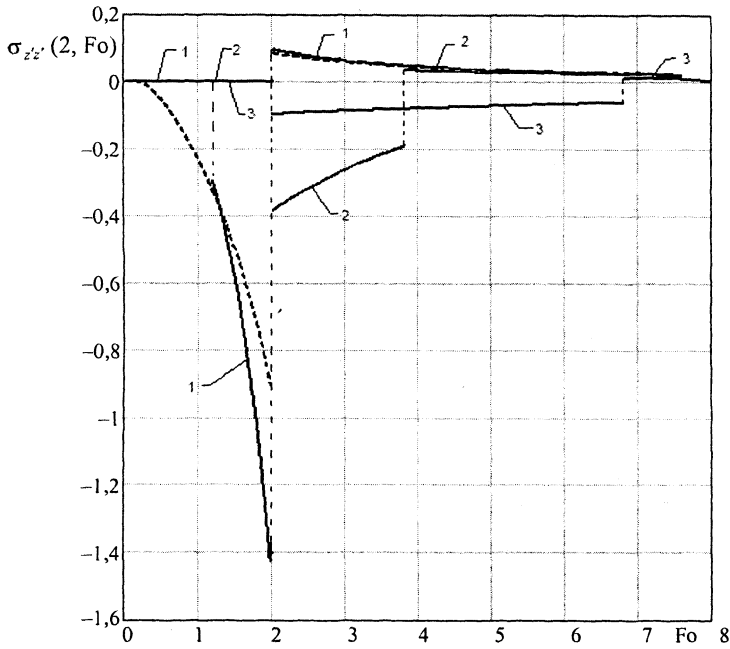


Рис. 1. Зависимость безразмерного напряжения  $\sigma_{z'z'}$  от времени  $Fo$  в сечении  $z' = 2$  при температурном нагреве: .... -  $\beta = 0$ ; 1 -  $\beta = 0,6$  (кристалл); 2 - 1,86 (алюминий); 3 - 3,4 (сталь)

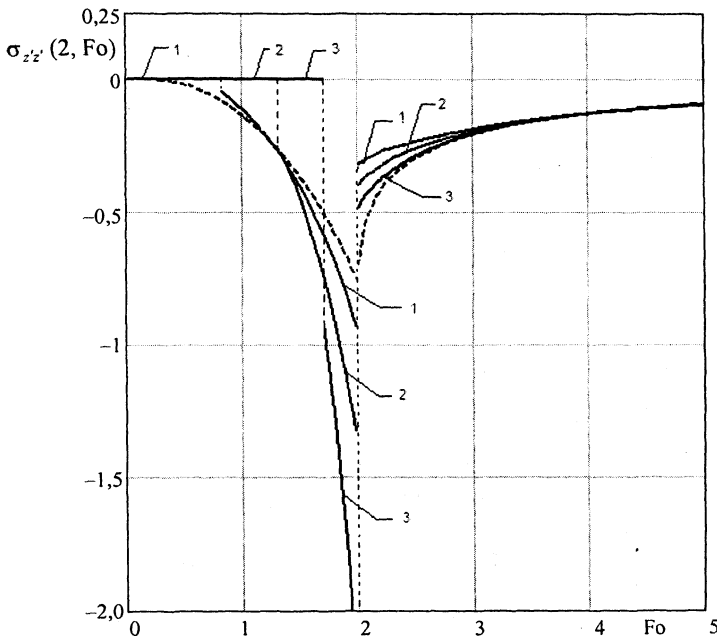


Рис. 2. Зависимость безразмерного напряжения  $\sigma_{z'z'}$  от времени  $Fo$  в сечении  $z' = 2$  при  $q^* = 1$  при тепловом нагреве: .... -  $\beta = 0$ ; 1 -  $\beta = 0,4$  (кристалл); 2 - 0,6 (алюминий); 3 - 0,8 (сталь)

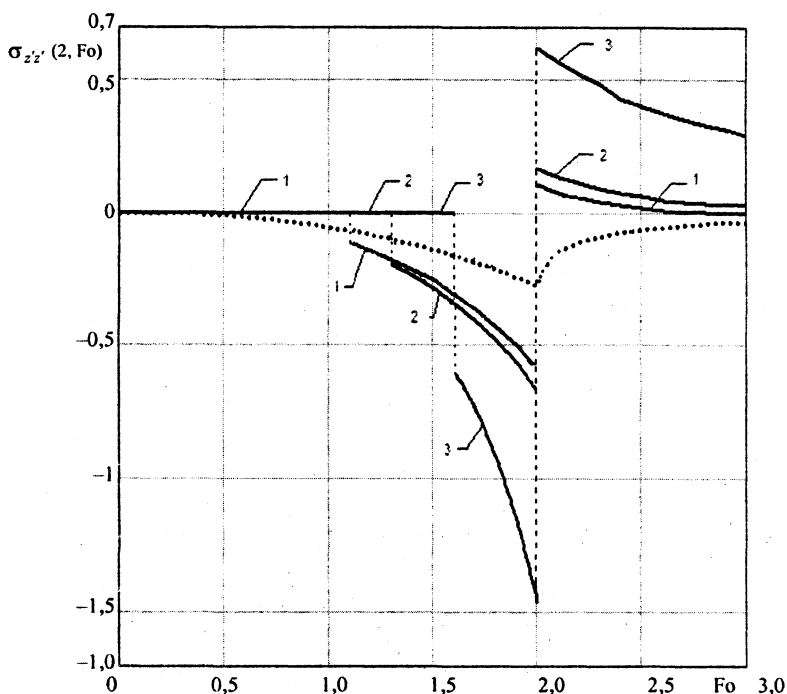


Рис. 3. Зависимость безразмерного напряжения  $\sigma_{z'z'}$  от времени  $Fo$  в сечении  $z' = 2$  при  $Bi = 0,5$  при нагреве среды: .... —  $\beta = 0$ ; 1 — 0,8; 2 — 0,6; 3 — 0,54

Из графиков видно, что учет скорости распространения теплоты приводит к существенному изменению динамических температурных напряжений. Возьмем произвольную точку внутри упругого полупространства. В случае, когда  $\beta > 1$  ( $v_p > v_t$ ), напряжения в ней равны нулю. В момент времени  $Fo = z'$  к этой точке подходит продольная упругая волна напряжения, фронт которой движется со скоростью  $v_p$ . В рассматриваемой точке возникает скачком сжимающее напряжение, которое дальше уменьшается. В момент времени  $Fo = z'\beta$  к этой точке подходит тепловая волна, фронт которой движется со скоростью  $v_t$ . В момент прохождения тепловой волны напряжение, изменяясь скачком, становится растягивающим, а дальше асимптотически стремится к нулю.

В случае, когда  $\beta < 1$  ( $v_p > v_t$ ), к рассматриваемой точке в момент времени  $Fo = z'\beta$  приходит тепловая волна, что вызывает скачкообразное возникновение сжимающего напряжения, которое возрастает. В момент времени  $Fo = z'$  подошедшая к рассматриваемой точке продольная упругая волна вызывает скачкообразное изменение напряжения, которое становится растягивающим. Далее напряжение уменьшается до нуля.

**Расчет скачков на фронте термоупругой волны.** Представляет интерес получить расчетные инженерные формулы скачка напряжений  $\sigma_{z'z'}$  на фронте термоупругой волны по методу, описанному в [7], в зависимости от характера нагрева поверхности полупространства.

Величина скачка для случая температурного нагрева определяется с помощью (38)

$$|\Delta| = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{1}{|p(\beta^2 - 1) + 1|} = \frac{1}{|\beta^2 - 1|}; \quad (56)$$

• для случая теплового нагрева – с помощью (39)

$$|\Delta| = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{q^* \sqrt{\beta^2 p + 1}}{\sqrt{p} |p(\beta^2 - 1) + 1|} = \frac{q^* \beta}{|\beta^2 - 1|}; \quad (57)$$

• для случая нагрева средой – с помощью (40)

$$|\Delta| = \lim_{p \rightarrow \infty} p \text{Bi} \frac{\sqrt{\beta^2 p + 1}}{(\text{Bi} \sqrt{\beta^2 p + 1} + \sqrt{p}) |(\beta^2 - 1)p + 1|} = \frac{\text{Bi} \beta}{|\beta^2 - 1| (\text{Bi} \beta + 1)}. \quad (58)$$

Полученные выражения (56)...(58) дают возможность качественно и количественно оценить степень опасности теплового воздействия на упругий материал. Прежде всего, из (56)...(58) следует, что величина скачка напряжений определяется условиями внешнего нагрева, тепловыми и упругими свойствами материала.

На рис. 4 представлены кривые изменения  $\sigma_{z'z'}(z', \text{Fo})$  в сечении  $z' = 2$ ;  $q^* = 1$ ;  $\text{Bi} = 0,5$ , позволяющие провести сравнительный анализ различных режимов нагружения: температурного (32), теплового (33) и средой (34). Видно, что по величине возникающих в области  $0 > z' > 2$ ,  $\text{Fo} > 0$  напряжений (и деформаций) наиболее опасен случай температурного нагрева.

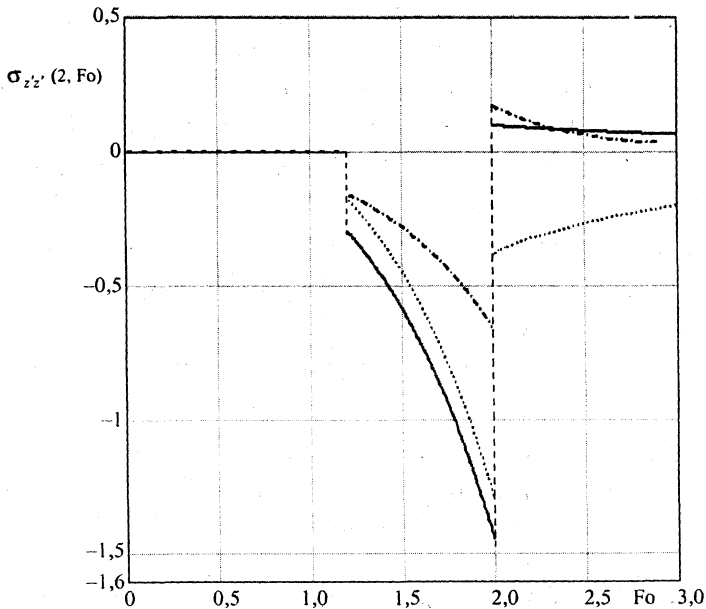


Рис. 4. Зависимость безразмерного напряжения  $\sigma_{z'z'}$  от времени  $\text{Fo}$  в сечении  $z' = 2$  при  $q^* = 1$ ;  $\text{Bi} = 0,5$ ;  $\beta = 0,6$ : ——— температурный нагрев; ..... — тепловой нагрев; —•—•— нагрев средой

Для задач 2-го (тепловой нагрев) и 3-го (тепловое взаимодействие поверхности полупространства с окружающей средой) типов из (57), (58) следует, что при учете конечной скорости распространения теплоты в материале при тепловом ударе будут иметь место скачки напряжения, в то время как в классическом варианте ( $\beta = 0$ ) скачков напряжения не наблюдается.

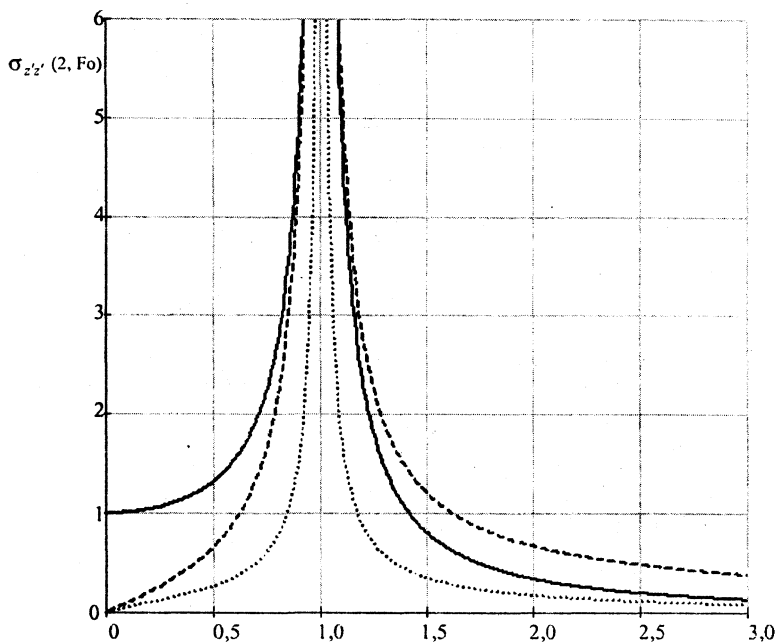


Рис. 5. Анализ скачков напряжения в зависимости от параметра  $\beta = \frac{v_p}{v_t}$ :  
 ——— температурный нагрев; ----- тепловой нагрев; ..... — нагрев средой

Рис. 5 позволяет наглядно сравнить величины скачков напряжения при учете конечной скорости распространения теплоты в материале и в классическом варианте (считая скорость распространения теплоты в материале бесконечной). Кроме того, при любом из рассмотренных выше способов нагрева величина скачка тем больше, чем меньше разность скоростей распространения звука и теплоты в среде и в случае равенства скоростей наступает явление резонанса, следствием которого является скачок бесконечно большой величины, что создает опасность разрушения материала.

## ВЫВОДЫ

Рассмотрена проблема теплового удара в терминах динамической термоупругости с учетом конечной скорости распространения теплоты в материале. Получены формулы для расчета напряжений, возникающих в материале в результате резкого теплового нагрева при различных видах теплового нагружения (температурный, тепловой или нагрев средой), а также

формулы, позволяющие непосредственно вычислить величину скачка напряжений.

Направление дальнейшего обобщения гиперболической модели нестационарного теплопереноса будет заключаться в переходе к областям с движущимися во времени границами. Проблемы, требующие разрешения указанной задачи, возникают во многих областях науки и техники, описанных в [6], [8] и [9].

#### ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов Э. М., Ремизова О. И. Новые интегральные соотношения в теории нестационарного теплопереноса на основе уравнения гиперболического типа // Энергетика (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2001. – № 6. – С. 44–56.

2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.

3. Баумейстер К., Хамилл Д. Гиперболическое уравнение теплопроводности: Решение задачи о полубесконечном теле // Теплопередача. – 1969. – № 4. – С. 112–119.

4. Карташов Э. М. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Итоги науки и техники. – Сер.: Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ, 1991. – Т. 22. – С. 55–127.

5. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

6. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высш. шк., 1965.

7. Карташов Э. М., Бартнев Г. М. Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии // Итоги науки и техники. – Сер.: Химия и технология высокомолекулярных соединений. – М., 1988. – Т. 25.

8. Карташов Э. М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущейся границей // ИФЖ. – 2001. – № 2, Т. 74. – С. 171–195.

9. Стальной слиток / Ю. А. Самойлович, В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова и др. – Мн.: Бел. наука, 2000. – Т. 1. – 584 с.