Представлена кафедрой машин
и технологии литейного производства Поступила 4.11.2004
УДК 518:517.5:536.2

К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КРУГА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА

Докт. физ.-мат. наук МЕЛЕШКО И. Н.

Белорусский национальный технический университет

Рассматривается вторая основная задача теории теплопроводности (задача Неймана) для уравнения Лапласа в единичном круге с центром в начале координат:

$$\Delta T = 0, \qquad r < 1\ ; \tag{1}$$

$$\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=1} = \alpha T_0 f(\varphi), \ -\pi \le \varphi \le \pi, \tag{2}$$

где λ – коэффициент теплопроводности; $T = T(r, \varphi)$ – температура; α – коэффициент теплоотдачи; T_0 – характерная температура, а $f(\varphi)$ – известная функция. Направление нормали совпадает с направлением возрастания r.

В [1] с помощью методов теории аналитических функций и специальных формул для интеграла Шварца получено приближенное представление комплексного теплового потенциала задачи (1), (2), позволяющее определять приближенно все основные элементы теплового потока.

Основной физической величиной, характеризующей процесс теплопроводности, является температура. В данном случае с помощью интеграла Дини отдельно для функции температуры конструируется ее приближенное представление полилогарифмами.

Полученная в работе приближенная формула сравнительно проста, устойчива и позволяет оценивать погрешности вычислений.

1. **Точное представление решения краевой задачи (1)–(2) интегралом Дини.** Представим граничное условие (2) в виде

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=1} = \beta T_0 f(\varphi), \ -\pi \le \varphi \le \pi,$$

где $\beta = \left.\frac{\alpha r}{\lambda}\right|_{r=1}$ – коэффициент Био, и воспользуемся представлением решения задачи Неймана для круга (см., например, [2, с. 229–232; 3, с. 598–599]) интегралом Дини. Тогда точное решение краевой задачи (1), (2) запишется в виде

$$T(r,\varphi) = -T_0 \frac{\beta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln|t - z| d\tau + C, \qquad t = e^{i\tau};\ z = re^{i\varphi}, \tag{3}$$

где C – действительная произвольная постоянная.

Примечание. Если известно значение температуры в некоторой точке $|z^*| \le 1$, то из (3) следует, что

$$C = T(z^*) + T_0 \frac{\beta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln|t - z^*| d\tau .$$

2. **Приближенное решение краевой задачи (1), (2).** Приближенное решение краевой задачи будем конструировать на основе формулы (3). Вначале получим приближенную формулу для интеграла Дини в правой части формулы (3)

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln|t-z|d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln\frac{2}{|t-z|} - \ln 2\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)d\tau . \qquad (4)$$

Зададим на отрезке $[-\pi; \pi]$ систему точек

$$\varphi_k = kh, \quad k = -n, ..., -1, 0, 1, ..., n, \quad h = \frac{2\pi}{2n+1}$$

и приблизим плотность $f(\varphi)$ интеграла Дини на этом отрезке по формуле

$$f(\varphi) \approx \tilde{f}(\varphi) = \sum_{-n}^{n} \Theta_k(\varphi) f(\varphi_k), \qquad (5)$$

где

$$\Theta_k(\varphi) = \begin{cases} 1, \ \varphi \in \left[\varphi_k - \frac{h}{2}, \ \varphi_k + \frac{h}{2}\right]; \\ 0, \ \varphi \overline{\in} \left[\varphi_k - \frac{h}{2}, \ \varphi_k + \frac{h}{2}\right]. \end{cases}$$

Тогда, подставляя в представление (3) интеграла Дини (4) вместо плотности ее приближение по формуле (5), получим приближенную формулу

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln|t-z|d\tau \approx \sum_{-n}^{n} A_k(r,\varphi) f(\varphi_k) - \frac{h\ln 2}{\pi}\sum_{-n}^{n} f(\varphi_k), \qquad (6)$$

где коэффициенты

$$A_k(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \ln\frac{2}{|t-z|} d\tau \ . \qquad (7)$$

Т е о р е м а 1. *Коэффициенты приближенной формулы (6)* $A_k(r,\varphi)$ *неотрицательны, а для их вычисления имеет место формула*

$$A_k(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\left[h\ln 2 + \mathrm{Im}\left(L^2\left(ze^{-i\left(\varphi_k - \frac{h}{2}\right)}\right) - L^2\left(ze^{-i\left(\varphi_k + \frac{h}{2}\right)}\right)\right)\right], \qquad (8)$$

где

$$L^2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \ \textit{(дилогарифм Эйлера).} \qquad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\ln\frac{2}{|t-z|}>0,\ r\neq 1$, то из представления (7) для коэффициентов $A_k(r,\ \varphi)$ следует, что все они неотрицательны для всех r и $\varphi\,(r<1;\ -\pi\leq\varphi\leq\pi)$.

Далее

$$A_k(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}\ln 2d\tau+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}\ln\frac{1}{|t-z|}d\tau=\frac{h\ln 2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cos k(\tau-\varphi)\right)d\tau=\frac{h\ln 2}{\pi}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{r^k}{k^2}\sin k(\tau-\varphi)\Bigg|_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}\right)=\frac{h\ln 2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{r^k\sin\left(\varphi-\varphi_k+\frac{h}{2}\right)}{k^2}-\frac{r^k\sin\left(\varphi-\varphi_k+\frac{h}{2}\right)}{k^2}\right]=$$

$$=\frac{h\ln 2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left[\sum_{1}^{\infty}\frac{z^k e^{-i\left(\varphi_k-\frac{h}{2}\right)}}{k^2}-\sum_{1}^{\infty}\frac{z^k e^{-i\left(\varphi_k+\frac{h}{2}\right)}}{k^2}\right].$$

Последнее равенство приводит к формуле (8).

Примечание. Ряды

$$L^s(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^s}$$

определяют полилогарифмы порядка s-специальные функции, изученные в [4] (также в [1]), где с помощью полилогарифмов найдены новые формулы для приближенного вычисления интегралов типа Коши и решения некоторых краевых задач математической физики.

Полилогарифм второго порядка (9) принято называть дилогарифмом Эйлера [5].

Заменив интеграл Дини в правой части формулы (3) его приближением по формуле (6), найдем приближенное решение краевой задачи

$$T(r,\varphi)\approx\tilde{T}(r,\varphi)=T_0\beta\left[\frac{h\ln 2}{\pi}\sum_{-n}^{n}f(\varphi_k)-\sum_{-n}^{n}A_k(r,\varphi)f(\varphi_k)\right]+C. \qquad (10)$$

Теперь получим неравенства для оценки погрешности приближенной формулы (10).

Т е о р е м а 2. *Пусть функция* $f(\ddot{\ })$ *в граничном условии (2) непрерывна на отрезке* $[-\pi;\pi]$, *тогда имеет место равномерная по* r *и* $\varphi\,(r\leq 1,\ -\pi\leq\varphi\leq\pi)$ *следующая оценка погрешности приближенной формулы (10):*

$$\left|T(r,\ \varphi)-\tilde{T}(r,\ \varphi)\right|\leq 4T_0\beta\omega(f;\ h)\ln 2, \qquad (11)$$

где $\omega(f;h)$ – модуль непрерывности функции $f(\varphi)$.

Если же $f(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то

$$\left|T(r,\varphi)-\tilde{T}(r,\varphi)\right| \le 2M_1T_0\beta h\ln 2,\quad r\le 1;\ -\pi\le\varphi\le\pi;\ M_1=\max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}\left|f'(x)\right|. \quad (12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о**.** Очевидно, что

$$T(r,\varphi)-\tilde{T}(r,\varphi)=\frac{T_0\beta}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\tau)-\tilde{f}(\tau)\right]\ln\frac{2}{|t-z|}d\tau-\ln 2\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\tau)-\tilde{f}(\tau)\right]d\tau\right],$$

где функция $\tilde{f}(\varphi)$ определена формулой (5). В силу положительности $\ln\frac{2}{|t-z|}$ $(z=re^{i\varphi};\ t=e^{i\varphi};\ r\le 1)$

$$\left|T(r,\varphi)-\tilde{T}(r,\varphi)\right|\le\frac{T_0\beta}{\pi}\max_{\varphi\in[-\pi;\pi]}\left|f(\varphi)-\tilde{f}(\varphi)\right|\left[\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{2}{|t-z|}d\tau+\ln 2\int_{-\pi}^{\pi}d\tau\right].$$

Далее, так как

$$\ln\frac{2}{|t-z|}=-\mathrm{Re}\ln\left(1-\frac{t}{z}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{t}\right)^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k\cos k(\tau-\varphi)}{k},$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1}{|t-z|}d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos k(\tau-\varphi)d\tau=0.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\left|T(r,\varphi)-\tilde{T}(r,\varphi)\right|\le 4T_0\beta\max_{\varphi\in[-\pi;\pi]}\left|f(\varphi)-\tilde{f}(\varphi)\right|\ln 2. \quad (13)$$

Если функция $f(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$, то

$$\left|f(\varphi)-\tilde{f}(\varphi)\right|\le\omega(f;h),\quad -\pi\le\varphi\le\pi. \quad (14)$$

Если же $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то легко установить с помощью формулы Тейлора, что

$$\left|f(\varphi)-\tilde{f}(\varphi)\right|\le\frac{M_1}{2}h,\quad -\pi\le\varphi\le\pi. \quad (15)$$

Из неравенств (13)–(15) следуют неравенства (11), (12).

3. **Пример.** В качестве примера рассмотрим стационарную тепловую задачу для единичного круга с граничным условием на окружности

$$\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=1}=\alpha T_0(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi),\quad -\pi\le\varphi\le\pi.$$

В этом случае удается получить точное решение задачи

$$T(r,\varphi)=T_0\beta\,\mathrm{Im}\left[\left(z-\frac{1}{z}\right)\ln(1+z)\right], \quad (16)$$

где $\ln(1+z)$ – ветвь логарифмической функции, принимающая на промежутке $(-1;1)$ действительной оси действительные значения.

Результаты вычислений по точной (16) и приближенной (10) формулам при $n = 20$; $n = 50$ и $n = 100$ приводим в табл. 1. Для определенности положено $T_0 = 1$; $\beta = 1$.

Таблица 1

Изменение температуры в направлении возрастания *r* по точной и приближенной формулам

r	$T\left(r;\ \frac{\pi}{4}\right)$	$\tilde{T}_{20}\left(r;\ \frac{\pi}{4}\right)$	$\tilde{T}_{50}\left(r;\ \frac{\pi}{4}\right)$	$\tilde{T}_{100}\left(r;\ \frac{\pi}{4}\right)$
0,1	0,041846	0,041666	0,041816	0,041838
0,3	0,161401	0,160827	0,161306	0,161377
0,5	0,322505	0,321498	0,322340	0,322464
0,7	0,518788	0,517311	0,518545	0,518727
0,9	0,745141	0,743161	0,744816	0,745059

Численный эксперимент подтверждает эффективность и устойчивость приближенной формулы (10).

ВЫВОД

Получено приближенное представление полилогарифмами решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге. Равномерные оценки погрешности приближенной формулы позволяют проводить вычисления с заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелешко И. Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения. – Мн.: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. – 197 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.; Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
4. Пыхтеев Г. Н., Мелешко И. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления. – Мн.: Изд-во БГУ, 1976. – 67 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.

Представлена кафедрой
высшей математики № 2

Поступила 20.04.2005