УДК 669.27:519

ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ СЛИТКА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПО ТЕМПЕРАТУРЕ

Докт. физ.-мат. наук, проф. ЧИЧКО А. Н., асп. БОРОЗДИН А. С.

Белорусский национальный технический университет

Задача расчета напряжений в слитке, движущемся в многозонном температурном поле печи, является одной из важнейших научно-практических задач энергосбережения в черной металлургии. Теснейшим образом она связана с уровнем математического моделирования тепловых процессов, протекающих во всем объеме слитка. Многочисленные постановки задач в одно- и двумерном случаях, ориентированные на уравнение теплопроводности, не дают полной пространственной картины изменения температур и напряжений во времени. В то же время расчеты напряжений требуют использования уравнений равновесия совместно с уравнением теплопроводности. Причем необходимо использование динамических температурных условий. К сожалению, общепризнанных устоявшихся алгоритмов решения таких задач все еще нет.

Цель работы – разработка метода, алгоритмов и программного обеспечения для трехмерного моделирования термоупругих характеристик пространственного объекта произвольной конфигурации с динамическими граничными условиями и применение разработанных моделей и программного обеспечения для расчета температурных напряжений, возникающих в объекте типа «слиток» при ступенчатом нагреве.

Математическая модель пространственной задачи расчета температурных напряжений основана на совместном решении (использовании) трех систем уравнений из теории термоупругости [1]:

1) дифференциального уравнения равновесия в точке твердого тела:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + X = 0; \\ \dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} + Y = 0; \\ \dfrac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} – нормальные напряжения по осям x, y и z соответственно; σ_{xy}, σ_{yz}, σ_{zx} – касательные напряжения по осям x, y и z соответственно; X, Y, Z – компоненты объемных сил в направлениях x, y, z соответственно;

2) второй формы обобщенного закона Гука, учитывающего влияние температурных деформаций на напряжения:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{xx} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T; \\ \sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{yy} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T; \\ \sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{zz} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T; \\ \sigma_{xy} = 2\mu\gamma_{xy};\ \ \sigma_{yz} = 2\mu\gamma_{yz};\ \ \sigma_{zx} = 2\mu\gamma_{zx}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – коэффициенты Ламе; ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} – нормальные деформации; γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} – касательные деформации; $e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ – объемная деформация; α – коэффициент линейного расширения материала; ν – коэффициент Пуассона; *E* – модуль Юнга;

3) уравнения Коши, определяющего соотношения между деформациями и перемещениями:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{cases} \qquad (3)$$

где *u*, *v*, *w* – компоненты вектора перемещения по осям *x*, *y* и *z* соответственно.

Расчет температурного поля нагреваемого объекта проводился на основе трехмерного уравнения теплопроводности Фурье

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda(T)}{c(T)\rho(T)} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \quad x, y, z, \tau \in \Omega, \qquad (4)$$

где $c(T)$ – функция теплоемкости, Дж/(кг · К); $\rho(T)$ – функция плотности, кг/м^3; $\lambda(T)$ – функция теплопроводности, Вт/(м · К), Ω ($0 \le x < X$; $0 \le y < Y$; $0 \le z < Z$; $0 \le \tau < t$) – пространственно-временная область расчета.

Для задания краевых условий, учитывающих взаимодействие между нагревающей средой и поверхностью объекта, перемещающегося с постоянной скоростью *v* в печи с различными тепловыми зонами, использовалась следующая система уравнений [2]:

$$T(x, y, z, \tau) = \begin{cases} T_0, \tau = 0; \\ T_1, 0 < \tau \le \frac{L_1}{\upsilon}; \\ T_2, \frac{L_1}{v} < \tau \le \frac{L_1 + L_2}{v}; \\ \dots \\ T_n, \frac{\sum_{k=1}^{n-1} L_k}{v} < \tau \le \frac{\sum_{k=1}^{n} L_k}{v}, \end{cases} \qquad (5)$$

где T_0 – начальная температура заготовки; n – число тепловых зон в рабочем пространстве печи; T_i (i = 1, 2, … n) – значение температуры в i-й тепловой зоне, °C; L_i (i = 1, 2, … n) – протяженность i-й тепловой зоны, м; v – скорость перемещения заготовки вдоль рабочего пространства печи, м/с.

В представленной математической модели введен ряд упрощающих допущений:

- температура в каждой зоне фиксирована, т. е. каждая точка тепловой зоны имеет температуру, соответствующую данной зоне;
- тело считается изотропным – температурное расширение одинаково во всех направлениях;
- деформации, возникающие в теле, не влияют на его температурное поле;
- деформации, возникающие вследствие температурных напряжений, малы и материал везде ведет себя как упругий.

Компьютерная модель задачи основана на совместном применении теории клеточных автоматов и конечно-разностных методов. Следует отметить, что конечно-разностная аппроксимация дифференциальных уравнений очень хорошо сочетается с парадигмой клеточного автомата. Далее более подробно рассмотрим использование метода конечных разностей для расчетов напряженно-деформированного состояния слитка при моделировании процессов ступенчатого нагрева на основе математической модели (1)…(5).

Для определения температурного поля воспользуемся разностной аппроксимацией (6) уравнения (1), имеющей погрешность аппроксимации $O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + \Delta\tau^2)$:

$$\frac{T^{n+1} + T^n}{\Delta\tau} = \frac{1}{2}(\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z)(T^{n+1} + T^n)\,, \qquad (6)$$

где разностные операторы имеют вид:

$$\Lambda_x T^n = a(T)(T^n_{x+1,y,z} - 2T^n_{x,y,z} + T^n_{x-1,y,z}) \big/ \Delta x^2\ ;$$
$$\Lambda_y T^n = a(T)(T^n_{x,y+1,z} - 2T^n_{x,y,z} + T^n_{x,y-1,z}) \big/ \Delta y^2\ ;$$
$$\Lambda_z T^n = a(T)(T^n_{x,y,z+1} - 2T^n_{x,y,z} + T^n_{x,y,z-1}) \big/ \Delta z^2\ .$$

Величина функции температуропроводности может быть вычислена по следующей формуле:

$$a(T) = \frac{\lambda(T)}{c(T)\rho(T)}\,.$$

Уравнение (6) является симметричной неявной разностной схемой, решение которой проводилось по экономичному локально-одномерному методу [3].

Для решения задачи термоупругости при известном температурном поле была выбрана постановка задачи в терминах перемещений. Ниже представлено дифференциальное уравнение равновесия для прямоугольной системы координат, записанное через перемещения (уравнение Ламе):

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial e}{\partial x}+\mu\nabla^2 u-(3\lambda+2\mu)\alpha\dfrac{\partial T}{\partial x}+X=0; \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial e}{\partial y}+\mu\nabla^2 v-(3\lambda+2\mu)\alpha\dfrac{\partial T}{\partial y}+Y=0; \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial e}{\partial z}+\mu\nabla^2 w-(3\lambda+2\mu)\alpha\dfrac{\partial T}{\partial z}+Z=0, \end{cases} \qquad (7)$$

где $e=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}$ – объемная деформация.

Конечно-разностная аппроксимация системы (7) решалась при помощи попеременно треугольного метода [4]. Численное решение данного уравнения требует задания компонент вектора перемещения для граничной поверхности моделируемого объекта. В целях вычисления граничных условий расчета перемещений для объектов типа «слиток» с известным распределением температурного поля был разработан алгоритм, использующий парадигму клеточного автомата.

Далее на основе вычисленных значений компонент вектора перемещений проводилось определение деформаций. Имея компоненты вектора перемещения для всех точек тела и используя разностные аппроксимации (8) для уравнений системы (5), производим расчет нормальных и касательных деформаций:

$$\begin{cases} \varepsilon_x=\dfrac{u_{x+1}-u_{x-1}}{2\Delta x}; \\ \varepsilon_y=\dfrac{v_{y+1}-v_{y-1}}{2\Delta y}; \\ \varepsilon_z=\dfrac{w_{z+1}-w_{z-1}}{2\Delta z}; \\ \gamma_{xy}=\dfrac{v_{x+1}-v_{x-1}}{2\Delta x}+\dfrac{u_{y+1}-u_{y-1}}{2\Delta y}; \\ \gamma_{yz}=\dfrac{w_{y+1}-w_{y-1}}{2\Delta y}+\dfrac{v_{z+1}-v_{z-1}}{2\Delta z}; \\ \gamma_{zx}=\dfrac{u_{z+1}-u_{z-1}}{2\Delta z}+\dfrac{w_{x+1}-w_{x-1}}{2\Delta x}. \end{cases} \qquad (8)$$

Завершает итерацию метода расчет напряжений, который производится подстановкой рассчитанных значений деформации в систему (2).

На рис. 1 представлена блок-схема описанной выше итерации расчета. Для проведения расчетов на ЭВМ данная вычислительная схема была реализована в программе моделирования теплофизических процессов на клеточном автомате. Программное обеспечение написано на языке Object Pascal в среде визуального программирования Delphi 6.0 для 32 разрядных версий операционной системы Microsoft Windows.

При помощи разработанной программы был смоделирован процесс нагрева фрагмента слитка размерами 250×250×300 мм в шаговой печи,

имеющей шесть температурных зон. Материалом слитка была выбрана сталь
40Х с динамическими теплофизическими характеристиками, являющимися функциями от температуры. В табл. 1 приведены значения плотности, теплоемкости, теплопроводности, линейного коэффициента расширения и модуля упругости, использовавшихся в расчетах. Начальная температура слитка в моделируемом процессе равна T_0 = 20 °С.

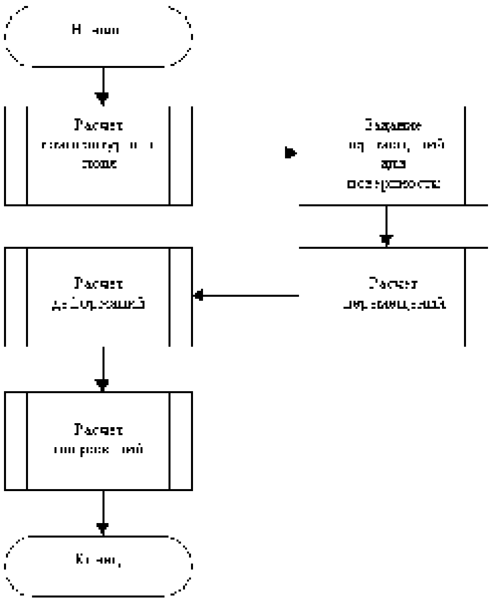


Рис. 1. Упрощенная блок-схема расчета термонапряженного состояния тела в условиях нестационарного температурного поля

Таблица 1

Теплофизические характеристики стали 40Х

	Температура *t*, ˚С								
	0	100	200	300	400	500	600	700	800
ρ, кг/м^3	7820	7800	7770	7740	7700	7670	7630	7590	7610
c, Дж/(кг·˚С)	496	508	529	563	592	622	634	664	684
λ, Вт/(м·˚С)	41,0	40,0	38,0	36,0	34,0	33,0	31,0	30,0	27,0
α, 10^{-6} 1/˚С	11,8	12,2	13,2	13,7	14,1	14,6	14,8	12,0	12,0
E, 10^9 Н/м^2	214	211	206	203	185	176	164	143	132

Пространство печи принималось заполненным воздухом со следующими теплофизическими характеристиками: λ = 0,034 Вт/(м·К); *с* = 1009 Дж/(кг · К); ρ = 1,29 кг/м^3 и температурой, зависящей от конкретной тепловой зоны. На рис. 2 представлены схематические изображения печи и слитка. Вычислительный эксперимент проводился для двух режимов, обеспечивающих плавный нагрев слитка. На рис. 3 представлены значения температур тепловых зон для данных режимов. Моделирование проводилось для первых 4400 с процесса нагрева. За данный временной промежуток при указанной скорости движения заготовки слиток проходит вдоль всего рабочего пространства печи. В начальный момент времени моделирования (рис. 2а) слиток располагался в начале первой зоны.

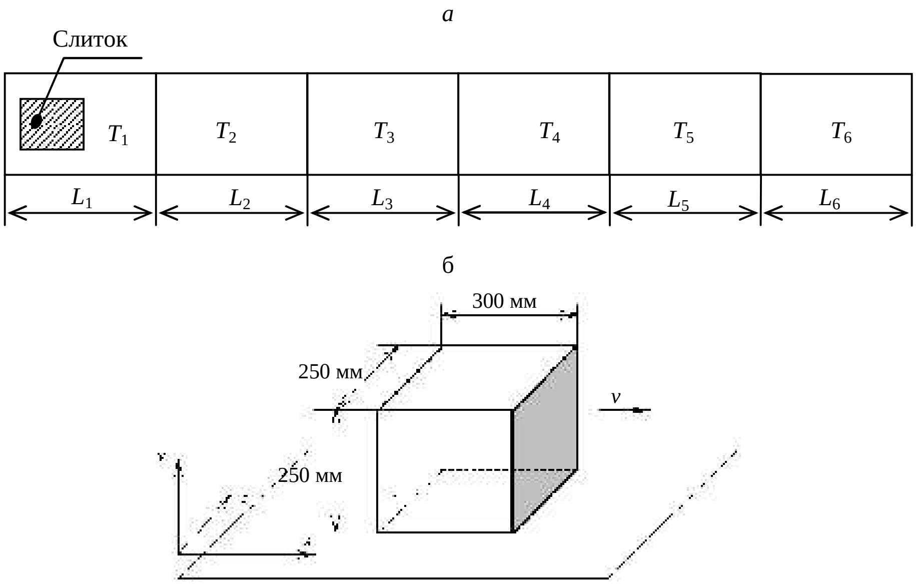


Рис. 2. Схема рабочего пространства печи и слитка

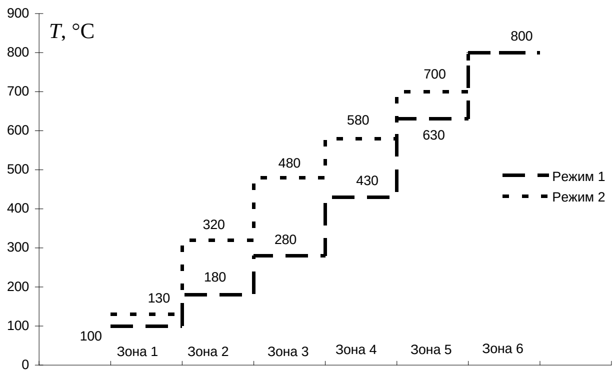
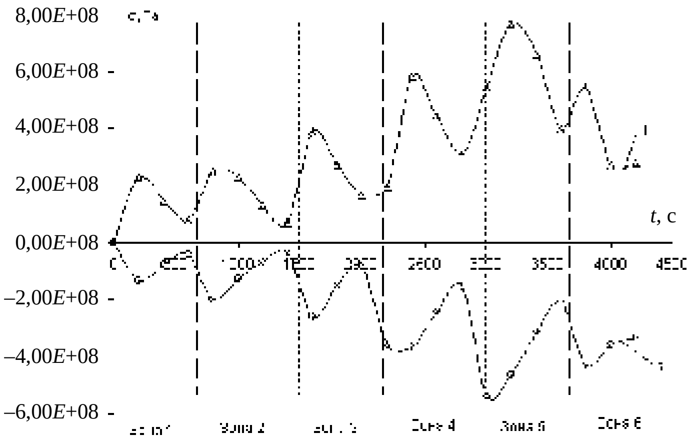


Рис. 3. Рассчитываемые тепловые режимы ступенчатого нагрева слитков в печи

Ниже представлены результаты проведенных вычислительных экспериментов для расчета сжимающих и растягивающих напряжений в движущемся слитке. На рис. 4 показаны динамические кривые температурных напряжений, рассчитанные при проведении вычислительного эксперимента. Зависимости строились по следующему алгоритму. В процессе моделирования на каждой итерации после выполнения расчета напряжений слиток «просматривался» в поисках максимального и минимального значений напряжения. Полученные значения заносились на диаграммы, где вертикальными линиями отмечены моменты времени, в которые слиток переходит с одной зоны в другую. Пунктирными линиями обозначены моменты времени, когда правая граница слитка входит в очередную тепловую зону, штриховыми линиями – моменты времени, когда левая граница слитка переходит в очередную тепловую зону. По представленным зависимостям напряжений видно, что при нагреве слитка по второму режиму (рис. 4б) наблюдаются меньшие по абсолютной величине «скачки» температурных напряжений, которые в случае реального процесса могут спровоцировать появление трещин в нагреваемом слитке, что может стать причиной большого количества брака.

а



б

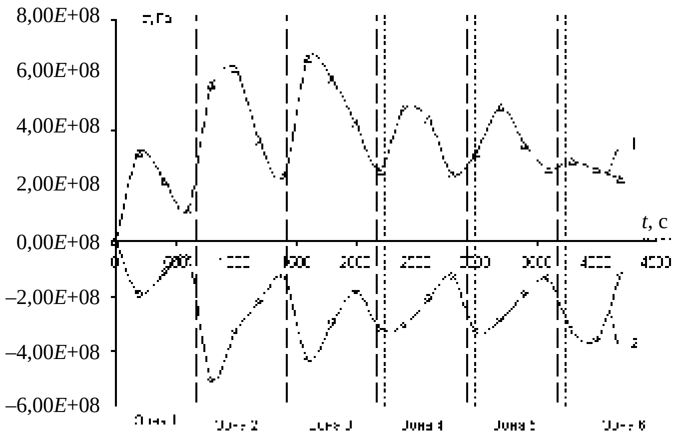


Рис. 4. Изменения растягивающих (1) и сжимающих (2) напряжений от времени перемещения слитка в печи для различных режимов нагрева: а – нагрев слитка по режиму 1; б – по режиму 2

В Ы В О Д

Представлена математическая модель, основанная на совместном использовании уравнений теории упругости и нестационарной теплопроводности. Она может быть положена в основу программных средств компьютерного моделирования термонапряженного состояния слитков при изменении граничных условий по температуре. Результаты вычислительных экспериментов показывают возможности для анализа различных режимов нагрева слитков в шаговых печах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б о л и Б., У э н е р Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964.
2. Ч и ч к о А. Н., Б о р о з д и н А. С. Численное моделирование процесса нагрева движущегося слитка // Литье и металлургия. – 2003. – № 4. – С. 60–63.
3. Б е л я е в Н. М., Р я д н о А. А. Методы теории теплопроводности. – М., 1982.
4. С а м а р с к и й А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983.