УКД 621.372.64

СИНТЕЗ ПОЛОСОВОГО ФИЛЬТРА С ПОМОЩЬЮ СХЕМНОЙ ФУНКЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Докт. техн. наук, проф. БОНДАРЕНКО А. В.,
кандидаты техн. наук, доценты РЕЗНИЧЕНКО В. В., МОЖАР В. И.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
Белорусский национальный технический университет

Классический метод построения полосовых фильтров основан на использовании низкочастотного фильтра-прототипа, при формировании схемной функции которого выполняются предъявляемые к полосовому фильтру требования. Для получения функции цепи полосового фильтра используют частотные преобразования вида

$$s = \left(\frac{p}{\omega} + \frac{\omega}{p}\right) q,$$

где s, p – комплексные переменные; q – добротность фильтра; ω – центральная частота. В результате этого преобразования получается геометрически симметричная относительно частоты амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), сохраняющая некоторые свойства низкочастотного прототипа. Одним из недостатков этого преобразования является отсутствие арифметической симметрии в АЧХ, которая приводит к потере ортогональными сигналами их основных свойств [1, 2].

В [3] предложена методика нахождения схемной функции, которая в зависимости от точности аппроксимации дает увеличение порядка цепи в два, четыре и более раз относительно обычного полосового фильтра. Цель данной работы – создание методики формирования перестраиваемого полосового фильтра с арифметически симметричной АЧХ меньшего порядка и ее возможная реализация с помощью цифровой схемы.

На первом этапе синтеза, используя известные способы аппроксимации, находим функцию цепи низкочастотного прототипа. После ее денормирования относительно базовой частоты осуществляется смещение по оси частот АЧХ путем замены переменной s на $p - j\omega$, где $j = \sqrt{-1}$. При этом необходимо учитывать, что АЧХ прототипа включает и область отрицательных частот. Полученная схемная функция имеет комплексные коэффициенты и поэтому физически считается нереализуемой. Рассмотрим следующую методику реализации. Представим функцию цепи прототипа $\mathbf{T}(s) = \mathbf{M}(s)/\mathbf{L}(s)$ в пространстве состояния:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s); \qquad (1)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s), \qquad (2)$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ – матрицы, определяемые различными способами, например с помощью алгоритма Б. Л. Хо [3] по $\mathbf{T}(s)$; $\mathbf{X}(s)$ – вектор состояния, связанный с размерностью $\mathbf{T}(s)$. После частотного преобразования $s = p - j\omega$ представим $\mathbf{X}(p) = \mathbf{X}_1(p) + j\mathbf{X}_2(p)$, где $\mathbf{X}_1(p)$, $\mathbf{X}_2(p)$ – вещественная и мнимая части вектора состояния, преобразованные по Лапласу.

Тогда, приравнивая вещественные и мнимые части уравнений (1), (2), получим:

$$p\mathbf{X}_1(p) = \mathbf{A}\mathbf{X}_1(p) + \mathbf{B}\mathbf{U}(p) - \varpi\mathbf{X}_2(p); \quad (3)$$

$$p\mathbf{X}_2(p) = \mathbf{A}\mathbf{X}_2(p) + \varpi\mathbf{X}_1(p); \quad (4)$$

$$\mathbf{Y}_1(p)= \mathbf{C}\mathbf{X}_1(p) + j\mathbf{C}\mathbf{X}_2(\,p) + \mathbf{D}\mathbf{U}(p). \quad (5)$$

Таким образом, можно записать систему уравнений (3)…(5) в виде:

$$p\mathbf{X}(p) = \mathbf{A}_1\mathbf{X}(p) + \mathbf{B}_1\mathbf{U}(p); \quad (6)$$

$$\mathbf{Y}_1(p) = \mathbf{C}_1\mathbf{X}(p) + \mathbf{D}_1\mathbf{U}(p); \quad (7)$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I}\omega \\ \mathbf{I}\omega & \mathbf{A} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_1 = [\mathbf{C} \quad j\mathbf{C}]; \quad \mathbf{D}_1 = [\mathbf{D}].$$

Система, описываемая уравнениями (3)…(5), является устойчивой при условии, что матрица **A** является матрицей устойчивой системы. Для устойчивости системы, представленной соотношением (6), необходимо и достаточно по теореме Ляпунова [4], чтобы матричное уравнение

$$\mathbf{A}_1^T\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1\mathbf{A}_1 = -\mathbf{I} \quad (8)$$

имело в качестве решения $\mathbf{V}_1$-матрицу коэффициентов некоторой положительной формы.

По алгоритму формирования матрица **A** удовлетворяет этому матричному уравнению при условии выбора в качестве матрицы

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & 0 \\ 0 & \mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где в качестве **V** можно выбрать любую матрицу, удовлетворяющую уравнению

$$\mathbf{A}^T\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{A} = -\mathbf{I}, \quad (10)$$

и такая матрица существует по теореме Ляпунова, так как **A** – матрица устойчивой системы.

Подставим (9) в (8) и получим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{I}\omega \\ -\mathbf{I}\omega & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V} & 0 \\ 0 & \mathbf{V} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V} & 0 \\ 0 & \mathbf{V} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I}\omega \\ \mathbf{I}\omega & \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{V}+\mathbf{V}\mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^T\mathbf{V}+\mathbf{V}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

что и доказывает устойчивость системы с матрицей **A**.

Примечание. Следует заметить, что вместо переменной ϖ может быть взята некоторая функция $c(\varpi)$, в результате чего $\mathbf{A}_1$ будет содержать члены с данной функцией, что позволяет осуществить более общие преобразования.

Реализация системы (6), (7) требует $2N$ инерционных элементов, что соответствует количеству элементов, необходимых для синтеза обычного полосового фильтра с геометрической симметрией. При этом получаем точную реализацию схемы с арифметически симметричной АЧХ. Кроме того, необходимы элементы в количестве, равном числу ненулевых элементов матрицы **C**.

Остановимся на их реализации. Для этого рассмотрим частотные характеристики этих элементов. Несложно показать, что для *j* элемента АЧХ равна единице, а фазовая характеристика составляет 90° на всем частотном диапазоне, включая отрицательную область частот. Получение подобного устройства невозможно из-за четности фазовой характеристики. Так как целью поставленной задачи является реализация цепи с арифметически симметричной АЧХ, вместо него реализуем элемент с нечетной фазовой характеристикой и АЧХ, равной единице на всем частотном диапазоне. То есть частотная характеристика должна иметь вид:

$$H(j\omega)=\begin{cases}+j \text{ при } \omega>0;\\ 0 \text{ при } \omega=0;\\ -j \text{ при } \omega<0.\end{cases} \tag{11}$$

Реализация частотной характеристики (11) также является проблематичной. Отметим, что в нашем случае вследствие ограниченности частотного диапазона переменных полосового фильтра характеристика может иметь вид:

$$H(j\omega)=\begin{cases}+j \text{ при } \omega_{\text{гр}}>\omega>0;\\ 0 \text{ при } \omega=0;\\ -j \text{ при } -\omega_{\text{гр}}<\omega<0,\end{cases} \tag{12}$$

где $\omega_{\text{гр}}$ – граничная частота задерживания полосового фильтра.

Разложение функции $H(j\omega)/j$ в указанном диапазоне частот в усеченный ряд Фурье – это разложение периодической функции типа меандр в частотной области [5]

$$H(j\omega)=j\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{\pi k}\sin^2\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\omega\pi k}{\omega_{\text{гр}}}, \tag{13}$$

где n – ограничение на количество членов ряда, аппроксимирующих частотную характеристику. При этом функция (13) является периодической с периодом $T=\pi/\omega_{\text{гр}}$. Выражение (13) удобно представить в виде

$$H(j\omega)=j\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\pi k}\sin^2\frac{\pi k}{2}\left(\exp\frac{\omega\pi k}{\omega_{\text{гр}}}-\exp\frac{\omega\pi k}{-\omega_{\text{гр}}}\right). \tag{14}$$

Тогда если ввести оператор z такой, что

$$z=\exp[j\pi\omega/\omega_{\text{гр}}],$$

то частотную характеристику (14) можно записать

$$H(j\omega) = z^n \sum_{k=0}^{n} 2/(\pi k)\left(z^{k-n} - z^{-k-n}\right). \qquad (15)$$

Отметим, что реализация устройства с АЧХ, соответствующей частотной характеристике (15), может осуществляться по формулам:

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega);$$

$$H_1(j\omega) = \sum_{k=0}^{n} 2/(\pi k)\sin^2(\pi k/2)\left(z^{k-n} - z^{-k-n}\right); \qquad (16)$$

$$H_2(j\omega) = z^n, \qquad (17)$$

что соответствует схемной функции $H(z)$ для обычного нерекурсивного цифрового фильтра при введении обозначения

$$z = \exp(sT).$$

Известно, что разложение в ряд Фурье приводит к явлению Гиббса, которое трансформирует характеристики фильтра на границах полосы пропускания. Поэтому применение весовых функций, таких как Ланцоша, Ганна и т. д., вносит необходимую коррекцию и приближает характеристики к идеальным, и тогда реализация формулы (17) будет невозможна.

Обойти возникшую трудность можно, если обратиться к использованию элементов «*j*». Для этого рассмотрим уравнение (7). Оно представляет сумму элементов вектора состояния и входного сигнала с коэффициентами. При этом компоненты вектора состояния, умножаемые на *j*, должны вместо этого преобразовываться по выражениям (16) и (17). Преобразование (17) – это опережение сигнала на время nT. Если вместо этого осуществить запаздывание на это же время остальных слагаемых формулы (7), то АЧХ системы не изменится. Фазовая характеристика при этом изменится на величину $-nT\omega$.

Рассмотрим пример использования изложенного способа синтеза полосового фильтра. Пусть необходимо реализовать фильтр с характеристиками, соответствующими фильтру Баттерворта второго порядка с добротностью $q = 5$ и центральной частотой 1000 $с^{-1}$.

В качестве нормированного низкочастотного прототипа используем схемную функцию $H_0(s)$

$$H_0(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1} \approx \frac{1}{s^2 + 1{,}4\, s + 1}.$$

Учитывая добротность, определим частоту среза прототипа

$$\omega_{ср} = \omega_0 / 2q = 100 \ с^{-1}.$$

Проводя операцию денормирования, получим схемную функцию

$$H(s) = \frac{1}{s^2/10^4 + 1{,}4s/100 + 1}.$$

В пространстве состояния уравнения примут вид:

$$\dot{x}_1 = -140x_1 - 100x_2 + 100u;$$

$$\dot{x}_2 = 100x_1;$$

$$y = x_2.$$

По (3)…(5) получим уравнения, описывающие полосовой фильтр:

$$\dot{x}_1 = -140x_1 - 100x_2 - 1000x_3 + 100u;$$

$$\dot{x}_2 = 100x_1 - 1000x_4;$$

$$\dot{x}_3 = 1000x_1 - 140x_3 - 100x_4;$$

$$\dot{x}_4 = 1000x_2 + 100x_3;$$

$$y = x_2 + jx_4.$$

В последнем уравнении j реализуется с помощью формулы (16) при $n = 1$. Реализация в Matlab и АЧХ представлена на рис. 1 и 2 соответственно.

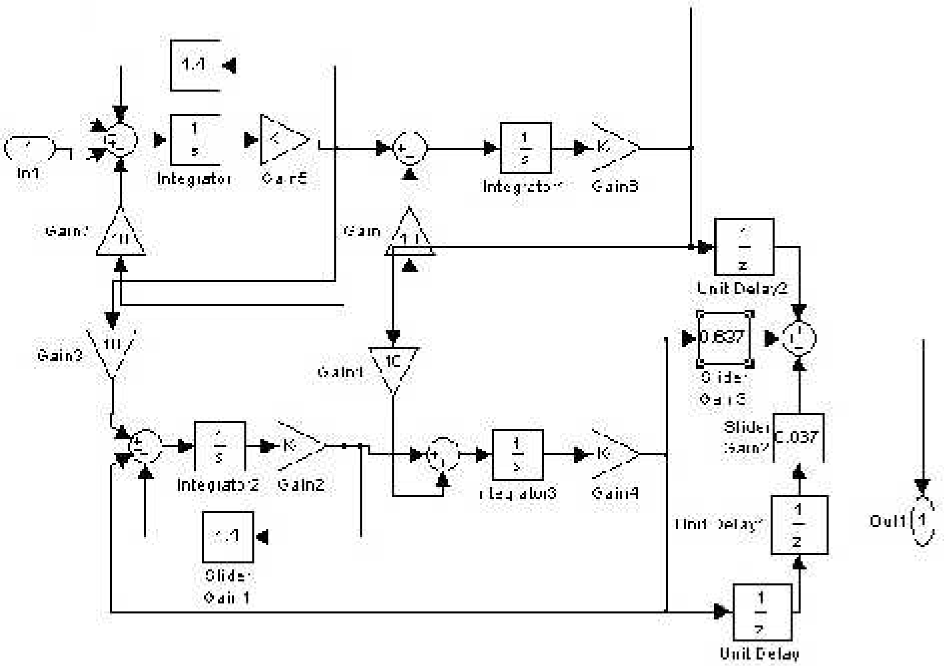

Рис. 1

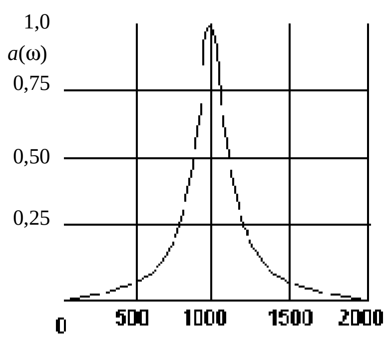

Рис. 2 0 500 1000 1500 ω 2000

ВЫВОД

Таким образом, используя частотные преобразования вида $s - j\omega$, можно получить схемные функции полосовых фильтров с арифметической симметрией АЧХ и устойчивым решением. Данная задача может быть адресована и к методам синтеза матриц дробно-рациональных функций с комплексными коэффициентами, частным случаем чего и является предложенный фильтр.

Пример реализации элемента j с помощью цифрового нерекурсивного фильтра позволил использовать данную методику для цифровой фильтрации. Фильтры с подобными свойствами необходимы при обработке сигналов в измерительной технике, радиолокации, акустике и других областях. Отметим, что данная статья ставила цель обоснования принципиальной возможности реализации арифметически симметричных фильтров. Вопросы оценки погрешности аппроксимации остались вне рамок этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкс Л. Теория сигналов. – М.: Сов. радио, 1974.

2. Новак М. Частотные преобразования в теории цепей. – М.: Сов. Радио, 1975. – 112 с.

3. Гуревич И. В., Кисляков И. С. Частотные преобразования для полосовых фильтров с арифметически симметричными амплитудно-частотными характеристиками // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. – 1988. – № 12. – С. 69–71.

3. Калман Р., Фалиб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.

4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.

5. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры. – М.: Недра, 1987.

Представлена кафедрой электротехники
и электроники БНТУ

Поступила 11.11.2005