



With using of the method of equivalent sources there is received for the first time the solution of the problem of heat conduction and thermoelasticity at heating of prismatic slugs in the regime of countercurrent convective heat exchange.

Ю. С. ПОСТОЛЬНИК, Днепродзержинский государственный технический университет,
В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, Белорусский национальный технический университет,
О. А. ЧЕРНЫЙ, Днепродзержинский государственный технический университет,
Д. Н. АНДРИАНОВ, Белорусский национальный технический университет,
В. И. ЩЕРБАКОВ, РУП "Белорусский металлургический завод"
П. Э. РАТНИКОВ, Белорусский национальный технический университет

УДК 536.24

ТЕПЛОВОЙ И ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НАГРЕВА МАССИВНЫХ СЛИТКОВ И ЗАГОТОВОК В ПРОТИВОТОЧНОМ РЕЖИМЕ

Введение

Проблема повышения качества проката во многом зависит от наличия трещин в слитках и заготовок, поступающих из нагревательных устройств в прокатный стан. Нарушение сплошности металла из-за возникающих термических напряжений может быть одной из причин (возможно, определяющей) наряду с другими факторами, такими, например, как дефекты литейного происхождения. В этом случае возникает необходимость количественной оценки главных компонент вектора термических напряжений и нахождения их взаимосвязи с характеристиками теплового состояния печи – температурой печи, тепловых потоков от греющей среды к слиткам и заготовкам, изменения во времени температуры поверхности металла и других показателей [1].

В общем случае решение задач подобного рода сопряжено с существенными сложностями и требует, в первую очередь, учета особенностей внешнего теплообмена в рабочем пространстве печи, т. е. адекватной постановки и решения задачи теплопроводности.

В последнее время в металлургической промышленности широкое распространение получили методические печи с шагающими балками и шагающим подом, в которых нагреваемые слитки и заготовки располагаются с зазором. При моделировании процессов нагрева металла в таких печах возникает необходимость решения противоточной краевой задачи, что позволяет повысить точность полученных результатов [2, 3].

В продолжение ранее выполненных исследований [1–4] ниже получено решение задачи теплопроводности и термоупругости при нагреве призматических заготовок в режиме противотока, базирующихся на основе метода эквивалентных источников.

Постановка тепловой задачи

Для исследования термонапряженного состояния заготовок при нагреве необходимо задание ее температурного поля. Будем рассматривать заготовку как неограниченную квадратную призму $2H \times 2H$, при этом в качестве нагрузочной функции используем решение противоточной краевой задачи теплопроводности [3]

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_2^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad \theta(\xi_1, \xi_2, 0) = \theta_0 = 0, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \right|_{\xi_i=1} = \text{Bi}(\tau) [\theta_r(\tau) - \theta(\xi_1, \xi_2, \tau)] \Big|_{\xi_i=1}, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \right|_{\xi_i=0} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial \tau} = \text{Bi}(\tau) [\theta_r(\tau) - \bar{\theta}_n(\tau)] n, \quad \bar{\theta}_n(\tau) = \int_0^1 \theta_n(\xi_j, \tau) d\xi_j, \quad (3)$$

где введены следующие безразмерные величины:

$$\theta(\xi_1, \xi_2, \tau) = \frac{T(\xi_1, \xi_2, \tau) - T_0}{T_r - T_0}; \quad \xi_1 = \frac{x}{H}; \quad \xi_2 = \frac{y}{H}; \quad \tau = \frac{at}{H^2}; \quad \text{Bi}(t) = \frac{\alpha(t)H}{\lambda}; \quad n = \frac{W}{W_r} \frac{4H^2 Lc}{V_r c_r}.$$

Здесь $W_r = V_r c_r$ и $W = V c$ – водяные числа метала и газа (V – объем; c – теплоемкость); $\lambda, a, \alpha(t)$ – соответственно коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и теплоотдачи; $\theta(\xi_1, \xi_2, \tau_0) = \theta' = \theta_0 = 0$, $\theta_r(\tau_0) = \theta_r'' = 1$ – температура метала на входе и температура газа на выходе. Решение задачи (1)–(3) имеет вид [3]

$$\theta(\xi_1, \xi_2, \tau) = \theta_r(\tau) - \frac{f_2(\tau)}{2} \left[\frac{2 + \text{Bi}(\tau)}{\text{Bi}(\tau)} - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2} \right] - \frac{(2 + \text{Bi}(\tau)) [\text{ch}(\mu(\tau)\xi_1) + \text{ch}(\mu(\tau)\xi_2)]}{Z(\tau)} + \frac{\text{Bi}(\tau) [\xi_1^2 \text{ch}(\mu(\tau)\xi_2) + \xi_2^2 \text{ch}(\mu(\tau)\xi_1)]}{Z(\tau)} \quad (4)$$

где

$$Z(\tau) = 2[\text{Bi}(\tau)\text{ch}(\mu(\tau)) + \mu(\tau)\text{sh}(\mu(\tau))]; \quad f_2(\tau) = f_2(\tau_0) \exp \left[- \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d}{d\eta} \frac{M(\eta)+1-\Psi(\eta)}{M(\eta)} d\eta \right];$$

$$f_2(\tau_0) = \frac{2\text{Bi}(\tau_0) [\text{Bi}(\tau_0)\text{ch}(\mu(\tau_0)) + \mu(\tau_0)\text{sh}(\mu(\tau_0))]}{(2 + \text{Bi}(\tau_0)) [\text{Bi}(\tau_0)\text{ch}(\mu(\tau_0)) + \mu(\tau_0)\text{sh}(\mu(\tau_0))] - \text{Bi}(\tau_0)};$$

$$\Psi(\tau) = \frac{\text{Bi}(\tau)W}{2} \left[\frac{(6 + \text{Bi}(\tau))}{3\text{Bi}(\tau)} - \frac{\mu(\tau)\text{ch}(\mu(\tau))(5 + 3\text{Bi}(\tau)) + 6\text{sh}(\mu(\tau))}{6\mu(\tau) [\text{Bi}(\tau)\text{ch}(\mu(\tau)) + \mu(\tau)\text{sh}(\mu(\tau))]} \right];$$

$$M(\tau) = \frac{1}{\mu^2(\tau)} - \frac{(6 + 2\text{Bi}(\tau))\text{sh}(\mu(\tau))}{6\mu(\tau) [\text{Bi}(\tau)\text{ch}(\mu(\tau)) + \mu(\tau)\text{sh}(\mu(\tau))]}; \quad \mu(\tau) = \sqrt{\frac{3\text{Bi}(\tau)}{3 + \text{Bi}(\tau)}}; \quad \theta_r(\tau) = 1 + \int_{\tau_0}^{\tau} f_2(\eta)\Psi(\eta)d\eta.$$

Постановка задачи термоупругости

Как известно [5], задача термоупругости при плоском деформированном состоянии сводится к решению уравнений

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = (1 + \nu)(1 - \nu)\alpha T(x, y, \tau), \quad (5)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi = \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = 0, \quad (6)$$

после чего температурные напряжения будут определяться через термоупругий потенциал Φ и функцию Эри Ψ следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 (2G\Phi - \Psi)}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = - \frac{\partial^2 (2G\Phi - \Psi)}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 (2G\Phi - \Psi)}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

$$\sigma_z = \left[\frac{1}{H} \int_0^H \int_0^H T(x, y, \tau) dx dy - T(x, y, \tau) \right] - \nu \left[\frac{1}{H} \int_0^H \int_0^H \nabla^2 \Psi dx dy - \nabla^2 \Psi \right]. \quad (8)$$

При этом термоупругие напряжения должны удовлетворять однородным граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x(x, y, \tau)|_{x=\pm H} = 0; \quad \sigma_y(x, y, \tau)|_{y=\pm H} = 0, \\ \tau_{xy}(x, y, \tau)|_{x=\pm H} = \tau_{yx}(x, y, \tau)|_{x=\pm H} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Сведем поставленную задачу к безразмерному виду, проведя следующие замены:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{K_\sigma}, \quad K_\sigma = \frac{\alpha_r E (T_r'' - T_0)}{1 - \nu}, \quad \Phi(\xi_1, \xi_2, \tau) = \frac{\Phi(\xi_1, \xi_2, \tau)}{K_\Phi}, \\ \Psi(\xi_1, \xi_2, \tau) = \frac{\Psi(\xi_1, \xi_2, \tau)}{K_\Psi}, \quad K_\Psi = H^2 K_\sigma, \quad K_\Phi = \frac{(1 - \nu)}{E} H^2 K_\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Тогда выражения (5)–(8) приобретают вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2^2} = \theta(\xi_1, \xi_2, \tau), \tag{11a}$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi_1^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi_2^4} = 0, \tag{11б}$$

$$\overline{\sigma}_x = \frac{\partial^2(\psi - \varphi)}{\partial \xi_2^2}, \quad \overline{\tau}_{xy} = \frac{\partial^2(\psi - \varphi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \tag{12}$$

$$\overline{\sigma}_z = \left[\int_0^1 \int_0^1 u(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2 - u(\xi_1, \xi_2, \tau) \right] - \nu \left[\int_0^1 \int_0^1 \nabla^2 \psi(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2 - \nabla^2 \psi(\xi_1, \xi_2, \tau) \right], \tag{13}$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\sigma}_x &= \frac{\partial^2(\psi - \varphi)}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi_1 = \pm 1}, \quad \overline{\sigma}_y = \frac{\partial^2(\psi - \varphi)}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi_2 = \pm 1}, \\ \overline{\tau}_{xy} &= \frac{\partial^2(\psi - \varphi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi_1 = \pm 1} = \frac{\partial^2(\psi - \varphi)}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \Big|_{\xi_2 = \pm 1} \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

Решение задачи

Будем искать решение уравнения Пуассона (11a) в виде полинома парных степеней ξ_1 и ξ_2 :

$$\begin{aligned} \varphi(\rho_1, \rho_2, \tau) &= a \left[\text{ch}(\mu(\tau)\xi_2)\xi_1^2 + \text{ch}(\mu(\tau)\xi_1)\xi_2^2 \right] + b \left[\text{ch}(\mu(\tau)\xi_2)\xi_1^4 + \text{ch}(\mu(\tau)\xi_1)\xi_2^4 \right] + \\ &+ t \left[\xi_1^6 + \xi_2^6 \right] + c \left[\xi_1^4 + \xi_2^4 \right] + d \left[\xi_1^2 \xi_2^4 + \xi_2^2 \xi_1^4 \right] + e \left[\xi_1^2 + \xi_2^2 \right]. \end{aligned} \tag{15}$$

После подстановки функций (4), (15) в уравнение (11a) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях находим

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{f_2(\tau)}{4Z(\tau)} (2 + \text{Bi}(\tau)), \quad b = -\frac{f_2(\tau)}{48Z(\tau)} (2\text{Bi}(\tau) + \mu^2(\tau)(2 + \text{Bi}(\tau))), \\ e &= \frac{\theta_r(\tau)}{4} - \frac{f_2(\tau)}{8\text{Bi}(\tau)} (2 + \text{Bi}(\tau)), \quad c = \frac{f_2(\tau)}{48}; \quad d = 0; \quad t = 0. \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

Далее для решения бигармонического уравнения (11б) с учетом равноправности главных направлений ξ_1 и ξ_2 представим искомую функцию $\psi(\xi_1, \xi_2, \tau)$ в виде полинома:

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \tau) = f(\xi_1^6 + \xi_2^6) + g\xi_2^2\xi_1^4 + g\xi_1^2\xi_2^4 + h(\xi_1^4 + \xi_2^4) + k(\xi_1^2 + \xi_2^2) + s\xi_2^2\xi_1^2. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (11б), а также (15) с учетом (16) в любое из условий (14) и приравнивая коэффициенты при степенях ξ_i , приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} 360f + 48g &= 0; \quad 8g = \frac{f_2(\tau)}{12Z(\tau)} \mu(\tau) (2\text{Bi}(\tau) + \mu^2(\tau)(2 + \text{Bi}(\tau))) h(\mu(\tau)), \\ 12h + s &= 0; \quad 12g + 12h = \frac{f_2(\tau)}{4} - \frac{f_2(\tau)}{4Z(\tau)} (2\text{Bi}(\tau) + \mu^2(\tau)(2 + \text{Bi}(\tau))), \\ 2g + 2k + 2s &= \frac{\theta_r(\tau)}{2} - f_2(\tau)(2 + \text{Bi}(\tau)) \left[\frac{\text{ch}(\mu(\tau))}{2Z(\tau)} - \frac{1}{4\text{Bi}(\tau)} \right]. \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

Решая систему (18), получаем

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{f_2(\tau)\mu(\tau)(2\text{Bi}(\tau)+\mu^2(\tau)(2+\text{Bi}(\tau)))\text{sh}(\mu(\tau))}{720Z(\tau)}, \\ k &= \frac{f_2(\tau)26[\text{sh}(\mu(\tau))\text{Bi}(\tau)(1+\mu^2(\tau)/2)+\mu^2(\tau)\text{sh}(\mu(\tau))]}{96Z(\tau)} + \frac{f_2(\tau)24\text{ch}(\mu(\tau))(2+\text{Bi}(\tau))}{96Z(\tau)} + \\ &+ \frac{f_2(\tau)24[Z(\tau)/2-\mu^2(\tau)(2+\text{Bi}(\tau))-2\text{Bi}(\tau)-Z(\tau)/\text{Bi}(\tau)]}{96Z(\tau)} + \frac{f_2(\tau)24\theta_r}{96}, \\ g &= -\frac{f_2(\tau)\mu(\tau)(2\text{Bi}(\tau)+\mu^2(\tau)(2+\text{Bi}(\tau)))\text{sh}(\mu(\tau))}{96Z(\tau)}, \\ h &= \frac{f_2(\tau)[\mu(\tau)\text{sh}(\mu(\tau))(2\text{Bi}(\tau)+2\mu^2(\tau)+\mu^2(\tau)\text{Bi}(\tau))+Z(\tau)-2\text{Bi}(\tau)(2+\mu^2(\tau))]}{96Z(\tau)}, \\ s &= -\frac{f_2(\tau)(\mu(\tau)\text{sh}(\mu(\tau))-2)(2\text{Bi}(\tau)+\mu^2(\tau)(2+\text{Bi}(\tau)))}{8Z(\tau)}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Далее используя условия (12), (13), получаем функции напряжений

$$\overline{\sigma}_x = \frac{\partial^2(\Psi-\Phi)}{\partial \xi_2^2} = 30f\xi_2^4 + g(2\xi_1^4 + 12\xi_1^2\xi_2^2) + (k-e)2 + 12\xi_2^2(h-c) + 2s\xi_1^2 - \quad (20)$$

$$-a[\mu^2(\tau)\text{ch}(\mu(\tau)\xi_2)\xi_1^2 + 2\text{ch}(\mu(\tau)\xi_1)] - b[\mu^2(\tau)\text{ch}(\mu(\tau)\xi_2)\xi_1^4 + 12\text{ch}(\mu(\tau)\xi_1)],$$

$$\overline{\sigma}_y = \frac{\partial^2(\Psi-\Phi)}{\partial \xi_1^2} = 30f\xi_1^4 + g(2\xi_2^4 + 12\xi_1^2\xi_2^2) + (k-e)2 + 12\xi_1^2(h-c) + 2s\xi_2^2 - \quad (21)$$

$$-a[\mu^2(\tau)\text{ch}(\mu(\tau)\xi_1)\xi_2^2 + 2\text{ch}(\mu(\tau)\xi_2)] - b[\mu^2(\tau)\text{ch}(\mu(\tau)\xi_1)\xi_2^4 + 12\text{ch}(\mu(\tau)\xi_2)],$$

$$\overline{\tau}_{xy} = \frac{\partial^2(\Psi-\Phi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 6g\xi_1\xi_2^3 + 6g\xi_2\xi_1^3 + 4s\xi_1\xi_2 - a[2\mu(\tau)\text{sh}(\mu(\tau)\xi_2)\xi_1^2 + 2\mu(\tau)\xi_2\text{sh}(\mu(\tau))] - \quad (22)$$

$$-b[4\mu(\tau)\text{sh}(\mu(\tau)\xi_2)\xi_1^3 + 4\mu(\tau)\text{sh}(\mu(\tau)\xi_1)\xi_2^3],$$

$$\overline{\sigma}_z = \left[\int_0^1 \int_0^1 u(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2 - u(\xi_1, \xi_2, \tau) \right] - v \left[\int_0^1 \int_0^1 \nabla^2 \Psi(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2 - \nabla^2 \Psi(\xi_1, \xi_2, \tau) \right] = \quad (23)$$

$$= \frac{f_2(\tau)}{2} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2} - \frac{(2+\text{Bi}(\tau))}{Z(\tau)} \left[\text{ch}(\mu(\tau\xi_2)) + \text{ch}(\mu(\tau\xi_1)) - \frac{2\text{sh}(\mu(\tau))}{\mu(\tau)} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\text{Bi}(\tau)}{Z(\tau)} \left[\xi_1^2 \text{ch}(\mu(\tau\xi_2)) + \xi_2^2 \text{ch}(\mu(\tau\xi_1)) - \frac{2\text{sh}(\mu(\tau))}{3\mu(\tau)} \right] \right\} - v \left\{ f \left(\frac{2}{7} - \xi_1^6 - \xi_2^6 \right) + g \left(\frac{2}{15} - \xi_1^2 \xi_2^4 - \xi_1^4 \xi_2^2 \right) + \right.$$

$$\left. + h \left(\frac{2}{3} - \xi_1^4 - \xi_2^4 \right) + k \left(\frac{2}{3} - \xi_1^2 - \xi_2^2 \right) + s \left(\frac{1}{9} - \xi_1^2 \xi_2^2 \right) \right\}.$$

Следует отметить, что нормальные напряжения (20), (21) точно удовлетворяют граничным условиям (9), а касательные напряжения (22) – смягчающим (интегральным) условиям в смысле Сен-Венана – Лейбейсона [6].

Апробация результатов

Приведенные формулы были использованы на конкретном примере расчета процесса нагрева конвективным потоком длинной призмы квадратного сечения в противоточном режиме. Исходные данные для расчета: температура газа на входе $T_r^* = 1000$ К, начальная температура призмы $T_0^* = 300$ К; $H_1 = H_2 = 0,2$ м, $k = 1$, $W \cong 0,5$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 60$ Вт/(м·К), коэффициент теплоотдачи $\alpha = 250$ Вт/(м²·К), коэффициент температуропроводности $a = 0,025$ м²/ч, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, коэффициент теплового расширения $\alpha_r = 2 \cdot 10^{-5}$ 1/К, модуль упругости $E = 2,3 \cdot 10^{11}$ Па. Результаты расчетов приведены на рис. 1–5, из которых видно, что качественное распределение термических напряжений соответствует общепринятым положениям теории термоупругости.

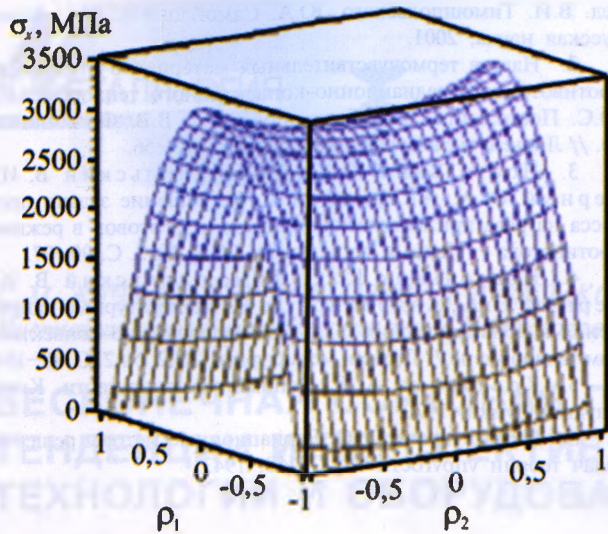


Рис. 1. Максимальные напряжения σ_x

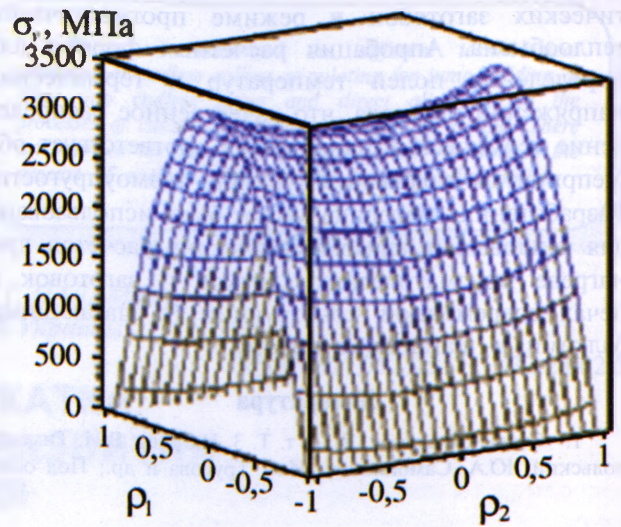


Рис. 2. Максимальные напряжения σ_y

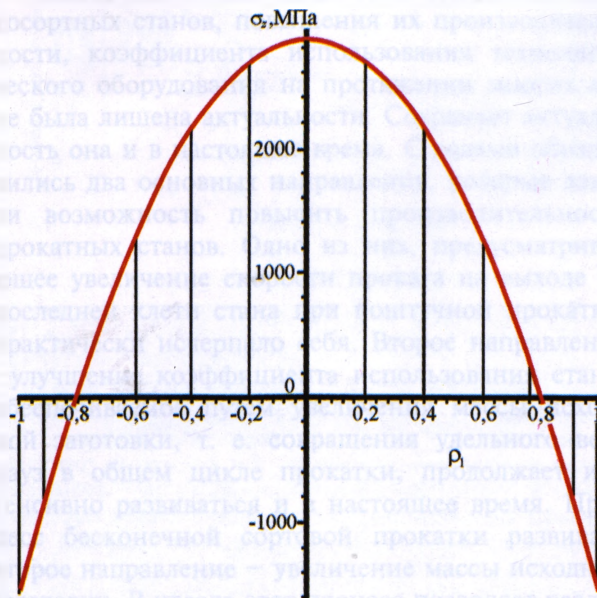


Рис. 3. Напряжения σ_z в центральном сечении призмы

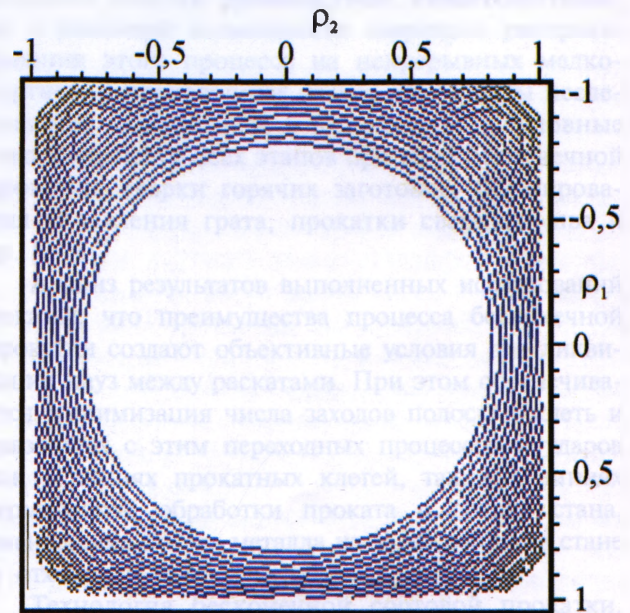


Рис. 4. Нейтральная линия сечения («кольцо напряжений»)

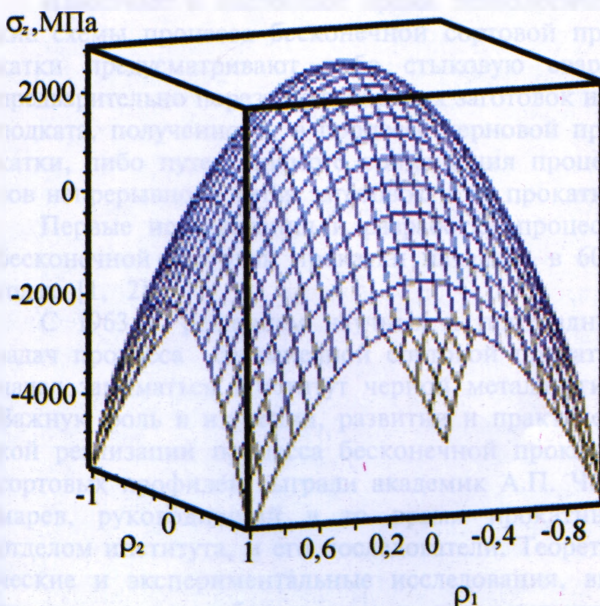


Рис. 5. Распределение осевых напряжений в объеме призмы

Максимальные растягивающие напряжения (в момент теплового удара) наблюдаются в центре заготовки (рис. 1, 2). Анализ распределения осевых напряжений σ_z (рис. 3) показывает, что на поверхности призмы наблюдаются сжимающие напряжения, в центральной области — растягивающие напряжения, причем по абсолютной величине растягивающие напряжения превышают сжимающие. На рис. 4 показано изменение осевых напряжений σ_z по объему прямоугольной призмы. Из рисунка видно, что сжимающие напряжения по поверхности заготовки распределены неравномерно: в углах заготовки по своему максимальному значению они превышают напряжения, возникающие посередине граней.

Выводы

Впервые получено решение задачи теплопроводности и термоупругости при нагреве призма-

тических заготовок в режиме противоточного теплообмена. Апробация расчетных формул для определения полей температур и термических напряжений показала, что качественное распределение термических напряжений соответствует общепринятым положениям теории термоупругости. Разработанная методика может быть использована для тепловых и термомеханических расчетов при нагреве призматических слитков и заготовок в печах современной конструкции (с шагающими балками и шагающим подом).

Литература

1. Стальной слиток. В 3-х т. Т. 3. Нагрев / В.И. Тимошпольский, Ю.А. Самойлович, И.А. Трусова и др.; Под общ.

ред. В.И. Тимошпольского, Ю.А. Самойловича. Мн.: Белорусская наука, 2001.

2. Нагрев термочувствительных материалов в условиях противоточного радиационно-конвективного теплообмена / Ю.С. Постольник, В.И. Тимошпольский, В.В. Филиппов и др. // Литье и металлургия. 2001. № 3. С. 53–56.

3. Постольник Ю. С., Тимошпольский В. И., Черный О. А., Андрианов Д. Н. Решение задачи процесса нагрева призматических слитков и заготовок в режиме противотока // Литье и металлургия. 2003. № 2. С. 90–97.

4. Постольник Ю. С., Тимошпольский В. И., Черный О. А., Андрианов Д. Н. Температурные напряжения в призматических телах при радиационно-конвективном теплообмене // Литье и металлургия. 2002. № 2. С. 98–104.

5. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970.

6. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости М: ОГИЗ, 1943.