УДК 530.182

ЗАДАЧА О ДИССИПАТИВНОМ УРАВНЕНИИ ДВИЖЕНИЯ ТЕОРИИ ϕ^4 С НАРУШЕНИЕМ ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТИ

Князев М.А.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Требование инвариантности уравнений движения в теории поля относительно преобразований Лоренца является общим в современной физике. Это в полной мере относится и к теории ϕ^4, одной из наиболее широко распространенных теорий, используемой в различных областях исследований: классической и квантовой теории поля, физике элементарных частиц, теории фазовых переходов в конденсированных средах, физике магнитных явлений, инфляционной теории, описания формирования топологических дефектов в космологии и многих других [1].

В последние годы появился ряд работ, в которых рассматриваются процессы, протекающие с нарушением инвариантности относительно преобразований Лоренца. К таким процессам относятся электродинамика Максвелла при учете взаимодействия Черн-Симона, учет членов, нарушающих Лоренц-инвариантность в низкоэнергетическом пределе в стандартной модели и высокоэнергетическом пределе в моделях теории струн, некоммутативная теория поля, процессы в суперсимметричных теориях, протекающие с нарушением инвариантности относительно преобразований Лоренца, возможные ограничения инвариантности Лоренца, которые следуют из радиоастрономических наблюдений и т.д. В скалярных моделях теории поля, в том числе и многокомпонентных, уравнение движения имеет, как правило, решение в виде кинка или кинкоподобного объекта. Такие решения находят применение при исследовании эффекта Кондо, захвата фермионов, а также в задачах об энтропии информационных процессов. Достаточно полный обзор современного состояния вопроса можно найти в работе [2] (см. также работу [3]).

В настоящей работе рассматриваются (1+1)-мерные уравнения движения скалярной теории ϕ^4, поскольку она является достаточно простой и, как следствие, достаточно подробно изученной. Для простоты и удобства всюду, где это можно, коэффициенты будут считаться равными единице.

Уравнение движения теории ϕ^4 в статическом случае имеет вид [4]

$$\phi_{xx} + \phi - \phi^3 = 0. \qquad (1)$$

Решение этого уравнения хорошо известно. Его можно записать следующим образом

$$\phi_{\text{ст}}(x) = \pm\tanh\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}}\right). \qquad (2)$$

Здесь знак плюс соответствует решению в виде кинка, а знак минус – решению в виде антикинка. x_0 представляет собой начальную фазу и определяет координату центра кинка.

В динамическом случае уравнение движения теории ϕ^4 записывается следующим образом

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \phi + \phi^3 = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) относится к неинтегрируемым нелинейным уравнениям в частных производных. Это означает, что для него существует только одно решение в виде одиночного кинка (или антикинка) и не существует решений, соответствующих связанным состояниям произвольного (даже малого) числа кинков и/или антикинков [5, 6]. Это решение можно записать сразу, используя его инвариантность относительно преобразований Лоренца. Для этого достаточно применить преобразование Лоренца к решению (2). В результате получим:

$$\phi(x,t) = \pm\tanh\left(\frac{x-x_0-ut}{\sqrt{2(1-u^2)}}\right), \qquad (4)$$

где $-1 < u < 1$ – скорость движения кинка.

Учет процессов диссипации в теории ϕ^4 приводит к следующей форме уравнения движения:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \alpha\phi_t - \phi + \phi^3 = 0, \qquad (5)$$

где α – коэффициент затухания. Данное уравнение по-прежнему является инвариантным относительно преобразований Лоренца. Его решение можно получить, используя эллиптические функции [7] или метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных [1]. Оно записывается в следующем виде:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2}\{1 - \tanh[\alpha(x-ut) + x_0]\}. \qquad (6)$$

Решение (6) уже не является кинком в общепринятом понимании этого термина. Более правильно назвать его кинкоподобным. Несмотря на учет по сравнению с уравнением (3) в уравнении (5) дополнительного описывающего потери энергии слагаемого, для этого уравнения также не удается построить решения, соответствующие связанным состояниям не только произвольного числа кинкоподобных объектов, но даже и в том случае, когда рассматриваются только два таких объекта. Следовательно, уравнение (5) также является неинтегрируемым.

Уравнение движения теории ϕ^4, которое не является инвариантным относительно преобразований Лоренца, имеет вид [2]:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + 2\beta\phi_{xt} - \phi + \phi^3 = 0. \qquad (7)$$

Нарушение Лоренц-инвариантности описывается параметром β, который принимает неотрицательные значения. Случай $\beta = 0$ представляется тривиальным. Коэффициент 2 введен из соображений удобства вычислений. Видно, что слагаемое, нарушающее Лоренц-инвариантность, не влияет на уравнение в статическом случае. В работе [3] показано, что уравнение (7) инвариантно относительно преобразования:

$$x' = \gamma(x - ut), \tag{8}$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2 + 2\beta u}$. Несмотря на нарушение Лоренц-инвариантности, зависящее от времени топологически нетриальное решение уравнения (7) имеет вид

$$\phi(x,t) = \pm\tanh[\gamma(x - ut - x_0)]. \tag{9}$$

Все обозначения, использованные в данной формуле, разъяснены выше. Положительное значение скорости соответствует движению кинка/антикинка вправо, а отрицательное – влево.

Проблема существования для уравнения (7) решений, которые описывали бы решения, соответствующие связанным состояниям отдельных кинков типа (9), в настоящее время остается открытой. Окончательный вывод о том, является ли уравнение (7) интегрируемым или нет, пока сделать не удается.

Уравнения (3), (5) и (7) обладают очевидной симметрией. Их формы записи достаточно схожи. Отличие между ними состоит в наличии различных слагаемых, но поскольку эти слагаемые являются линейными по неизвестной функции (её производных), то их вклад не должен оказывать существенное влияние на свойства нелинейного уравнения и характер его решения. Это и проявляется в записи решений всех трех указанных уравнений. Все они определяются функцией гиперболического тангенса, приводя к решению, которое является или кинком или кинкоподобным объектом. Несмотря на то, что вопрос об интегрируемости уравнения (7) остается открытым, из соображений общего характера, основывающихся на симметрии, можно сделать предположение, что это уравнение также будет относиться к неинтегрируемым.

Дальнейшее развитие исследований в этом направлении может заключаться в обобщении уравнения движения теории ϕ^4. Все рассмотренные выше уравнения движения в теории ϕ^4содержат один и тот же потенциал. Поэтому одним из путей модификации может являться изменение вида потенциала. Однако более значительный интерес представляет такая модификация этого уравнения, в которой при сохранении вида потенциала одновременно учитываются и процессы диссипации, и нарушение инвариантности относительно преобразований Лоренца. Такое уравнение можно записать следующим образом:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \alpha\phi_t + 2\beta\phi_{xt} - \phi + \phi^3 = 0. \tag{10}$$

Аналитическое решение данного уравнения в явной форме до настоящего времени еще не построено, хотя из сравнения этого уравнения с уравнениями, приведенными выше, из соображений симметрии, очевидно, что оно также должно некоторым образом выражаться через функцию гиперболического тангенса, а значит будет либо кинком, либо кинкоподобным объектом. Как следствие, не доказанным строго остается вопрос и об интегрируемости этого уравнения, поскольку построение решений, соответствующих связанным состояниям остается открытым.

Литература

1. Князев М.А. Кинки в скалярной модели с затуханием / М.А. Князев. – Минск: Тэхналогія, 2003. – 115 с.

2. Haobo Yan. Kink-antikink collision in a Lorentz-violating model / Haobo Yan, Yuan Zhong, Yu-Xiao Liu and Kei-ichi Maeda // Phys. Lett. B. – 2020. – V. 807. – P. 135542.

3. Barreto M.N. Defect structures in Lorentz and CPT violating scenarios / M.N. Barreto, D. Bazeia and R. Menezes // http://xxx.lanl.gov (arXiv:hep-th/0506262).

4. Раджараман, Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – Москва: Мир, 1985. – 416 с.

5. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – Москва: Мир, 1989. – 326 с.

6. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / Москва: Мир, 1987. – 479 с.

7. Cervero, J.M. General elliptic solution for the cubic equation with damping / J.M. Cervero and P.G. Estevez // Phys. Lett. A. – 1986. – V. 114, Ns 8–9. – P. 435–436.