Секция 3. ФИЗИЧЕСКИЕ, ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ, МАТЕРИАЛОВЕДЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

УДК 530.182

РЕШЕНИЕ ТИПА КИНКА МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ФИШЕРА-КОЛОМОГОРОВА-ПЕТРОВСКОГО-ПИСКУНОВА

Блинкова Н.Г., Князев М.А.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Нелинейные уравнения в частных производных привлекают все более возрастающее внимание специалистов различных областей науки и техники. Это обусловлено тем, что линейные уравнения и нелинейные уравнения с малыми возмущениями практически полностью изучены и поведение их решений хорошо известно. Особый интерес представляют так называемые существенно нелинейные уравнения. Особенностью таких уравнений является непертурбативный характер нелинейных членов, что исключает возможность применения теории возмущений для их решения. Такие уравнения допускают решения типа солитонов или солитноподобных объектов (кинков) и их связанных состояний.

В настоящей работе рассмотрено модифицированное уравнение Фишера-Коломогорова-Петровского-Пискунова (ФКПП). Это уравнение в не модифицированной форме имеет вид [1]:

$$u_t - u_{xx} - u + u^2 = 0.$$

Здесь $u_t = \partial u/\partial t$ и аналогично для других членов. Уравнение ФКПП изучено достаточно полно. Оно находит широкое применение в биофизике, задачах экологии и химии, поскольку это типичное уравнение конвекции-реакции-диффузии. Дальнейшее повышение точности описания явлений и процессов при помощи уравнения ФКПП требует учета дополнительных эффектов взаимодействия. Наиболее доступный способ сделать это – учесть дополнительные слагаемые в выражении для потенциальной энергии. В таком случае получим модифицированное уравнение ФКПП

$$u_t - u_{xx} - u + u^2 + u^3 = 0. \qquad (1)$$

Чтобы построить решение уравнения (1) применим прямой метод Хироты [2]. Введем замену зависимой переменной вида

$$u(x,t) = \sigma F_x/F, \qquad (2)$$

где $F(x,t)$ – новая функция, а σ – константа, которая будет определена ниже. Если подставить соотношение (2) в уравнение (1), последнее примет вид

$$\frac{F_{xt}}{F} - \frac{F_xF_t}{F^2} - \frac{F_{xxx}}{F} + 3\frac{F_xF_{xx}}{F^2} - 2\frac{F_x^3}{F^3} - \sigma\frac{F_x^2}{F^2} + \sigma^2\frac{F_x^3}{F^3} = 0.$$

Данное уравнение является кубическим относительно функции $F(x,t)$. Известно, что некоторые уравнения такого типа (т.е. кубические; иногда их называют трилинейными) можно решить при помощи метода Хироты при дополнительных специальных условиях [3]. Однако в рассматриваемом случае эти условия не выполняются.

Чтобы к данному уравнению можно было применить метод Хироты, нужно, чтобы последнее уравнение было квадратичным (билинейным) относительно функции $F(x,t)$. Для этого требуется избавиться от членов, пропорциональных третьей степени F. Это можно сделать, поскольку мы строим частное решение. Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$(2-\sigma^2)\,F_x^3/F^3 = 0,$$

откуда сразу следует, что $\sigma = \sqrt{2}$. В результате получим уравнение билинейное (квадратное) относительно функции F. Это уравнение можно записать в виде

$$F_{xt}F - F_xF_t - F_{xxx}F + 3F_xF_{xx} - \\ - F_xF + \sqrt{2}F_x^2 = 0. \qquad (3)$$

Теперь представим функцию F в виде формального ряда теории возмущений

$$F = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \cdots, \qquad (4)$$

здесь $f_i = f_i(x,t), i = 1, 2, 3, \ldots$ – новые неизвестные функции, а ε – вообще говоря, не обязательно малый параметр.

Если подставить соотношение (4) в уравнение (3) и приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, то вместо уравнения (3) получим бесконечную систему линейных уравнений в частных производных, решая которую, можно, в принципе, определить все функции f_i, если они существуют. Только первое уравнение этой системы будет однородным, остальные уравнения – неоднородные.

Так как мы ищем решение, описывающее одиночный кинк, то нам понадобятся первые два уравнения этой системы. Они имеют вид

$$f_{1,\ xt} - f_{1,\ xxx} - f_{1,\ x} = 0, \qquad (5)$$

$$f_{2,\ xt} - f_{2,\ xxx} - f_{2,\ x} = \\ = f_{1,\ x}\,f_{1,\ t} - 3f_{1,\ x}\,f_{1,\ xx} - \sqrt{2}f_{1,\ x}^2. \qquad (6)$$

Будем искать функцию f_1 в виде

$$f_1 = \exp(kx - \omega t + \eta^0), \qquad (7)$$

где k и ω – параметры решения, которые в линейной теории имеют смысл волнового числа и частоты распространения волны. Параметр η^0 характеризует положение решения в начальный момент времени.

Подставим соотношение (7) в уравнение (5) и правую часть уравнения (6), которую затем приравняем нулю. В результате получим два уравнения вида

$$\omega = -k^2 - 1, \quad (8)$$

$$\omega + 3k^2 + \sqrt{2}k^2 = 0, \quad (9)$$

решая которые можно найти конкретные значения параметров k и ω. Уравнение (8) представляет собой дисперсионное соотношение для рассматриваемой задачи.

Теперь можно записать решение типа одиночного кинка уравнения (1) в явном виде:

$$u(x,t) = \frac{k}{\sqrt{2}}\left[1 + \tanh\left(\frac{kx - \omega t + \eta^0}{2}\right)\right]. \quad (10)$$

Чтобы проверить, что соотношение (10) является решением уравнения (1), подставим его в это уравнение и приравняем нулю коэффициенты при всех степенях функции гиперболического тангенса. В результате получим следующие соотношения:

$$\tanh^0\colon\ \omega - k^2 - \sqrt{2}k + 2 = 0,$$

$$\tanh^1\colon\ 2k^2 + \sqrt{2}k - 1 = 0,$$

$$\tanh^2\colon\ 2k^2 + \sqrt{2}k - 1 = 0,$$

$$\tanh^3\colon\ -\frac{k^3}{2\sqrt{2}} + \frac{k^3}{2\sqrt{2}} = 0.$$

Видно, что последнее соотношение выполняется тождественно. Используя соотношения (8) и (9) можно показать, что первые три соотношения также являются тождествами. Это доказывает, что соотношение (10) является решением уравнения (1). Это решение имеет вид решения, подобного кинку (с точностью до постоянного слагаемого). Решение немодифицированного уравнения ФКПП представляет собой сумму трех составляющих. Первая из них представляет обычный солитон, вторая – кинк, а третья – постоянное слагаемое. В результате учета в выражении для потенциальной энергии слагаемого следующего порядка удалось получить новое решение, которое не содержит солитонного вклада. Следовательно, система, описываемая модифицированным уравнением ФКПП (1) допускает существование доменной структуры, в то время как для немодифицированного уравнения ФКПП не приходится говорить о возможной доменной структуре поскольку, если она и имеет место, то является существенно искаженной солитонным вкладом.

Литература

1. Yirui Yang. Solitary wave solutions of FKPP equation using Homogeneous balance method / Yirui Yang, Wei Kou, Xiaopeng Wang and Xurong Chen // http://xxx.lanl.gov (arXiv: nlin.PS/2009.11378).

2. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / Москва: Мир, 1987. – 479 с.

3. Hietarinta J. Hirota's bilinear method and its generalization / J. Hientarita // Intern. J. Modern Physics. – 1997. – V. 12, № 1. – P. 43–51.

УДК 620.17

УСТРОЙСТВО И МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЧНОСТИ ТАБЛЕТОК НА СЖАТИЕ

Киселев М.Г., Богдан П.С., Соболев Д.В.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Определение механической прочности таблеток проводят на устройствах, одни из которых позволяют определить прочность таблеток на сжатие (раскол), другие – на истирание. Объективную оценку механических свойств таблеток можно получить, после определения их прочности обоими способами. Это объясняется тем, что ряд таблетируемых препаратов, удовлетворяя требованиям на сжатие, имеют легко истираемые края и по этой причине оказываются недоброкачественными.

На сегодня применяется большое количество устройств (тестеров) для проведения этих испытаний. Однако, как показал проведенный анализ, их использование требует уточнения отдельных положений методик и принципиальных схем проведения испытаний. В частности, при испытаниях на раздавливание таблеток не регламентировано значение скорости приложения сжимающей нагрузки, что влияет на точность определения усилия разрушения таблетки. В тестерах по определению истираемости таблеток используются схемы испытаний, при которых может происходить откалывание (раскалывание) таблеток, что в принципе является недопустимым.

В этой связи представляет значительный как научный, так и практический интерес исследования по оценке влияния скорости приложения сжимающей нагрузки на точность определения усилия разрушения таблетки, а также исследования, направленные на оптимизацию условий проведения испытаний таблеток на истираемость, в чем и заключалась цель данной работы.

Механическую прочность таблеток на сжатие определяют на специальных приборах. Они имеют два расположенных один напротив друго-