МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Электроснабжение»

В. Б. Козловская
В. В. Сталович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭНЕРГЕТИКИ

Пособие
к практическим занятиям и курсовому проектированию
для студентов специальности 1-43 01 03 01
«Электроснабжение промышленных предприятий»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области энергетики и энергетического оборудования*

Минск
БНТУ
2021

УДК 658.26:621.311:51(076.5)(075.8)
ББК 31.29-5я7
К59

Р е ц е н з е н т ы:
зам. директора ГП «Институт энергетики», канд. техн. наук,
доцент *Н. Е. Шевчик*;
кафедра «Электроснабжение» УО «Белорусский государственный
аграрный технический университет»

Козловская, В. Б.
К59 Математические задачи энергетики : пособие к практическим занятиям и курсовому проектированию для студентов специальности 1-43 01 03 01 «Электроснабжение промышленных предприятий» / В. Б. Козловская, В. В. Сталович. – Минск : БНТУ, 2021. – 43 с.
ISBN 978-985-583-552-4.

В пособии изложены основные положения теории вероятностей, математической статистики, необходимые для решения наиболее распространенных практических задач в области электроснабжения промышленных предприятий.

Предлагаемый материал иллюстрируется примерами. В приложении приводятся справочные материалы, необходимые для решения представленных задач.

Издание предназначено для студентов специальности 1-43 01 03 «Электроснабжение» специализации 1-43 01 03 01 «Электроснабжение промышленных предприятий», а также может быть полезно студентам других специальностей, изучающих данную дисциплину.

УДК 658.26:621.311:51(076.5)(075.8)
ББК 31.29-5я7

ISBN 978-985-583-552-4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В практической деятельности при проектировании, строительстве и эксплуатации предприятий для выполнения поставленной задачи инженеру постоянно приходится принимать решения. При проектировании это может быть выбор схемы или какого-то параметра системы электроснабжения (сечение проводов, мощность трансформатора и т. п.); при строительстве и монтаже – план и технология проведения отдельных работ и всего их комплекса; в эксплуатации это могут быть задачи выбора установок защит, определение точности приборов, параметров системы регулирования напряжения и т. д. При этом принятое решение будет тем более оптимальным, чем точнее и полнее учтен характер рассматриваемых процессов и чем большая информация будет получена о них.

Явления и процессы, происходящие в электроэнергетических системах обычно не являются детерминированными, то есть с точным результатом, а как правило, носят случайный характер, так как они формируются под воздействием большого количества разнообразных факторов. Однако при неоднократном повторении одного и того же опыта проявляются закономерности, которые можно изучить и использовать при исследовании.

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных – результатов наблюдений (измерений). Этими вопросами занимается математическая статистика, основная задача которой состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для анализа происходящих процессов и получения научных и практических выводов.

1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1.1. Математическая статистика и ее задачи в области электроэнергетики

Результаты любого эксперимента в той или иной степени зависят от комплекса условий, при которых он производится. Эти условия либо объективно существуют, либо создаются искусственно (то есть производится планирование эксперимента). По степени зависимости результатов эксперимента от условий, при которых он производится, все эксперименты условно можно разделить на два класса: детерминированные и вероятностные.

Детерминированные эксперименты – такие, результаты которых можно предвидеть заранее на основании комплекса естественно-научных законов исходя из данного комплекса условий.

Вероятностные (стохастические, случайные) эксперименты – те, которые можно повторять произвольное число раз при соблюдении одних и тех же (насколько это возможно) условий, но исход их все равно случаен. То есть нельзя заранее, на основании комплекса условий, предвидеть его результат. Однако, если вероятностный эксперимент повторять многократно при соблюдении (по возможности) одних и тех же условий, то совокупность исходов таких экспериментов подчиняется определенным закономерностям.

Изучением этих закономерностей (точнее их математических моделей) и занимается теория вероятностей**.** Однако теория вероятностей не занимается вопросом оценки качества построенной математической модели, насколько хорошо она согласуется с практикой. Этим вопросом занимается математическая статистика, она оценивает структуру математических моделей, предложенных для анализа вероятностного эксперимента. При этом решаются следующие задачи: планирование эксперимента, описание полученных результатов, анализ и прогноз, которые являются основными задачами математической статистики.

Планирование эксперимента является самостоятельной задачей со множеством условий, однако часто приходится иметь дело с уже сформированным пакетом исходных данных, поэтому будем считать, что эксперимент произведен и необходимо описать его результаты, проанализировать их и сделать прогноз.

Одним из основных методов описания и анализа данных эксперимента является *выборочный метод*. Рассмотрим его основные понятия.

Пусть изучается совокупность объектов относительно некоторого качественного признака. На практике редко имеет место сплошное наблюдение за изучаемым объектом, процессом, явлением. Иногда это бывает физически невозможно, иногда исследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат. В таких случаях случайно выбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Генеральной совокупностью в математической статистике называют множество возможных значений СВ. N-объем генеральной совокупности – число ее элементов.

Выборочной совокупностью (выборкой) называют множество наблюдаемых исходов эксперимента (часть объектов, значений), которое выбрано для изучения. n-объем выборки, то есть число элементов, входящих в выборку.

Таким образом, по результатам выборки $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ из генеральной совокупности требуется построить математическую модель. Для этого нужно решить следующие задачи:

1) выдвинуть гипотезу о типе распределения СВ X (нормальное, биноминальное и т. п.);

2) оценить параметры эмпирической функции распределения $F(x)$ по данным выборки;

3) проверить, согласуются ли результаты эксперимента с предложенной моделью.

Такой метод построения математической модели эксперимента называют выборочным.

Очень часто в качестве вероятностного эксперимента рассматривают процесс измерения некоторой величины. Простейшая и наиболее надежная модель такого эксперимента основывается на том, что при всех этих измерениях исследовалась одна и та же постоянная величина и условия оставались стабильными (например, измерения производились одним и тем же прибором). Тогда результаты измерения рассматривают как случайную репрезентативную выборку из бесконечной генеральной совокупности с нормальной функцией распределения.

1.2. Основные сведения из теории вероятностей

Случайной величиной (СВ) считается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение. Она может быть дискретной или не дискретной (непрерывной).

Дискретной называется СВ, множество возможных значений которой конечно или счетно.

Непрерывной называется СВ, множество возможных значений которой несчетно и ее возможные значения заполняют целиком некоторый интервал.

Законом распределения СВ называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных с ней.

Для дискретной СВ закон распределения может быть представлен, например, в виде таблицы:

X	X_1	X_2	…	X_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Функцией распределения СВ X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что СВ X в результате эксперимента примет значение, меньшее некоторого фиксированного x:

$$F(x) = P(X < x)).$$

Свойства $F(x)$:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0;$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(\infty) = 1.$

2) $F(x)$ – неубывающая функция,

то есть $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$

3) $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$ – то есть непрерывна слева.

Функция распределения – это ступенчатая разрывная функция непрерывная слева, $F(x) = 0$ левее наименьшего значения x и $F(x) = 1$ правее наибольшего значения x .

С помощью функции распределения можно определить вероятность попадания СВ X в интервал:

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = \\ = P(a < X < b) = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Функция распределения строится как для дискретной, так и для непрерывной СВ.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной СВ X в точке x называется производная ее функции распределения в этой точке:

$$f(x) = F'(x); \quad \text{а} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}(x).$$

График кривой $f(x)$ называют *кривой распределения*.

Свойства $f(x)$:

1) $f(x) \ge 0$;

2) $f(x)$ может быть либо непрерывной, либо состоять из кусков непрерывных функций;

3) площадь под кривой распределения численно равна 1.

Вероятность попадания СВ X в интервал с использованием плотности распределения вероятностей:

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)d(x). \quad (2)$$

Графически вероятность попадания СВ в заданный интервал определяется как площадь под кривой распределения в границах интервала (рис. 1).

Плотность вероятностей можно построить только для непрерывной СВ.

Числовые характеристики СВ:

– *математическое ожидание* – характеристика положения СВ; описывает центр распределения СВ.

$$M(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ \text{для дискретной СВ;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)d(x) \ \text{для непрерывной СВ;} \end{cases} \quad (3)$$

– *дисперсия, среднеквадратическое отклонение* – характеристики рассеяния, разброса СВ около ее математического ожидания.

$$D(x)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(x))^2\,p_i & \text{для дискретной СВ;}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(x))^2 f(x)d(x) & \text{для непрерывной СВ.}\end{cases} \qquad (4)$$

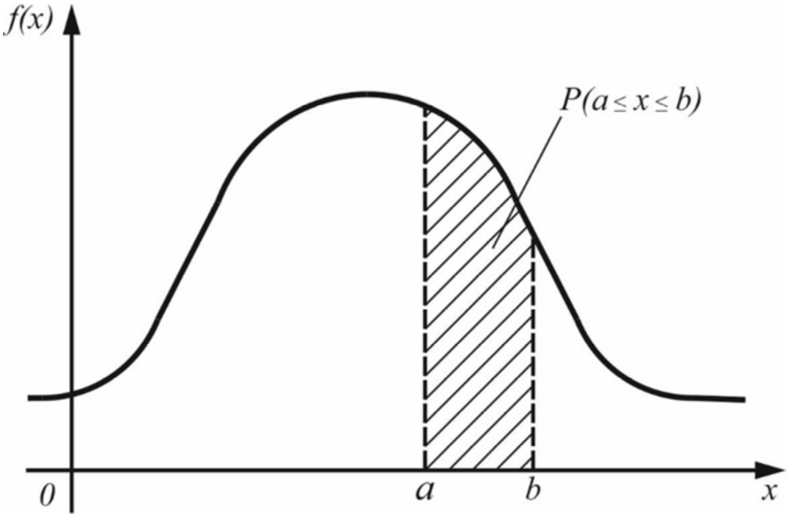


Рис.1. Графическое определение вероятности попадания СВ *x* в заданный интервал

Дисперсия имеет размерность квадрата СВ, что неудобно для анализа, поэтому для наглядности в качестве рассеяния удобнее пользоваться числом, размерность которого совпадает с размерностью СВ – среднеквадратическим отклонением

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}; \qquad (5)$$

– *размах* СВ

$$R=x_{\max}-x_{\min}. \qquad (6)$$

2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Понятие о статистическом распределении

В теории вероятностей распределением называлось соответствие между возможными значениями СВ и их вероятностями. В математической статистике это соответствие между наблюдаемыми значениями СВ и их частотами

$$p_i^* = \frac{n_i}{n}, \tag{7}$$

где n_i – число раз, которое приняла СВ данное значение;

n – объем выборки.

Статистический ряд (закон) распределения дискретной СВ представлен в виде таблицы:

x_1	x_2	…	x_n
p_1^*	p_2^*	…	p_n^*

Для непрерывной СВ числовой ряд разбивают на интервалы (разряды):

$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	…	$x_{n\text{-}1} - x_n$
p_1^*	p_2^*	…	p_{n-1}^*

Для получения статистического закона распределения следует использовать следующий порядок действий с исходными данными:

– результаты эксперимента располагают в порядке возрастания;

– разбивают их на разряды (чаще равной длины);

– подсчитывают, сколько значений СВ попало в каждый разряд (n_i) и частоту этих попаданий (p_i^*).

Гистограмма строится только для непрерывных статических рядов.

Далее выдвигается гипотеза о виде распределения, оцениваются параметры предполагаемого распределения, осуществляется проверка выдвинутой гипотезы.

Числовые характеристики непрерывной СВ могут определяться по следующим выражениям:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i^*, \tag{7}$$

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x))^2 p_i^*. \tag{8}$$

Статистическая функция распределения $F^*(x)$ – это частота такого события, когда СВ X в результате эксперимента примет значение, меньшее некоторого фиксированного x:

$$F^*(x) = P^*(X < x). \tag{9}$$

При неограниченном увеличении объема выборки n кривая $F^*(x)$ более гладкая и приближается к $F(x)$.

Однако, на практике удобнее пользоваться не кривой функции распределения, а гистограммой частот для описания и анализа экспериментальных данных.

Для построения гистограммы используется статистический аналог плотности распределения вероятностей $f(x)$ – плотность распределения частот $(f^*(x))$

$$f^*(x) = \frac{p_i^*}{h}, \tag{10}$$

где h –длина разряда.

Гистограммой распределения частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат разряды $(x_{n-1}; x_n)$, а высоты равны $f^*(x)$ или n_i.

Частота p_i^* является оценкой (приближенным значением) вероятности p_i. Закон больших чисел утверждает что если эксперимент повторялся n раз при одинаковых условиях, то частота события сходится к вероятности этого события $\frac{n_i}{n} \to p_i$.

Для статистического распределения строятся функции, аналогичные используемым в теории вероятностей, они позволяют анализировать и описывать эмпирические данные экспериментов и, соответственно, называются эмпирическими.

Эмпирической функцией распределения СВ X называется функция

$$F^*(x) = P^*(X < x). \tag{11}$$

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ используется в качестве оценки функции распределения $F(x)$ и при достаточно большом объеме выборки мало отличается от нее. Функция $F^*(x)$ обладает теми же свойствами, что и $F(x)$.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

3.1. Цели и задачи предварительной обработки исходных данных

Предварительная обработка данных преследует две основных цели:

1) очистка исходных данных от недостоверных значений;

2) предварительная оценка вида теоретического распределения, с которым согласуется данное эмпирическое (выборочное распределение).

Под очисткой исходных данных понимается исключение из исходных данных тех выборочных значений, которые соответствуют грубым ошибкам и локальным выбросам в исходные данные.

Грубые ошибки в исходных данных могут быть вызваны неисправностью измерительных приборов, трансформаторов тока или напряжения, ошибкой при снятии показаний приборов и т. д.

Локальные выбросы не связаны с ошибкой значения исходных данных. Они столь сильно отличаются от большинства значений в выборке, что их можно считать исходными данными другой выборки и отбрасывать.

3.2. Очистка исходных данных и анализ изменения случайных величин

Способы выявления грубых ошибок и локальных выбросов:

1) путем выявления «островков» в статистическом интервальном ряде в соответствующей гистограмме;

2) с использованием правила «трех сигм».

Оставшиеся после очистки исходные данные являются репрезентативными (достоверными). Они подлежат предварительному анализу по следующим характеристикам (на основании гистограмм):

– симметричность гистограммы;

– интервал наиболее частых значений СВ;

– диапазон разброса СВ.

Вторая цель предварительной обработки ИД – предварительная оценка вида закона распределения, с которым согласуется данная выборка, – достигается визуальной оценкой формы гистограммы соответствующих очищенных исходных данных, насколько она соответствует известным законам распределения.

4. ВЫРАВНИВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Во всяком статистическом распределении неизбежно присутствуют элементы случайности, связанные с тем, что число опытов ограничено, что произведены именно те, а не другие опыты, давшие именно те, а не другие результаты. Только при очень большом числе опытов эти случайности сглаживаются, и явление обнаруживает в полной мере присущие ему закономерности. На практике почти никогда не располагают таким большим числом опытов (наблюдений). Случаен ступенчатый вид статистической функции распределения непрерывной СВ; случайна форма гистограммы, ограниченной тоже ступенчатой линией. Неудобно пользоваться такими негладкими функциями при дальнейшем их преобразовании. Поэтому на практике часто приходится решать вопрос о том, как подобрать для данного статистического распределения аналитическую формулу, выражающую лишь существенные черты статистического материала, но не случайности, связанные с недостаточным объемом опытных данных. Такая задача называется задачей выравнивания статистических распределений.

Обычно выравниванию подвергаются гистограммы. Задача сводится к тому, чтобы заменить гистограмму плавной кривой, имеющей достаточно простое аналитическое выражение, и в дальнейшем пользоваться ею в качестве плотности распределения $f(x)$.

Принципиальный вид выравнивающей плавной кривой $f(x)$ выбирается заранее, исходя из условий возникновения СВ, а иногда просто из соображений, связанных с внешним видом гистограммы. Зачастую визуальный метод подбора вида закона распределения является единственно возможным.

Рассмотрим далее наиболее распространенные вероятностные модели распределения СВ. Для их более удобного применения составлены специальные таблицы, облегчающие работу с этими моделями.

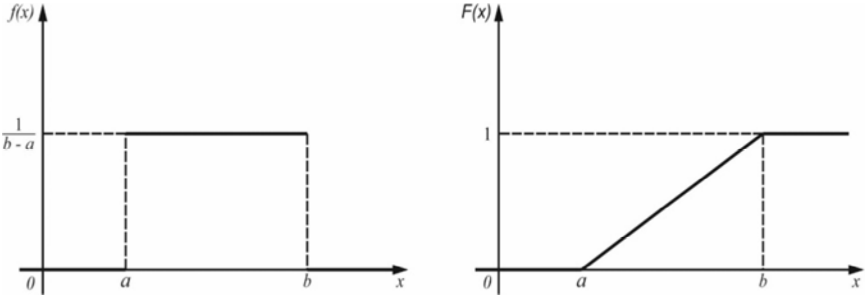
4.1. Основные законы распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение.

Случайная величина X имеет равномерное распределение на участке от a до b, если ее плотность $f(x)$ на этом участке постоянна.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a<x<b\\ 0, & \text{при } x>b\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a<x<b\\ 1, & \text{при } x>b\end{cases}\tag{12}$$

Значения $f(x)$ в крайних точках a и b не указываются, так как вероятность попадания в любую из этих точек для СВ равна 0.



$$M(x)=\frac{a+b}{2};\qquad D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

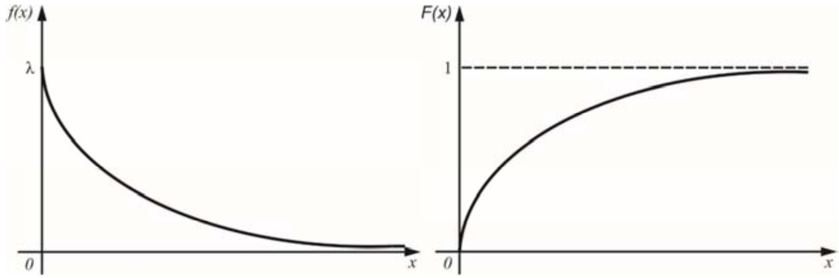
Равномерное распределение применяется как математическая модель ошибок показаний стрелочных приборов.

Показательное (экспоненциальное) распределение.

Непрерывная СВ X имеет это распределение, если:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x\ge 0;\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{при } x>0.\end{cases}.\tag{13}$$

Этот закон применяется в качестве одной из возможных математических моделей в теориях надежности, массового обслуживания и др.



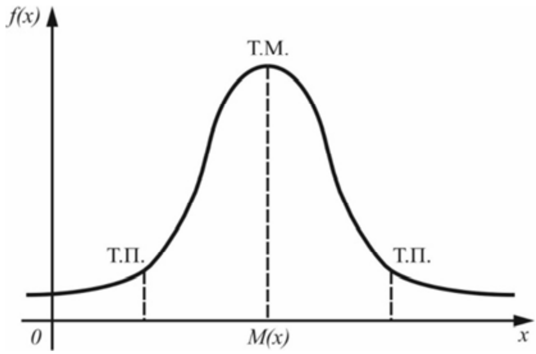
$$M(x)=\frac{1}{\lambda};\quad D(x)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Нормальное распределение (Закон Гаусса).

Непрерывная СВ X имеет нормальное распределение если:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma(x)\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-M(x))^2}{2\sigma^2(x)}},\qquad (14)$$

где $M(x)$ и $\sigma(x)$ – параметры распределения.



Свойства нормального распределения

1. Кривая лежит выше оси Ox, то есть $f(x) > 0$.

2. Ветви кривой асимптотически приближаются к оси Ox, то есть $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

3. Кривая имеет максимум в точке $x = M(x)$ равный $\dfrac{1}{\sigma(x)\sqrt{2\pi}}$.

4. Кривая имеет две точки перегиба с координатами:

$$(M(x)-\sigma(x); \frac{1}{\sigma(x)\sqrt{2\pi e}}) \quad \text{и} \quad (M(x)+\sigma(x); \frac{1}{\sigma(x)\sqrt{2\pi e}}).$$

5. Площадь под кривой, ограниченная прямыми $x = M(x) \pm \sigma(x)$ равна 0,64; $x = M(x) \pm 2\sigma(x)$ равна 0,95.

Вероятность того, что СВ X попадет в интервал $(x_1; x_2)$:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma(x)\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-M(x))^2}{2\sigma^2(x)}}\mathrm{d}x.$$

Этот интеграл не выражается через элементарные функции. Поэтому для удобства вычисления принято СВ «нормировать», то есть переходить от именованной СВ X к безразмерной переменной z:

$$z = \frac{x - M(x)}{\sigma(x)}. \tag{15}$$

В этом случае осуществляется перенос начала координат в точку $x = M(x)$, а в качестве единицы масштаба выбирается $\sigma(x)$. Таким образом $M(z) = 0$, $\sigma(z) = 1$.

$$P(x_1 < X < x_2) = P\left(\frac{x_1 - M(x)}{\sigma(x)} < \frac{X - M(x)}{\sigma(x)} < \frac{x_2 - M(x)}{\sigma(x)}\right) = \\ = P(z_1 < Z < z_2). \tag{16}$$

Указанную вероятность часто вычисляют с помощью специальной функции Лапласа.

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t. \tag{17}$$

$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2) = \Phi_0(z_2) - \Phi_0(z_1). \qquad (18)$$

$$P(X < x_1) = P(Z < z_1) = 0,5 + \Phi_0(z_1). \qquad (19)$$

Свойства функции Лапласа:

1. $\Phi_0(0) = 0;$
2. $\Phi_0(-\infty) = -\dfrac{1}{2};$
3. $\Phi_0(+\infty) = \dfrac{1}{2};$
4. $\Phi_0(-z) = -\Phi_0(z).$

Пользуясь формулой (18) и таблицей значений $\Phi_0(z)$ (прил. 2), можно определить вероятности попадания нормально распределенной СВ в заданный интервал.

5. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

5.1. Понятие о статистических гипотезах

Статистические гипотезы – это предположения о виде неизвестного распределения или о параметрах известного распределения.

Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. Поэтому эти гипотезы следует различать.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Альтернативной называют гипотезу H_1, противоречащую выдвинутой.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, ее называют статистической. В итоге статистической проверки гипотезы может быть принято неправильное решение, то есть могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Вероятность совершить ошибку первого рода называют уровнем значимости α. Вероятность совершить ошибку второго рода обозначают β.

Уменьшая вероятность ошибки первого рода, при фиксированном объеме выборки, мы увеличиваем вероятность совершить ошибку второго рода:

$$\lim_{\alpha \to 0} \beta = 1.$$

Единственный способ снижения вероятностей ошибок первого и второго рода – увеличение объема выборки:

$$\lim_{n \to \infty} \alpha = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \beta = 0.$$

При проверке статистических гипотез уровень значимости α фиксируется заранее исходя из того, что в теории вероятностей и математической статистике события, вероятность наступления которых не превышает 5 % (0,05), считают практически невозможными.

Путем проверки соответствующих гипотез решаются такие часто возникающие задачи, как сравнение однотипных производств по удельному расходу, сравнение новой и старой технологий производства какого-либо изделия, проверки точности работы различных приборов, регуляторов и т. п.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную СВ, распределение которой известно, – **критерий.** В общем случае обозначают K. Каждый критерий имеет свое обозначение: Z – нормального распределения, F – Фишера, t – Стьюдента и т. п.

По выборкам рассчитывают наблюдаемое значение критерия $K_{\text{набл.}}$ Далее необходимо проверить, попадает ли полученное значение $K_{\text{набл.}}$ в интервал (область допустимых значений критерия), обеспечивающий подтверждение проверяемой гипотезы.

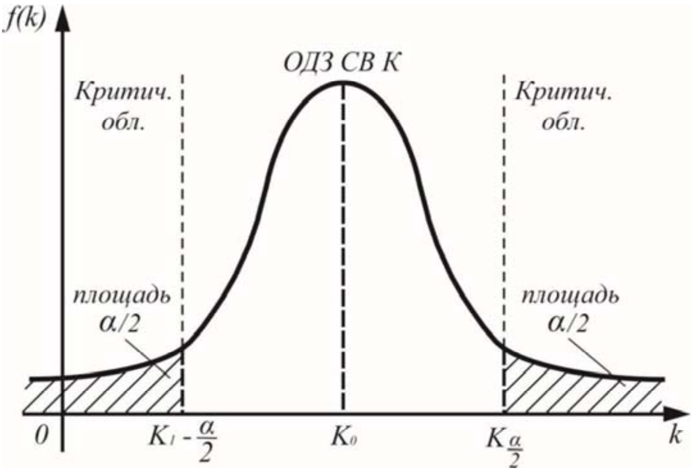


Рис. 5.1

Квантилем, отвечающим заданному уровню вероятности P, называют такое значение $x = x_p$, при котором функция распределения принимает значение, равное P, то есть

$$F(x_p) = P;$$

$$P(K \le K_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \int_{-\infty}^{K_{1-\frac{\alpha}{2}}} f(k)\mathrm{d}k = \frac{\alpha}{2}; \qquad (20)$$

$$P(K \ge K_{\frac{\alpha}{2}}) = \int_{K_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} f(k)\mathrm{d}k = \frac{\alpha}{2}; \qquad (21)$$

То есть вероятность того, СВ *К* будет находиться внутри области допустимых значений, равна (1 – α); а вероятность того, что она будет находится вне его, равна *α*.

Если критические области располагаются справа и слева от математического ожидания СВ *К*, то критерий называется **двусторонним** (рис. 5.1).

Если критическая область располагается только с одной стороны математического ожидания, то критерий *К,* соответственно, **лево-** или **правосторонний.**

5.2. Параметрические гипотезы

Это статистические гипотезы, в которых сформулированы предположения относительно значений параметров известного закона распределения.

Гипотеза о равенстве двух центров распределений

Пусть генеральные совокупности *X* и *Y* распределены нормально. По независимым выборам из них, объемы которых соответственно равны *n* и *m*, извлеченным из этих совокупностей, найдены выборочные средние *M*(*x*) и *M*(*y*) (центры распределений).

Требуется проверить при заданном уровне значимости α нулевую гипотезу о равенстве выборочных средних (центров распределения):

$$H_0{:}\, M(x) = M(y) \text{ при альтернативной } H_1{:}\, M(x) \ne M(y).$$

Такая задача ставится потому, что, как правило, выборочные средние оказываются различными. Возникает вопрос: значимо или незначимо это различие? Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, то различие выборочных средних незначимо и объясняется случайными причинами.

I вариант проверки гипотезы

Применяется в двух случаях:

– генеральные совокупности не распределены нормально и дисперсии их неизвестны; при этом выборки из них имеют большой объем (то есть $n \geq 30$) и независимы.

В этом случае наблюдаемое значение критерия:

$$z_{\text{набл.}} = \frac{M(x) - M(y)}{\sqrt{\frac{D(x)}{n} + \frac{D(y)}{m}}}. \tag{22}$$

Далее определятся $z_{\text{кр}}$ (по таблице функции Лапласа – прил. 2) из условия:

$$\Phi_0(z_{\text{кр}}) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Если $|z_{\text{набл.}}| < z_{\text{кр.}}$ нулевая гипотеза принимается, если $|z_{\text{набл.}}| > z_{\text{кр}}$ нулевая гипотеза отвергается.

II вариант проверки гипотезы

– генеральные совокупности x и y не распределены нормально, их дисперсии не известны и одинаковы, выборки имеют малый объем ($n < 30$) и независимы (например, сравниваются результаты измерений, произведенных одним и тем же прибором, то естественно допустить, что дисперсии контролируемых измерений одинаковы).

Если нет оснований считать дисперсии одинаковыми, то прежде чем сравнивать средние, следует проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух распределений.

Наблюдаемое значение критерия:

$$t_{\text{набл.}} = \frac{M(x) - M(y)}{\sqrt{(n-1)S^2(x) + (m-1)S^2(y)}} \sqrt{\frac{n \cdot m(n + m - 2)}{n + m}}, \tag{23}$$

где $S^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x))^2$, $S^2(y) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} (y_j - M(y))^2$ – несмещенные оценки дисперсий $D(x)$ и $D(y)$.

Эта величина имеет t-распределения Стьюдента с $k = n + m - 2$ степенями свободы.

Критическое значение $t_{\text{крит.}}(\alpha;k)$ определяют по таблице распределения Стьюдента (прил. 6).

Если $\left|t_{\text{набл.}}\right| < t_{\text{крит.}}(\alpha;\, k)$ – нулевая гипотеза принимается, если

$\left|t_{\text{набл.}}\right| > t_{\text{крит.}}(\alpha;\, k)$ – нулевая гипотеза отвергается.

Гипотеза о равенстве двух дисперсий распределений

На практике задача сравнения дисперсий возникает, если требуется сравнить точность приборов, инструментов, самих методов измерений и т. д.

Очевидно, предпочтительнее тот прибор, инструмент и метод, который обеспечивает наименьшее рассеяние результатов измерений, то есть наименьшую дисперсию.

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально. Из них извлечены выборки объемами соответственно n и m, по которым рассчитаны несмещенные оценки дисперсий $S^2(x)$ и $S^2(y)$. Требуется при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что дисперсии генеральных совокупностей равны между собой:

$$H_0\text{: } D(x) = D(y) \text{ при альтернативной } H_1\text{: } D(x) \neq D(y).$$

Такая задача возникает потому, что чаще всего несмещенные оценки дисперсии различны, и необходимо выяснить, значимо или нет это различие.

Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, то есть дисперсии генеральных совокупностей равны, то различие несмещенных оценок дисперсий незначимо и объясняется случайными факторами. Например, если различие результатов измерений, выполненных двумя приборами, оказалось незначимым, то приборы имеют одинаковую точность и наоборот.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей используется критерий Фишера:

$$F_{\text{набл.}} = \frac{S^2_{\text{большая}}}{S^2_{\text{меньшая}}}.$$

По таблицам прил. 5 определяется:

$$F_{\text{кр}}(\frac{\alpha}{2}; k_1; k_2),$$

где $k_1 = n-1$, $k_2 = m-1$ – число степеней свободы каждой выборки.

Если $F_{\text{набл.}} < F_{\text{кр}}$ – нулевая гипотеза принимается.

Если $F_{\text{набл.}} > F_{\text{кр}}$ – отвергается.

5.3. Непараметрические гипотезы

Статистическая гипотеза называется непараметрической, если в ней сформулированы предположения относительно вида закона распределения.

При обработке результатов эксперимента, как правило, по виду гистограммы или каких-либо других соображений выдвигается гипотеза о законе распределения *СВ*, производится оценка параметров этого распределения. Дальнейшая задача состоит в проверке выдвинутой гипотезы о законе распределения, насколько хорошо подобрана вероятностная модель ряда наблюдений.

Проверка гипотезы о предполагаемом распределении производится с помощью непараметрических критериев согласия. Наиболее распространенными среди них являются χ^2 Пирсона и λ-критерий Колмогорова.

Критерий согласия χ^2 Пирсона

Предположим, что произведено n независимых опытов, в каждом из которых СВ X приняла определенное значение. Разбиваем полученные значения на разряды и составляем группированный статистический ряд:

$x_1 \div x_2$	$x_2 \div x_3$	…	$x_{n-1} \div x_n$
p_1^*	p_2^*	…	p_{n-1}^*

Далее выдвигаем гипотезу о том, что СВ X имеет ряд распределения в виде таблицы:

x'_1	x'_2	…	x'_{n-1}
p_1	p_2	…	p_{n-1}

где x'_1 – значения СВ X, соответствующие серединам интервалов.

Обычно значения эмпирических частот p^* и соответствующих им вероятностей p отличаются. Возможно, это расхождение случайно (незначимо) и объясняется либо малым числом наблюдений, либо способом их группировки, либо другими причинами.

Возможно, что расхождение это неслучайно (значимо) и объясняется тем, что вероятности вычислены исходя из неверной гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

Критерий Пирсона отвечает на поставленный вопрос. Правда, как и любой критерий, он не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений.

Распределение χ^2 зависит от одного параметра – k (числа степеней свободы).

В практике часто используются квантили $\chi^2_{\alpha,\,k}$, при этом

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}) = \int_{\chi^2_{\alpha,k}}^{\infty} f(\chi^2)d(\chi^2) = \alpha.$$

Геометрически нахождение квантиля $\chi^2_{\alpha,\,k}$, заключается в таком выборе значения $\chi^2 = \chi^2_{\alpha,\,k}$, при котором заштрихованная площадь численно равна значению уровня значимости α.

При пользовании критерием χ^2 следует учитывать:

1. Объем выборки должен быть достаточно велик (не менее 50 значений).
2. Каждый разряд должен содержать не менее 5–8 значений.

Порядок проверки нулевой гипотезы о виде закона распределения с использованием критерия χ^2 (Пирсона):

1. Определяются вероятности попадания СВ X в соответствующие разряды(x_{i-1}; x_i) в соответствии с (18).

2. Рассчитывается наблюдаемое значение критерия χ^2:

$$\chi^2_{\text{набл.}} = n\sum_{i=1}^{s}\frac{(p_i - p_i^*)^2}{p_i}, \qquad (24)$$

где s – число разрядов.

3. Определяется критическое значение критерия $\chi^2_{\text{кр.}}(\alpha;k)$ (по таблице из прил. 4) в зависимости от α – уровня значимости и k – числа степеней свободы:

$$k = s - 1 - r,$$

где r – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

4. Производится сравнение:

если $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\text{кр.}}$, гипотеза о предполагаемом виде закона распределения верна;

если $\chi^2_{\text{набл.}} > \chi^2_{\text{кр.}}$, гипотеза о предполагаемом виде закона распределения отвергается.

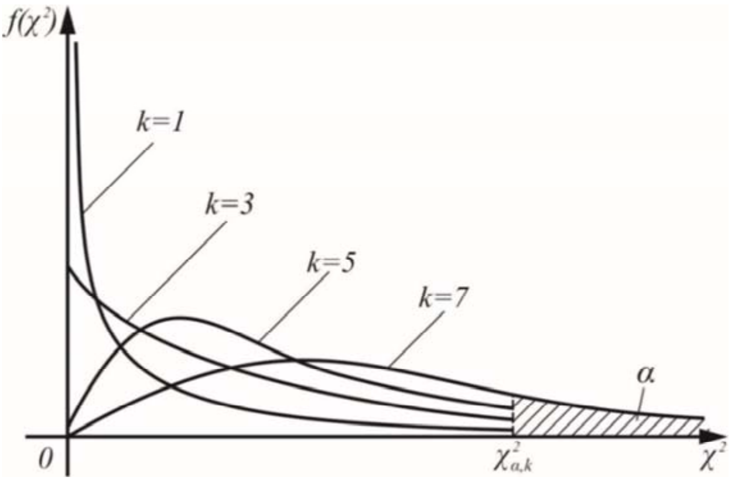


Рис. 5.2

6. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

6.1. Понятие о статистических оценках параметров распределения

В случае, когда имеется статистический материал небольшого объема, приходится вместо истинных значений числовых характеристик СВ использовать их приближенные значения – оценки.

Статистической оценкой неизвестного параметра Θ теоретического распределения называют функцию наблюдаемых случайных величин. Оценку обозначают Θ. Оценки подразделяются на точечные и интервальные.

6.2. Точечные оценки

Точечная оценка параметра Θ определяется одним числом $\widetilde{\Theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$. Однако, не каждую функцию $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно использовать в качестве оценочной функции неизвестного параметра Θ, а только определенные классы функций, близкие к оцениваемому параметру Θ. Имеется специальный раздел математической статистики – теория оценивания, которая занимается выработкой правил конструирования функций $\widetilde{\Theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ для нахождения точечных оценок неизвестных параметров.

Для того чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям:

– несмещенность. При использовании оценки Θ вместо параметра Θ не делается систематической ошибки в сторону завышения или занижения, то есть $M(\tilde{\Theta}) = \Theta$. Однако, несмещенная оценка не всегда дает хорошее приближение оцениваемого параметра. Возможные значения Θ могут быть сильно рассеяны вокруг своего среднего значения, то есть $D(\tilde{\Theta})$ может быть значительной. Поэтому к статистической оценке предъявляется требование:

– эффективность – выбранная несмещенная оценка должна обладать минимальной дисперсией: $D(\tilde{\Theta}) = \min$. При рассмотрении выборок большого объема к статистической оценке предъявляется требование:

– состоятельность. При увеличении объема выборки n оценка должна приближаться (сходиться по вероятности) к искомому параметру:

$$\tilde{\Theta} \xrightarrow{n\to\infty} \Theta.$$

На практике не всегда удается удовлетворить всем этим требованиям, но при выборе оценки любого параметра желательно ее критическое рассмотрение со всех этих точек зрения.

Существуют различные методы для определения точечных оценок:

– метод моментов (прост, но оценки получаются смещенные и малоэффективные; в случае нормального распределения СВ оценки получаются эффективные и состоятельные);

– метод наибольшего правдоподобия (сложен, но дает наилучшие оценки) ;

– метод наименьших квадратов (оценки малоэффективные) и др.

Если для изучения генеральной совокупности СВ X извлечена выборка объемом n, то выборочные оценки числовых характеристик СВ X определяются по формулам:

$$\begin{gathered}\tilde{M}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i^* = \overline{x};\\ \tilde{D}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot p_i^*.\end{gathered} \tag{25}$$

Но эта дисперсия является смещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности, поэтому ее «исправляют»:

$$\begin{gathered}S^2(x) = \frac{n}{n-1}\cdot \tilde{D}(\mathrm{x}) = \frac{n}{n-1}\cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot p_i^* =\\ = \frac{1}{n-1}\cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i.\end{gathered} \tag{26}$$

Значения $\tilde{D}(x)$ и $S^2(x)$ отличаются только знаменателем, при этом при больших объемах выборок это различие мало. Поэтому при $n < 30$ пользуются формулой (26) для вычисления дисперсии, а при $n \geq 30$ − формулой (25).

6.3. Интервальные оценки

Точечная оценка неизвестного параметра Θ, найденного по выборке объемом n из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$, не позволяет непосредственно ответить на вопрос, какую ошибку мы совершаем, принимая вместо точного значения неизвестного параметра некоторое его приближенное значение (оценку) $\widetilde{\Theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$. При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, то есть приводить к грубым ошибкам.

В связи с этим, при выборках малого объема нужно пользоваться интервальной оценкой, основанной на определении интервала, внутри которого с определенной вероятностью находятся неизвестные значения параметра Θ.

Пусть найденная по результатам выборки объемом n статическая характеристика $\widetilde{\Theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ является точечной оценкой неизвестного параметра Θ. Чем меньше разность, тем лучше качество оценки, тем точнее оценка. Таким образом, положительное число ε, называемое **предельной погрешностью**, характеризует точность оценки:

$$\left|\Theta - \tilde{\Theta}\right| < \varepsilon. \tag{27}$$

Однако статистические методы не позволяют утверждать, что оценка Θ обязательно удовлетворяет неравенству (27), можно лишь говорить о вероятности γ, с которой это неравенство осуществляется.

Доверительной вероятностью (надежностью) называют вероятность $P = (1-\alpha) = \gamma$ выполнения неравенства (27), где α – уровень значимости. Обычно доверительной вероятностью оценки задаются заранее. В технических расчетах обычно полагают $\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$. Доверительная вероятность точечной оценки показывает, что при извлечении выборок объемом n из одной и той же генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$ в $(1 - \alpha) \cdot 100$ % случаях параметр Θ будет накрываться интервалом:

$$P(|\Theta - \tilde{\Theta}| < \varepsilon) = \gamma, \tag{28}$$

$$P(\tilde{\Theta} - \varepsilon < \Theta < \tilde{\Theta} + \varepsilon) = \gamma. \tag{29}$$

То есть неизвестный параметр Θ заключен внутри интервала $(\tilde{\Theta} - \varepsilon)$; $(\tilde{\Theta} + \varepsilon)$, который называется ***доверительным интервалом (точностью)***, накрывающим неизвестный параметр Θ с заданной доверительной вероятностью. Длина доверительного интервала равна 2ε.

В практических задачах важную роль играет длина доверительного интервала, причем, чем меньше его длина, тем точнее оценка. Если же длина доверительного интервала велика, то оценка малопригодна для практики.

Рассмотренные величины ε и γ связаны между собой и, кроме того, зависят от объема выборки n. Поэтому при интервальном оценивании неизвестного параметра может решаться одна из трех возможных задач:

1) найти доверительный интервал, определяемый предельной погрешностью ε, покрывающий с заданной доверительной вероятностью γ неизвестный параметр, оценка которого определяется на основании выборки объемом n;

2) определить, с какой доверительной вероятностью γ покрывает доверительный интервал длинной 2ε искомый параметр, оцениваемый по выборке объемом n;

3) найти минимальный объем выборки n, на основании которого можно было бы оценить искомый параметр с предельной погрешностью, не превышающей ε и доверительной вероятностью γ.

Доверительные интервалы для математического ожидания нормального распределения при известном среднеквадратическом отклонении

Пусть имеем СВ X, имеющую нормальное распределение:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(x) \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-M(x))^2}{2 \cdot \sigma^2(x)}}.$$

Будем считать, что $\sigma(x)$ известно. Необходимо оценить математическое ожидание, построив доверительный интервал, накрывающий этот неизвестный параметр с надежностью (доверительной вероятностью) γ.

Из генеральной совокупности извлекается выборка объемом $n \geq 30$. На основании этой выборки определяется точечная оценка математического ожидания:

$$\tilde{M}(x) = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Найдем числовые характеристики этой оценки. В фундаментальных курсах математической статистики доказывается теорема о том, что если независимые случайные величины имеют нормальное распределение, то их выборочная средняя также имеет нормальное распределение с параметрами:

$$M(\tilde{M}(x)) = M(x);$$

$$\sigma(\tilde{M}(x)) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}.$$

Тогда в соответствии с (28):

$$P(\left|\tilde{M}(x) - M(x)\right| < \varepsilon) = \gamma;$$

$$P(\tilde{M}(x) - \varepsilon < M(x) < \tilde{M}(x) + \varepsilon) =$$

$$= \Phi_o\left(\frac{(\tilde{M}(x) + \varepsilon) - M(x)}{\sigma(x) / \sqrt{n}}\right) - \Phi_o\left(\frac{(\tilde{M}(x) - \varepsilon) - M(x)}{\sigma(x) / \sqrt{n}}\right) =$$

$$= 2 \cdot \Phi_o\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma(x)}\right) = \gamma,$$

где $\Phi_o(z)$ – функция Лапласа.

$$z = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma(x)}; \tag{30}$$

$$\varepsilon = z \cdot \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}. \tag{31}$$

В этом случае квантиль нормированного нормального распределения z определяется по таблице функции Лапласа (прил. 2) из равенства $2 \cdot \Phi_o(z) = \gamma$.

$$n_{\min} = z^2 \frac{\sigma^2(x)}{\varepsilon^2}. \tag{32}$$

Доверительные интервалы для математического ожидания нормального распределения при неизвестном среднеквадратическом отклонении

Пусть имеем СВ X, имеющую нормальное распределение:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(x) \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x - M(x))^2}{2 \cdot \sigma^2(x)}}$$

для которой будем считать неизвестными $M(x)$ и $\sigma(x)$. По выборке объемом $n < 30$ можно определить точечные оценки этих параметров:

$$\tilde{M}(x) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i;$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 \cdot p^*_i};$$

$$P(\tilde{M}(x) - \varepsilon < M(x) < \tilde{M}(x) + \varepsilon) = 1 - \Phi(t_{\alpha,k}) = \gamma = 1 - \alpha.$$

Производятся рассуждения аналогичные предыдущему параграфу, однако, в этом случае по данным выборки строится величина $t_{\alpha,k}$ – квантиль распределения Стьюдента, определяемый по таблице прил. 3 в зависимости от α – уровня значимости и числа степеней свободы $k = n - 1$.

$$t_{\alpha,k} = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{S(x)}. \tag{33}$$

Значение предельной погрешности ε, определяющей длину доверительного интервала, рассчитывается по формуле:

$$\varepsilon = t_{\alpha,k} \cdot \frac{S(x)}{\sqrt{n}}. \tag{34}$$

Минимальный объем выборки, обеспечивающий не превышение заданной предельной погрешности при заданной доверительной вероятности можно рассчитать по формуле:

$$n_{\min} = t^2_{\alpha,k} \cdot \frac{S^2(x)}{\varepsilon^2}. \tag{35}$$

Распределение Стьюдента определяется параметром n и не зависит от неизвестных параметров $M(x)$ и $\sigma(x)$. Это большое достоинство. При неограниченном возрастании объема выборки n, распределение Стьюдента стремится к нормальному, поэтому при $n > 30$ вместо распределения Стьюдента можно применять нормальное распределение.

Примеры задач

1. Определение вероятности непревышения договорной величины потребляемой предприятием активной мощности (при условии нормального распределения случайной величины P). В основе решения этой задачи лежит определение функции распределения:

$$F(x) = P(X < x);$$

$$P_{\text{дог}} = P_{\text{факт}} < P_{\text{дог}},$$

$P_{\text{дог}}$ – договорная величина потребления предприятием активной мощности (указывается в договоре с электроснабжающей организацией как разрешенная к использованию, превышение $P_{\text{дог}}$ ведет к штрафам).

$P_{\text{факт}}$ – СВ мощности предприятия.

$$P(P_{\text{факт}} \le P_{\text{дог}}) = 0,5 + \Phi_0(z) = 0,5 + \Phi_0\left(\frac{P_{\text{дог}} - \overline{P}}{\sigma(P)}\right),$$

где Φ_0 – функция Лапласа.

2. Определение вероятности превышения договорной величины потребляемой предприятием активной мощности.

$P(P_{\text{факт}} > P_{\text{дог}})$ – вероятность события, противоположного предыдущему, причем эти два противоположных события составляют полную группу несовместных событий (не могут произойти одновременно).

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1;$$

$$P(P_{\text{факт}} > P_{\text{дог}}) = 1 - P(P_{\text{факт}} \le P_{\text{дог}}) =$$
$$= 1 - (0,5 + \Phi_0(\frac{P_{\text{дог}} - \overline{P}}{\sigma(P)})) = 0,5 - \Phi_0(\frac{P_{\text{дог}} - \overline{P}}{\sigma(P)}).$$

3. Определение вероятности нахождения величины напряжения в заданных пределах.

$$P(U_{\min} < U < U_{\max}) = \Phi_0(\frac{U_{\max} - \bar{U}}{\sigma(U)}) - \Phi_0(\frac{U_{\min} - \bar{U}}{\sigma(U)}),$$

где Φ_0 – функция Лапласа.

4. Определение границ доверительного интервала ожидаемой величины мощности, потребляемой предприятием. По определению:

$$(\tilde{\Theta} - \varepsilon;\ \tilde{\Theta} + \varepsilon),$$

$$\left(\tilde{M}(P) - \varepsilon\colon \tilde{M}(P) + \varepsilon\right),$$

$$\left(\bar{P} - \varepsilon;\ \bar{P} + \varepsilon\right),$$

где ε определяется по формулам (31), (34) в зависимости от условий задачи.

Таблица значений функции $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Окончание прил. 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции Лапласа $\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{\frac{-t^2}{2}} dt$

z	$\Phi_0(z)$	z	$\Phi_0(z)$	z	$\Phi_0(z)$	z	$\Phi_0(z)$
0,00	0,0000	0,31	0,1217	0,62	0,2324	0,93	0,3238
0,01	0,0040	0,32	0,1255	0,63	0,2357	0,94	0,3264
0,02	0,0080	0,33	0,1293	0,64	0,2389	0,95	0,3289
0,03	0,0120	0,34	0,1331	0,65	0,2422	0,96	0,3315
0,04	0,0160	0,35	0,1368	0,66	0,2454	0,97	0,3340
0,05	0,0199	0,36	0,1406	0,67	0,2486	0,98	0,3365
0,06	0,0239	0,37	0,1443	0,68	0,2517	0,99	0,3389
0,07	0,0279	0,38	0,1480	0,69	0,2549	1,00	0,3413
0,08	0,0319	0,39	0,1517	0,70	0,2580	1,01	0,3438
0,09	0,0359	0,40	0,1554	0,71	0,2611	1,02	0,3461
0,10	0,0398	0,41	0,1591	0,72	0,2642	1,03	0,3485
0,11	0,0438	0,42	0,1628	0,73	0,2673	1,04	0,3508
0,12	0,0478	0,43	0,1664	0,74	0,2703	1,05	0,3531
0,13	0,0517	0,44	0,1700	0,75	0,2734	1,06	0,3554
0,14	0,0557	0,45	0,1736	0,76	0,2764	1,07	0,3577
0,15	0,0596	0,46	0,1772	0,77	0,2794	1,08	0,3599
0,16	0,0636	0,47	0,1808	0,78	0,2823	1,09	0,3621
0,17	0,0675	0,48	0,1844	0,79	0,2852	1,10	0,3643
0,18	0,0714	0,49	0,1879	0,80	0,2881	1,11	0,3665
0,19	0,0753	0,50	0,1915	0,81	0,2910	1,12	0,3686
0,20	0,0793	0,51	0,1950	0,82	0,2939	1,13	0,3708
0,21	0,0832	0,52	0,1985	0,83	0,2967	1,14	0,3729
0,22	0,0871	0,53	0,2019	0,84	0,2995	1,15	0,3749
0,23	0,0910	0,54	0,2054	0,85	0,3023	1,16	0,3770
0,24	0,0948	0,55	0,2088	0,86	0,3051	1,17	0,3790
0,25	0,0987	0,56	0,2123	0,87	0,3078	1,18	0,3810
0,26	0,1026	0,57	0,2157	0,88	0,3106	1,19	0,3830
0,27	0,1064	0,58	0,2190	0,89	0,3133	1,20	0,3849
0,28	0,1103	0,59	0,2224	0,90	0,3159	1,21	0,3869
0,29	0,1141	0,60	0,2257	0,91	0,3186	1,22	0,3883
0,30	0,1179	0,61	0,2291	0,92	0,3212	1,23	0,3907

z	$\Phi_0(z)$	z	$\Phi_0(z)$	z	$\Phi_0(z)$	z	$\Phi_0(z)$
1,24	0,3925	1,58	0,4429	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,25	0,3944	1,59	0,4441	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,26	0,3962	1,60	0,4452	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,27	0,3980	1,61	0,4463	1,95	0,4744	2,50	0,4948
1,28	0,3997	1,62	0,4474	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,29	0,4015	1,63	0,4484	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,30	0,4032	1,64	0,4495	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,31	0,4049	1,65	0,4505	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,32	0,4066	1,60	0,4515	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,33	0,4082	1,67	0,4525	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,34	0,4099	1,68	0,4535	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,35	0,4115	1,69	0,4545	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,36	0,4131	1,70	0,4554	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,37	0,4147	1,71	0,4564	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,38	0,4162	1,72	0,4573	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,39	0,4177	1,73	0,4582	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,40	0,4192	1,74	0,4591	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,41	0,4207	1,75	0,4599	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,42	0,4222	1,76	0,4608	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,43	0,4235	1,77	0,4616	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,44	0,4251	1,78	0,4625	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,45	0,4265	1,79	0,4633	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,46	0,4279	1,80	0,4641	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,47	0,4292	1,81	0,4649	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,48	0,4306	1,82	0,4056	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,49	0,4319	1,83	0,4664	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,50	0,4332	1,84	0,4671	2,30	0,4909	3,20	0,49931
1,51	0,4345	1,85	0,4678	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,52	0,4357	1,86	0,4686	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,53	0,4370	1,87	0,4693	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,54	0,4382	1,83	0,4699	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,55	0,4394	1,89	0,4706	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,56	0,4406	1,90	0,4713	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,57	0,4418	1,91	0,4719				

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критические точки распределений Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α				
	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2
1	6,6	5,0	3,8	2,706	1,642
2	9,2	7,4	6,0	4,605	3,219
3	11,3	9,4	7,8	6,251	4,642
4	13,3	11,1	9,5	7,779	5,989
5	15,1	12,8	11,1	9,236	7,289
6	16,8	14,4	12,6	10,645	8,558
7	18,5	16,0	14,1	12,017	9,803
8	20,1	17,5	15,5	13,362	11,030
9	21,7	19,0	16,9	14,684	12,242
10	23,2	20,5	18,3	15,987	13,442
11	24,7	21,9	19,7	17,275	14,631
12	26,2	23,3	21,0	18,549	15,812
13	27,7	24,7	22,4	19,812	16,985
14	29,1	26,1	23,7	21,064	18,151
15	30,6	27,5	25,0	22,307	19,311
16	32,0	28,8	26,3	23,542	20,465
17	33,4	30,2	27,6	24,769	21,615
18	34,8	31,5	28,9	25,989	22,760
19	36,2	32,9	30,1	27,204	23,900
20	37,6	34,2	31,4	28,412	25,038
21	38,9	35,5	32,7	29,615	26,171
22	40,3	36,8	33,9	30,813	27,301
23	41,6	38,1	35,2	32,007	28,429
24	43,0	39,4	36,4	33,196	29,553
25	44,3	40,6	37,7	34,382	30,675
26	45,6	41,9	38,9	35,563	31,795
27	47,0	43,2	40,1	36,741	32,912
28	48,3	44,5	41,3	37,916	34,027
29	49,6	45,7	42,6	39,087	35,139
30	50,9	47,0	43,8	40,256	36,250

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Распределения Фишера

Критические точки:

k_1 – число степеней свободы большей дисперсии;

k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии.

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	99,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,512	18,999	19,163	19,248	19,298	19,329	19,371	19,414	19,453	19,496
3	10,129	9,552	9,276	9,118	9,014	8,941	8,844	8,744	8,638	8,527
4	7,710	6,945	6,591	6,388	6,257	6,164	6,041	5,912	5,774	5,628
5	6,607	5,786	5,410	5,192	5,050	4,950	4,818	4,678	4,527	4,365
6	5,9871	5,143	4,756	4,534,	4,388	4,284	4,147	4,000	3,841	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,121	3,972	3,866	3,725	3,574	3,410	3,230
8	5,317	4,459	4,067	3,838	3,688	3,580	3,438	3,284	3,116	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,900	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,737	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,3571	3,204	3,094	2,948	2,788	2,609	2,405
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,999	2,848	2,686	2,505	2,296
13	4,66	3,805	3,410	3,179	3,025	2,915	2,767	2,604	2,420	2,207
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,349	2,131
15	4,543	3,683	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,0071	2,853	2,7411	2,591	2,424	2,2351	2,010
17	4,45	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,190	1,961
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,342	2,150	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,629	2,477	2,308	2,114	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,278	2,083	1,843
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,6851	2,573	2,421	2,2501	2,054	1,812
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,226	2,028	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,795	2,640	2,528	2,375	2,203	2,005	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,777	2,621	2,508	2,355	2,183	1,984	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,165	1,965	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,5871	2,474	2,321	2,148	1,947	1,691
27	4,210	3,354	2,961	2,728	2,572	2,459	2,305	2,132	1,930	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,292	2,118	1,915	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,702	2,545	2,432	2,278	2,104	1,901	1,638
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,092	1,887	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,608	2,449	2,336	2,180	2,004	1,793	1,509
60	4,001	3,151	2,758	2,523	2,368	2,254	2,097	1,918	1,700	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,106	1,834	1,608	1,254
∞	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,098	1,938	1,752	1,517	1,000

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2001. – 479 с.
2. Герасимович, А. И. Математическая статистика: учебное пособие для инженерно-технических и экономических специальностей ВТУЗов / А. И. Герасимович. – Минск: Выш. школа, 1983. – 279 с.
3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Наука, 1988. – 480 с.
4. Смирнов, Н. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. – М.: Наука, 1965. – 512 с.
5. Синьков, В. М. Математические задачи сельской электрификации / В. М. Синьков, С. И. Пересыпкина, Н. М. Филиппов – Киев: Вища школа, 1978. – 288 с.

Учебное издание

КОЗЛОВСКАЯ Влада Борисовна
СТАЛОВИЧ Виталий Валерьевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭНЕРГЕТИКИ

Пособие
к практическим занятиям и курсовому проектированию
для студентов специальности 1-43 01 03 01
«Электроснабжение промышленных предприятий»

Редактор *В. И. Акуленок*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 04.01.2021. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,00. Тираж 100. Заказ 1068.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.