случаев дать оценку приближенным численным методам и той математической модели, которая положена в основу расчета.

Литература

1. Я.С. Уфлянд. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. // АН СССР, М. – Л., 1963г. – 367 с.
2. В.А. Акимов. Операторный метод решения задач теории упругости. Монография / Мн.:УП «Технопринт», 2003. – 101 с.

УДК 517.9

Определение вида кривой по заданному радиусу ее кривизны

Акимов В.А, Гончарова С.В.
Белорусский национальный технический университет

Автомобильные дороги являются одними из наиболее рентабельных сооружений. Проектирование автомобильных дорог должно быть направлено на достижение их высоких транспортно-эксплуатационных качеств. Правильно запроектированная дорога обеспечивает безопасность движения как одиночных автомобилей с расчетными скоростями, так и транспортных потоков с высокими уровнями удобств даже в самые напряженные периоды работы дорог. Авторы данной работы предлагают при проектировании закруглений, наряду с известными переходными кривыми использовать новые типы кривых, задаваемых посредством переменного радиуса кривизны.

Первоначально примем проекцию радиуса кривизны R на ось абсцисс равной постоянной величине $a = 1$. Найдем уравнение кривой, если она проходит через начало координат и в этой точке ортогональной оси абсцисс.

Радиус кривизны $R = \dfrac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}$. Направляющий косинус радиуса кривизны как направляющий косинус нормали $\cos\alpha = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

По условию задачи $R\cos\alpha = a$, откуда дифференциальное уравнение искомого семейства кривых $y'(1+y'^2) = ay''$.

Решаем это уравнение типа $y'' = f(y')$ и получаем его общий интеграл

$\dfrac{x-C_1}{a} = \ln\sin\dfrac{y-C_2}{a}$ или общее решение $y = a\arcsin e^{\frac{0-C_1}{a}} + C_2$ и, так как

$y' = \dfrac{e^{\frac{x-C_1}{a}}}{\sqrt{1-e^{\frac{2(x-C_1)}{a}}}}$, то $\infty = \dfrac{e^{\frac{0-C_1}{a}}}{\sqrt{1-e^{\frac{2(0-C_1)}{a}}}}$.

Для определения постоянных интегрирования имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a\arcsin e^{-\frac{C_1}{a}} + C_2 = 0, \\ 1-e^{-\frac{2C_1}{a}} = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 0$; $C_2 = -\dfrac{a\pi}{2}$.

Подставляем найденные значения в общее решение и получаем $y = \arcsin e^{\frac{x}{a}} - \dfrac{a\pi}{2}$.

При $a = 1$ имеем уравнение искомой кривой $y = \arcsin e^{x} - \dfrac{\pi}{2}$ или

$$x = \ln\cos y\,. \tag{1}$$

А теперь полагаем, что радиус кривизны кривой имеет флуктуацию вида $R = \sqrt{a^2 - y^2}$.

По аналогии с приведенным выше решением получим следующее дифференциальное уравнение (ДУ) $y'(1+y'^2) = \sqrt{a^2-y^2}\,y''$.

Понизим порядок уравнения, полагая $y' = P(y)$.

Тогда $y'' = P\dfrac{dP}{dy}$ и ДУ принимает вид $1+P^2 = \sqrt{a^2-y^2}\,\dfrac{dP}{dy}$.

Разделяя переменные, получим $\dfrac{dP}{1+P^2} = \dfrac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$.

Интегрируя полученное уравнение, приходим к соотношению $arctgP = \arcsin\left(\frac{y}{a} + C_1\right)$. Считая, что кривая выходит из точки $(0;a)$ горизонтально, получим $C_1 = 0$. С учетом $tg(\arcsin b) = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}$, имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$. Разделяя переменные, находим $\int y^{-1}\sqrt{a^2 - y^2}dy = x + C_2$.

Стоящий слева интеграл, находим в /1/ стр. 65, пример 361.01

$$\int y^{-1}\sqrt{a^2 - y^2}dy = \sqrt{a^2 - y^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right|.$$

Тогда будем иметь $x + C_2 = \sqrt{a^2 - y^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right|$

Так как прямая проходит через точку $(0,a)$, то $C_2 = 0$, окончательно получим зависимость вида $x = f(y)$:

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right| \tag{2}$$

То обстоятельство, что радиус кривизны заранее известен, делает более удобным расчет динамических характеристик движущегося по дороге автотранспорта. В этом и заключается преимущество данного подхода.

Литература

1. Г.Б. Двайт Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., 1973 г., 228 стр. с илл.