УДК 372.851

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДЕЛИМОСТИ СУММ ЦИФР ЧИСЕЛ НА НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

[1]Чернявская С.В., к.ф.-м.н., доцент,
[2]Зейфман И.С., учитель математики
[1]Белорусский национальный технический университет,
[2]ГУО «СШ № 144»
Минск, Республика Беларусь

Аннотация: Рассматриваются нестандартные задачи, связанные с делимостью чисел и сумм цифр чисел на натуральные числа. Описываются условия, при которых сумма цифр числа делится на заранее заданное число.

Ключевые слова: последовательные натуральные числа, делимость, сумма цифр числа.

SOME QUESTIONS OF DIVISIBILITY NUMBERS' SUMS OF DIGITS BY NATURAL NUMBERS

[1]Chernyavskaya S.V., Ph.D., associate professor,
[2]Zeifman I.S., mathematics teacher
[1]Belarusian National Technical University,
[2]Secondary School № 144
Minsk, Republic of Belarus

Summary: Problems related to the divisibility of numbers and sums of digits of numbers by natural numbers are considered. Describes the conditions under which the sum of digits of a number is divided by a predefined number.

Keywords: consecutive natural numbers, divisibility, sum of digits of a number.

Актуальной задачей учителя при обучении математике является формирование умений учащихся обобщать полученные знания и находить закономерности в математических процессах, развитие алгоритмического мышления, способности конструировать новые алгоритмы в решении задач. Для достижения некоторых из перечисленных целей можно рекомендовать рассмотреть с учащимися ряд нестандартных заданий, связанных с делимостью чисел и сумм цифр чисел. В результате решения предложенных задач нужно получить зависимость между минимальным количеством подряд идущих чисел, среди которых найдётся хотя бы одно, сумма цифр которого делится на заданное число и этим числом.

Задача. ***Каково минимальное количество последовательных натуральных чисел, среди которых обязательно найдётся такое, сумма цифр которого делится на заданное число.***

Разобьем эту общую задачу на ряд более мелких заданий, в результате решения которых будет получена общая закономерность.

Задача 1. Найти минимальное количество подряд идущих натуральных чисел, среди которых найдётся по крайней мере одно такое, сумма цифр которого делится на *2*.

Решение: Выберем три произвольных подряд идущих числа a_1, a_2, a_3. Если среди них нет таких, которые заканчиваются на *0*, то $S(a_3)=S(a_2)+1=S(a_1)+2$, где $S(a_i)$ – сумма цифр числа a_i. Ясно, что или $S(a_3)$ чётное, или $S(a_2)$ чётное. Если есть число, заканчивающееся на *0,* то есть $a_1=b_nb_{n-1...}b_10$, и $S(a_1)$ нечётное, то $S(a_2)=S(a_1)+1$ – чётное. Если $S(a_1)$ чётное, то оно делится на *2*. Пусть $a_2= b_nb_{n-1...}b_10$, $a_3= b_nb_{n-1...}b_11$. Значит суммы цифр этих чисел разной чётности и одна из них делится на *2*. Если $a_3=b_nb_{n-1...}b_10$, где последняя цифра числа a_2 *–9*, а число a_1 состоит из тех же цифр что и a_2, кроме последней (вместо *9 – 8)*. Значит суммы цифр чисел a_1 *и* a_2 разной чётности, и одна из них делится на *2*.

Задача 2. Найти минимальное количество подряд идущих натуральных чисел, среди которых найдётся по крайней мере одно такое, сумма цифр которого делится на *3*.

Решение: Выберем три произвольных подряд идущих числа a_1, a_2, a_3. Ясно, что хотя бы одно из них делится на *3*,тогда и сумма цифр одного из них будет делиться на *3*. Число *a* делится на *3*, значит и число $(a+3)$ делится на *3*. Следовательно, $S(a)$ делится на *3* и $S(a+3)$ делится на *3*.

Задача 3. Найти минимальное количество подряд идущих натуральных чисел, среди которых найдётся хотя бы одно такое, сумма цифр которого делится на *5*.

Решение: Возьмём девять произвольных подряд идущих чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7,a_8,a_9. Если среди них нет такого, которое заканчивается на *0*, то сумма цифр хотя бы одного числа делится на *5*, так как $S(a_9)=S(a_8)+1=S(a_7)+2=S(a_6)+3=S(a_5)+4=S(a_4)+5=S(a_3)+6==S(a_2)+7=S(a_1)+8$.

Если есть число, оканчивающееся на *0*, то среди пяти чисел после него сумма цифр хотя бы одного делится на *5*, так же как и среди пяти чисел до него. Значит среди девяти чисел найдётся хотя бы одно, сумма цифр которого делится на *5*.

Решение следующих задач требует сложных вычислений, поэтому удобно воспользоваться программой «Вычислитель», составленной при помощи учащихся под руководством учителя математики ГУО «СШ № 144» Зейфман И.С. При помощи этой программы можно посчитать минимальное количество чисел, среди которых найдётся по крайней мере одно, сумма цифр которого делится на определённое число. Приведем ряд задач, решенных с помощью данной программы.

Задача 4. Доказать, что среди любых *11* подряд идущих чисел, найдётся хотя бы одно такое, сумма цифр которого будет делиться на *6*.

Решение: Возьмём *11* произвольных, подряд идущих чисел: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}. Сумма одного из них в любом случае будет делиться на *6*, т.к: $S(a_{11})=S(a_{10})+1=S(a_9)+2=S(a_8)+3==S(a_7)+4=S(a_6)+5=S(a_5)+6=S(a_4)+7=S(a_3)+8=S(a_2)+9=S(a_1)+10$. Если есть число, оканчивающееся на *0*, то среди *6* чисел, стоящих после него, сумма цифр хотя бы одного делится на *6*, также как и шести чисел до него. Значит, среди *12* чисел будет хотя бы *2* числа, сумма цифр которых делится на *6*, а среди *11* чисел – хотя бы *1*.

Задача 5. Доказать, что среди любых *13* подряд идущих чисел, найдётся хотя бы одно такое, сумма цифр которого будет делиться на *7*.

Решение: Возьмём *13* произвольных, подряд идущих чисел: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}. Сумма цифр одного из них в любом случае будет делиться на *7*, т.к: $S(a_{13})=S(a_{12})+1=S(a_{11})+2==S(a_{10}) + 3 = S(a_9) + 4 = S(a_8) + 5 = S(a_7) + 6 = S(a_6) + 7 = S(a_5) ++8=S(a_4)+9=S(a_3) +10=S(a_2)+11=S(a_1)+12$. Если есть число, оканчивающееся на *0*, то среди *7* чисел, стоящих после него, сумма цифр хотя бы одного делится на *7*, также как и семи чисел до него. Значит, среди *14* чисел будет хотя бы *2* числа, сумма цифр которых делится на *7*, а среди *13* чисел – хотя бы *1*.

Задача 6. Доказать, что среди любых *9* чисел, найдётся хотя бы одно такое, сумма цифр которого делится на 9.

Решение: Выберем *9* произвольных, подряд идущих чисел: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9. Ясно, что хотя бы одно из них делится на *9*, тогда и сумма цифр одного из них будет делиться на *9*.

Задача 7. Доказать, что среди любых *19* чисел, найдётся хотя бы одно такое, сумма цифр которого делится на 10.

Решение: Возьмём *19* произвольных, подряд идущих чисел: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14},a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{19}. Сумма цифр одного из них в любом случае будет делиться на *10*, т.к: $S(a_{19})=S(a_{18})+1=S(a_{171})+2=S(a_{16})+3=S(a_{15})+4=S(a_{14})+5 = S(a_{13}) + 6= =S(a_{12})+7=S(a_{11})+8=S(a_{10})+9=S(a_9)+10=S(a_8)+11=S(a_7)+12=S(a_6)+ +13=S(a_5)+14=S(a_4)+15=S(a_3)+16=S(a_2)+17=S(a_1)+18$

Если взять числа, стоящие слева и справа от числа, заканчивающегося на *0*, то среди *10* чисел после него, сумма цифр хотя бы одного делится на *10*, также как и десяти чисел до него. Значит, среди *20* чисел будет хотя бы *два* числа, сумма цифр которых делится на *10*, а среди *19* чисел – хотя бы одно.

В заключение отметим, что решение задачи методом «от простого к сложному» может привести к появлению новых утверждений, а использование информационных технологий даёт возможность значительно облегчить и ускорить процесс вычислений и позволяет решать довольно сложные математические задачи.