

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. СНБ 5.03.01–02. Бетонные и железобетонные конструкции. – 2003. – 139 с.
2. СП 5.03.01.02-2020. Бетонные и железобетонные конструкции. – 2020. – 245 с.
3. ТКП ЕН 1992-1-1-2009\* Еврокод 2. Проектирование железобетонных конструкций. Часть 1–1. Общие правила и правила для зданий. – Минск, МАиС РБ, 2015. – 207 с.
4. СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. – Москва, Минстрой России, 2019. – 123 с.
5. prEN 1992-1-1:2018 (D3) Eurocode 2: Design of concrete structures part 1-1: General rules, rules for buildings, bridges and civil engineering structures. – CEN/TC250, 2018 – 293 p.

УДК 624.04

### **ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ ГИБКИХ НЕЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ**

*СИДОРОВИЧ Е. М.*

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь

**Введение.** Необозримое множество самых разнообразных по назначению и конструкции плоских и пространственных вантовых, висячих, арочных, комбинированных и иных систем возможно и необходимо рассчитывать с учетом присущих им нелинейных эффектов. Современные компьютеры и существующее программное обеспечение, в основном, позволяют делать это.

Успешный анализ любой нелинейно деформируемой системы предъявляет следующие основные требования к её расчётной модели: параметры одной из конфигураций расчётной модели деформируемой системы должна быть полностью определены; статические, геометрические и физические уравнения в этой исходной (актуальной) конфигурации должны удовлетворяться тождественно; и это исходное состояние равновесия должно быть устойчивым. При вы-

полнении указанных требований под нелинейным деформированием понимается плавный, медленный, квазистатический (без перекоков) переход деформируемой системы из исходного состояния равновесия в новое, близкое или далёкое, расчётное (текущее) состояние равновесия. Такой переход может быть вызван изменением параметров системы, дополнительными нагрузками и другими воздействиями. При этом расчёт систем с геометрически изменяемыми, но преимущественно растянутыми, устойчивыми конфигурациями ничем не отличается от расчета типовых систем, исходные конфигурации которых являются геометрически неизменяемыми.

Если для расчётных моделей несущих систем с геометрически неизменяемыми конфигурациями назначение параметров исходных состояний затруднений не вызывает, то для систем изменяемого типа со многими степенями свободы: вантовых, висячих, комбинированных, – назначение точных параметров исходных конфигураций порой представляет определенные трудности. Простейшим примером подобной системы может служить тяжёлая растяжимая провисающая шарнирно-стержневая цепь из звеньев заданной длины с дополнительными узловыми грузами, которую необходимо закрепить, допустим, на разновысоких опорах. Можно привести множество подобных примеров, требующих специальных приемов решения, особенно в области пространственных вантовых систем. В то же время аналогичные задачи при задании в качестве исходных данных горизонтальных проекций их элементов решаются сравнительно просто.

**Статический анализ геометрически нелинейной системы изменяемого типа.** В качестве примера, рассмотрим трёхпролётный анкерный участок воздушной линии электропередачи.

Физико-механические параметры провода:

- масса 1 метра провода, кг/м.....  $m = 0,492$ ;
- сечение провода, мм<sup>2</sup>.....  $A = 141,000$ ;
- диаметр провода, мм .....  $d = 15,200$ ;
- модуль упругости провода, МПа .....  $E = 84\,500,000$ ;
- тяжение фазы в исходном режиме, Н.....  $T = 10\,000,000$ ;
- толщина стенки гололеда, мм .....  $t = 20,000$ ;
- гололедная нагрузка, Н/м .....  $p = 27,000$ ;
- масса гирлянды изоляторов, кг .....  $M = 50,000$ .

Геометрические размеры пролетов:

- количество пролётов .....  $n = 3$ ;
- длина пролёта, м .....  $L = 260,000$ ;
- высота подвеса проводов на опорах, м .....  $h = 10,100$ ;
- длина гирлянды изоляторов, м .....  $a = 1,500$ .

Таким образом, расчёту подлежит трёхпролётная гибкая нить на промежуточных опорах-подвесках. Модуль упругости материала, площадь поперечного сечения и сила натяжения провода в исходном состоянии заданы. Длина заготовки провода неизвестна.

Согласно теории гибких пологих нитей [1, 2] на основании известного неполного кубического уравнения:

$$T^3 - NT^2 = \frac{D\omega}{2L},$$

где

$$D = \frac{(mg)^2 L^3}{12}, \quad \omega = EA$$

можно найти силу  $N$  предварительного натяжения условно невесомого провода-струны на пролёте длиной  $L$  при заданном тяжении  $T$  :

$$N = T - \frac{D\omega}{2LT^2} = 2182 \text{ Н.}$$

А затем и длину заготовки провода  $L_0$  на один пролёт:

$$L_0 = \frac{L}{1 + N/\omega} = 259,953 \text{ м.}$$

Стрела провисания  $f$  пологого провода в исходном состоянии под действием собственного веса и заданного тяжения (распора) при заданных значениях длин пролётов:

$$f = \frac{mgL^2}{8T} = \frac{0,492 \cdot 9,81 \cdot 260^2}{8 \cdot 10\,000} = 4,078 \text{ м.}$$

Длина  $S$  натянутого до тяжения  $T$  провисающего под действием собственного веса провода в одном пролёте вычисляется приближённо как длина пологой параболической кривой:

$$S = L + \frac{8f^2}{3L} = 260,171 \text{ м.}$$

Проведённые вычисления показали, что применительно к полугибким нитям их длины заготовок и длины кривых провисания в деформированном состоянии практически не отличаются от длин их пролётов. И это позволило нам применить к данной задаче теорию гибких пологих нитей. Но в других многоэлементных пространственных системах элементы, длина которых почти не изменяется, в процессе деформирования перемещаются в пространстве, и проблема заключается в автоматическом поиске (или задании) координат узлов, к которым элементы примыкают.

Для создания конечно-элементной расчётной модели разбиваем длину провисающего провода в одном пролёте на 20 равных частей и вычисляем узловую силу  $F$  от собственного веса в этом исходном состоянии:

$$F = \frac{L_0 mg}{20} = \frac{259,952 \cdot 0,492 \cdot 9,81}{20} = 62,77 \text{ Н.}$$

Итоговая расчётная модель трёхпролётного провода представляет собой шарнирно-стержневую цепь с 20-ю звеньями в каждом пролёте, нагруженную в исходном состоянии в каждом узле вертикальной силой  $F$ . Каждая гирлянда изоляторов моделируется трехзвенной шарнирно-стержневой цепью при длине звена в 0,5 м с узловой силой (вес одного звена модели гирлянды)

$$F_1 = \frac{Mg}{3} = \frac{50 \cdot 9,81}{3} = 163,5 \text{ Н.}$$

Определение координат узлов провисающего провода проведём автоматически на основе следующей процедуры нелинейного расчёта со сменой состояний равновесия и расчётных схем. Поступим следующим образом. Введем вспомогательное состояние предварительного натяжения: прямолинейная невесомая трёхпролётная струна, закреплённая на двух концевых анкерных опорах и двух промежуточных подвижных, растянута осевой силой  $N$  и разделена в растянутом состоянии на 60 звеньев одинаковой длины. Назначить координаты всех узлов и усилия в каждом звене такой вспомогательной системы не представляет труда. Система находится в устойчивом состоянии равновесия со всеми известными параметрами. Затем это вспомогательное состояние догружается в каждом

узле вертикальными силами  $F$  от веса провода и рассчитывается на это воздействие при заданном натяжении как нелинейно деформируемая система. В результате определяются координаты, вообще говоря, неравномерно отстоящих по горизонтальной проекции провисающих узлов и неодинаковые усилия в звеньях, длина которых в деформированном провисающем состоянии, строго говоря, также неодинакова. Критерием точности такого расчёта является факт, что две подвижные опоры не должны сместиться по горизонтали, узлы в серединах пролётов должны получить вертикальные перемещения, равные  $f$ , а горизонтальная проекция усилия в каждом звене должна равняться тяжению провода  $T$ .

И, наконец, трёхпролётный провисающий провод объединяется с вертикальными растянутыми гирляндами (их геометрия и усилия также легко вычисляемы) в единую систему. То есть изменяется расчётная схема: удаляются вертикальные опорные связи двух промежуточных опор, их заменяют вертикальные гирлянды. В итоге получено состояние равновесия с полностью и точно определёнными геометрическими и силовыми параметрами. Это состояние равновесия можно рассматривать как исходное, готовое к расчёту на другие воздействия.

На рис. 1 показано деформированное состояние данной трёхпролётной системы при максимальной гололёдной и ветровой нагрузках. На рис. 2 деформированное состояние в чрезвычайной ситуации при обрыве анкера.

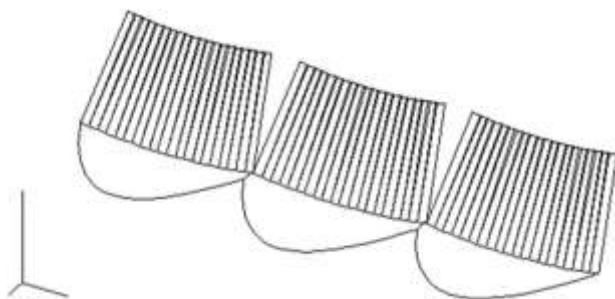


Рис. 1. Пространственная схема деформаций и эпюры усилий при максимальном ветре и гололёде



Рис. 2. Характер деформаций и эпюра усилий при гололёде в двух пролётах и обрыве анкера. Провода удерживаются гирляндами изоляторов

При этом в деформированных расчётных состояниях, отвечающих каждому виду воздействий, определены усилия в каждом звене системы, перемещения всех узлов и, тем самым, точное положение каждого узла.

Уместно отметить следующую особенность расчёта нелинейно деформируемых систем, которую следует учитывать, если применяемые нормы проектирования предполагают разделение нагрузок и воздействий, допустим, на нормативные и расчётные. При этом следует учитывать, что от принятой геометрии и напряжённого состояния исходной (актуальной) конфигурации рассчитываемой нелинейно деформируемой системы зависят её перемещения и приращения усилий. То есть конфигурация и напряжённое состояние системы в расчётном состоянии равновесия.

Следовательно, определение геометрии исходного (актуального) состояния равновесия должен вестись с применением нормативных нагрузок. Расчёт же на переход из исходного состояния равновесия в любое другое расчётное (текущее) состояние равновесия должен выполняться дважды: на нормативную нагрузку и на расчётную нагрузку. Первый вариант расчёта позволит оценить жёсткость системы и получить геометрию расчётного состояния и его нормативное напряжённое состояние. Полученное на этом этапе расчёта состояние равновесия может быть использовано как очередное исходное для продолжения деформирования. Второй вариант расчёта позволяет получить завышенные перемещения и расчётные (экстремальные) значения внутренних сил и реакций системы для оценки её прочности.

**Анализ динамических свойств нелинейно деформируемой системы изменяемого типа.** В любом устойчивом деформированном состоянии равновесия нелинейно деформируемой системы, рассматриваемом как исходное состояние равновесия, могут быть исследованы динамические характеристики соответствующей конфигурации этой системы. Другими словами, может быть проведён анализ собственных частот и собственных форм малых колебаний деформированной системы относительно её рассматриваемой деформированной конфигурации.

Так рассматриваемый трёхпролётный участок воздушной линии электропередачи в деформированном состоянии, обусловленном только собственным весом, имеет 74 собственные частоты в диапазоне от 0 до 3 Герц:

$$f_1 = 0,252 \text{ Гц}; \dots\dots\dots f_{74} = 2,905 \text{ Гц}.$$

Собственные колебания провисающего трёхпролётного провода являются пространственными. Низшие формы колебаний маятниковые. Некоторые из них показаны на рис. 3. Колебания по 22-й собственной форме происходят преимущественно в вертикальной плоскости (рис. 4). Вертикальные колебания по 65-й собственной форме локализованы в центральном пролёте (рис. 5). Следует отметить, что собственные колебания по старшим частотам, как правило, происходят в пространстве и не предсказуемы по форме

В деформированном состоянии при гололёде без ветра в том же диапазоне находятся уже 122 собственные частоты:

$$f_1 = 0,184 \text{ Гц}; \dots\dots\dots f_{122} = 2,487 \text{ Гц}.$$

Соответствующие собственные формы при этом являются самыми разнообразными: пространственными маятниковыми, плоско вертикальными, плоско горизонтальными, локализованными в одном из трёх пролётов, локализованными в двух пролётах и т. п.

Одна из целей данной работы состоит в том, чтобы выяснить, может ли растянутая система в виде провода воздушной линии электропередачи стать динамически неустойчивой при следящей ветровой нагрузке (скорость ветра постоянна).

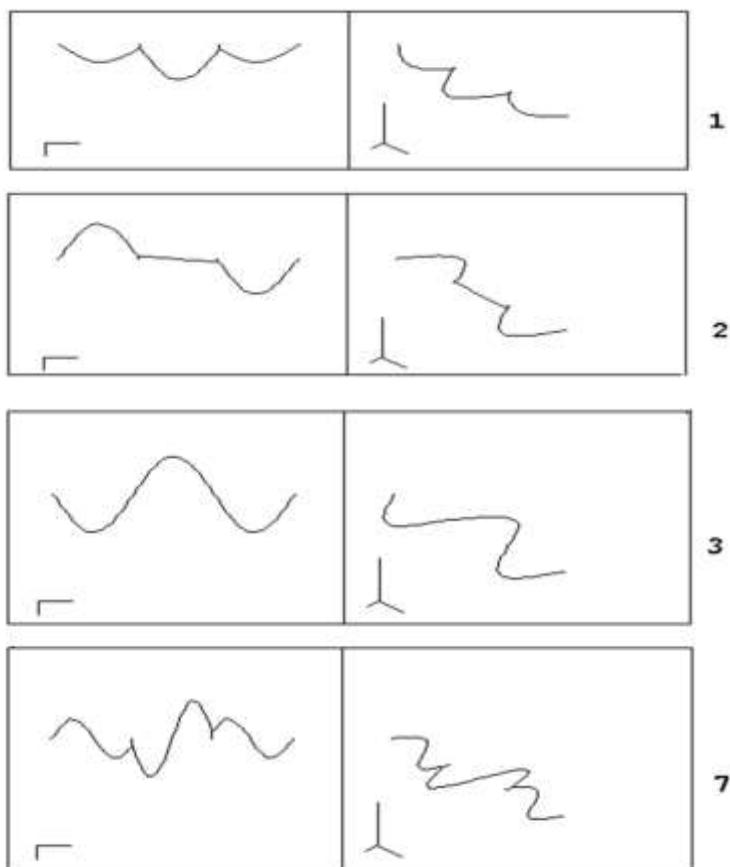


Рис. 3. Маятниковые формы колебаний провода:  
1, 2, 7 – номера собственных форм

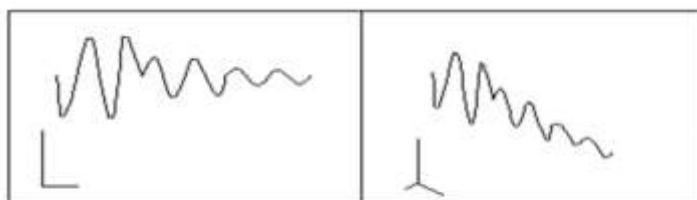


Рис. 4. Колебания в вертикальной плоскости

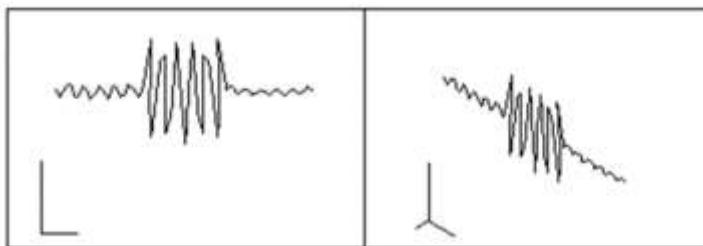


Рис. 5. Локализация вертикальных колебаний в центральном пролёте

В зависимости от ветрового района и высоты над уровнем земли интенсивность распределённой ветровой нагрузки на провод, покрытый гололёдом, может достигать значений порядка 50 Н/м. Угол между направлением ветра и осью линии электропередачи обычно принимают равным  $90^\circ$ . В проведённых исследованиях этот угол был сохранён. Дополнительно были рассмотрены ещё два направления: под углом  $45^\circ$  к оси линии электропередачи и под углом приблизительно  $26,6^\circ$  (уклон –  $1/2$ ). Ветровая нагрузка при деформациях провода предполагалась всегда нормальной к пространственной линии провисания (перпендикулярной к оси каждого звена и лежащей в плоскости «направление ветра – ось звена») провода под действием сил тяжести (с учётом гололёда) и ветра. Исследование устойчивости [2] текущих состояний равновесия при квазистатическом росте ветровой нагрузки велось без учёта диссипативных сил.

Для всех рассмотренных направлений ветра при разных интенсивностях ветровой нагрузки была обнаружена возможность флаттерной неустойчивости рассматриваемой неконсервативной системы в основном на старших частотах. В табл. 1–3 для принятой модели приведены значения интенсивности следящей ветровой нагрузки и номера динамически неустойчивых (со «сблизившимися» частотами) собственных форм колебаний.

В процессе численных экспериментов было установлено, что по мере увеличения ветрового напора одна или несколько пар собственных частот (характеристических показателей) сближались по значениям и переходили в комплексную область. Затем возвращались в действительную и снова переходили в комплексную. Зоны динамической неустойчивости системы (с комплексными собственными значениями) в пространстве параметров состояния оказались

достаточно узкими и расположенными непредсказуемо. При углах отклонения направления ветра от оси линии электропередачи в 26,6° и 45° сооружение оказалось более чувствительным к ветровому возбуждению, чем при угле в 90°.

Таблица 1

**Зоны динамической неустойчивости  
трёхпролётного участка воздушной линии электропередачи  
при угле отклонения ветра 90°**

w (Н/м)	k	Номера форм колебаний	w (Н/м)	k	Номера форм колебаний
0,5	2	126–127	20,5	2	40–41
1,5	2	99–100	21,5	2	40–41
2,5	2	98–99	38,0	2	15–16
3,5	2	98–99	38,5	2	15–16
5,5	2	94–95	39,0	2	15–16
11,5	2	118–119	40,0	2	72–73
16,5	2	40–41	41,0	2	15–16

*Примечания:*

w – интенсивность ветровой нагрузки;

k – количество сблизившихся собственных форм.

Таблица 2

**Зоны динамической неустойчивости  
трёхпролётного участка воздушной линии электропередачи  
при угле отклонения ветра 45°**

w (Н/м)	k	Номера форм колебаний	w (Н/м)	k	Номера форм колебаний
2,0	4	98–99, 126–127	8,5	2	84–85
2,5	2	96–97	9,0	2	98–99
3,0	2	84–85	9,5	2	28–29
3,5	2	78–79	10,5	2	28–29
4,0	2	90–91	11,0	2	28–29
4,5	2	106–107	11,5	2	28–29
6,5	2	119–120	12,0	2	28–29
7,5	2	84–85	12,5	2	28–29
8,0	6	66–67, 8–79, 84–85	13,0	4	28–29, 118–119

*Примечания:*

w – интенсивность ветровой нагрузки;

k – количество сблизившихся собственных форм.

Зоны динамической неустойчивости  
трёхпролётного участка воздушной линии электропередачи  
при угле отклонения ветра 26,6°

w (Н/м)	k	Номера форм колебаний	w (Н/м)	k	Номера форм колебаний
0,010	2	99–100	0,180	2	126–127
0,028	2	99–100	0,208	2	126–127
0,032	2	99–100	0,212	2	126–127
0,036	2	99–100	0,236	2	126–127
0,052	2	99–100	0,264	2	126–127
0,132	2	126–127	0,268	2	126–127
0,150	2	126–127	0,312	2	126–127

*Примечания:*

w – интенсивность ветровой нагрузки;

k – количество сблизившихся собственных форм.

Проведённые исследования показали, что на условия возникновения аэроупругих колебаний в гибких системах оказывает влияние не столько скорость ветра, сколько суммарное ветровое давление. Оно зависит и от скорости ветра, и от миделева сечения обдуваемых ветром элементов, особенно покрытых гололёдом. Суммарная масса элементов и гололёдных отложений, тяжение проводов с учётом температуры воздуха на момент возникновения аэроупругих колебаний также имеют существенное значение.

Слабая ветровая нагрузка почти не влияет на значения собственных частот и собственные формы. Максимальная ветровая нагрузка изменяет геометрию и напряжённое состояние провода, что приводит к существенному изменению значений собственных частот и собственных форм и перераспределению их расположения в общем спектре.

В данной работе под следящей ветровой нагрузкой понимается ее средняя, статическая составляющая. Пульсационная, или динамическая составляющая ветровой нагрузки в работе не рассматривается. Следовательно, к динамической неустойчивости, обусловленной аэродинамическим взаимодействием установившегося ветрового потока и гибкого сооружения, в реальных условиях может добавиться динамическая неустойчивость вследствие резонансных явлений, обусловленных динамической составляющей ветровой

нагрузки. К сожалению, методика практического исследования указанных явлений далека от совершенства, и даже современные проектно-вычислительные комплексы дают только удовлетворительное, с практической точки зрения, решение данной проблемы.

**Двухпараметрическая устойчивость нелинейно деформируемых арок.** Исследование нелинейного деформирования сквозных двухшарнирных арок кругового очертания и бесшарнирных параболических арок постоянного коробчатого сечения показало, что при нагрузках, близких к критическим, арки становятся достаточно податливыми, гибкими. Более того, арочное сооружение, прочное и устойчивое при полной нагрузке, может потерять устойчивость при односторонней разгрузке (рис. 6). Полагая, что нагрузки на левом и правом полупролётах арки изменяются независимо и пропорционально соответствующим параметрам  $p_1$  и  $p_2$ , проведём многократные расчёты арки как нелинейно деформируемой системы при разных отношениях  $p_1 / p_2$ .

Нелинейный расчёт будем вести, увеличивая нагрузку, до достижения нагрузкой критического значения. В арочных системах критическое равновесие отвечает достижению предельной точки на кривой деформирования, т. е. соответствует исчерпанию аркой несущей способности. Откладывая предельные точки в двумерном пространстве параметров  $p_1$  и  $p_2$ , можно построить пограничную кривую, разделяющую области устойчивых и неустойчивых состояний равновесия нелинейно деформируемой системы (рис. 6).

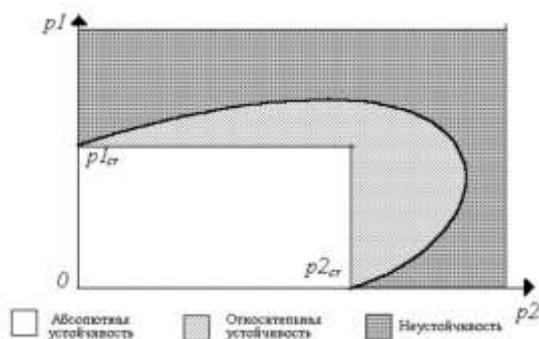


Рис. 6. Двухпараметрическое нагружение арки

Как и следовало ожидать, пограничная кривая является выпуклой. Но в форме эллипса с большой полуосью в первом квадранте. Именно поэтому на плоскости параметров  $p_1$  и  $p_2$  можно выделить три области: область неустойчивости, область относительной устойчивости и область абсолютной устойчивости (рис. 6).

Если нагрузка, отвечающая конкретным значениям параметров  $p_1$  и  $p_2$ , попадает в область относительной устойчивости, то уменьшение такой нагрузки при сохранении отношения  $p_1 / p_2$  неизменным не повлияет на устойчивость арки. Если отношение параметров  $p_1 / p_2$ , установленное при росте нагрузки, будет изменено, то при уменьшении нагрузки с изменённым отношением  $p_1 / p_2$  может произойти потеря устойчивости. Другими словами, арка, устойчивая при полной нагрузке, может потерять устойчивость при разгрузке одного из полупролётов.

#### **Выводы:**

1. Нелинейный расчёт по деформированному состоянию позволяет проводить статический и динамический анализ несущих систем изменяемого типа.

2. Растянутый шарнирно прикрепленный стержень как основной несущий элемент вантовых и тросовых конструкций способен сопротивляться не только осевым, но и поперечным воздействиям.

3. Следящая ветровая нагрузка при постоянной скорости способна вызвать динамическую, флаттерную неустойчивость тросовых и других гибких конструкций.

4. Арочные системы, прочные и устойчивые при полной нагрузке, способны потерять устойчивость при частичной разгрузке.

#### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Сидорович, Е. М. К расчёту гибких нитей на упругих опорах / Е. М. Сидорович // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1965. – № 6. – С. 53–56.

2. Сидорович, Е. М. Нелинейное деформирование, статическая и динамическая устойчивость пространственных стержневых систем / Е. М. Сидорович. – Мн.: БГПА, 1999. – 200 с.