УДК 621.3

СИНТЕЗ ЧАСТОТНЫХ БИХ-ФИЛЬТРОВ

Жиркова К.Ю., Мешкова А.Н.
Научный руководитель – к.т.н., доцент Булойчик Е.В.

Процесс разработки цифровых частотных фильтров можно разделить на несколько этапов: задание спецификации или определение требований к фильтру; выбор типа фильтра и определение его коэффициентов; выбор структурной формы реализации фильтра; анализ влияния ошибок, обусловленных конечной разрядностью представления данных; аппаратная, программная или программно-аппаратная реализация фильтра.

В первую очередь перед разработчиком встает задача выбора типа фильтра с конечной импульсной характеристикой или с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ).

При выборе типа фильтра следует учитывать следующие особенности БИХ-фильтров:

– БИХ-фильтры имеют нелинейную фазо-частотную характеристику (ФЧХ), особенно на краях полос пропускания;

– БИХ-фильтры имеют рекурсивную структуру и вследствие этого подвержены таким негативным влияниям эффектов квантования коэффициентов фильтров, как потеря устойчивости и предельные циклы;

– при одинаковых требованиях к спецификациям амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) частотно-избирательных фильтров, БИХ-фильтры обычно требуют меньшего числа коэффициентов, чем фильтры с конечной импульсной характеристикой, а меньшее число арифметических операций снижает и фактор влияния ошибок округления и переполнения, связанных с конечной разрядностью умножителей и сумматоров;

– методы синтеза БИХ-фильтров ориентированы преимущественно на аппроксимацию идеальных (имеющих прямоугольную АЧХ) частотно-избирательных фильтров.

Реализация БИХ-фильтров возможна только с использованием рекурсивных структурных схем. Среди методов синтеза таких фильтров следует выделить следующие два основных:

– метод инвариантного преобразования импульсной характеристики;

– метод билинейного преобразования.

Оба эти метода основаны на определенных трансформациях методов синтеза аналоговых фильтров.

Следует отметить, что использовать БИХ-фильтры целесообразно, когда необходимо обеспечить максимальную производительность.

Рассмотрим *метод инвариантности импульсной характеристики*. Будем использовать далее обозначения $g(t)$ и $G(p)$ для импульсной характеристики (ИХ) и передаточной функции (ПФ) аналогового фильтра-прототипа, а для соответствующего ему дискретного фильтра обозначим ИХ и ПФ соответственно $h(n)$ и $H(z)$.

Идея метода состоит в том, чтобы, синтезировав аналоговый фильтр-прототип с импульсной характеристикой $g(t)$, затем выполнить его дискретизацию: $h(n) = Tg(nT)$. Полученная ИХ $\{h(n)\}_{n=0}^{\infty}$ определяет дискретный фильтр, передаточная функция которого находится как Z-преобразование импульсной характеристики: $H(z) = Z\{h(n)\}$. Под термином инвариантность понимается равенство дискретной и аналоговой ИХ в точках дискретизации $t_n = nT$.

Рассмотрим подробнее специфику такого отображения аналогового фильтра в дискретный. Пусть ПФ денормированного аналогового фильтра-прототипа $G(p)$ содержит N простых (т. е. единичной кратности) полюсов $\{p_k\}_{k=1}^{N}$ и менее чем N нулей. Тогда она может быть представлена в виде:

$$G(p) = \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{p - p_k}, \qquad (1)$$

где C_k – некоторые числа (возможно, комплексные), которые могут быть найдены по формуле $C_k = \lim\limits_{p \to p_k} (p - p_k) G(p)$.

Импульсная характеристика аналогового фильтра восстанавливается по ПФ при помощи обратного преобразования Лапласа и для (1) принимает вид:

$$g(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k e^{p_k j}.$$

Выполнив дискретизацию ИХ $g(t)$ с периодом T, получим выражение для ИХ дискретного фильтра:

$$h(n) = Tg(nT) = T \sum_{k=1}^{N} C_k \left(e^{p_k T}\right)^n. \qquad (2)$$

Имеющий смысл нормировочного, множитель T вводится в (2) для того, чтобы избежать возрастания коэффициента усиления фильтра при уменьшении периода дискретизации T. Тогда ЧХ дискретного фильтра будет примерно соответствовать ЧХ аналогового фильтра:

$$G(i\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \approx T \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) e^{-i\omega nT} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-i\omega nT} = H(e^{i\omega T}) = K(\omega).$$

Приближенное равенство будет выполняться здесь тем точнее, чем меньше период дискретизации T.

Передаточную функцию синтезируемого дискретного фильтра найдем как Z-преобразование ИХ (2):

$$H(z) = T \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} C_k e^{p_k T n} \right) z^{-n} = T \sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{p_k T}}{z} \right)^n = T \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{\left(1 - e^{p_k T} z^{-1}\right)}. \qquad (3)$$

Таким образом, каждое слагаемое из суммы (2) (p-плоскость, область ПФ аналогового фильтра) отображается в соответствующее слагаемое суммы (3) (z-плоскость. область ПФ дискретного фильтра) по следующему правилу:

$$\frac{C_k}{p-p_k} \to \frac{T \cdot C_k}{\left(1-e^{p_k T} z^{-1}\right)}. \tag{4}$$

Из (4) видно также, что устойчивый аналоговый фильтр-прототип преобразуется в устойчивый дискретный фильтр, так как если для всех полюсов аналогового фильтра $\mathrm{Re}\left(p_k\right)<0$, то порождаемые полюсы ПФ дискретного фильтра $z_k = e^{p_k T}$ таковы, что $\left|z_k\right|<1$, $k=1,\ldots,N$. Поэтому дискретный фильтр также будет устойчивым.

Так как полиномы числителя и знаменателя ПФ аналогового фильтра (5) имеют вещественные коэффициенты, то ее полюсы либо вещественные, либо образуют комплексно-сопряженные пары $p_{k1} = \overline{p_{k2}}$.

$$G(p) = \frac{\sum_{k=0}^{N} \beta_k p^k}{\sum_{k=0}^{M} \alpha_k p^k} = K \frac{\prod_{k=1}^{N}\left(p-c_k\right)}{\prod_{k=1}^{M}\left(p-p_k\right)}, \tag{5}$$

где $\{c_k\}_{k=1}^{N}$ – корни многочлена $P(p)=\sum_{k=0}^{N} \beta_k p^k$; $\{p_k\}_{k=1}^{N}$ – корни многочлена $Q(p)=\sum_{k=0}^{M} \alpha_k p^k$; K – некоторый множитель.

Такие пары дают в разложении ПФ (1) слагаемые, коэффициенты которых также комплексно сопряжены: $C_{k1} = \overline{C_{k2}}$. Соответствующие слагаемые в ПФ дискретного фильтра (3) следует объединить приведением к общему знаменателю, для того чтобы получить звено второго порядка с вещественными коэффициентами передаточной функции:

$$\frac{C}{1-e^{sT} z^{-1}} + \frac{\overline{C}}{1-e^{\bar{s}T} z^{-1}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \tag{6}$$

где $b_0 = 2\,\mathrm{Re}(C)$, $b_1 = -2\,\mathrm{Re}\left(\overline{C} e^{sT}\right)$, $a_1 = -2\,\mathrm{Re}\left(e^{sT}\right)$.

В результате из разложения (3) получим представление ПФ в виде, готовом для реализации параллельной структуры фильтра из звеньев первого и второго порядков.

При проектировании цифровых фильтров методом инвариантности импульсной характеристики необходимо учитывать эффект наложения частот. Данный метод вызывает сложности и малопригоден для проектирования высокочастотных и режекторных фильтров. В большей степени он подходит для проектирования низкочастотных, а также полосовых фильтров, если на частотах, близких к половине частоты дискретизации (и больших ее), аналоговый прототип имеет высокое подавление АЧХ. Очевидно, что повышение частоты дискретизации может быть одним из способов снижения негативного влияния эффекта наложения частот.

Рассмотрим синтез БИХ-фильтров *методом билинейного Z-преобразования*. Отображение комплексной p-области, на которой определяется ПФ аналогового фильтра, в комплексную z-область цифрового фильтра задается формулой преобразования переменных $z = \exp(pT)$, где T – период дискретизации аналоговой ИХ, $p = \alpha + i\omega \to z = e^{pT}$.

Поэтому для обратного отображения можно предложить соотношение $p = \frac{1}{T}\ln z$. Функцию логарифма представим сначала в виде разложения в ряд. Используя известное разложение в ряд Тейлора $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u^n / n$, абсолютно сходящегося при $|u| < 1$, несложно получить представление для функции

$$\ln\frac{1+u}{1-u} = \ln(1+u) - \ln(1-u) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{2k+1}}{2k+1}.$$

Отсюда, обозначив $z = \frac{1+u}{1-u}$ и выразив $u = \frac{z-1}{z+1}$ получаем ряд (7), который абсолютно сходится в области $\mathrm{Re}(z) > 0$.

$$\ln z = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2k+1}. \tag{7}$$

Возьмем первый член ряда (7) и вместо преобразования комплексных переменных $p = \frac{1}{T}\ln z$ рассмотрим так называемое билинейное преобразование

$$p = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right). \tag{8}$$

Обозначая $\gamma = 2/T$ обратное выражение находим как

$$z = \frac{\gamma + p}{\gamma - p}. \tag{9}$$

Отмстим, что пара преобразований (8) и (9) является взаимно однозначным отображением.

В методе билинейною Z-преобразования ПФ дискретного фильтра $H(z)$ находится по ПФ аналогового фильтра-прототипа $G(p)$ с использованием подстановки (8) следующим образом:

$$H(z) = G\left(\gamma\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right), \tag{10}$$

где $\gamma = 2/T$.

Рассмотрим, как отображается p-плоскость в z-плоскость в результате билинейного преобразования (8) $p \to z$. Для комплексных чисел p-плоскости, $p = \sigma + i\omega$, имеем на основании (9):

$$|z| = \left|\frac{\gamma + \sigma + i\omega}{\gamma - \sigma - i\omega}\right| = \sqrt{\frac{(\gamma+\sigma)^2 + \omega^2}{(\gamma-\sigma)^2 + \omega^2}}. \quad (11)$$

Для аналоговой частотной оси $p = i\omega\,(\sigma = 0)$ все отображенные точки лежат на единичной окружности $|z| = 1$. Поэтому $p = i\omega \to z = e^{i\hat{\omega}}$, где нормированная частота дискретного фильтра

$$\hat{\omega} = \arg\left(\frac{\gamma + i\omega}{\gamma - i\omega}\right) = \arg\left(\frac{(\gamma + i\omega)^2}{\gamma^2 + \omega^2}\right) = 2\arg\left(\frac{2}{T} + i\omega\right) = 2\operatorname{arctg}\frac{\omega T}{2}. \quad (12)$$

Несложно видеть, что изменению аналоговой частоты в пределах $-\infty < \omega < +\infty$ соответствует изменение нормированной частоты дискретного фильтра $-\pi < \hat{\omega} < \pi$. Для некоторых характерных аналоговых частот имеем:

$$\omega = 0 \to \hat{\omega} = 0,\ \omega = \pm 2/T \to \hat{\omega} = \pm\pi/2,\ \omega = \pm\infty \to \hat{\omega} = \pm\pi.$$

Для всех комплексных чисел p-плоскости, $p = \sigma + i\omega$, имеем $|z| \le 1$ при $\sigma \le 0$ и $|z| \ge 1$ при $\sigma \ge 0$. Это следует из того, что числитель под корнем выражения (11) меньше знаменателя при $\sigma < 0$ и больше при $\sigma > 0$. Таким образом, левая полуплоскость p-плоскости отображается внутрь, а правая полуплоскость – вовне единичной окружности $|z| = 1$ на z-плоскости. Поэтому если устойчив аналоговый фильтр с ПФ $G(p)$ (все ее полюсы на p-плоскости лежат в левой полуплоскости), то будет устойчив и цифровой фильтр, все полюсы ПФ (10) которого будут находиться на z-плоскости в области $|z| < 1$.

При проектировании фильтров методом билинейного преобразования следует учитывать его нелинейный, хотя и взаимно однозначный, характер преобразования частот аналогового прототипа и цифрового фильтра, который определяется соотношением (12) и обратным к нему $\omega = \frac{2}{T}\operatorname{tg}\frac{\hat{\omega}}{2}$. Поскольку наложения частот при билинейном преобразовании нет, то частотная характеристика дискретного фильтра $H\left(e^{i\hat{\omega}}\right)$ сохраняет те же величины и характер пульсаций в заданных полосах частот, что и ЧХ аналогового прототипа $G(i\omega)$. Нужно лишь помнить, что границы полос частот необходимо пересчитать в соответствии с (12). Можно сказать, что частотная характеристика $H\left(e^{i\hat{\omega}}\right)$ представляет собой сжатую по оси частот в соответствии с (12) $G(i\omega)$: $\omega \in (-\infty; +\infty) \to \hat{\omega} \in (-\pi; \pi)$. При этом на частотах, связанных соотношением (12), значения АЧХ фильтров совпадают.

Билинейное преобразование сохраняет количество нулей и полюсов передаточной функции аналогового прототипа. Нули и полюсы прототипа преобразуются в нули и полюсы дискретного фильтра по формуле (9).

Деформация оси частот делает затруднительным использование метода билинейного преобразования для синтеза фильтров с произвольными АЧХ. Однако данный метод хорошо подходит для проектирования частотно-избирательных фильтров всех типов (нижних и верхних частот, полосовых, режекторных). При этом следует иметь в виду, что ни импульсная характеристика, ни фазочастотная характеристика аналогового прототипа не сохраняются. Поэтому для проектирования фильтров с близкой к линейной ФЧХ метод билинейного преобразования также не подходит.

Литература

1. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер ; пер. С.А. Кулешова ; под ред. А.С. Ненашева. – М. : Техносфера, 2006. – 856 с.
2. Умняшкин, С.В. Основы теории цифровой обработки сигналов : учеб. пособие / С.В. Умняшкин. – М. : Техносфера, 2016. – 528 с.