УДК 621.3

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ

Жиркова К.Ю., Мешкова А.Н.
Научный руководитель – к.т.н., доцент Булойчик Е.В.

Процесс разработки цифровых фильтров можно разделить на следующие этапы:

– определение требований к фильтру (задание спецификации);

– выбор типа и определение коэффициентов фильтра;

– выбор структурной формы реализации;

– анализ влияния ошибок, вызванных конечной разрядностью представления данных;

– программная, аппаратная, или программно-аппаратная реализация фильтра.

При этом первая задача, которая встает перед разработчиком – выбор типа фильтра: с конечной импульсной характеристикой (КИХ) или с бесконечной импульсной характеристикой.

Наиболее важными особенностями КИХ-фильтров, которые следует учитывать при выборе типа разрабатываемого фильтра, являются: для КИХ-фильтров возможно получить строго линейную фазовую характеристику; нерекурсивные фильтры всегда имеют КИХ и всегда устойчивы; для КИХ-фильтров разработаны методы синтеза, которые применимы для аппроксимации произвольных АЧХ.

При выборе типа фильтра на втором этапе как правило руководствуются следующим правилом, которое в ряде случаев может иметь исключения: использовать КИХ-фильтры следует, когда важны требования к линейности фазо-частотной характеристики (ФЧХ), или же требуемая амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) заметно отличается от стандартных идеальных АЧХ частотно-избирательных фильтров, или для реализации фильтра имеются избыточные вычислительные мощности. Отметим, что современные процессоры цифровой обработки сигналов часто имеют встроенные функции, реализующие нерекурсивные фильтры. Для многих приложений это фактически предопределяет выбор именно КИХ-фильтра для дальнейшего синтеза структуры.

Для нахождения коэффициентов КИХ-фильтров существуют несколько методов, из которых рассмотрим оптимизационный метод. С точки зрения оптимальности получаемых структур КИХ-фильтров оптимизационные методы синтеза являются довольно мощными, но при этом довольно сложными как в теоретическом, так и в вычислительном плане.

Говоря об оптимальности фильтров, прежде всего, необходимо уточнить, по какому критерию и при каких ограничениях проводится оптимизация. Например, при синтезе КИХ-фильтров задача может быть сформулирована следующим образом: при заданной длине импульсной характеристики $N+1$ (заданном порядке фильтра N) найти такие коэффициенты симметричного (антисимметричного) фильтра с линейной фазой, чтобы ошибка аппроксимации заданной АЧХ $\left|K_p(\omega)\right|$ была минимальной. Если ошибка аппроксимации ε понимается в смысле среднеквадратичного отклонения на периоде частотной характеристики (ЧХ), то решение такой задачи известно из теории рядов Фурье: в качестве отсчетов импульсной характеристики необходимо взять первые коэффициенты Фурье-разложения ЧХ $K_p(\omega)$. Однако указанный критерий минимизации ошибки приводит к значительным пульсациям реальных ЧХ $K(\omega)$ вблизи точек разрыва аппроксимируемых ЧХ $K_p(\omega)$. Поэтому чаще при разработке фильтров минимизируют ошибку ε, которая понимается как максимальное отклонение реальной АЧХ от требуемой (в заданной частотной области Ω) – такая аппроксимация называется равномерной.

Рассмотрим КИХ-фильтры с линейной ФЧХ первого тина. Удобно представить ЧХ такого фильтра в виде $K(\omega)=A(\omega)e^{-i\omega M}$, где $A(\omega)$ вещественный тригонометрический полином вида

$$A(\omega)=\sum_{k=0}^{M}a(k)\cos(\omega k). \qquad (1)$$

Принимаем, что спецификация синтезируемого фильтра определяется заданием границ полос пропускания Ω_p, подавления Ω_s, и неравномерностей АЧХ δ_p и δ_s в этих полосах соответственно. Для заданного порядка M тригонометрического многочлена $A(\omega)$ будем искать такой вектор коэффициентов $a=\left[a(0),a(1),\mathrm{K},a(M)\right]$, который обеспечивает наилучшее равномерное приближение требуемой ЧХ $K_p(\omega)$ (вещественной функции) с минимальной ошибкой аппроксимации

$$\varepsilon=\min_{A\in R^{M+1}}\ \max_{\omega\in(\Omega_p\cup\Omega_s)} p(\omega)\left|A(\omega)-K_p(\omega)\right|. \qquad (2)$$

Функция $p(\omega)>0$ в выражении (2) позволяет по-разному масштабировать (взвешивать) ошибку аппроксимации для различных частот (если $\delta_p=\delta_s$, то полагаем $p(\omega)=0$).

Многочлен вида (1), который обеспечивает минимальную ошибку (2), будем называть оптимальным (наилучшим) многочленом равномерного приближения порядка М. Для его нахождения выполним замену переменной $x=\cos\omega$. Тогда основная полоса нормированных циклических частот $\arccos x=\omega\in[0;\pi]$ взаимно однозначно отобразится в отрезке $x\in[-1;1]$, а (2) примет вид:

$$\varepsilon=\min_{A\in R^{M+1}}\ \max_{\omega\in(\Omega_p\cup\Omega_s)} p(\arccos x)\left|A(\arccos x)-K_p(\arccos x)\right|, \qquad (3)$$

где $X_s\subset[-1;1]$ и $X_p\subset[-1;1]$ – множества (отрезки), в которые при замене переменной отобразились полосы подавления и пропускания $\Omega_s\subset[0;\pi]$ и $\Omega_p\subset[0;\pi]$ соответственно.

Поиск наилучшего равномерного приближения заданной функции алгебраическим многочленом представляет собой непростую, но хорошо изученную классическую задачу. В большинстве случаев аналитическое решение найти невозможно, и оно ищется численными методами, которые основаны на следующей теореме Чебышева об альтернансе: пусть замкнутое множество $X \in R$ есть объединение конечного числа непересекающихся отрезков на числовой оси, а $P_M(x) = \sum_{k=0}^{M} a_k x^k$ – многочлен степени *M*. Пусть, кроме того, $D(x)$ – непрерывная в области $x \in X$ функция, а $w(x)$ является положительной и непрерывной функцией при $x \in X$. Обозначим: $E(x) = w(x)(P_M(x) - D(x))$, $\delta = \min\limits_{\{a_k\}_{k=0}^{M}} \max\limits_{x \in X} |E(x)|$.

Тогда для того, чтобы полином $P_M(x)$ был многочленом наилучшего равномерного приближения на множестве *X* для функции $D(x)$ с весом $w(x)$ (и притом единственным), необходимо и достаточно, чтобы абсолютный максимум функции $E(x)$ достигался в $K \geq M + 2$, принадлежащих множеству *X*, точках альтернанса: $x_1 < x_2 < K < x_K$, в которых $\forall m = 1, K, K$: $|E(x_m)| = \delta$, $E(x_{m+1}) = -E(x_m)$.

Выполнив обратную замену переменных $\omega = \arccos x$, теорему Чебышева можно переформулировать, используя тригонометрический полином (1) вместо алгебраического многочлена $P_M(x) = \sum_{k=0}^{M} a_k x^k$, и вернуться к задаче (2) равномерного приближения требуемой АЧХ $K_p(\omega)$ тригонометрическим полиномом (1) на отрезках полос пропускания Ω_p и подавления Ω_s, в области нормированных частот $\omega \in [0; \pi]$. Так как арккосинус является монотонно убывающей функцией, точки альтернанса $x_1 < x_2 < K < x_K$ перейдут в $\omega_K < \omega_{K-1} < K < \omega_1$, где $\omega_m = \arccos x_m$, $m = K, K, 1$. Основной результат теоремы останется прежним: полином (1) будет многочленом наилучшего равномерного приближения тогда и только тогда, когда максимальное отклонение от аппроксимируемой функции будет достигаться не менее чем в $M + 2$ частотах альтернанса, причем ошибка $E(x_{m+1}) = -E(x_m)$. На этом основополагающем свойстве многочлена наилучшего равномерного приближения основан численный метод его построения, известный как метод Ремеза. Приведем основные шаги реализующего его алгоритма численного решения задачи (2).

Шаг 1: задаем некоторую начальную сетку частот $\{\omega_m\}_{m=1}^{M+2} \in \Omega = \Omega_p \cup \Omega_s$ (например, расположив точки сетки равномерно в полосах пропускания и подавления).

Шаг 2: ищем такие коэффициенты полинома (1), чтобы для частот получить равнопульсирующее отклонение полинома от аппроксимируемой ЧХ

$p(\omega_m)\left(A(\omega_m)-K_p(\omega_m)\right)=(-1)^{m+1}\delta$. Для этого составляем и решаем систему из $M+2$ линейных уравнений относительно переменных – $(M+1)$ коэффициентов $\{a(k)\}_{k=0}^{M}$ полинома (1) и величины δ:

$$\sum_{k=0}^{M} a(k)\cos(\omega_m k)+\frac{(-1)^m}{p(\omega_m)}\delta = K_p(\omega_m),\ m=1,2,\ldots,M+2.$$

Шаг 3: с имеющимися коэффициентами $\{a(k)\}_{k=0}^{M}$ на густой сетке частот $\{\omega_l\}_{l=1}^{L}\in\Omega$, $L>>M$, вычисляем отклонения аппроксимирующего полинома (1) от заданной ЧХ $K_p(\omega)$: $\Delta_l = p(\omega_l)\left(A(\omega_l)-K_p(\omega_l)\right)$, $l=1,2,\ldots,L$.

Шаг 4: если $\varepsilon=\max\limits_{l=1,\ldots,L}|\Delta_l|\approx|\delta|$, то считаем, что искомые коэффициенты полинома (1) и ошибка аппроксимации (2) $\varepsilon=|\delta|$ найдены, алгоритм завершил работу. Иначе переходим на шаг 5.

Шаг 5: задаем новую сетку $\{\omega_m\}_{m=1}^{M+2}\in\Omega$, в которой обязательно должны быть те частоты, для которых при анализе на предыдущем шаге был достигнут максимум отклонения $\varepsilon=\max\limits_{l=1,\ldots,L}|\Delta_l|>|\delta|$, а также другие частоты $\{\omega_l\}$, для которых были получены самые большие отклонения $|\Delta_l|>|\delta|$. При этом знаки отклонений Δ_m, в выбранных частотах сетки $\{\omega_m\}_{m=1}^{M+2}$ должны чередоваться. Затем выполняется переход на шаг 2.

Чем больше порядок полинома М используется в методе Ремеза, тем выше будет точность аппроксимации требуемой ЧХ. Полином минимального порядка, обеспечивающий выполнение спецификаций фильтра, является оптимальным.

Описанный оптимизационный метод синтеза КИХ-фильтров по заданной АЧХ имеет различные модификации и алгоритмические реализации, разработанные как самим Ремезом, так и другими исследователями. В частности, в зарубежной литературе часто упоминается алгоритм Паркса-Мак-Клиллана, который также является одним из вариантов реализации идеи метода Ремеза.

Применение оптимизационных методов синтеза КИХ-фильтров на сегодняшний день получило очень широкое распространение в связи с развитием и ростом производительности вычислительной техники, что практически свело на нет основной недостаток этих методов – вычислительную сложность. Результаты применения оптимизационных методов позволяют разрабатывать такие КИХ-фильтры, сложность реализации которых (определяемая длиной импульсной характеристики или количеством коэффициентов-умножителей в структуре фильтра) оказывается значительно меньшей по сравнению с фильтрами, разработанными другими методами.

Важнейшим достоинством оптимизационных методов является то, что они весьма удобны для синтеза не только частотно-избирательных фильтров, но и фильтров с произвольной кусочно-непрерывной ЧХ $K_p(\omega)$.

Литература

1. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер ; пер. С.А. Кулешова ; под ред. А.С. Ненашева. – М. : Техносфера, 2006. – 856 с.
2. Умняшкин, С.В. Основы теории цифровой обработки сигналов : учеб. пособие / С.В. Умняшкин. – М. : Техносфера, 2016. – 528 с.