УДК 512.523.282.2

КВАТЕРНИОНЫ

Хилюк И.М.
Научный руководитель: Лошкарева С.Ю., к.ф,-м.н., доцент

Кватернионы – система гиперкомплексных чисел, образующая векторное пространство размерностью четыре над полем вещественных чисел. Предложены Уильямом Гамильтоном в 1843 году.

Кватернионы удобны для описания изометрий трёх- и четырёхмерного евклидовых пространств, и поэтому получили широкое распространение в механике. Также их используют в вычислительной математике, например, при создании трёхмерной графики.

Кватернион представляет собой упорядоченную четверку действительных чисел s, a, b, c, которые связаны с четырьмя базисными элементами 1, i, j, k, обладающими следующими свойствами:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$
$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -i.$$

Кватернион Q разделяют на скалярную часть s и векторную v, так что $Q = (s, \bar{v}) = (s, ai + bj + ck)\; s, a, b, c \in R$.

Алгебра кватернионов

1) Сложение

$$Q_1 + Q_2 = (s_1 + s_2) + (v_1 + v_2).$$

2) Произведения кватернионов

$$Q_1 \circ Q_2 = (s_1 s_2 - (\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2) + (s_1 \bar{v}_2 + s_2 \bar{v}_1 + \bar{v}_1 \times \bar{v}_2).$$

3) Умножение кватерниона на скаляр

$$\alpha \cdot Q = \left(\alpha \cdot s_q\right) + \left(\alpha \cdot \overline{v_q}\right).$$

4) Сопряженный кватернион $\tilde{Q}$

$$\tilde{Q} = (s - \bar{v}).$$

5) Нома кватернион$\|Q\|$

$$\|Q\| = Q \circ \tilde{Q} = (s^2 + x^2 + y^2 + z^2) = \tilde{Q} \circ Q.$$

6) Кватернион Q, с единичной нормой $\|Q\| = 1$, называется единичным.

7) Модуль кватерниона

$$Q = \sqrt{\|Q\|}.$$

8) Обратный кватернион Q^{-1}, это такой кватернион, для которого характерно равенство: $Q \circ Q^{-1} = Q^{-1} \circ Q = 1$

$$Q^{-1} = \frac{\tilde{Q}}{\|Q\|}.$$

Тригонометрическая форма записи кватерниона

$$Q = |Q| \left(\frac{s}{|Q|} + \frac{\bar{v}}{|Q|} \right) = |Q| (\cos\varphi + \bar{e} \sin\varphi).$$

Одна из самых важных причин использования кватернионов в компьютерной графике заключается в том, что кватернионы очень хорошо описывают повороты в пространстве. Кватернионы избавляют от проблем, отягощающих другие способы поворота точек в 3D-пространстве, такие как складывание рамок, в котором проблема заключается в представлении поворота в углах Эйлера.

Литература

1) А.О. Ватульян. Кватернионы // Математика: Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону, 1999. – С. 177–120.

2) JeremiahvanOosten. UnderstandingQuaternions [Электронный ресурс]. – 2012. – Режим доступа https://www.3dgep.com/understanding-quaternions/#Reference. – Дата доступа: 25.06.2012.

Кватернион // Википедия. [2020—2020]. Дата обновления: 28.02.2020. URL: https://ru.wikipedia.org/?oldid=105384420 (дата обращения: 28.02.2020).