УДК 681.51.033.26

МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА НЬЮТОНА-РАФСОНА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КОРНЕВЫХ ГОДОГРАФОВ СИСТЕМ

Балкис И.С., Дубоделов А.В.

Научный руководитель - Несенчук А.А., к.т.н., доцент

Метод корневого годографа - метод расчета линеаризованных замкнутых динамических систем, а именно систем с обратной связью, поведение которых в переходных процессах с достаточной для практического использования точностью описывается линейными дифференциальными уравнениями [1].

К данным системам относятся различные системы автоматического регулирования (САР), управления (САУ) и контроля, следящие системы и усилители с обратной связью [1].

Корневой годограф (КГ) алгебраического уравнения (характеристического уравнения замкнутой динамической системы) - это траектории, описываемые на комплексной плоскости s собственных частот системы корнями этого уравнения при непрерывном изменении одного из его параметров определенным образом [2].

Начало данной работы заключается в ручном исследовании алгоритма решения уравнений корневого годографа, на примере простейшей системы с передаточной функцией (ПФ) вида

$W(s) = X/Y = WoWr/(1+ KWoWr)$, (1)

где $W(s)$ – ПФ замкнутой системы; $s=\sigma+i\omega$; X – выходная (регулируемая) величина; Y – входная величина (задающая воздействие); Wo - ПФ объекта управления; Wr - ПФ регулятора [3]; K – коэффициент усиления.

Заменим $WoWr$ на $G(s)$:

$G(s)=WoWr=\Psi(s)/\Phi(s)$, (2)

где $G(s)$ – ПФ разомкнутой системы; $\Psi(s)$ – полином числителя ПФ разомкнутой системы; $\Phi(s)$ – полином знаменателя ПФ разомкнутой системы [3].

Преобразовав формулы (1) и (2) получим характеристическое уравнение (характеристический полином) замкнутой системы в общем виде:

$1+ KG(s)=\Phi(s)+ K\Psi(s)=s^n+ a_1s^{n-1}+ \dots +a_{n-1}s+a_n=0.$ (3)

КГ характеристического полинома (3), т.е. траектории корней, используются для проведения анализа динамических свойств, а также синтеза систем с требуемыми свойствами.

Для построения КГ полинома (3) изменяют один из его коэффициентов.

Используя формулу отображения (3), запишем функцию отображения:
$K = u(\sigma,\omega) + iv(\sigma,\omega) = - 1/G(s) = -\Phi(s)/\Psi(s)$. (4)
Выражение(4) представляет собой уравнение КГ общего вида, где K - параметр годографа [3].
На основе выражения (4) получим уравнение корневого годографа Теодорчика – Эванса (УКГТЭ)[3]:

$v(\sigma,\omega) = 0$ (5)

и уравнение параметра годографа:

$K = u(\sigma,\omega) = 0$.

Для получения графика КГ требуется решить уравнение (5). С этой целью используем метод Ньютона-Рафсона [2] для нахождения корней нелинейного полинома от одной независимой переменной. Определим некоторый числовой интервал на оси σ,

$\sigma \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$, (6)

в котором предположительно могут находиться корни. Также установим шаг δ вычисления корней в интервале (6). В результате уравнение КГ (5) преобразуется в уравнение вида

$v_\omega(\omega) = 0$. (7)

вычисляя корни уравнения (7) в пределах заданного интервала (6) с шагом h, формируем искомую кривую КГ. Вычисление корней выполняем с использованием метода Ньютона – Рафсона.
Для примера возьмем ПФ разомкнутой системы
$G(s) = (s+3)/((s+5)(s+7))$. (8)
Для определения полюсов КГ найдем корни знаменателя ПФ (5). $s1 = -5$; $s2 = -7$.
Число ветвей КГ равно порядку системы, $n=2$. Ветви начинаются при $K = 0$.
Исследованы 4 различных годографа и построены их графики. На рисунке 1 представлен график для ПФ, определенной выражением (8) на промежутке $-\infty < K < +\infty$.
Исходя из формул (2) и (4) получено выражение

$$K = -(s+5)(s+7)/(s+3).$$

(9)
После раскрытия скобок и подстановки в (9) выражения$s = \sigma + i\omega$определяется мнимая часть и приравнивается к 0, согласно (5):
$v(\sigma,\omega) = \sigma^2+6\sigma+\omega^2-1 = 0$.
Построенный УКГТЭ представлен на рисунке 1.
ДляПФ$G(s) = (s+4)/((s+5)(s+6)(s+7))$, (11)

$G(s) = 1/((s+1)(s+2)(s+3)(s+4))$

УКГ соответственно имеют вид

$-2\omega\sigma^3-30\omega\sigma^2-144\omega^2\sigma-2\omega^3\sigma-14\omega^3+218\omega = 0$. (12)

$4\omega\sigma^3+30\sigma^2+70\sigma-\omega^2\sigma-10\omega^3+50\omega = 0$. (13)

Задавая значения σ на выбранном промежутке (6) значений σ на действительной оси σ плоскости корней s через определенные интервалыh, подставляем их в УКГ. В результате получается нелинейное уравнение относительно переменной ω вида (7). Для вычисления корней этого нелинейного уравнения используется метод Ньютона – Рафсона.

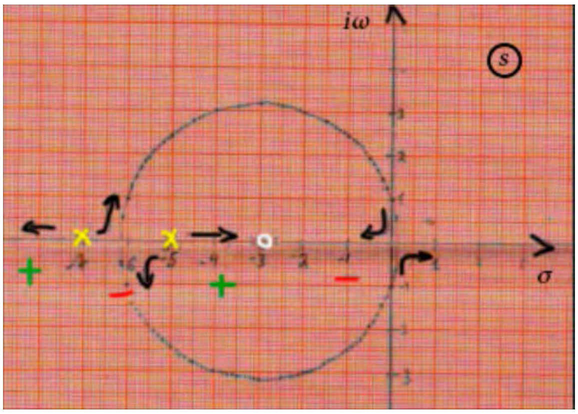

Рисунок 1. Построение УКГТЭ вручную.

Основная идея метода Ньютона – Рафсона состоит в последовательных приближениях к истинному решению уравнения (7), которые вычисляются с помощью первой производной от (7). Алгоритм вычисления корней строится в следующей последовательности действий.

1. Ввод нулевой итерации ω_0.
2. Вычисление методом конечных разностей производной$v'(\omega_0)$ в точке с координатой ω_0.
3. С использованиемразложения Тейлора замена $v(\omega)$ в окрестности рассматриваемой точки касательной – прямой линией $v(\omega_0)+v'(\omega_0)(\omega-\omega_0)$.
4. Определениеточки ω_t, в которой прямая пересекает ось ω.
5. Установлениеточкиω_tв качестве новойитерации, повторение циклаи построениекасательной, определение точки её пересечения с осью и т.д., пока корень не будет найден с требуемой точностью.

Для автоматизации данного процесса разработана программа на языке программирования C#. Интерфейс представлен на рисунках 2 и 3:

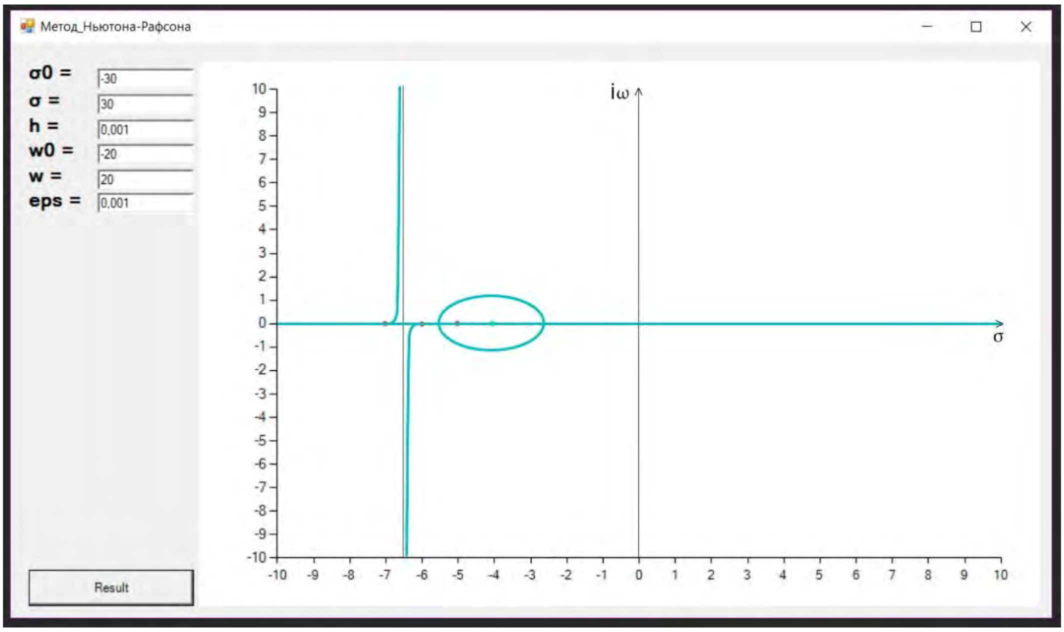

Рисунок 2. Результат построения корневого годографа по УКГ (12).

Для получения графика как на рисунке 2, так и на рисунке 3, необходимо задать промежуток (6) значений σ, в котором предположительно должны находиться искомые корни, где $\sigma_0 = \sigma_{min}$– нижняя граница промежутка (6), $\sigma = \sigma_{max}$–верхняя граница промежутка (6), значениеh (шаг σ). В полях ω_0, ω устанавливаются границы промежутка, в котором предположительно располагается искомый текущий корень уравнения (7).Точность корня задается в поле*eps*. После введения данных необходимонажать кнопку Result.

Система с ПФ (11) является устойчивой при $K \in [0, +\infty]$.

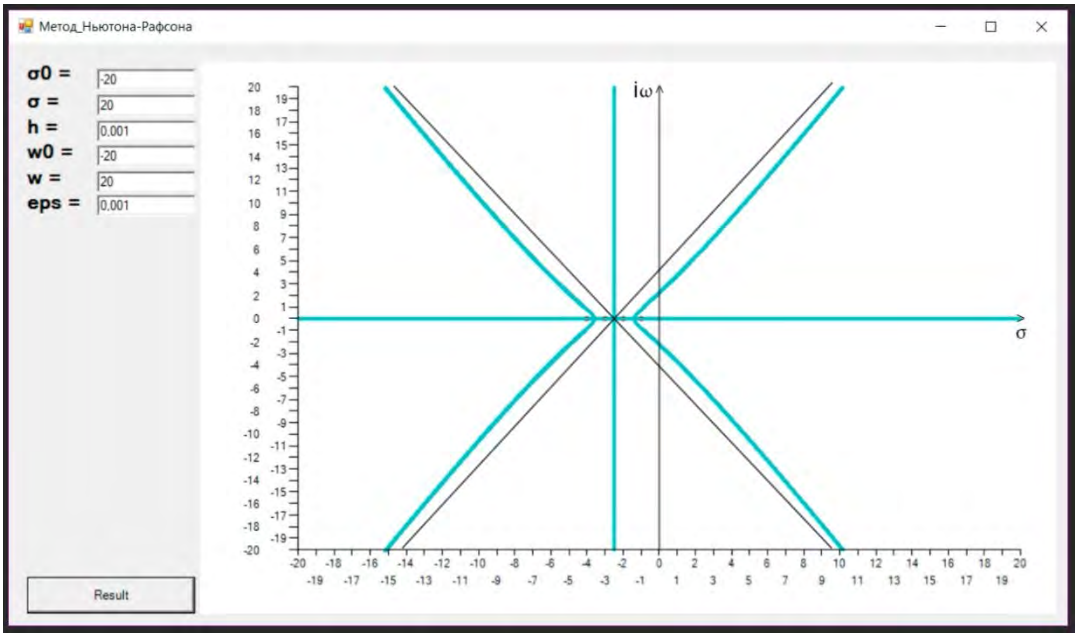

Рисунок 3. Результат построения корневого годографа по УКГ (13).

Метод корневого годографа позволяет успешно производить анализ и синтез линеаризованных систем в соответствии с требованиями к поведению системы в переходных процессах, вызываемых возмущениями, действующими на систему, или управляющих воздействиями на нее. Он широко используется при проектирования современных САУ, упрощает работу по тестированию, выявлению недостатков, обеспечению устойчивости и качества систем.

Литература

1. Удерман, Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления / Э.Г. Удерман. – М.: Государственное энергетическое издательство, 1963. – Режим доступа: http://bookre.org/reader?file=663688&pg=107
2. Дорф. Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
3. Несенчук. А.А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А.А. Несенчук. – Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2005