



The mathematical model of calculation of metal heating in through-type heating and thermal furnaces, using scheme of counterflow heat exchange, is developed.

В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, ПИИ «ЕВРОСТАЛЬ ЛТД»,  
М. Л. ГЕРМАН, РУП «Белорусский теплоэнергетический институт»,  
И. А. ТРУСОВА, П. Э. РАТНИКОВ, БНТУ

УДК 536. 24

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОЙ РАБОТЫ ПРОХОДНЫХ НАГРЕВАТЕЛЬНЫХ ПЕЧЕЙ В СХЕМЕ ПРОТИВОТОЧНОГО ТЕПЛООБМЕНА

**Введение.** В работах [1–3], посвященных разработке путей повышения энергоэффективности нагревательных и термических печей, отмечены основные направления их модернизации:

- установка на промышленных тепловых агрегатах теплоутилизационных устройств (рекуператоров, регенеративных горелок и т. д.);
- использование высококалорийных видов топлива;
- реконструирование футеровок печей с целью снижения теплопотерь через ограждающие конструкции;
- выбор перспективных схем теплообмена, позволяющих максимально интенсифицировать процесс нагрева (применение противоточного и рециркуляционного теплообмена).

Последнее направление в мировой практике печестроения получило широкое развитие. Организация противоточной схемы теплообмена, когда продукты сгорания движутся навстречу нагреваемым изделиям, имеет ряд преимуществ: повышение теплотехнического коэффициента полезного действия за счет более полного использования теплоты продуктов сгорания; возможность управления составом печной атмосферы, что позволяет также уменьшать окалинообразование и т. д. [4, 5].

**Физико-математическое моделирование тепломассообменных процессов в проходных печах металлургического и машиностроительного производств.** Рассмотрим теплообмен движущихся навстречу друг другу газа и металла со скоростями  $V_M$  и  $V_g$  соответственно (рис. 1).

Уравнение теплопроводности:

$$\rho_i \tilde{n}_i \delta \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T_i}{\partial x_i} \right).$$

Граничные условия:

$$\lambda \frac{\partial T_i}{\partial n} \Big|_{x_i=0} = 0, \quad \lambda \frac{\partial T_i}{\partial n} \Big|_{x_i=R} = \alpha(T_a - T_i) + \varepsilon\sigma(\dot{O}_a^4 - \dot{O}_i^4).$$

Начальные условия:

$$T_i(\delta, \tau) \Big|_{\tau=0} = T_{i0}, \quad T_a(\tau) \Big|_{\tau=0} = T_0,$$

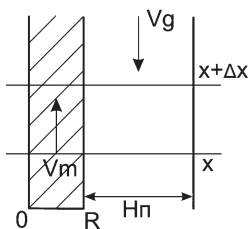


Рис. 1. Схема теплообмена

где  $t = \frac{x}{v_i}$  – текущее время, с;  $x$  – текущая координата в металле, м;  $v_M$  – скорость передвижения металла по печному пространству, м;  $\rho_M$  – плотность металла, кг/м<sup>3</sup>;  $\alpha$  и  $\sigma$  – коэффициенты теплоотдачи конвекцией и излучением, соответственно Вт/(м<sup>2</sup>·К) и Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>);  $c_{mp}$  – изобарная теплоемкость стали, Дж/(кг·К);  $T_g$  и  $T_M$  – соответственно температуры дымовых газов и металла, К;  $\varepsilon$  – степень черноты системы.

Введем безразмерное время и координаты:

$$Fo = \tau = \frac{at}{R^2}; \quad \xi = \frac{x_i}{R}.$$

Тогда уравнение теплопроводности и граничные условия при постоянных теплофизических свойствах металла приобретают вид

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial \xi^2}.$$

Граничные условия:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \frac{\alpha R}{\lambda} (T_{\bar{a}} - \dot{O}_i) + \frac{\varepsilon \sigma R}{\lambda T_0} (T_{\bar{a}}^4 - \dot{O}_i^4).$$

Введем переменные температуры металла и газа  $\theta_i = \frac{\dot{O}_i}{\dot{O}_0}$ ,  $\theta_{\bar{a}} = \frac{\dot{O}_{\bar{a}}}{\dot{O}_0}$ , где  $T_0$  – начальная температура газа.

Тогда

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \xi^2}, \tag{1}$$

$$\left. \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = Bi(\theta_{\bar{a}} - \theta_i) + Sk(\theta_{\bar{a}}^4 - \theta_i^4), \tag{2}$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_{i0} = \theta' = \text{const}; \quad \theta_{\bar{a}}(0) = \theta_{\bar{a}}'' = 1. \tag{3}$$

Запишем уравнение теплового баланса для расчетного участка.

Приход энергии за счет прихода газа из  $x + \Delta x$ .

$$1. \quad H(x + \Delta x) = \rho_g v_g L H_i \tilde{n}_\delta \dot{O}(\delta + \Delta \delta) \Delta t.$$

2. Тепловыделение внутри объема  $\Delta x$ :

$$H_g = q_{\bar{a}} H_p L \Delta x \Delta t,$$

где  $q_{\bar{a}}$  – удельное тепловыделение, Вт/м<sup>3</sup>;  $L$  – единица ширины печи.

Потери энергии.

1. Уход газов через  $x$ :

$$H(x) = \rho_g v_g L H_i \tilde{n}_\delta \dot{O}(\delta) \Delta t.$$

2. Потери теплоты на металл (теплота, поглощенная металлом):

$$Q_i = q_i L \Delta x \Delta t.$$

Сумма энергий:

$$\rho_g v_g L H_i \Delta t \tilde{n}_\delta (\dot{O}(\delta + \Delta x) - T(x)) = q_i L \Delta x \Delta t - q_{\bar{a}} \dot{I}_\delta L \Delta x \Delta t,$$

$$G_g c_p \frac{dT}{dx} = q_i L - q_{\bar{a}} H_p L_p,$$

где  $G_g$  – расход газа, м<sup>3</sup>/с.

Учитывая, что  $dx = v_i dt = v_i \frac{R^2}{a} d\tau$ , получаем

$$\frac{\rho_{\bar{a}} v_{\bar{a}} \tilde{n}_{\bar{a}} \dot{a}}{v_i R^2} \frac{\partial T_{\bar{a}}}{\partial \tau} = \alpha (\dot{O}_{\bar{a}} - \dot{O}_i) \frac{1}{\dot{I}_\delta} + \frac{\varepsilon \sigma}{\dot{I}_\delta} (\dot{O}_{\bar{a}}^4 - \dot{O}_i^4) - q_{\bar{a}}.$$

Вводя безразмерную температуру  $\theta_{\bar{a}} = \frac{\dot{O}_{\bar{a}}}{\dot{O}_0}$ , имеем

$$\frac{\rho_{\bar{a}} v_{\bar{a}} c_{\bar{a}} a H_{\delta}}{V_m R^2} \frac{\partial \theta_{\delta}}{\partial \tau} = \alpha (\theta_{\bar{a}} - \theta_m) + \varepsilon \sigma T_0^3 (\theta_{\bar{a}}^4 - \theta_m^4) - q_{\bar{a}} H_{\delta},$$

$$\frac{d\theta_{\bar{a}}}{d\tau} = \frac{\alpha R}{\lambda_m} \frac{R v_m c_m \rho_m}{\rho_{\bar{a}} v_{\bar{a}} c_{\bar{a}} l_{\delta}} (\theta_{\delta} - \theta_m) +$$

$$+ \frac{\varepsilon \sigma T_0^3 R}{\lambda_m} \frac{R v_m c_m \rho_m}{\rho_{\bar{a}} v_{\bar{a}} c_{\bar{a}} l_{\delta}} (\theta_{\bar{a}}^4 - \theta_m^4) - \frac{q_{\bar{a}} H_{\delta} R}{T_0 \lambda_m} \eta,$$

где  $\eta = \frac{v_m R c_m \rho_m L}{\rho_{\bar{a}} v_{\bar{a}} c_{\bar{a}} l_{\delta} L} = \frac{G_m c_m}{G_{\bar{a}} c_{\bar{a}}}$  – отношения водяных эквивалентов;  $G_m$  – расход металла, кг/с;  $G_{\bar{a}}$  – расход газа, кг/с ( $\text{м}^3/\text{с}$ );  $G_m c_m = \frac{\hat{e} \tilde{a} \tilde{A} \tilde{\alpha}}{\tilde{n} \hat{e} \tilde{a} \cdot \hat{E}} = \frac{\hat{A} \hat{o}}{\hat{E}}$  – водяное число.

Тогда уравнение для газа имеет вид

$$\frac{\partial \theta_{\bar{a}}}{\partial \tau} = \left[ \text{Bi}(\theta_{\bar{a}} - \theta_m) + \text{Sk}(\theta_{\bar{a}}^4 - \theta_m^4) \right] \eta - \frac{q_r R l_{\delta}}{\lambda_m T_0} \eta,$$

где  $\theta_{\bar{a}}(\tau_k) = 1$ ,  $\theta_{\bar{a}}(0) = \theta_0$  – соответственно для противоточного и прямоточного теплообмена ( $\tau_k$  – время окончания процесса).

Если положить  $q_r = 0$ , то полученное выражение описывает процессы теплообмена, происходящие в неотапливаемых (методических) зонах, где металл нагревается за счет теплоты уходящих дымовых газов.

При рассмотрении тепломассообменных процессов, происходящих в сварочной и томильной зонах нагревательных и термических печей, в балансовое уравнение необходимо ввести источник член, учитывающий тепловыделение при сжигании дополнительного топлива в данном пространстве теплового агрегата.

Приход энергии.

1. Приход энергии за счет теплосодержания дыма:

$$\dot{I}(\delta + \Delta\delta) = \rho_{\bar{a}} v_{\bar{a}} l_{\delta} \tilde{n}_{\delta} \dot{O}(\delta + \Delta\delta) \Delta t.$$

2. Теплота, генерирующаяся в расчетной области:

$$\dot{I}_{\bar{a}i\delta} = \rho_{\bar{a}} \Delta v_{\bar{a}} l_{\delta} \tilde{n}_{\delta} \dot{O}_0 \Delta t.$$

Расход теплоты.

1. Уход энергии с уходящими дымовыми газами:

$$\dot{I}(\delta) = \rho_{\bar{a}} (v_{\bar{a}} + \Delta v_{\bar{a}}) l_{\delta} \tilde{n}_{\delta} \dot{O}(\delta) \Delta t.$$

2. Потери теплоты на нагрев металла:

$$\dot{I}_i = q_i L \Delta x \Delta t.$$

Из этой системы получим

$$\rho_{\bar{a}} v_{\bar{a}} l_{\delta} \tilde{n}_{\bar{a}} \frac{dT_{\bar{a}}}{dx} = + \rho_{\bar{a}} \frac{\Delta v_{\bar{a}}}{\Delta x} l_{\delta} \tilde{n}_{\delta} [\dot{O}_0 - \dot{O}_{\bar{a}}] + q_m L$$

или с учетом обозначений, приведенных выше:

$$G_{\bar{a}} c_{\bar{a}} \frac{dT_{\bar{a}}}{dx} = q_m L + \frac{dG_{\bar{a}}}{dx} c_{\bar{a}} (T_0 - T_{\bar{a}}),$$

$$G_{\bar{a}} c_{\bar{a}} \frac{d}{v_m R^2} \frac{dT_{\bar{a}}}{d\tau} = \left[ \alpha (T_{\bar{a}} - T_m) + \varepsilon \sigma (T_{\bar{a}}^4 - T_m^4) \right] L + \frac{dG_{\bar{a}}}{dx} c_{\bar{a}} (T_0 - T_{\bar{a}}),$$

$$G_{\bar{a}} c_{\bar{a}} \frac{1}{\rho_m v_m R c_m} \frac{dT_{\bar{a}}}{d\tau} = \left[ \frac{\alpha R}{\lambda} (T_{\bar{a}} - T_m) + \frac{\varepsilon \sigma R}{\lambda} (T_{\bar{a}}^4 - T_m^4) \right] L + \frac{dG_{\bar{a}}}{dx} c_{\bar{a}} R (T_0 - T_{\bar{a}}),$$

$$G_{\bar{a}} c_{\bar{a}} \frac{d\theta_{\bar{a}}}{d\tau} = \left[ \text{Bi}(\theta_{\bar{a}} - \theta_i) + \text{Sk}(\theta_{\bar{a}}^4 - \theta_i^4) \right] G_i c_i - c_{\bar{a}} \frac{dG_{\bar{a}}}{dx} \frac{R^2 \rho_i v_i c_i}{\lambda} (1 - \theta_{\bar{a}}),$$

$$\frac{d\theta_{\bar{a}}}{d\tau} = \left[ \text{Bi}(\theta_{\bar{a}} - \theta_i) + \text{Sk}(\theta_{\bar{a}}^4 - \theta_i^4) \right] \frac{c_i G_i}{c_{\bar{a}} G_{\bar{a}}} - \left| \frac{dG_{\bar{a}}}{dx} \right| \frac{\rho_i v_i c_i R^2}{G_{\bar{a}} \lambda} (1 - \theta_{\bar{a}}).$$

С учетом того, что  $dx = v_i dt = v_i \frac{R^2}{a} d\tau$  имеем

$$\frac{d\theta_{\bar{a}}}{d\tau} = \left[ \text{Bi}(\theta_{\bar{a}} - \theta_i) + \text{Sk}(\theta_{\bar{a}}^4 - \theta_i^4) \right] \frac{c_i G_i}{c_{\bar{a}} G_{\bar{a}}} - \frac{1}{G_{\bar{a}}} \left| \frac{dG_{\bar{a}}}{d\tau} \right| (1 - \theta_{\bar{a}}). \quad (4)$$

Начальное условие:

1) в случае прямоточного теплообмена  $\theta_{\bar{a}}(0) = 1$ :

$$G_{\bar{a}}(\tau) = \int_0^t \frac{dG_{\bar{a}}}{dt} dt;$$

2) при организации противоточной схемы отопления:

$$\theta_{\bar{a}}(\tau_k) = 1,$$

$$G_{\bar{a}}(\tau) = \int_{t^e}^t \frac{dG_{\bar{a}}}{dt} dt.$$

При этом в случае противотока  $\frac{dG_{\bar{a}}}{d\tau} < 0$ .

Общее уравнение теплового баланса для прямоточного и противоточного теплообмена имеет вид

$$\frac{d\theta_{\bar{a}}}{d\tau} = \left[ \text{Bi}(\theta_{\bar{a}} - \theta_m) + \text{Sk}(\theta_{\bar{a}}^4 - \theta_m^4) \right] \frac{c_m G_m}{c_{\bar{a}} G_{\bar{a}}(\tau)} - \left| \frac{dG_{\bar{a}}}{d\tau} \right| \frac{1}{G_{\bar{a}}(\tau)} (1 - \theta_{\bar{a}}),$$

$G_{\bar{a}}(\tau) = \int_{\tau_k}^{\tau} dG_{\bar{a}}(t)$  – случай противотока;

$G_{\bar{a}}(\tau) = \int_0^{\tau} dG_{\bar{a}}(t)$  – случай прямотока.

Начальное условие для металла в обоих случаях идентично:  $\theta(\tau)|_{\tau=0} = \theta_0$ .

Уравнение источника имеет вид

$$\frac{q_r R H \delta}{\dot{O}_0 \lambda} G_i c_i = c_{\bar{a}} \left| \frac{dG_{\bar{a}}}{d\tau} \right| (1 - \theta_{\bar{a}}),$$

$$q_r = \frac{\tilde{n}_{\bar{a}} \left| \frac{dG_{\bar{a}}}{d\tau} \right| (1 - \theta_{\bar{a}}) \dot{O}_0 \lambda}{R H \delta c_i G_i} = \frac{\hat{e}_{\bar{a}} \cdot \hat{E} \cdot \hat{A} \dot{O}}{\hat{i}^2 \cdot \hat{e}_{\bar{a}} \hat{n}} = \frac{\hat{A} \dot{O}}{\hat{i}^3}.$$

Решение задачи нагрева металла в проходных методических печах, использующих схему противоточного теплообмена. Выше приведен вывод уравнений, описывающих теплообменные процессы в методических печах, работающих в схеме противотока (уравнения (1)–(4)).

При моделировании работы методических печей (как правило, печей с шагающими балками и подом) можно принять допущение, что тепловыделение за счет сжигания топлива происходит дискретно (скачкообразно) по мере прохождения металлом очередного ряда горелок. При таком допущении, что расход газа меняется дискретно, второй член в уравнении теплового баланса (4) обнуляется и изменение расхода дымовых газов учитывается отношением водяных эквивалентов, т. е. оно приобретает вид

$$\frac{d\theta_{\bar{a}}}{d\tau} = [\text{Bi}(\theta_{\bar{a}} - \theta_m) + \text{Sk}(\theta_{\bar{a}}^4 - \theta_m^4)] \eta(\tau). \quad (5)$$

Решение поставленной математической модели получено методом «эквивалентных источников» [6–8]. При решении введены следующие обозначения:

$$\theta(\xi, \tau) = \frac{\dot{O}(\xi, \tau)}{\dot{O}_{\bar{a}}^*}, \quad \theta_{\bar{a}}(\tau) = \frac{\dot{O}_{\bar{a}}(\tau)}{\dot{O}_{\bar{a}}^*}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{\text{Bi}}{\text{Sk}}, \quad n = \frac{V_i c_i}{V_{\bar{a}} c_{\bar{a}}}, \quad n_m = (1+m)n.$$

Здесь  $V_M, V_G$  – объемные расходы металла и газа;  $m$  – коэффициент формы ( $m = 0$  – пластина,  $m = 1$  – цилиндр,  $m = 2$  – шар). Остальные обозначения общеприняты в теории теплопроводности.

На инерционном периоде нагрева ( $0 \leq \tau \leq \tau_0$ ;  $\beta(\tau) \leq \xi \leq 1$ ) решение задачи (1)–(4) имеет вид

$$\theta_1(\xi, \tau) = \theta' + [\theta_{1r} - \theta'] \left[ \frac{\rho - \beta(\tau)}{1 - \beta(\tau)} \right]^2, \quad \theta_{1\bar{a}}(\tau) = 1 + \frac{n}{3} \Delta\theta_1(\tau) l(\tau), \quad \tau \leq \tau_0 = \frac{1}{6(1+m)}. \quad (6)$$

На регулярном (упорядоченном) периоде нагрева ( $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_*$ ;  $0 \leq \xi \leq 1$ ) температурное поле заготовок определяется по выражению

$$\theta_2(\xi, \tau) = \theta_{2r}(\tau) - \frac{\text{Sk}}{2} \left\{ [\theta_{2\bar{a}}^4(\tau) - \theta_{2r}^4(\tau)] + \zeta [\theta_{2\bar{a}}(\tau) - \theta_{2r}(\tau)] \right\} (1 - \xi^2). \quad (7)$$

Температура теплоносителя находится при решении трансцендентных уравнений

$$\Phi_{\bar{a}}(\tau) - \Phi_{\bar{a}}^0 = 4(1+m) \frac{k_1 \text{Sk} \theta_c}{k_2^2} (\tau - \tau_0); \quad \Phi_{\bar{a}}(\tau) = \ln \theta_{2\bar{a}}(\tau) - p \ln [1 - k_2 \theta_{2\bar{a}}(\tau)] - \frac{0,5 + \theta_{2\bar{a}}(\tau)}{k_2^2 \theta_{2\bar{a}}^2}, \quad (8)$$

где обозначения к формулам (6)–(8) приведены в работах [6–8].

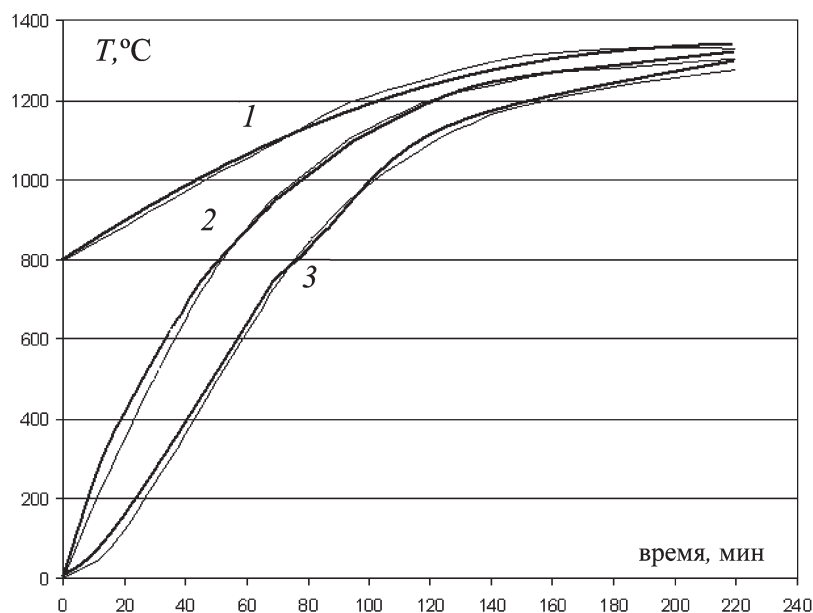


Рис. 2. Сравнение расчетных результатов с экспериментальными данными: 1 – температура печи; 2 – температура поверхности металла; 3 – температура центра металла; толстые линии – эксперимент; тонкие – результаты расчетов

**Проверка адекватности разработанной математической модели противоточного теплообмена в проходных методических печах.** Для проверки адекватности разработанной математической модели было проведено сравнение результатов расчетов нагрева блюмов из стали 45 толщиной 270 мм в методической толкательной печи со сводовым отоплением с экспериментальными данными [9, рис. 7.7]. Результаты сравнения приведены на рис. 2. Как видно из рисунка, расхождение экспериментальных и расчетных значений температурных полей незначительно, что подтверждает высокую точность и практическую значимость полученных аналитических решений.

### Выводы

Разработана математическая модель расчета нагрева металла в проходных нагревательных и термических печах, использующих схему противоточного теплообмена. Решения получены в аналитическом виде, что позволяет проводить детальный анализ влияния различных факторов на динамику нагрева металла и могут быть использованы для последующих термомеханических расчетов. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными показало высокую адекватность полученных решений.

### Литература

1. Тимошпольский В. И. Энергоэффективные печи для промышленного комплекса Беларуси // Наука и инновации. 2007. № 2(48). С. 12–14.
2. Тимошпольский В. И., Герман М. Л. Концепция реконструкции и модернизации парка нагревательных печей металлургических и машиностроительных предприятий Республики Беларусь: от теории к практике (проблемные вопросы) // Литье и металлургия. 2007. № 2. С. 21–28.
3. Тимошпольский В. И., Герман М. Л., Менделев Д. В. Обзор основных направлений модернизации печного парка и совершенствование технологий нагрева и термической обработки слитков и заготовок в условиях современного машиностроительного предприятия // Литье и металлургия. 2007. № 4. С. 54–62.
4. Исследования противоточного теплообмена в металлургии: состояние вопроса и проблемы развития / Ю. С. Постольник, В. И. Тимошпольский, А. П. Огурцов и др. // Металлургия. Мн.: Выш. шк. 2001. Вып. 25. С. 149–164.
5. Теория противоточного теплообмена при нагреве заготовок и слитков в пламенных печных агрегатах / В. И. Тимошпольский, Ю. С. Постольник, А. П. Огурцов и др. // Тепломассобмен ММФ-2004. Материалы конф., Мн., 24–28 мая 2004 г.
6. Расчет нагрева термомассивной пластины в условиях теоретического противотока / В. И. Тимошпольский, Ю. С. Постольник, С. М. Козлов, И. А. Трусова, П. Э. Ратников // Литье и металлургия. 2001. № 1. С. 63–64.
7. Противоточный радиационно-конвективный нагрев массивных тел / Ю. С. Постольник, В. И. Тимошпольский, А. П. Огурцов и др. // Изв. высш. учеб. зав. и энергет. объедин. СНГ. Энергетика. 2001. № 3. С. 65–75.
8. Математическое моделирование нагрева термически массивных тел в условиях теоретического противоточного теплообмена излучением / В. И. Тимошпольский, Ю. С. Постольник, С. М. Козлов и др. // Металлургия. Мн.: Выш. шк., 2002. Вып. 26. С. 12–19.
9. Теплообмен и тепловые режимы в промышленных печах (учеб. пособ.) / В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова, А. Б. Стеблов, И. А. Павлюченков. Мн.: Выш. шк., 1992.