АСТРОФИЗИКА

ТОМ 23 АВГУСТ, 1985 ВЫПУСК 1

УДК: 523—64:535.36

ОБ АСИМПТОТИКАХ ВНУТРЕННИХ ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СРЕДАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К РАСЧЕТУ СРЕДНИХ ДЛИТЕЛЬНОСТЕЙ СВЕЧЕНИЯ СЛОЯ И СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Н. Н. РОГОВЦОВ, А. М. САМСОН

Поступила 20 августа 1984

Принята к печати 20 апреля 1985

Найдено явное аналитическое выражение интенсивности излучения внутри однородного консервативно рассеивающего плоскопараллельного слоя, ограниченного произвольными подстилающими поверхностями и содержащего любые внутренние источники. Эта формула связывает указанную величину с характеристиками поля излучения на границах среды. Интенсивность излучения в слое при отсутствии подстилающих поверхностей выражена через коэффициенты диффузного отражения и пропускания. Предложен способ получения асимптотических формул для характеристик полей излучения в оптически толстой плоскопараллельной среде, имеющей произвольные источники. Найдены асимптотические выражения для средних длительностей свечения слоя и сферической оболочки.

1. *Введение.* С теоретической и практической точек зрения прямую задачу о переносе излучения в рассеивающих средах разумно расчленить на две. Первая состоит в отыскании полей излучения на границах сред без предварительного вычисления величин, характеризующих световой режим внутри них. Вторая заключается в восстановлении полей излучения внутри сред по их характеристикам на границах рассеивающих поглощающих тел. Основы методов решения задачи первого типа для случая плоскопараллельных сред были заложены в работах [1—4]. В монографии [2] было показано, что определение интенсивности излучения внутри плоскопараллельного слоя, не содержащего внутренних источников, можно свести к рассмотрению интегральных уравнений, решение которых и выражало бы искомую величину через коэффициенты яркости [2, 4]. Этот результат указывал на принципиальную возможность решения задачи 2-го типа, хотя и не позволил провести ее исследование аналитическими средствами. Решение данного вопроса для случая плоскопараллельных сред

было впоследствии дано в явной аналитической форме в работах [5—11]. Затем в статьях [12, 13] такая задача была изучена применительно к средам произвольной конфигурации, которые ограничены границами с любыми физически допустимыми свойствами. Заметим, что результаты, полученные в [5—13], нашли применение при построении и решении уравнений для интенсивностей излучения на границах среды, а также при рассмотрении полной прямой задачи [8—12, 14].

В данной статье найдено аналитическое выражение для усредненной по азимуту интенсивности излучения внутри консервативно рассеивающего однородного слоя, ограниченного произвольными подстилающими поверхностями и содержащего любые внутренние источники. Оно связывает ее с характеристиками поля излучения на границах слоя. При отсутствии подстилающих поверхностей поле излучения в слое выражено через коэффициенты яркости (при внешнем облучении слоя такая задача была решена в [5], а в случае изотропного рассеяния и наличия внутренних источников — в [15]). Предложен способ получения асимптотик инетнсивностей излучения внутри и на границах оптически толстой плоскопараллельной среды, имеющей произвольные источники. Найдены асимптотики средних длительностей свечения слоя и сферической оболочки (для консервативного рассеяния). Исследование переноса излучения в сферической оболочке, как известно [16. 17], представляет определенный интерес для астрофизики.

2. *Связь между интенсивностями излучения внутри и на границах консервативно рассеивающего однородного слоя.* Рассмотрим плоскопараллельную среду, которая реально является частью другого слоя или ограничена подстилающими поверхностями с любыми физически допустимыми свойствами (ее границы, в частности, могут быть полностью прозрачными для излучения). Пусть она содержит произвольные первичные источники (слой может также облучаться любым внешним излучением). Для этих условий имеет место следующее соотношение инвариантности:

$$\theta(\tau, \tau_0) I_0(\tau, \mu, \lambda) = \int_{-1}^{1} d\mu' \int_{+0}^{\tau_0 - 0} G_*(\tau, \mu, \tau', \mu', \lambda; a, b)\, g_0(\tau', \mu', \lambda)\, d\tau' +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \mu' G_*(\tau, \mu, 0, \mu', \lambda; a, b)\, I_0(+0, \mu', \lambda)\, d\mu' -$$

$$- \int_{-1}^{1} \mu' G_*(\tau, \mu, \tau_0, \mu', \lambda; a, b)\, I_0(\tau_0 - 0, \mu', \lambda)\, d\mu', \qquad (1)$$

где τ_0 — оптическая толщина рассматриваемого слоя $[0, \tau_0]$; τ — оптическая глубина; $\theta(\tau, \tau_0) = 1$ при $\tau \in [0, \tau_0]$ и $\theta(\tau, \tau_0) = 0$ при $\tau \overline{\in} [0, \tau_0]$; λ — вероятность выживания кванта; $\mu = \cos \eta$, η — угол между направлениями распространения или испускания излучения и осью оптических глубин; $g_0(\tau, \mu, \lambda)$ и $I_0(\tau, \mu, \lambda)$ — нулевые азимутальные гармоники соответственно первичных источников и интенсивности излучения в слое $[0, \tau_0]$; $G_*(\tau, \mu, \tau', \mu', \lambda; a, b)$ — функция Грина уравнения переноса для плоскопараллельного слоя $[a, b]$ ($a < 0$, $b > \tau_0$), который не имеет подстилающих поверхностей и содержит область с оптическими свойствами, идентичными внутренней части слоя $[0, \tau_0]$. Выражение (1) является частным случаем соотношения инвариантности (17) работы [11] и получено из него посредством перехода к нулевым азимутальным гармоникам входящих в указанную формулу величин (при этом в данном соотношении надо положить $c = 0$, $d = \tau_0$, $m = b$, $n = a$, где параметры c, d, m, n имеют смысл, приданный им в статье [11]). Заметим, что выражение (1) в частных случаях принимает форму соотношений первого или последнего „пересечений" (для случая полубесконечной среды такого рода соотношения были подробно разобраны и обсуждены в работе [10]). Когда слой $[0, \tau_0]$ не облучается внешним излучением и не имеет подстилающих поверхностей формула (1) будет представлять собой соотношение первого „пересечения" (при этом в (1) во втором члене справа интегрирование будет вестись по отрезку $[-1, 0]$, а в третьем по отрезку $[0, 1]$). Если $a = 0$, $b = \tau_0$ и слой $[0, \tau_0]$ не имеет подстилающих поверхностей, то выражение (1) примет простейшую форму соотношения последнего „пересечения".

Для вывода искомой формулы для интенсивности излучения в случае консервативного рассеяния воспользуемся следующим представлением функции Грина $G_\infty(\tau, \mu, \tau', \mu', \lambda) = G_*(\tau, \mu, \tau', \mu', \lambda; -\infty, +\infty)$ для бесконечной однородной среды [10]:

$$G_\infty(\tau, \mu, \tau', \mu', \lambda) = Ci(\mu)\, i(\mu') \exp(-k(\tau - \tau')) + G^*_\infty(\tau, \mu, \tau', \mu', \lambda), \quad (2)$$

$$\tau - \tau' > 0,$$

$$G_\infty(\tau, \mu, \tau', \mu', \lambda) = Ci(-\mu)\, i(-\mu') \exp(-k(\tau' - \tau)) +$$

$$+ G^*_\infty(\tau, \mu, \tau', \mu', \lambda), \quad (3)$$

$$\tau - \tau' < 0,$$

где C — нормировочная константа, k — наименьший неотрицательный корень характеристического уравнения, $i(\mu)$ — решение характеристического уравнения, соответствующее k и нормированное условием

$\int_{-1}^{1} i(\mu)\, d\mu = 2/\lambda$ [10], $G^{*}_{\infty}(\tau, \mu, \tau', \mu', \lambda) = G^{*}_{\infty}(\tau - \tau', \mu, \mu', \lambda)$ при $\tau - \tau' > 0$ и $G^{*}_{\infty}(\tau, \mu, \tau', \mu', \lambda) = G^{*}_{\infty}(\tau' - \tau, -\mu, -\mu', \lambda)$ при $\tau - \tau' < 0$. Если предположить, что слой $[0, \tau_0]$ не имеет подстилающих поверхностей и является частью однородной бесконечной среды, то из (3) и (1) при $g_0(\tau, \mu, \lambda) = \delta(\tau - \tau_1)\,\delta(\mu - \mu_1)$, $\tau = -\tau_1$, $\tau_0 = \infty$ и $\tau_1 \to \infty$ следует, что $C = 2/M$, где $M = 2\int_{-1}^{1} i^2(\mu)\,\mu\, d\mu$. Другим способом значение C было найдено в [10]. Представление (2), (3) было получено в [10] посредством выделения из $G_{\infty}(\ldots)$ в явном виде наиболее медленно затухающей при $|\tau - \tau'| \to \infty$ моды (общее выражение для $G^{*}_{\infty}(\ldots)$ может быть найдено из результатов работы [18], относящихся к нахождению функции Грина). Теперь, полагая в (1) $a = -\infty$, $b = \infty$ и подставляя в него выражения (2), (3), получим из (1) с учетом асимптотик [4]

$$i(\mu) = 1 + 3[(1 - \lambda)/(3 - x_1)]^{1/2}\mu + O(1 - \lambda),$$
$$k = \sqrt{(1 - \lambda)(3 - x_1)} + O((1 - \lambda)^{3/2}), \quad \lambda \to 1$$

такое искомое соотношение

$$\begin{aligned} I_0(\tau, \mu, 1) = &-\frac{3 - x_1}{4}\int_{-1}^{1} d\mu' \int_{+0}^{\tau_0 - 0} |\tau - \tau'|\, g_0(\tau', \mu', 1)\, d\tau' + \\ &+ \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} (\mu' + \mu)\, d\mu' \int_{+0}^{\tau_0 - 0} \operatorname{sign}(\tau - \tau')\, g_0(\tau', \mu', 1)\, d\tau' + \\ &+ \frac{3 - x_1}{4}\int_{-1}^{1} \mu' [(\tau_0 - \tau)\, I_0(\tau_0 - 0, \mu', 1) - \tau I_0(+0, \mu', 1)]\, d\mu' + \\ &+ \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} \mu'(\mu' + \mu)[I_0(+0, \mu', 1) + I_0(\tau_0 - 0, \mu', 1)]\, d\mu' + \\ &+ \int_{-1}^{1} d\mu' \int_{+0}^{\tau_0 - 0} G^{*}_{\infty}(\tau, \mu, \tau', \mu', 1)\, g_0(\tau', \mu', 1)\, d\tau' + \\ &+ \int_{-1}^{1} \mu' [G^{*}_{\infty}(\tau, \mu, 0, \mu', 1)\, I_0(+0, \mu', 1) - \\ &- G^{*}_{\infty}(\tau, \mu, \tau_0, \mu', 1)\, I_0(\tau_0 - 0, \mu', 1)]\, d\mu', \quad \tau \in (0, \tau_0), \end{aligned} \tag{4}$$

где x_1 — соответствующий коэффициент в разложении индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра. При выводе (4) была использована также следующая асимптотика:

$$\int_{-1}^{1} d\mu \int_{+0}^{\tau_0-0} g_0(\tau, \mu, \lambda)\, d\tau + \int_{-1}^{1} \mu I_0(+0, \mu, \lambda)\, d\mu -$$

$$- \int_{-1}^{1} \mu I_0(\tau_0 - 0, \mu, \lambda)\, d\mu = O(1-\lambda), \qquad \lambda \to 1, \tag{5}$$

которую нетрудно вывести непосредственно из уравнения переноса излучения (соотношение (5) справедливо, если хотя бы одна из границ слоя $[0, \tau_0]$ является поглощающей и $\tau_0 < \infty$). Выражение (4) будет исходным для получения дальнейших результатов.

3. *Нахождение внутреннего поля излучения в слое и его асимптотик по коэффициентам яркости.* Здесь и далее будем считать, что консервативно рассеивающий слой $[0, \tau_0]$ не имеет подстилающих поверхностей и не является частью другой рассеивающей среды. В таком случае из (4) легко найти аналитическое представление для величины $I_0(\tau, \mu, 1)$, выражающее ее при произвольных внешних и внутренних источниках через нулевые азимутальные гармоники $\rho_0(\xi, \zeta, \tau_0, \lambda)$, $\sigma_0(\xi, \zeta, \tau_0, \lambda)$ коэффициентов яркости [4], которые, в свою очередь, могут быть найдены теоретически или экспериментально. Идея получения такого результата заключается в следующем. Если сначала положить $g_0(\ldots) \equiv 0$ и считать, что слой возбуждается внешним мононаправленным излучением, падающим только на одну из границ $\tau = 0$ или $\tau = \tau_0$, то из (4) легко найдем значения поверхностных функций Грина внутри среды. Согласно же принципу взаимности [19] эти выражения с точностью до известного множителя дают также и значения объемной функции Грина на границах $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$. Умножив же эти соотношения на $g_0(\tau, -\mu, 1)$ и интегрируя их по τ от $+0$ до $\tau_0 - 0$ и по μ от -1 до 1, получим интенсивности излучения, выходящего из слоя при любых первичных источниках в нем. Затем, подставив найденные таким образом выражения для $I_0(0, -|\mu|, 1)$ и $I_0(\tau_0, |\mu|, 1)$ в (4), придем к искомой формуле для $I_0(\tau, \mu, 1)$ $(\tau \in [0, \tau_0])$. Проделав соответствующие вычисления, находим, в частности, для интенсивности $I_0(0, -|\mu|, 1)$ излучения, выходящего через границу $\tau = 0$, следующее соотношение:

$$I_0(0, -|\mu|, 1) = \frac{3-x_1}{2}\int_0^1 \mu'[R_{10}(\tau_0)\rho_0(\mu', |\mu|, \tau_0, 1) +$$

$$+ (\tau_0 R_{00}(\tau_0) - R_{10}(\tau_0))\sigma_0(\mu', |\mu|, \tau_0, 1)]\,d\mu' +$$

$$+ \frac{3-x_1}{4}[\tau_0 \exp(-\tau_0/|\mu|)R_{00}(\tau_0) - (1+\exp(-\tau_0/|\mu|))R_{10}(\tau_0)] +$$

$$+ \frac{3}{2}R_{01}(\tau_0)\int_0^1 \mu'(\rho_0(\mu', |\mu|, \tau_0, 1) - \sigma_0(\mu', |\mu|, \tau_0, 1))\,d\mu' +$$

$$+ \frac{3}{2}R_{00}(\tau_0)\int_0^1 \mu_1^2(\rho_0(\mu_1, |\mu|, \tau_0, 1) + \sigma_0(\mu_1, |\mu|, \tau_0, 1))\,d\mu_1 +$$

$$+ \frac{3}{4}(1+\exp(-\tau_0/|\mu|))(|\mu|R_{00}(\tau_0) - R_{01}(\tau_0)) + G_0(0, |\mu|, \tau_0) -$$

$$-2\int_0^1 \mu'(G_0(0, -\mu', \tau_0)\rho_0(\mu', |\mu|, \tau_0, 1) +$$

$$+ G_0(\tau_0, \mu', \tau_0)\sigma_0(\mu', |\mu|, \tau_0, 1))\,d\mu' - \exp(-\tau_0/|\mu|)\,G_0, \tau_0, |\mu|, \tau_0), \quad (6)$$

где

$$R_{il}(\tau_0) = \int_{+0}^{\tau_0-0} \tau^i\,d\tau \int_{-1}^{1} \mu^l g_0(\tau, \mu, 1)\,d\mu,$$

$$G_0(r, \mu, \tau_0) = \int_{+0}^{\tau_0-0} d\tau \int_{-1}^{1} G_\infty^*(\tau, -\mu', r, \mu, 1)\,g_0(\tau, \mu', 1)\,d\mu'. \quad (7)$$

Выражение для $I_0(\tau_0, |\mu|, 1)$ можно получить из (6), (7) посредством замены $g_0(\tau, \mu, 1)$ на $g_0(\tau_0-\tau, -\mu, 1)$. С учетом сказанного видно, что формулы (4), (6) и дают решение задачи об определении $I_0(\tau, \mu, 1)$ для слоя $[0, \tau_0]$, содержащего произвольные внутренние источники, по заданным $\rho_0(\ldots)$ и $\sigma_0(\ldots)$. Ввиду громоздкости соответствующего явного выражения для $I_0(\tau, \mu, 1)$ выписывать его не будем. Заметим только, что оно существенно упрощается при выполнении условия $g_0(\tau, \mu, 1) = g_0(\tau_0 - \tau, -\mu, 1)$.

Как показано в работе [20], аналог полученного выше результата имеет место и для любого невогнутого тела V. В [20], в частности, найдена связь объемной функции Грина для V с функцией Грина для бесконечной среды (не обязательно однородной) и обобщенным коэффициентом яркости (он с точностью до известного множителя [20] выражается через значения поверхностной функции Грина для тела V на его границе S). Сформулированный в предыдущем абзаце результат можно рассматривать в качестве конкретной реализации общих выражений, найденных в [20]. Другой частный вариант приведенных в работе [20] соотношений получен недавно в статье [21].

Если в формулу для $I_0(\tau, \mu, 1)$, полученную описанным выше образом, подставить какие-либо асимптотики для $\rho_0(\ldots)$ и $\sigma_0(\ldots)$, то нетрудно найти асимптотическое выражение для этой величины. В частности, можно воспользоваться такими асимптотиками [4, 22]:

$$\rho_0(\xi, \zeta, \tau_0, 1) = \rho_0^\infty(\xi, \zeta, 1) - 4[(3-x_1)\tau_0 + 3b]^{-1} u_0(\xi) u_0(\zeta) + \\ + O(\exp(-\chi\tau_0)), \tag{8}$$

$$\sigma_0(\xi, \zeta, \tau_0, 1) = 4[(3-x_1)\tau_0 + 3b]^{-1} u_0(\xi) u_0(\zeta) + O(\exp(-\chi\tau_0)),$$

$$\tau_0 \to \infty, \quad 0 < a < \chi \leqslant 1.$$

Здесь $u_0(\xi)$ — коэффициент пропускания полубесконечной атмосферы в случае чистого рассеяния [4], $b = 4\int\limits_0^1 \xi^2 u_0(\xi)\, d\xi$, $\rho_0^\infty(\xi, \zeta, 1)$ — нулевая азимутальная гармоника коэффициента отражения для полубесконечной атмосферы при $\lambda = 1$. Подстановка формул (8) в соотношения, выражающие $I_0(\tau, \mu, 1)$, $I_0(0, -|\mu|, 1)$, $I_0(\tau_0, |\mu|, 1)$ через $\rho_0(\ldots)$ и $\sigma_0(\ldots)$ (способ их получения был указан выше), и приводит к искомым асимптотикам для этих величин при $\tau_0 \to \infty$, причем они будут справедливыми для любых $\tau \in [0, \tau_0]$. Для записи данных асимптотических формул в явном виде достаточно знания только функции $G_\infty^*(\ldots)$ и коэффициента $\rho_0^\infty(\xi, \zeta, 1)$. Ряд других методов получения асимптотик для полубесконечных и оптически толстых слоев был предложен ранее в работах (см. [4, 10, 22—24] и ссылки в них). Выпишем для иллюстрации данного способа асимптотики интенсивностей излучения для двух частных типов первичных источников, распределенных в слое оптической толщины $2\tau_0$. Пусть источники распределены в среде равномерно, т. е. $g_0(\tau, \mu, 1) = C_0 = \mathrm{const}$. Тогда из (4), (6)—(8) посредством указанных ранее преобразований получим

$$I_0(0, -|\mu|, 1) = I_0(2\tau_0, |\mu|, 1) =$$

$$= C_0\left\{4u_0(|\mu|)\tau_0 + G_3(|\mu|, 2\tau_0) - 2\int\limits_0^1 \mu' \rho_0^\infty(\mu', |\mu|, 1)\, G_3(-\mu', 2\tau_0)\, d\mu'\right\} + \\ + O(\tau_0 \exp(-2\chi\tau_0)), \tag{9}$$

$$I_0(\tau, \mu, 1) = C_0 \left\{ \frac{3 - x_1}{2} \tau(2\tau_0 - \tau) + 3\mu(\tau - \tau_0) + \right.$$

$$+ \left(\frac{3}{2} b - 4 \int_0^1 \mu' u_0(\mu') G_2(\tau, \mu, \mu', 2\tau_0) \, d\mu' \right) \tau_0 +$$

$$+ \frac{3}{2} \int_0^1 \mu^2 G_3(\mu, 2\tau_0) \, d\mu - \int_0^1 \mu' \left(2u_0(\mu') - \frac{3\mu'}{2} \right) G_3(-\mu', 2\tau_0) \, d\mu' +$$

$$+ \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\tau_0} G^*_\infty(\tau, \mu, \tau', \mu', 1) \, d\tau' - \int_0^1 \mu' G_2(\tau, \mu, \mu', 2\tau_0) \, (G_3(\mu', 2\tau_0) - \qquad (10)$$

$$\left. - 2 \int_0^1 \mu'' \rho_0^\infty(\mu'', \mu') \, G_3(-\mu'', 2\tau_0) \, d\mu'') \, d\mu' \right\} +$$

$$+ O(\tau_0 \exp(-2\varkappa\tau_0)) = C_0 I^*(\tau, \mu) + O(\tau_0 \exp(-2\varkappa\tau_0)),$$

$$\tau_0 \to \infty, \quad \tau \in [0, 2\tau_0].$$

Здесь величина $G_3(\mu, 2\tau_0)$ равна $G_0(0, \mu, 2\tau_0)$, когда $g_0(\tau, \mu, 1) \equiv 1$, а $G_2(\tau, \mu, \mu', 2\tau_0) = G^*_\infty(\tau, \mu, 0, -\mu', 1) + G^*_\infty(\tau, \mu, 2\tau_0, \mu', 1)$.

Предположим теперь, что источники в слое $[0, 2\tau_0]$ распределены по закону $g_0(\tau, \mu, 1) = C_1 \delta(\tau - \tau_0) \mu^2$, $C_1 = \text{const}$. Тогда аналогичным образом находим

$$I_0(0, -|\mu|, 1) = I_0(2\tau_0, |\mu|, 1) =$$

$$= C_1 \left\{ \frac{2}{3} u_0(|\mu|) + \int_{-1}^1 \mu_1^2 G^*_\infty(\tau_0, \mu_1, 0, |\mu|, 1) \, d\mu_1 - \right.$$

$$- 2 \int_0^1 \mu' \rho_0^\infty(\mu', |\mu|, 1) \, d\mu' \int_{-1}^1 G^*_\infty(\tau_0, \mu_1, 0, -\mu', 1) \, \mu_1^2 d\mu_1 +$$

$$\left. + O(\exp(-2\varkappa\tau_0)) \right\} = C_1 (h(|\mu|, \tau_0) + O(\exp(-2\varkappa\tau_0))), \qquad (11)$$

$$I_0(\tau, \mu, 1) = C_1 \left\{ -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_1}{3} \right) |\tau_0 - \tau| + \frac{\mu}{2} \operatorname{sign}(\tau - \tau_0) + \right.$$

$$+ \frac{3 - x_1}{2} \tau_0 \int_0^1 \mu h(\mu, \tau_0) \, d\mu + \frac{3}{2} \int_0^1 \mu^2 h(\mu, \tau_0) \, d\mu +$$

$$+\int_{-1}^{1}\mu_1^2 G_\infty^*(\tau,\mu,\tau_0,\mu_1,1)\,d\mu_1-\int_0^1\mu' h(\mu',\tau_0)\,G_2(\tau,\mu,\mu',2\tau_0)\,d\mu'+$$

$$+O(\tau_0\exp(-2k\tau_0))\Big\}=C_1\left(I^{**}(\tau,\mu)+O(\tau_0\exp(-2k\tau_0))\right), \qquad (12)$$

$$\tau_0\to\infty,\quad \tau\in[0,\,2\tau_0].$$

Величина $h(|\mu|,\tau_0)$, входящая в (12), определяется формулой (11). Выражения (9)—(12) будут использованы далее при отыскании асимптотик средних времен свечения. Заметим, что главные части асимптотических формул (10) и (12) содержат, например, при $\tau=\tau_0-0$ и $\mu=|\mu|$ в явном виде соответственно члены порядка τ_0^2, τ_0, 1, $\tau_0\exp(-k\tau_0)$, $\exp(-k\tau_0)$ и τ_0, 1, $\tau_0\exp(-k\tau_0)$, $\exp(-k\tau_0)$.

4. *Средние длительности свечения слоя и сферической оболочки.* Средние характеристики нестационарного поля излучения позволяют в определенной степени судить о процессе многократного рассеяния света в случае нестационарных источников. Расчету этих величин, а также родственных им средних значений числа рассеяний и их степеней, посвящен целый ряд работ (см., например, [25—29] и ссылки в них).

Найдем общие выражения для среднего времени t^* выхода энергии излучения из невогнутого тела V, содержащего нестационарные источники $g(\vec r,\vec\Omega,t)$ ($\vec r$ — радиус-вектор; единичный вектор $\vec\Omega$ будем использовать для задания направления испускания или распространения излучения; t — время; $g(\ldots)=0$ при $t<0$) и не имеющего подстилающих поверхностей (t^* для краткости будем называть средним временем свечения). По определению t^* равно

$$t^*=(M_1/M_0)=-(\overline{\Pi}(0))^{-1}\left.\frac{\partial\overline{\Pi}(p)}{\partial p}\right|_{p=0}, \qquad (13)$$

где $\overline{\Pi}(p)$ — преобразование Лапласа от потока излучения $\Pi(t)$ через границу S тела V, p — параметр преобразования, $M_i=\int_0^\infty t^i\Pi(t)\,dt$, $i=0;\,1$. Учитывая теперь формальную аналогию между стационарным и преобразованным по Лапласу нестационарным уравнениями переноса при $\mathrm{Im}\,p=0$ [19] и закон сохранения энергии, нетрудно показать, что имеет место соотношение

$$\overline{\Pi}(p) = \iiint\limits_{\overset{0}{V}} dV \int\limits_{\Omega} \overline{g}(\vec{r}, \vec{\Omega}, p)\, d\Omega -$$

$$- \iiint\limits_{V} \upsilon\, dV \int\limits_{\Omega} d\Omega \iiint\limits_{\overset{0}{V}} dV' \int\limits_{\Omega} \overline{G}_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}', p, V)\, \overline{g}(\vec{r}', \vec{\Omega}', p)\, d\Omega', \qquad (14)$$

где $\upsilon = \alpha - \sigma + (p/v)$; α и σ — коэффициенты ослабления и рассеяния; v — скорость света (будем далее считать, что $v = \text{const}$), $\overline{G}_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}', p, V)$ и $\overline{g}(\vec{r}, \vec{\Omega}, p)$ — образы по Лапласу от объемной функции Грина нестационарного уравнения переноса для тела V и функции $g(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$, $\overset{0}{V} = V \setminus S$ — внутренняя часть тела V. Подставляя (14) в (13), получаем для случая консервативного рассеяния

$$t^* = t_0^* + \frac{1}{v} \iiint\limits_{V} dV \int\limits_{\Omega} d\Omega \iiint\limits_{\overset{0}{V}} dV' \int\limits_{\Omega} G_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}', V)\, \overline{g}(\vec{r}', \vec{\Omega}', 0) \times$$

$$\times\, d\Omega' \left(\iiint\limits_{\overset{0}{V}} dV \int\limits_{\Omega} \overline{g}(\vec{r}, \vec{\Omega}, 0)\, d\Omega \right)^{-1}, \qquad (15)$$

$$t_0^* = \left(\iiint\limits_{\overset{0}{V}} dV \int\limits_{\Omega} \overline{g}(\vec{r}, \vec{\Omega}, 0)\, d\Omega \right)^{-1} \iiint\limits_{\overset{0}{V}} dV \int\limits_{\Omega} d\Omega \int\limits_0^\infty t\, g(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)\, dt,$$

где $G_*(\ldots)$ — объемная функция Грина для тела V в стационарном случае. Если $g(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}^*) f(\vec{\Omega}, t)$, то (15) упрощается и принимает вид

$$t^* = t_0^* + \frac{1}{v} \left(\int\limits_{\Omega} \overline{f}(\vec{\Omega}, 0)\, d\Omega \right)^{-1} \times$$

$$\times \iiint\limits_{V} dV \int\limits_{\Omega} d\Omega \int\limits_{\Omega} G_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}^*, \vec{\Omega}', V)\, \overline{f}(\vec{\Omega}', 0)\, d\Omega', \qquad (16)$$

$$t_0^* = \left(\int\limits_{\Omega} \overline{f}(\vec{\Omega}, 0)\, d\Omega \right)^{-1} \int\limits_{\Omega} d\Omega \int\limits_0^\infty t f(\vec{\Omega}, t)\, dt.$$

Здесь $\bar{f}(\vec{\Omega}, p)$ — изображение по Лапласу от $f(\vec{\Omega}, t)$. Очевидно, что выражения (15), (16) нетрудно записать в явном виде, если найти величину $\alpha \iiint\limits_V dV \int\limits_\Omega G_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, V)\, d\Omega$, которая согласно принципу взаимности [19] равна $\alpha \iiint\limits_V dV \int\limits_\Omega G_*(\vec{r}^*, -\vec{\Omega}^*, \vec{r}, \vec{\Omega}, V)\, d\Omega = \tilde{I}(\vec{r}^*, -\vec{\Omega}^*, V)$. С формальной точки зрения величина $\tilde{I}(\vec{r}^*, -\vec{\Omega}^*, V)$, когда тело V однородно, равна решению уравнения переноса излучения, записанного в безразмерных переменных и в котором на месте первичных источников стоит 1.

Используем формулу (16) для расчета среднего времени свечения плоскопараллельного слоя и сферической оболочки. Если тело V представляет собой однородный плоскопараллельный слой, то $\tilde{I}(\vec{r}^*, -\vec{\Omega}^*, V) = \tilde{I}(\tau^*, -\mu^*, V)$, где τ^* — оптическая глубина точки наблюдения $\vec{r}^*$, $\mu^* = \cos\theta^*$, θ^* — угол, образованный $\vec{\Omega}^*$ с осью оптических глубин. Из сказанного и (16) следует, что t^* для слоя равно

$$t^* = t_0^* + \frac{1}{v\alpha}\left(\int\limits_{-1}^{1} f_1(\mu^*)\, d\mu^*\right)^{-1} \int\limits_{-1}^{1} \tilde{I}(\tau^*, -\mu^*, V)\, f_1(\mu^*)\, d\mu^*. \qquad (17)$$

Здесь $f_1(\mu^*) = \int\limits_0^{2\pi} \bar{f}(\vec{\Omega}^*, 0)\, d\varphi^*$, где φ^* — азимутальный угол. Формула (17) дает среднюю длительность свечения слоя при наличии в нем точечного нестационарного источника, расположенного на оптической глубине τ^* с угловой диаграммой, пропорциональной $f(\vec{\Omega}^*, t)$. Для слоя оптической толщины $2\tau_0$ при $\tau_0 \gg 1$ величину $\tilde{I}(\tau^*, -\mu^*, V)$ можно рассчитать по формулам (9), (10), если положить $C_0 = 1$. В частности, при $\tau^* = \tau_0$ и $f_1(\mu^*) = \mathrm{const}$ (эти условия соответствуют наличию в середине слоя точечного изотропного источника) из (10) и (17) получаем такую асимптотику:

$$t^* = \frac{1}{2v\alpha}\left[(3 - x_1)\tau_0^2 + 3b\tau_0\right] + O(1/v\alpha), \quad \tau_0 \to \infty. \qquad (18)$$

Заметим, что из (9), (10), (17) нетрудно получить асимптотические формулы для t^*, содержащие большее число главных членов, чем имеет соотношение (18).

Найдем теперь асимптотику средней длительности свечения однородной сферической оболочки оптической толщины τ_0 (считаем, что $\lambda = 1$). Пусть в пределах области, ограниченной внутренней сферой оболочки, содержится источник $\delta(\vec{r} - \vec{r}^*) f(\vec{\Omega}, t)$ (под $\vec{r}$ и $\vec{r}^*$ будем подразумевать радиусы-векторы, начало которых находится в центре симметрии оболочки). Обозначим через R и R^* соответственно радиус внутренней сферы и расстояние от источника до центра симметрии (т. е. $R^* = |\vec{r}^*|$). Будем также предполагать, что выполняется условие $(\tau_1/\tau_0) = \varkappa \gg 1$ $(\tau_1 = \alpha R)$. В работе [17] В. В. Соболевым было отмечено, что расчет поля излучения в однородной сферической оболочке можно свести к решению соответствующей задачи для слоя удвоенной оптической толщины $2\tau_0$ (данное утверждение для анизотропного рассеяния носит асимптотический характер и выполняется тем лучше, чем больше $\varkappa$). Используя при расчете $\vec{I}(\vec{r}^*, -\vec{\Omega}^*, V)$ этот факт и принимая во внимание геометрические соображения, находим из (16) для средней длительности t^* свечения сферической оболочки следующее выражение:

$$t^* \approx A = t_0^* + \frac{1}{v\alpha}\left[\int_{-1}^{1} I_2\left(\tau_0 - 0, \sqrt{1-(1-\mu^2)a^2}\right) f_1(\mu)\, d\mu + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{\tau_1^2 - (\tau^*)^2(1-\mu^2)} - \tau^*\mu\right) f_1(\mu)\, d\mu\right]\left(\int_{-1}^{1} f_1(\mu)\, d\mu\right)^{-1}, \qquad (19)$$

$$a = (R^*/R), \quad \tau^* = \alpha R^*,$$

где $I_2(\tau, \mu)$ — решение уравнения переноса излучения для однородного консервативно рассеивающего слоя оптической толщины $2\tau_0$, содержащего первичные источники вида $g_0(\tau, \mu, 1) = 1 + 2\tau_1\mu^2\delta(\tau - \tau_0)$. При расчете $f_1(\mu) = \int_0^{2\pi} f(\vec{\Omega}, 0)\, d\varphi$ под μ надо понимать $\cos\theta$, где θ — угол между $\vec{\Omega}$ и $\vec{r}^*$, а под φ — азимут проекции $\vec{\Omega}$ на плоскость, перпендикулярную $\vec{r}^*$. Если $\tau_0 \to \infty$, то для величины $I_2(\ldots)$ имеет место асимптотика

$$I_2(\tau_0 - 0, |\mu|) = I^*(\tau_0 - 0, |\mu|) + 2\tau_1 I^{**}(\tau_0 - 0, |\mu|) +$$
$$+ O(\tau_1\tau_0 \exp(-2k\tau_0)), \quad \tau_0 \to \infty, \qquad (20)$$

которая вытекает из формул (10), (12) и определения I_2 (...) (в (20) параметр τ_1 тоже может стремиться к ∞; величина I^{**} (...) определяется формулой (12)). Из (19), (20) можно получить целый ряд асимптотик для A. Например, для случая точечного изотропного импульсного источника, расположенного в центре симметрии оболочки, из (19), (20) с учетом (10), (12) получаем при $\varkappa = \text{const}$ следующую формулу:

$$t^* \approx A = \frac{1}{v\varkappa}\left[\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\left(\frac{3}{2} + \varkappa\right)\tau_0^2 + \left(\frac{3}{2}b + \varkappa\frac{b}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\varkappa\int\limits_{-1}^{1} \mu_1^2 G_\infty^* (\tau_0 - 0,\, 1,\, \tau_0,\, \mu_1,\, 1)\, d\mu_1\right)\tau_0\right] + O(1/v\varkappa), \qquad (21)$$

$$\tau_0 \to \infty.$$

Хотя в данной статье рассматривался только случай консервативного рассеяния, предложенная схема рассуждений позволяет получить аналогичные результаты и при $\lambda < 1$.

В заключение авторы выражают признательность Э. П. Зеге за полезное обсуждение результатов работы.

Белорусский политехнический институт
Институт физики АН БССР

ON THE ASYMPTOTIC FORMULAE OF INTERNAL RADIATION FIELDS IN PLANE-PARALLEL MEDIA AND THEIR APPLICATION TO CALCULATION OF AVERAGE DURATIONS OF THE LAYER AND SPHERICAL SHELL LUMINOSITY

N. N. ROGOVTSOV, A. M. SAMSON

An explicit analytical expression is obtained for the radiation intensity in a homogeneous conservative scattering plane-parallel layer which is restricted by arbitrary underlying surfaces and contains arbitrary inner sources. This expression connects the above intensity with the radiation field characteristics at the medium boundaries. The layer radiation intensity in the absence of underlying surfaces is expressed in terms of diffusive reflection and transmission coefficients. A new method is proposed for deriving asymptotic formulae for radiation field characteristics in an optically thick plane-parallel medium with arbitrary sources. Asymptotic expressions for average durations of the layer and pherical shell luminosity are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян,* Научные труды, т. 1, Изд-во АН Арм.ССР, Ереван, 1960.
2. *С. Чандрасекар,* Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
3. *В. В. Соболев,* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ М., 1956.
4. *В. В. Соболев,* Рассеяние света в атмосферах планет, Физматгиз, М., 1972.
5. *Н. В. Коновалов,* Препринт ИПМ АН СССР, № 65, 1974.
6. *Н. Н. Роговцов.* Ж. прикл. спектр., 21, 517, 1974.
7. *Н. Н. Роговцов, А. М. Самсон,* Препринт ИФ АН БССР, № 91, 1975.
8. *Н. Н. Роговцов, А. М. Самсон,* Ж. прикл. спектр., 25, 512, 1976.
9. *М. А. Мнацаканян,* Астрофизика, 12, 451, 1976.
10. *В. В. Иванов, Е. В. Волков,* Уч. зап. ЛГУ, № 400, вып. 57, 3, 1978.
11. *Н. Н. Роговцов,* Изв. АН СССР, ФАО, 16, 244, 1980.
12. *Н. Н. Роговцов,* Ж. прикл. спектр., 34, 335, 1981.
13. *Н. Н. Роговцов,* ДАН БССР, 25, 420, 1981.
14. *Э. Х. Даниелян,* Астрофизика, 19, 711, 1983.
15. *Н. Н. Роговцов,* Кандидатская диссертация, ИФ АН БССР, 1976.
16. *В. В. Соболев,* Курс теоретической астрофизики, Физматгиз, М., 1967.
17. *В. В. Соболев,* ДАН СССР, 273, 573, 1983.
18. *J. R. Mika,* Nucl. Sci. Eng., 11, 415, 1961.
19. *К. Кейз, П. Цвайфель,* Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.
20. *Н. Н. Роговцов,* Ж. прикл. спектр., 35, 1044, 1981.
21. *О. В. Пикичян,* ДАН СССР, 273, 861, 1983.
22. *Т. А. Гермогенова,* ЖВМ и МФ, 1, 1001, 1961.
23. *О. В. Пикичян,* Астрофизика, 16, 351, 1980.
24. *В. В. Соболев,* Астрофизика, 20, 123, 1984.
25. *В. В. Соболев,* Астрофизика, 2, 135, 1966; 3, 137, 1967.
26. *А. М. Самсон.* Ж. прикл. спектр., 9, 603, 1968.
27. *И. Л. Кацев,* ДАН БССР, 8, 118, 1969.
28. *Д. И. Нагирнер,* Астрофизика, 8, 353, 1972.
29. *Н. Н. Роговцов, А. М. Самсон,* Астрофизика, 11, 439, 1975.