МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Вакуумная и компрессорная техника»

И. А. Иванов

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ

Программно-методический комплекс

Минск
БНТУ
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Вакуумная и компрессорная техника»

И. А. Иванов

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ

Программно-методический комплекс

Минск
БНТУ
2013

УДК 519.242+519.25+519.6(075.4)
ББК 22.193я7
П78

Рецензенты:
А. А. Дробыш, А. Д. Маляренко

Иванов, И. А.
П78 Специальные разделы математики : программно-методический комплекс / И. А. Иванов. – Минск : БНТУ, 2013. – 121 с.
ISBN 978-985-550-077-4.

Программно-методический комплекс содержит тематический план дисциплины «Специальные разделы математики», содержание разделов и тем программы, рекомендуемую литературу, варианты заданий к контрольной работе по разделу 1 «Статистические методы в инженерных исследованиях», а также общие методические рекомендации по выполнению контрольной работы и вопросы для подготовки к экзамену по разделу 2 «Численные методы и моделирование».

Комплекс предназначен для студентов заочной формы обучения по специальности 1-36 20 04 «Вакуумная и компрессорная техника».

УДК 519.242+519.25+519.6(075.4)
ББК 22.193я7

ISBN 978-985-550-077-4

ВВЕДЕНИЕ

Требования к академическим компетенциям выпускника специальности 1-36 20 04 «Вакуумная и компрессорная техника», устанавливаемые образовательным стандартом ОСРБ 1-362004–2007, включают требования по владению исследовательскими навыками, в частности, умение планировать и проводить экспериментальные исследования рабочих процессов в вакуумных и компрессорных установках, разрабатывать теоретические модели, позволяющие прогнозировать свойства и поведение объектов деятельности.

Развитие и совершенствование исследовательских навыков не возможно без освоения базовых определений и понятий в области теории экспериментальных и численных исследований, а также требует освоения методик первичной обработки данных и планирования эксперимента, численных методов решения систем алгебраических и дифференциальных уравнений, решения задач приближения функций, численного дифференцирования и интегрирования.

Целью изучения учебной дисциплины «Специальные разделы математики» является: формирование у студентов знаний, умений и навыков самостоятельного решения задач организации, планирования и обработки результатов экспериментального исследования при изучении технологических процессов и работы компрессорного и вакуумного оборудования; формирование знания методов математического моделирования и проектирования машин и технологических процессов, освоение основных алгоритмов вычислительной математики и способов их программной реализации при разработке математических моделей процессов и оборудования.

Задачи дисциплины:

- формирование общих представлений о содержании и решаемых задачах экспериментальных и теоретических исследований;
- освоение методов первичной математической обработки результатов экспериментальных исследований с использованием средств вычислительной техники;
- овладение методами планирования эксперимента;

-формирование общих представлений об использовании вычислительной техники в задачах моделирования сложных систем;

-освоение основных методов численного решения прикладных задач, применительно к объектам компрессорной и вакуумной техники;

Согласно учебному плану подготовки по заочной форме обучения инженеров специальности 1-36 20 04 «Вакуумная и компрессорная техника» изучение дисциплины «Специальные разделы математики» включает два семестра и предусматривает выполнение в первом семестре контрольной работы. Формы контроля знаний: по итогам первого семестра изучения дисциплины сдается «зачет», по итогам второго семестра – «экзамен».

1. ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ п/п	Название раздела и темы дисциплины	АЗ*		СР*	
		ЛК*	ПЗ*	ТМ*	КР*
1	2	3	4	5	6
	Раздел 1 Статистические методы в инженерных исследованиях**				
1.1.	Введение. Понятие экспериментального исследования и основы измерения физических величин.	-	-	+	+
1.2.	Ошибки измерений. Законы распределения случайных величин.	+	-	+	+
1.3.	Математическая обработка результатов экспериментальных исследований	-	+	+	+
1.4.	Проверка статических гипотез	+	-	+	+
1.5.	Дисперсионный анализ	+	-	+	+
1.6.	Корреляционный и регрессионный анализ	+	+	+	+
1.7.	Планирование эксперимента	+	+	+	+
1.8.	Инновационные методы в экспериментальных исследованиях.	-	-	+	+
	Раздел 2 Численные методы и моделирование***				
2.1.	Вычислительная погрешность и роль численных методов в решении инженерных задач.	-	-	+	-
2.2.	Приближение функций.	+	+	+	-
2.3.	Численное дифференцирование и интегрирование.	+	+	+	-
2.4	Итерационные методы решения уравнений степени ***n*** и систем уравнений	+	+	+	-
2.5.	Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.	+	-	+	-

1	2	3	4	5	6
2.6.	Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.	+	-	+	-
2.7.	Общие сведения о решении уравнений в частных производных.	+	-	+	-
2.8.	Общие сведения о численных методах решения интегральных уравнений. Методы Монте-Карло.	-	-	+	-
2.9.	Численные методы решения задач оптимизации.	-	-	+	-
2.10	Моделирование технических систем.	+	-	+	-

*: АЗ – аудиторные занятия, СР – самостоятельная работа, ЛК – темы, входящие в лекционный материал, ПЗ – темы, изучаемые на практических занятиях, КР – темы, входящие в контрольную работу, ТМ – теоретический материал, изучаемый студентом-заочником самостоятельно.

**: по разделу предусмотрено выполнение контрольной работы и сдача зачета.

***: по разделу предусмотрена сдача экзамена.

2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1 Статистические методы в инженерных исследованиях

*Тема 1.1. Ведение. Понятие экспериментального исследования и основы измерения физических величин***.** Понятие, цель и содержание экспериментального исследования. Качественный и количественный эксперимент. Условия проведения количественного эксперимента. Понятия «измерение», «физическая величина», «размерность». Основные единицы измерения физических величин и их эталоны. Дополнительные единицы измерения физических величин.

Содержание процесса измерения физических величин. Понятия «средство измерения», «принципы измерения», «метод измерения». Виды методов измерения: прямые, совместные, косвенные, совокупные. Измерение статических и динамических величин. Виды измерений физических величин в машиностроении, вакуумной и компрессорной технике. Понятие и структура измерительной системы.

Литература: [1 (гл. 3); 2 (гл.1, 2); 3]

Тема 1.2. Ошибки измерения. Законы распределения случайных величин. Классификация ошибок измерения. Систематические ошибки и их свойства. Поправка. Случайные ошибки измерений. Законы распределения случайных ошибок измерения. Закон Гаусса. Характеристики закона нормального распределения случайных величин. Основные закономерности нормального распределения случайной величины. Закон редких явлений. Законы распределения дискретных величин. Грубые ошибки измерения. Методы исключения грубых ошибок. Базовый модуль Base Statistics and Tables (Descriptive statistics) системы STATISTICA.

Литература: [1 (гл. 4, 5); 2 (гл. 2); 3; 4 (гл. 2, 7)]

Тема 1.3. Математическая обработка результатов экспериментальных исследований. Средние значения и методы их вычисления. Вычисление средних значений с выбором начала отсчета и для интервального ряда данных. Оценки истинных значений измеряемых величин. Типы оценок и их свойства. Точечные оценки. Доверительные оценки. Возможности системы STATISTICA первичной обработки экспериментальных данных.

Литература: [1 (гл. 3); 4 (гл.2, 8)]

Тема 1.4. Проверка статистических гипотез. Понятие статистической гипотезы. Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению, о равенстве средних значений, об однородности дисперсий. Определение необходимого количества измерений. Проверка случайности и независимости результатов измерения в выборке. Проверка нормального закона распределения случайной величины. Использование возможностей системы STATISTICA в процедурах проверки статистических гипотез.

Литература: [1 (гл. 6); 4 (гл. 8)]

Тема 1.5. Дисперсионный анализ. Цель и сущность дисперсионного анализа. Однофакторный и двухфакторный дисперсионный анализ. Базовый модуль ANOVA/MANOVA системы STATISTICA.

Литература: [5]

Тема 1.6. Корреляционный и регрессионный анализ. Корреляционный анализ. Основные определения и формулы. Линейная корреляция.

Вычисление коэффициента корреляции на основе экспериментальных результатов исследований. Корреляционные уравнения.

Регрессионный анализ. Цель и основные допущения регрессионного анализа. Понятия «регрессионная модель» и «коэффициенты регрессии». Метод наименьших квадратов. Базовый модуль Multiple Regression системы STATISTICA.

Литература: [4 (гл. 3); 5]

*1.7. Планирование эксперимента***.** Становление теории планирование эксперимента. Планирование эксперимента при дисперсионном анализе. Построение регрессионной модели при полном факторном эксперименте (ПФЭ). Определение области факторного пространства. Построение и свойства планов ПФЭ. Определение параметров линейной модели. Проверка адекватности модели. Дробный факторный эксперимент. Понятие определяющего и генерирующего соотношения.

Планы второго порядка. Выбор экспериментальных точек. Сущность ортогонального центрального композиционного планирования. Ротатабельные центральные композиционные планы. D-оптимальные планы.

Планирование экспериментов при решении экстремальных задач. Метод крутого восхождения (метод Бокса-Уилсона). Выбор функции отклика. Уменьшение размерности факторного пространства.

Литература: [5]

1.8. Инновационные методы в экспериментальных исследованиях. Роль и задачи автоматизации экспериментальных исследований при измерении физических и технических величин в вакуумной и компрессорной технике. ЭВМ в системе обработки результатов экспериментальных исследований и математическое обеспечение. Подготовка измерительных сигналов к автоматическому анализу. Преобразование аналогового сигнала в цифровой.

Литература: [1 - 3, 5]

Раздел 2 Численные методы и моделирование

2.1. Введение. Вычислительная погрешность и роль численных методов в решении инженерных задач. Задачи раздела. Понятия алгоритма расчета, вычислительного алгоритма и вычислительного эксперимента. Роль численных методов в решении инженерных задач. Роль ЭВМ в развитии численных методов и моделировании сложных систем и объектов. Пакеты прикладных программ. Погрешности результата численного решения задачи. Их источники и классификация. Понятие абсолютной и относительной погрешности. Влияние формы записи числовых данных на погрешность машинных вычислений. Пакет прикладных программ MATLAB.

Литература: [6 (лекц. 1); 7 (гл.1)]

2.2. Итерационные методы решения уравнений степени n и систем уравнений. Точные и терационные методы нахождения корней уравнений. Использование средств системы MATLAB для решения систем уравнений и нахождения корней алгебраических уравнений.

Литература: [6 (лекц. 2, 3); 7 (гл.6)]

2.3. Приближение функций. Постановка задачи о приближении функций. Понятие обобщенного полинома. Общая постановка задачи интерполирования функций. Интерполирование многочленами Лагранжа. Понятие «конечные разности». Интерполирование многочленами Ньютона. Погрешность округления при интерполировании.

Интерполирование периодических функций тригонометрическими полиномами. Понятие гармонического анализа. Общие сведения об интерполировании сплайнами. Нахождение коэффициентов кубического сплайна. Аппроксимирование функций. Точечное и интегральное аппроксимирование.

Аппроксимирование ортогональными функциями. Понятие о равномерном приближении функций. Построение многочленов наилучшего равномерного приближения функций. Использование средств системы MATLAB для интерполирования и аппроксимирования функций.

Литература: [6 (лекц. 5, 8); 7 (гл. 2, 4)]

2.4. Численное дифференцирование и интегрирование. Понятие разделенных разностей, их вычисление и свойства. Численное дифференцирование в случае равноотстоящих узлов. Вычислительная погрешность формул численного дифференцирования. Выбор оптимального шага численного дифференцирования. Постановка задачи численного интегрирования. Понятие интегральных сумм и их свойства. Квадратурные формулы трапеций, прямоугольников, Симпсона. Оценки погрешности квадратуры. Квадратурные формулы Гаусса и Чебышева. Численное интегрирование и дифференцирование в среде MATLAB.

Литература: [6 (лекц. 6); 7 (гл. 2 (параграфы 15 и 16), 3)]

2.5. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши. Метод последовательных приближений. Метод Эйлера. Метод Рунге-Кутта. Оценки погрешности одношаговых методов. Конечно-разностные методы. Оценка погрешности конечно-разностных методов. Особенности численного решения систем уравнений. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений в среде MATLAB.

Литература: [6 (лекц. 9); 7 (гл. 8)]

2.6. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Общая постановка краевой задачи. Линейная краевая задача. Численные методы решения краевой задачи. Метод конечных разностей. Метод прогонки. Метод Галеркина. Вычислительная погрешность методов.

Литература: [7 (гл. 9)]

2.7. Общие сведения о решении уравнений в частных производных. Основные понятия теории метода сеток. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Разностные схемы численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Ошибки вычислений.

Литература: [6 (лекц. 10); 7 (гл. 10); 8 (гл. 1, 2)]

2.8. Общие сведения о численных методах решения интегральных уравнений. Методы Монте-Карло. Общая характеристика основных видов линейных интегральных уравнений. Методы решения интегральных уравнений. Методы последовательных приближений конечных сумм, вырожденных ядер, коллокации, наименьших квадратов, моментов. Сущность метода Монте-Карло вычисления определенных интегралов. Генераторы случайных чисел.

Литература: [6 (лекц. 11); 7 (гл. 11)]

2.9. Численные методы решения задач оптимизации. Задача нахождения оптимумов функций. Численные методы поиска оптимумов функций. Метод последовательного исключения неизвестных. Метод простой итерации. Метод Зейделя. Метод градиентного спуска. Симплекс-метод.

Литература: [7 (гл. 7); 9]

2.10. Моделирование технических систем. Понятие модели и моделирования. Классификация моделей и требования к ним. Примеры моделей типа «черный ящик», состава, структуры, их математическое описание. Проблема построения и исследования математических моделей. Общая характеристика математических моделей, их классификация. Этапы математического моделирования. Выбор математического аппарата при построении моделей. Понятие прямых и обратных задач. Некорректно поставленные задачи. Особенности моделирования управляемых технологических процессов и объектов. Моделирование случайных процессов.

Современные теоретические подходы к моделированию вакуумного и компрессорного оборудования и технологических процессов протекающих в вакууме.

Литература: [10 - 13]

3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Контрольная работа включает теоретические вопросы и задачи по разделу 1 «Статистические методы в инженерных исследованиях». Задачи охватывают следующие темы учебной программы: «1.2 Ошибки измерения. Законы распределения случайных величин», «1.3 Математическая обработка результатов экспериментальных исследований», «1.4 Проверка статистических гипотез», « 1.5 Дисперсионный анализ», «1.6 Корреляционный и регрессионный анализ» и «1.7 Планирование эксперимента». Теоретические вопросы охватывают все темы раздела 1 учебной программы.

Вариант контрольной работы определяется по зачетной книжке студента. Для этого необходимо к номеру студента по зачетке прибавить последнюю цифру номера группы. Например, номер зачетки 309347/12. тогда номер варианта: 12+7=19.

Контрольная работа выполняется и представляется на проверку в рукописном виде, разборчивым почерком в ученической тетради (12 листов). На первой (заглавной) странице тетради указать фамилию и инициалы студента, номер группы, название факультета, название дисциплины, номер варианта. Решение задач и ответов на теоретические вопросы предварять полной записью текста задачи и исходных данных или теоретического вопроса. **Компьютерные распечатки текста или формул не допускаются!** В случае необходимости использования поясняющих рисунков допускается использовать ксерокопии. Все обозначения на рисунках должны иметь пояснение либо в подрисуночной подписи, либо в тексте ответа. **Ссылка на источник, из которого взята ксерокопия рисунка, обязательна!** При решении задач сопровождать каждое действие необходимыми пояснениями. При использовании формул давать пояснения используемым буквенным символам. При использовании статистических таблиц при решении задач указывать ссылку на источник (с указанием страницы), из которого брались данные по критическим значениям статистик.

Варианты заданий приведены ниже в разделе 3.1.

Допуск к сдаче зачета по разделу 1 дисциплины «Специальные разделы математики» возможен только при условии предоставления на проверку *полностью* выполненной контрольной работы, *соответствующей* варианту задания!!

3.1 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Номер варианта	Номера вопросов и задач				
1	2	3	4	5	6
1	1	Задача 1, вариант 1-1	Задача 2, вариант 2-1	Задача 3, вариант 3-1	Задача 4, вариант 4-1
2	2	Задача 1, вариант 1-2	Задача 2, вариант 2-21	Задача 3, вариант 3-2	Задача 4, вариант 4-2
3	3	Задача 1, вариант 1-3	Задача 2, вариант 2-2	Задача 3, вариант 3-3	Задача 4, вариант 4-3
4	4	Задача 1, вариант 1-4	Задача 2, вариант 2-20	Задача 3, вариант 3-4	Задача 4, вариант 4-4
5	5	Задача 1, вариант 1-5	Задача 2, вариант 2-3	Задача 3, вариант 3-5	Задача 4, вариант 4-5
6	6	Задача 1, вариант 1-6	Задача 2, вариант 2-21	Задача 3, вариант 3-6	Задача 4, вариант 4-6
7	7	Задача 1, вариант 1-7	Задача 2, вариант 2-4	Задача 3, вариант 3-7	Задача 4, вариант 4-7
8	8	Задача 1, вариант 1-8	Задача 2, вариант 2-20	Задача 3, вариант 3-8	Задача 4, вариант 4-8
9	9	Задача 1, вариант 1-9	Задача 2, вариант 2-5	Задача 3, вариант 3-9	Задача 4, вариант 4-9
10	10	Задача 1, вариант 1-10	Задача 2, вариант 2-20	Задача 3, вариант 3-10	Задача 4, вариант 4-10
11	21	Задача 1, вариант 1-11	Задача 2, вариант 2-19	Задача 3, вариант 3-11	Задача 4, вариант 4-11
12	22	Задача 1, вариант 1-12	Задача 2, вариант 2-18	Задача 3, вариант 3-12	Задача 4, вариант 4-12
13	23	Задача 1, вариант 1-13	Задача 2, вариант 2-6	Задача 3, вариант 3-13	Задача 4, вариант 4-13
14	24	Задача 1, вариант 1-14	Задача 2, вариант 2-17	Задача 3, вариант 3-14	Задача 4, вариант 4-14
15	25	Задача 1, вариант 1-15	Задача 2, вариант 2-7	Задача 3, вариант 3-15	Задача 4, вариант 4-15
16	26	Задача 1, вариант 1-9	Задача 2, вариант 2-16	Задача 3, вариант 3-16	Задача 4, вариант 4-16

1	2	3	4	5	6
17	27	Задача 1, вариант 1-8	Задача 2, вариант 2-15	Задача 3, вариант 3-17	Задача 4, вариант 4-17
18	28	Задача 1, вариант 1-7	Задача 2, вариант 2-8	Задача 3, вариант 3-18	Задача 4, вариант 4-18
19	29	Задача 1, вариант 1-6	Задача 2, вариант 2-9	Задача 3, вариант 3-19	Задача 4, вариант 4-19
20	30	Задача 1, вариант 1-5	Задача 2, вариант 2-11	Задача 3, вариант 3-20	Задача 4, вариант 4-20
21	31	Задача 1, вариант 1-4	Задача 2, вариант 2-12	Задача 3, вариант 3-1	Задача 4, вариант 4-21
22	45	Задача 1, вариант 1-3	Задача 2, вариант 2-13	Задача 3, вариант 3-2	Задача 4, вариант 4-22
23	46	Задача 1, вариант 1-2	Задача 2, вариант 2-14	Задача 3, вариант 3-3	Задача 4, вариант 4-23
24	47	Задача 1, вариант 1-1	Задача 2, вариант 2-10	Задача 3, вариант 3-4	Задача 4, вариант 4-24
25	48	Задача 1, вариант 1-10	Задача 2, вариант 2-19	Задача 3, вариант 3-5	Задача 4, вариант 4-1
26	49	Задача 1, вариант 1-11	Задача 2, вариант 2-1	Задача 3, вариант 3-6	Задача 4, вариант 4-2
27	50	Задача 1, вариант 1-12	Задача 2, вариант 2-18	Задача 3, вариант 3-7	Задача 4, вариант 4-3
28	60	Задача 1, вариант 1-13	Задача 2, вариант 2-2	Задача 3, вариант 3-8	Задача 4, вариант 4-4
29	51	Задача 1, вариант 1-14	Задача 2, вариант 2-17	Задача 3, вариант 3-9	Задача 4, вариант 4-5
30	52	Задача 1, вариант 1-15	Задача 2, вариант 2-16	Задача 3, вариант 3-10	Задача 4, вариант 4-6
31	53	Задача 1, вариант 1-1	Задача 2, вариант 2-3	Задача 3, вариант 3-11	Задача 4, вариант 4-7
32	54	Задача 1, вариант 1-2	Задача 2, вариант 2-15	Задача 3, вариант 3-12	Задача 4, вариант 4-8
33	55	Задача 1, вариант 1-3	Задача 2, вариант 2-4	Задача 3, вариант 3-13	Задача 4, вариант 4-9
34	56	Задача 1, вариант 1-4	Задача 2, вариант 2-14	Задача 3, вариант 3-14	Задача 4, вариант 4-10

1	2	3	4	5	6
35	57	Задача 1, вариант 1-5	Задача 2, вариант 2-5	Задача 3, вариант 3-15	Задача 4, вариант 4-11
36	58	Задача 1, вариант 1-6	Задача 2, вариант 2-13	Задача 3, вариант 3-16	Задача 4, вариант 4-13
37	59	Задача 1, вариант 1-7	Задача 2, вариант 2-12	Задача 3, вариант 3-17	Задача 4, вариант 4-12
38	61	Задача 1, вариант 1-8	Задача 2, вариант 2-6	Задача 3, вариант 3-18	Задача 4, вариант 4-14
39	62	Задача 1, вариант 1-9	Задача 2, вариант 2-8	Задача 3, вариант 3-19	Задача 4, вариант 4-15
40	63	Задача 1, вариант 1-10	Задача 2, вариант 2-11	Задача 3, вариант 3-20	Задача 4, вариант 4-16
41	11	Задача 1, вариант 1-11	Задача 2, вариант 2-10	Задача 3, вариант 3-1	Задача 4, вариант 4-17
42	12	Задача 1, вариант 1-12	Задача 2, вариант 2-7	Задача 3, вариант 3-2	Задача 4, вариант 4-18
43	13	Задача 1, вариант 1-13	Задача 2, вариант 2-9	Задача 3, вариант 3-3	Задача 4, вариант 4-19
44	14	Задача 1, вариант 1-14	Задача 2, вариант 2-21	Задача 3, вариант 3-4	Задача 4, вариант 4-20
45	15	Задача 1, вариант 1-15	Задача 2, вариант 2-8	Задача 3, вариант 3-5	Задача 4, вариант 4-21
46	32	Задача 1, вариант 1-1	Задача 2, вариант 2-13	Задача 3, вариант 3-6	Задача 4, вариант 4-22
47	33	Задача 1, вариант 1-2	Задача 2, вариант 2-1	Задача 3, вариант 3-7	Задача 4, вариант 4-23
48	34	Задача 1, вариант 1-3	Задача 2, вариант 2-17	Задача 3, вариант 3-8	Задача 4, вариант 4-24
49	35	Задача 1, вариант 1-4	Задача 2, вариант 2-2	Задача 3, вариант 3-9	Задача 4, вариант 4-1
50	36	Задача 1, вариант 1-5	Задача 2, вариант 2-19	Задача 3, вариант 3-10	Задача 4, вариант 4-2
51	37	Задача 1, вариант 1-6	Задача 2, вариант 2-3	Задача 3, вариант 3-11	Задача 4, вариант 4-3
52	16	Задача 1, вариант 1-7	Задача 2, вариант 2-6	Задача 3, вариант 3-12	Задача 4, вариант 4-4

1	2	3	4	5	6
53	17	Задача 1, вариант 1-8	Задача 2, вариант 2-10	Задача 3, вариант 3-13	Задача 4, вариант 4-5
54	18	Задача 1, вариант 1-9	Задача 2, вариант 2-21	Задача 3, вариант 3-14	Задача 4, вариант 4-6
55	19	Задача 1, вариант 1-10	Задача 2, вариант 2-4	Задача 3, вариант 3-15	Задача 4, вариант 4-7
56	20	Задача 1, вариант 1-11	Задача 2, вариант 2-18	Задача 3, вариант 3-16	Задача 4, вариант 4-8
57	38	Задача 1, вариант 1-12	Задача 2, вариант 2-9	Задача 3, вариант 3-17	Задача 4, вариант 4-9
58	39	Задача 1, вариант 1-13	Задача 2, вариант 2-3	Задача 3, вариант 3-18	Задача 4, вариант 4-10
59	40	Задача 1, вариант 1-14	Задача 2, вариант 2-5	Задача 3, вариант 3-19	Задача 4, вариант 4-11
60	41	Задача 1, вариант 1-15	Задача 2, вариант 2-8	Задача 3, вариант 3-20	Задача 4, вариант 4-12
61	42	Задача 1, вариант 1-1	Задача 2, вариант 2-6	Задача 3, вариант 3-1	Задача 4, вариант 4-13
62	43	Задача 1, вариант 1-2	Задача 2, вариант 2-1	Задача 3, вариант 3-2	Задача 4, вариант 4-14
63	44	Задача 1, вариант 1-3	Задача 2, вариант 2-15	Задача 3, вариант 3-3	Задача 4, вариант 4-15
64	64	Задача 1, вариант 1-4	Задача 2, вариант 2-7	Задача 3, вариант 3-4	Задача 4, вариант 4-16
65	65	Задача 1, вариант 1-5	Задача 2, вариант 2-14	Задача 3, вариант 3-5	Задача 4, вариант 4-17
66	66	Задача 1, вариант 1-6	Задача 2, вариант 2-9	Задача 3, вариант 3-6	Задача 4, вариант 4-18
67	67	Задача 1, вариант 1-7	Задача 2, вариант 2-13	Задача 3, вариант 3-7	Задача 4, вариант 4-19
68	68	Задача 1, вариант 1-8	Задача 2, вариант 2-10	Задача 3, вариант 3-8	Задача 4, вариант 4-20
69	69	Задача 1, вариант 1-9	Задача 2, вариант 2-12	Задача 3, вариант 3-9	Задача 4, вариант 4-21

1	2	3	4	5	6
70	70	Задача 1, вариант 1-10	Задача 2, вариант 2-8	Задача 3, вариант 3-10	Задача 4, вариант 4-22
71	71	Задача 1, вариант 1-11	Задача 2, вариант 2-11	Задача 3, вариант 3-11	Задача 4, вариант 4-23
72	45	Задача 1, вариант 1-12	Задача 2, вариант 2-9	Задача 3, вариант 3-12	Задача 4, вариант 4-24

3.2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ (ПО РАЗДЕЛУ 1)

1. Теоретическое и экспериментальное исследование. Цель и содержание экспериментального исследования. Качественный и количественный эксперимент. Условия проведения количественного эксперимента. Этапы экспериментального исследования.

2. Чем различаются понятия «эксперимент» и «опыт»? Лабораторный и промышленный эксперимент.

3. Представление объекта исследования в виде модели «черного ящика». Понятия «отклик» и «фактор» (постоянные, управляемые, неконтролируемые факторы). Требования, предъявляемые к факторам и к отклику.

4. Измерение и физическая величина. Что такое «размерность» физической величины? Основные и дополнительные единицы измерения физических величин и их эталоны.

5. «Средство», «принцип» и «метод» измерения, их классификация.

6. Измерительная система и измерительное устройство. Их структура.

7. Что такое «ошибка измерения»? Что характеризует ошибка (погрешность) измерения? Классификация ошибок измерения.

8. Систематическая ошибка измерения. Типы систематических ошибок. Что такое «поправка»?

9. Случайные ошибки измерений. Нормальный закон распределения случайных ошибок измерения и его свойства. Интеграл вероятности (функция Лапласа). Правило «три сигма».

10. Грубые ошибки измерений. Исключение грубых ошибок измерений при известной величине стандартной ошибки измерения и при неизвестной величине стандартной ошибки измерения.

11. Случайная величина (дискретная и непрерывная). Генеральная совокупность случайной величины. Выборка. Репрезентативность выборки.

12. Функция распределения случайной величины, её свойства;

13. Плотность распределения вероятностей, её свойства;

14. Числовые характеристики закона распределения случайной величины: «математическое ожидание», «дисперсия», «среднеквадратичное отклонение» («стандартная ошибка», «стандарт»), «медиана», «мода», «квантиль», «квартиль», «коэффициент асимметрии», «коэффициент эксцесса».

15. Начальный и центральный моменты ***к***-ого порядка случайной величины и их использование для вычисления математического ожидания и дисперсии.

16. Вид функции распределения дискретной случайной величины. Ряд распределения дискретной случайной величины. Полигон распределения дискретной случайной величины.

17. Биномиальный закон распределения случайной величины.

18. Закон редких явлений.

19. Равномерный закон распределения случайной величины.

20. Показательный закон распределения случайной величины.

21. Типы оценок истинного значения измеряемой величины и их свойства.

22. Точечные оценки среднего арифметического значения и среднего квадратичного отклонения при равноточных и неравноточных измерениях. Что такое «вес измерения»? Как его задать?

23. Точечные оценки среднего арифметического значения и среднего квадратичного отклонения с выбором начало отсчета и для интервального ряда данных.

24. Доверительная оценка измеряемой величины, при известной точности измерений и при неизвестной точности измерений.

25. Доверительная оценка для интервального ряда данных.

26. Доверительная оценка при неравноточных измерениях.

27. Особенности определения доверительная оценка средней квадратичной ошибки для большого числа измерений и при малом числе измерений.

28. Изложите общую методику проверки статистических гипотез. При описании методики дайте определения следующим понятиям: что такое «статистическая гипотеза»? что такое «статистика критерия»? что такое «ошибка первого рода»? что такое «ошибка второго рода»? что такое «уровень значимости статистики критерия»? что такое «Мощность гипотезы H_0 относительно гипотезы H_1»? что такое «критическая область статистики критерия»?

29. При проверке каких гипотез используют критерий Стьюдента ($\boldsymbol{t}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{k})$), $\boldsymbol{t}$-критерий, критерий Фишера ($\boldsymbol{F}$), критерий Кохрена($\boldsymbol{G}$), критерий последовательных разностей($\boldsymbol{c}^2$), критерий согласия Пирсона (критерий χ^2 «хи- квадрат»)?

30. Опишите порядок проверки гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению.

31. Опишите порядок проверки гипотезы о равенстве средних значений.

32. Опишите порядок проверки гипотезы об однородности дисперсий

33. Опишите порядок определения необходимого количества измерений.

34. Опишите порядок проверки случайности и независимости результатов измерений в выборе.

35. Опишите порядок проверки нормального закона распределения случайной величины.

36. Назначение и сущность дисперсионного анализа экспериментальных данных. При соблюдении каких условий возможно проведение дисперсионного анализа? Какая величина принимается за показатель влияния фактора на отклик при дисперсионном анализе?

37. Изложите содержание однофакторного дисперсионного анализа (построение таблицы результатов измерений и алгоритм расчета). При описании алгоритма расчета ответе на следующие вопросы: что характеризует дисперсия воспроизводимости? что характеризует дисперсия фактора? что характеризует полная

дисперсия? каким критерием пользуются при оценке значимости влияния фактора на отклик?

38. Что понимают под системой случайных величин? Какие величины используют при описании системы случайных (дискретных и непрерывных) величин?

39. Что такое «математическое ожидание», «дисперсия» системы двух случайных величин? Их свойства.

40. Что такое «ковариация» (корреляционный момент)? Свойства ковариации.

41. Назначение (основная задача) корреляционного анализа. Что такое «коэффициент корреляции»? Что такое линейная корреляция? Чему равен коэффициент корреляции при линейной корреляции двух случайных величин? Что такое «корреляционное уравнение»?

42. Порядок построения корреляционной таблицы и её анализ.

43. Назначение регрессионного анализа. Что такое «функция регрессии»? Что такое «линия регрессии»? Что такое «модель регрессионного анализа»? Что такое «коэффициенты уравнения регрессии»? Основные допущения регрессионного анализа.

44. Назначение и содержание метода наименьших квадратов. Показать вывод уравнений для расчета коэффициентов линейной регрессионной модели: $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$.

45. Что такое «планирование эксперимента» и какие задачи оно решает? Основные допущения при планировании эксперимента при дисперсионном анализе. Построение планов дисперсионного анализа для трех и четырех факторов. Понятие насыщенных планов.

46. Планирование эксперимента при дисперсионном анализе в случае равенства числа уровней факторов.

47. Планирование эксперимента при дисперсионном анализе в случае неравенства числа уровней факторов (построение квадрата Юдена).

48. Интерполяционная и экстремальная задачи планирования эксперимента. Понятие последовательного планирования эксперимента. Что такое «матрица условий эксперимента» и «матрица наблюдений»?

49. Определение области факторного пространства при построении планов эксперимента.

50. Построение факторных планов ПФЭ. Свойства матриц ПФЭ.

51. Определение параметров линейной математической модели при ПФЭ или ДФЭ. Проверка значимости коэффициентов модели.

52. Определение параметров линейной математической модели при ПФЭ или ДФЭ. Проверка адекватности модели.

53. ДФЭ. Правило сокращения числа опытов. Условное обозначение дробных реплик. Определяющий контраст. Генерирующее соотношение. Разрешающая способность плана.

54. Построение центральных композиционных планов второго порядка. Оптимальные планы для моделей второго порядка.

55. Сущность, процедура, достоинства и недостатки градиентных методов поиска оптимума. Метод крутого восхождения.

56. Использование корреляционного анализа для уменьшения числа анализируемых выходных параметров (аналитический метод).

57. Использование корреляционного анализа для уменьшения числа анализируемых выходных параметров (графический метод).

58. Построение обобщенного параметра оптимизации (использование функции желательности Харрингтона).

59. Априорное ранжирование факторов (метод экспертных оценок).

60. Измерение вакуума: Понятие вакуума. Низкий и высокий вакуум. Методы измерений.

61. Измерение шероховатости поверхности: Понятия отклонения формы, волнистость и шероховатость поверхности. Параметры характеризующие шероховатость поверхности (6-ть параметров). Методы измерения шероховатости. Определение формы микронеровностей.

62. Измерение сил: Сила и единицы её измерения. Способы измерения сил и области их применения (механические динамометры, тензорезисторные динамометры, магнитоупругие измерительные преобразователи, пьезоэлектрические измерительные преобразователи).

63. Измерение давлений выше атмосферного: Понятие давление газа. Методы измерений.

64. Измерение температуры: Понятие температуры. Температурные шкалы и связь между ними. Механические термометры, термометры расширения, термометры сопротивления,

термопарный метод измерения температуры, бесконтактные средства измерения температуры. Основные источники ошибок при измерении.

65. Измерение теплоёмкости: Понятие теплоёмкости, единицы её измерения. Способы измерения теплоёмкости жидкостей, твердых тел и газов.

66. Измерение твердости: Понятие твердости. Методы измерения твердости металлов и сплавов (методы Брюнелля, Роквелла, Викерса). Основные источники ошибок при измерениях.

67. Определение вязкости жидких сред: Понятие вязкости. Единицы измерения вязкости. Методы измерения вязкости.

68. Определение коэффициента смачиваемости: Что понимают под смачиваемостью. Чем характеризуется смачиваемая и не смачиваемая поверхности. Коэффициент смачиваемости. Методы определения величины коэффициента смачиваемости.

69. Исследование структуры материалов с помощью оптического микроскопа: Понятия структура, микроструктура, макроструктура. Требования к изготовлению шлифов. Разрешающая способность оптического микроскопа. Устройство и принцип работы оптического микроскопа.

70. Измерение удельного заряда ионов: Понятие удельного заряда частицы. Влияние внешних силовых полей на траекторию движения заряженных частиц. Методы измерения удельного заряда частиц.

71. Измерение магнитных полей: Магнитное поле и его свойства. Силовые характеристики магнитных полей. Единицы измерения. Методы измерения силовых параметров магнитных полей.

3.3 ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ (ПО РАЗДЕЛУ 1)

Задача 1 (по темам «1.2. Ошибки измерения. Законы распределения случайных величин», «1.3. Математическая обработка результатов экспериментальных исследований» и «1.4. Проверка статистических гипотез»).

Вариант 1-1

Проведены производственные испытания износостойкости резьбового инструмента при нарезании резьбы на токарном станке метчиками М10х1,25 в детали из стали АС-14 твердостью НВ 197.

Износ определяли по величине площадки износа по задней поверхности (h_3) режущей части инструмента. Данные сведены в таблицу (в мм):

0,55	0,05	0,5	0,55	0,5	0,55	0,6	0,5	0,35	0,5

Объем выборки n=10.

Определить – является ли самая маленькая (0,05 мм) и самая большая (0,6 мм) величины износа грубыми ошибками.

Вариант 1-2

Проведены производственные испытания на вертикально сверлильном станке износостойкости осевого размерного инструмента (сверл ∅13,8 мм из быстрорежущей стали Р6М5) при сверлении сквозных отверстий в детали «штуцер» из сталь 45 твердостью НВ 200. Износ определяли по величине площадки износа по задней поверхности (h_3) режущей части инструмента. Данные сведены в таблицу (в мм):

0,8	0,6	0,7	0,9	0,4	0,7	0,9	0,6	0,5	0,7
0,6	0,8	0,6	0,6	1,0	0,6	0,8	0,6	0,5	0,7
0,9	0,6	0,8	0,7	0,8					

Объем выборки n=25.

Определить – является ли самая маленькая (0,4 мм) и самая большая (1,0 мм) величины износа грубыми ошибками.

Вариант 1-3

В одинаковых условиях обработано по 25 втулок развертками диаметром 6 и 10- мм. Результаты измерений показали, что средняя величина разбивки отверстий (разность диаметра отверстия и развертки) составляет:

для разверток диаметром 6 мм - 10,9 мкм

для разверток диаметром 10 мм - 9,8 мкм.

Проведена оценка дисперсий, которые оказались равными: S^2 = 3,8 мкм^2, для разверток диаметром 6 мм, и S^2 = 4,76 мкм^2, для разверток диаметром 10 мм.

Необходимо установить, влияет ли диаметр развертки на величину разбивки отверстия.

Вариант 1-4

Требуется оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение стойкости резцов (Т, мин) с пластинками из твердого сплава марки Т15К6 при обработке детали из стали 18ХГТ при следующих режимах резания: t = 2 мм, S = 0,23 мм/об, V = 80 м/мин.

Объём испытываемой партии резцов – 791 шт. Результаты исследований сведены в таблицу.

Номер интервала измерений, i	Период стойкости резцов, T_i	m_i	Интервал
1	48	3	47-49
2	50	17	49-51
3	52	75	51-53
4	54	194	53-55
5	56	228	55-57
6	58	155	57-59
7	60	91	59-61
8	62	23	61-63
9	64	5	63-65

Пояснения к таблице. Период стойкости резцов изменялся от 47 мин до 65 мин. Весь диапазон измерения периода стойкости (величины Т) разбили на 9 интервалов с шагом в 2 минуты. В таблице занесены координаты середины каждого интервала (T_i) и подсчитано количество значений величины Т, попавшее в каждый из выделенных интервалов (m_i).

Вариант 1-5

Результаты измерения микротвердости ($H_М$) покрытий на твердомере представлены в таблице.

№ измер.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$H_М$, усл. ед.	61	55	44	58	42	68	46	47	46	38	47	57

Определить математическое ожидание, стандартное отклонение результатов измерений. Проверить наличие грубых ошибок измерения (предположительно грубая ошибка – это наибольшее измерение).

Вариант 1-6

Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерений распределены нормально с σ = 15 м. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину моря с ошибкой не более 5 м при надежности вывода 0,9?

Вариант 1-7

Результаты измерения микротвердости (H_M) покрытий на твердомере представлены в таблице.

№ измер.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
H_M, усл. ед.	61	55	44	58	42	63	46	47	46	35	47	57

Определить математическое ожидание, стандартное отклонение результатов измерений. Проверить наличие грубых ошибок измерения (предположительно грубая ошибка – это наименьшее измерение).

Вариант 1-8

Результаты измерения микротвердости (H_M) покрытий на двух разных образцах представлены в таблице.

№ измер.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
H_M, образец № 1 усл. ед.	44	48	46	38	41	40	41	44	46	44	37	34
H_M, образец № 2 усл. ед.	42	44	43	48	39	42	39	37	38	44	42	42

Определить математическое ожидание, стандартное отклонение по каждой серии измерений. Проверить гипотезу равенства средних.

Вариант 1-9

Результаты измерения микротвердости (H_M) покрытий на двух разных образцах представлены в таблице.

№ измер.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
H_M, образец № 1 усл. ед.	40	39	37	38	45	42	40	39	45	40	38	42
H_M, образец № 2 усл. ед.	42	44	43	48	39	42	39	37	38	44	42	42

Определить математическое ожидание, стандартное отклонение результатов измерений по каждой серии измерений. Проверить гипотезу равенства средних.

Вариант 1-10

Результаты измерения микротвердости (H_M) покрытий на двух разных образцах представлены в таблице.

№ измер.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
H_M, образец № 1 усл. ед.	44	48	46	38	41	40	41	44	46	44	37	34
H_M, образец № 2 усл. ед.	43	35	38	36	44	40	44	42	43	44	45	32

Определить математическое ожидание, стандартное отклонение по каждой серии измерений. Проверить гипотезу равенства средних.

Вариант 1-11

Проведено 12 измерений некоторой исследуемой физической величины. Измерения проводили одним прибором, систематическая ошибка которого равна нулю. Исправленное среднее квадратичное отклонение ***S*** случайных ошибок iзмеренiя равно 0,5. Найдите точность прибора с надежностью вывода ***p*** = 0,99, если результаты ошибок измерений распределены нормально.

Вариант 1-12

Проведено несколько измерений расстояния ***L***. Результаты измерений (в метрах) представлены в таблице.

№ замера	***L***	№ замера	***L***	№ замера	***L***	№ замера	***L***
1	1235,6	5	1238,5	9	1234,5	13	1234,3
2	1237,5	6	1234,2	10	1236,8	14	1237,5
3	1232,9	7	1235,9	11	1237,6	15	1235,4
4	1236,2	8	1233,3	12	1233,1	16	1234,7

Вычислить оценки математического ожидания, эмпирической дисперсии, стандартного отклонения измеренного расстояния методом вычисления средних с выбором начала отсчета.

Вариант 1-13

Чему должно равняться число опытов (измерений величины), чтобы с надежностью ***p*** =0,95 точность оценки математического ожидания была равна 0,2, если установлено, что среднее квадратичное отклонение σ = 4?

Вариант 1-14

Из генеральной совокупности, подчиняющейся нормальному закону распределения, извлечена выборка объёмом ***n***. По данным выборки определено значение стандартного отклонения ***S***. Определить доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратичное отклонение σ с надежностью р = 0,999.

Вариант 1-15

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости α =т 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности измеряемой физической величины ***X*** с эмпирическим распределением выборки объёмом $n = \sum m_i = 200$.

Выборка приведена в таблице.

X	5	7	9	11	13	15	17	19	21
m_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Задача 2 (по темам «1.5. Дисперсионный анализ», «1.6. Корреляционный и регрессионный анализ» и «1.7. Планирование эксперимента»).

Вариант 2-1 Для оценки значимость влияния марки СОЖ (X_1), частоты вращения детали (X_2), амплитуды продольной осцилляции круга (X_3) на производительность врезного шлифования (Y) выбраны уровни варьирования факторов, указанные в таблице:

X_1	1	2	3	4	5	Ранги, присвоенные СОЖ
X_2	100	120	140	160	180	об/мин
X_3	20	40	60	80	100	1/мин

Провести нормирование факторов и построить план эксперимента для дисперсионного анализа.

Вариант 2-2 Для оценки значимость влияния марки СОЖ (X_1), частоты вращения детали (X_2), амплитуды продольной осцилляции круга (X_3) на производительность врезного шлифования (Y) выбраны уровни варьирования факторов, указанные в таблице:

X_1	Эмульсол	Вода	Марка 1	Марка 2	Марка 3	Марки СОЖ
X_2	110	140	170	200	230	об/мин
X_3	10	30	50	70	90	1/мин

Провести нормирование факторов и построить план эксперимента для дисперсионного анализа.

Вариант 2-3 Для оценки значимость влияния марки СОЖ (X_1), частоты вращения детали (X_2), амплитуды продольной осцилляции круга (X_3) на производительность врезного шлифования (Y) выбраны уровни варьирования факторов, указанные в таблице:

X_1	Марка 1	Марка 2	Марка 3	Марка 4	Марка 5	Марки СОЖ
X_2	100	120	140	160	180	об/мин
X_3	20	40	60	80	100	1/мин

Провести нормирование факторов и построить план эксперимента для дисперсионного анализа.

Вариант 2-4 Для оценки значимость влияния марки СОЖ (X_1), частоты вращения детали (X_2), амплитуды продольной осцилляции круга (X_3) и марки материала (X_4) на производительность врезного шлифования (Y) выбраны уровни варьирования факторов, указанные в таблице:

X_1	1	2	3	4	5	Ранги, присвоенные СОЖ
X_2	100	120	140	160	180	об/мин
X_3	20	40	60	80	100	1/мин
X_4	Сталь 3	Сталь 45	У9А	ШХ40	12ХН3	Состав стали

Провести нормирование факторов и построить план эксперимента для дисперсионного анализа.

Вариант 2-5 Для оценки значимость влияния марки СОЖ (X_1), частоты вращения детали (X_2), амплитуды продольной осцилляции круга (X_3) на производительность врезного шлифования (Y) выбраны уровни варьирования факторов, указанные в таблице:

X_1	1	2	3	4	5	Ранги, присвоенные СОЖ
X_2	140	160	180	200	220	об/мин
X_3	15	30	45	60	75	1/мин

Провести нормирование факторов и построить план эксперимента для дисперсионного анализа.

Вариант 2-6 Для оценки значимость влияния марки СОЖ (X_1), частоты вращения детали (X_2), амплитуды продольной осцилляции круга (X_3) и марки материала (X_4) на производительность врезного шлифования (Y) выбраны уровни варьирования факторов, указанные в таблице:

X_1	1	2	3	4	5	Ранги СОЖ
X_2	100	120	140	160	180	об/мин
X_3	20	40	60	80	100	1/мин

X_4	Сталь 3	Сталь 45	У9А	ШХ40	12ХН3	Состав стали

Провести нормирование факторов и построить план эксперимента для дисперсионного анализа.

Вариант 2-7 Для оценки значимость влияния марки СОЖ (X_1), частоты вращения детали (X_2), скорости подачи (X_3) и марки материала (X_4) на производительность врезного шлифования (Y) выбраны уровни варьирования факторов, указанные в таблице:

X_1	1	2	3	4	5	Ранги, присвоенные СОЖ
X_2	100	120	140	160	180	об/мин
X_3	0,07	0,14	0,21	0,28	0,35	мм/мин
X_4	Сталь 3	Сталь 45	У9А	ШХ40	12ХН3	Состав стали

Провести нормирование факторов и построить план эксперимента для дисперсионного анализа.

Вариант 2-8 Для оценки значимость влияния марки СОЖ (X_1), частоты вращения детали (X_2), амплитуды продольной осцилляции круга (X_3) и марки материала (X_4) на производительность врезного шлифования (Y) выбраны уровни варьирования факторов, указанные в таблице:

X_1	1	2	3	4	5	Ранги, присвоенные СОЖ
X_2	200	220	240	260	280	об/мин
X_3	2	4	6	8	10	1/мин
X_4	Сталь 3	Сталь 45	У9А	ШХ40	12ХН3	Состав стали

Провести нормирование факторов и построить план эксперимента для дисперсионного анализа.

Вариант 2-9

Результаты измерения величины износа сверл по задней поверхности (h, мм) в зависимости от суммарного времени обработки отверстий одним инструментом (Т, мин) показали следующее:

№ инстр.	*Суммарное время обработки отверстий Т, мин*					
	125	400	800	1350	1750	2350
1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,6	0,6
2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,6
3	0,1	0,2	0,3	0,3	0,5	0,6
4	0,3	0,4	0,5	0,5	0,8	0,9
5	0,1	0,3	0,4	0,4	0,4	0,4
6	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7
7	0,1	0,2	0,3	0,4	0,4	0,9
8	0,2	0,2	0,4	0,5	0,5	0,5
9	0,1	0,3	0,5	0,5	0,5	0,5
10	0,2	0,3	0,5	0,5	0,6	0,7
11	0,1	0,3	0,5	0,6	0,6	0,6
12	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7
13	0,2	0,3	0,3	0,4	0,5	0,6
14	0,2	0,3	0,4	0,4	0,4	0,5
15	0,3	0,5	0,7	0,8	0,8	0,9
16	0,1	0,3	0,4	0,6	0,6	0,6
17	0,3	0,5	0,7	0,7	0,7	0,7
18	0,1	0,3	0,6	0,6	0,6	0,6
19	0,1	0,3	0,4	0,4	0,4	0,5
20	0,2	0,4	0,7	0,7	0,7	0,7
21	0,4	0,6	0,9	0,9	0,9	0,9
22	0,1	0,3	0,4	0,4	0,4	0,6
23	0,2	0,4	0,7	0,5	0,5	0,6
24	0,1	0,2	0,3	0,3	0,6	0,7
25	0,1	0,2	0,5	0,8	0,8	0,8

Построить корреляционную таблицу для определения корреляции между Т и $h_з$.

Вариант 2-10

В ходе производственных испытаний получены следующие результаты измерения износа десяти метчиков ($h_з$, мм) от наработки их до отказа (Т, мин) при обработке детали из одного и того же материала, на одно и том же станке:

№ инстр.	Период стойкости метчиков Т, мин				
	4	8	16	24	32
1	0,05	0,13	0,27	0,48	0,55
2	0,05	-	-	-	-
3	0,05	0,23	0,3	0,42	0,5
4	0,05	0,21	0,21	0,37	0,55
5	0,03	0,1	0,22	0,39	0,5
6	0,1	0,15	0,21	0,4	0,55
7	0,07	0,12	0,26	0,45	0,6
8	0,05	0,23	0,31	0,4	0,5
9	0,05	0,15	0,35	-	-
10	0,07	0,11	0,22	0,34	0,5

Построить корреляционную таблицу для определения корреляции между величиной $h_з$ инструмента и периодом его стойкости.

Вариант 2-11

В таблице приведена зависимость растворимости (k) азотнокисолого натрия $NaNO_3$ в воде от температуры (T). Из теории известно, что связь растворимости с температурой описывается линейной зависимостью. Найти параметры линейной модели. Данные таблицы и линейную модель представить на графике.

T, ºC	0	4	10	15	21	29	36	51	68
k, усл. ед.	67	71	76	81	86,1	93	99	113,3	125,1

Вариант 2-12

Зависимость температуры поверхности конденсации плазменного потока (T, ºC) от величины базового потенциала (U_{OCH}) представлена в таблице.

T, ºC	360	420	440	495	600
U_{OCH}	50	100	150	250	350

Проверить, является ли зависимость температуры от величины базового потенциала линейной. Найти параметры линейной модели. Данные таблицы и линейную модель представить на графике.

Вариант 2-13

Построить регрессионное уравнение используя метод наименьших квадратов по следующим экспериментальным данным

X	1	2	3	4	5	6
Y	2	5	7,9	11,1	14,5	17

Вариант 2-14

Построить регрессионное уравнение используя метод наименьших квадратов по следующим экспериментальным данным

X	2	4	8	16	25
Z	0,3	2,9	8,5	15	24

Вариант 2-15

Построить регрессионное уравнение используя метод наименьших квадратов по следующим экспериментальным данным

X	4	10	15	21	36	51
Y	71	76,5	80,6	86	99,5	113,6

Вариант 2-16

Построить регрессионное уравнение используя метод наименьших квадратов по следующим экспериментальным данным

X	1	1,5	2	2,5	3
Z	2	2,15	2,7	2,8	2,9

Вариант 2-17

Построить регрессионное уравнение используя метод наименьших квадратов по следующим экспериментальным данным

R	10	60	100	200	300
Z	360	420	440	495	600

Вариант 2-18

Построить регрессионное уравнение используя метод наименьших квадратов по следующим экспериментальным данным

X	1	3	7	15	20
Z	0,1	2,2	8,1	15	22

Вариант 2-19

Построить регрессионное уравнение используя метод наименьших квадратов по следующим экспериментальным данным

К	1	1,5	2	2,5	3
Z	2,1	2,2	2,7	2,8	2,85

Вариант 2-20

Построить регрессионное уравнение используя метод наименьших квадратов по следующим экспериментальным данным

X	50	100	150	250	350
Z	360	420	440	495	600

Вариант 2-21

Построить регрессионное уравнение используя метод наименьших квадратов по следующим экспериментальным данным

X	1	4	9	16	25
Z	0,1	3	8,1	14,9	23,9

Вариант 2-22

Построить регрессионное уравнение используя метод наименьших квадратов по следующим экспериментальным данным

ZZ	1	2	3	4	5	6
RY	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

Задача 3 (по теме 1.7. Планирование эксперимента)

Вариант 3-1 Дана матрица планирования эксперимента:

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	У
1	-	-	-		25
2	+	-	-		20
3	-	+	-		38
4	+	+	-		41
5	-	-	+		45
6	+	-	+		26
7	-	+	+		25
8	+	+	+		28

Задание:

Заполнить столбец X_i X_j.

Построить уравнение регрессии, соответствующее плану эксперимента.

Найти коэффициенты регрессии и оценить их значение.

Проверить адекватность полученной математической модели.

Вариант 3-2 Дана матрица планирования эксперимента:

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_2X_3	У
1	-	-	-		28
2	+	-	-		25
3	-	+	-		26
4	+	+	-		45
5	-	-	+		41
6	+	-	+		38
7	-	+	+		20
8	+	+	+		25

Задание:

Заполнить строку X_i X_j.

Построить уравнение регрессии, соответствующее плану эксперимента.

Найти коэффициенты регрессии и оценить их значение.

Проверить адекватность полученной математической модели.

Вариант 3-3 Изучается влияние трех факторов X_1, X_2, X_3 на отклик. Необходимо построить факторный план с учетом всех возможных двойных взаимодействий между факторами.

Вариан 3-4 Дана матрица планирования эксперимента:

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	У
1	-	-	-		46,5
2	+	-	-		16,7
3	-	+	-		8,9
4	+	+	-		24,2
5	-	-	+		5,1
6	+	-	+		16,8
7	-	+	+		20,5
8	+	+	+		46,8

Задание:

Заполнить строку X_i X_j.

Построить уравнение регрессии, соответствующее плану эксперимента.

Найти коэффициенты регрессии и оценить их значение.

Проверить адекватность полученной математической модели.

Вариан 3-5 Дана матрица планирования эксперимента:

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_2X_3	У
1	-	-	-		46,8
2	+	-	-		20,5
3	-	+	-		16,8
4	+	+	-		5,1
5	-	-	+		24,2
6	+	-	+		8,9
7	-	+	+		16,7
8	+	+	+		46,5

Задание:

Заполнить строку X_i X_j.

Построить уравнение регрессии, соответствующее плану эксперимента.

Найти коэффициенты регрессии и оценить их значение.

Проверить адекватность полученной математической модели.

Вариант 3-6 Изучается влияние трех факторов X_1, X_2, X_3 на отклик.

Необходимо построить факторный план с учетом всех возможных двойных и тройных взаимодействий между факторами.

Вариант 3-7 Изучается влияние трех факторов X_1, X_2, X_3 на отклик.

Необходимо построить факторный план с учетом двойных взаимодействий между факторами X_2 и X_3.

Вариант 3-8 Дана матрица планирования эксперимента:

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_1X_3	У
1	-	-	-		53,4
2	+	-	-		65,3
3	-	+	-		54,2
4	+	+	-		56,2
5	-	-	+		52,8
6	+	-	+		52,2
7	-	+	+		65,1
8	+	+	+		52,8

Задание:

Заполнить строку X_i X_j.

Построить уравнение регрессии, соответствующее плану эксперимента.

Найти коэффициенты регрессии и оценить их значение.

Проверить адекватность полученной математической модели.

Вариант 3-9 Изучается влияние четырех факторов X_1, X_2, X_3, X_4 на отклик. Необходимо построить факторный план с учетом всех возможных двойных взаимодействий между факторами и тройных взаимодействий между факторами X_2, X_3, X_4.

Вариант 3-10 Дана матрица планирования эксперимента:

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_2X_3	У
1	-	-	-		52,8
2	+	-	-		65,1
3	-	+	-		52,2
4	+	+	-		52,8
5	-	-	+		56,2
6	+	-	+		54,2
7	-	+	+		65,3
8	+	+	+		53,4

Задание:

Заполнить строку X_i X_j.

Построить уравнение регрессии, соответствующее плану эксперимента.

Найти коэффициенты регрессии и оценить их значение.

Проверить адекватность полученной математической модели.

Вариант 3-11 Изучается влияние трех факторов X_1, X_2, X_3 на отклик. Необходимо построить факторный план с учетом всех возможных двойных взаимодействий между факторами.

Вариант 3-12 Дана матрица планирования эксперимента:

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	У
1	-	-	-		81,1
2	+	-	-		85,7
3	-	+	-		82,3
4	+	+	-		90,4
5	-	-	+		84,9
6	+	-	+		85,3
7	-	+	+		88,2
8	+	+	+		89,9

Задание: Заполнить строку X_i X_j; Построить уравнение регрессии, соответствующее плану эксперимента; Найти коэффициенты регрессии и оценить их значение; Проверить адекватность полученной математической модели.

Вариант 3-13 Дана матрица планирования эксперимента:

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_1X_3	У
1	-	-	-		89,9
2	+	-	-		88,2
3	-	+	-		85,9
4	+	+	-		84,9
5	-	-	+		90,4
6	+	-	+		82,3
7	-	+	+		85,7
8	+	+	+		81,1

Задание: Заполнить строку X_i X_j; Построить уравнение регрессии, соответствующее плану эксперимента; Найти коэффициенты регрессии и оценить их значение; Проверить адекватность полученной математической модели.

Вариант 3-14 Изучается влияние четырех факторов X_1, X_2, X_3, X_4 на отклик. Необходимо построить факторный план с учетом двойных взаимодействий между факторами X_1, X_2, X_3.

Вариант 3-15 Дана матрица планирования эксперимента:

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	У
1	-	-	-		19,3
2	+	-	-		24
3	-	+	-		31,2
4	+	+	-		12,8
5	-	-	+		32
6	+	-	+		14
7	-	+	+		25
8	+	+	+		30,7

Задание:

Заполнить строку X_i X_j.

Построить уравнение регрессии, соответствующее плану эксперимента.

Найти коэффициенты регрессии и оценить их значение.

Проверить адекватность полученной математической модели.

Вариант 3-16 Дана матрица планирования эксперимента:

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_2X_3	У
1	-	-	-		30,7
2	+	-	-		25
3	-	+	-		14
4	+	+	-		32
5	-	-	+		12,8
6	+	-	+		31,2
7	-	+	+		24
8	+	+	+		19,3

Задание: Заполнить строку X_i X_j; Построить уравнение регрессии, соответствующее плану эксперимента; Найти коэффициенты регрессии и оценить их значение; Проверить адекватность полученной математической модели.

Вариант 3-17 Изучается влияние трех факторов X_1, X_2, X_3 на отклик. Необходимо построить факторный план с учетом всех возможных двойных и тройных взаимодействий между факторами.

Вариант 3-18 Изучается влияние четырех факторов X_1, X_2, X_3, X_4 на отклик. Необходимо построить факторный план с учетом всех возможных двойных и тройных взаимодействий между факторами.

Вариант 3-19 Дана матрица планирования эксперимента:

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	У
1	-	-	-		50
2	+	-	-		57,2
3	-	+	-		48,1
4	+	+	-		46
5	-	-	+		64,8
6	+	-	+		45
7	-	+	+		54,8
8	+	+	+		53

Задание:

Заполнить строку X_i X_j.

Построить уравнение регрессии, соответствующее плану эксперимента.

Найти коэффициенты регрессии и оценить их значение.

Проверить адекватность полученной математической модели.

Вариант 3-20 Дана матрица планирования эксперимента:

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_1X_3	У
1	-	-	-		53
2	+	-	-		54,8
3	-	+	-		45
4	+	+	-		64,8
5	-	-	+		46
6	+	-	+		48,1
7	-	+	+		57,2
8	+	+	+		50

Задание:

Заполнить строку X_i X_j.

Построить уравнение регрессии, соответствующее плану эксперимента.

Найти коэффициенты регрессии и оценить их значение.

Проверить адекватность полученной математической модели.

Задача 4 (по теме «1.7. Планирование эксперимента»).

Вариант 4-1

Требуется повысить ударную вязкость (у) листового материала из деформируемого алюминиевого сплава при изменении содержания в нем цинка (x_1), толщины листа (x_2), температуры старения (x_3) и времени старения (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания цинка (%) – 6 и 1;

толщины листа (мм) – 9 и 1;

температуры старения (ºС) – 460 и 10;

времени старения (час) – 14 и 4.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 6,75; № 2 – 5,25; № 3 – 5,75; № 4 – 4,25;

№ 5 – 7,50; № 6 – 8,50; № 7 – 7,00; № 8 – 5,50.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 5,75;   № 10 – 6,25;   № 11 – 7.00.

В качестве плана эксперимента выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с величиной определяющего контраста $1=x_1x_2x_3x_4$

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.
2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с заданной величиной определяющего контраста $1=x_1x_2x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.
3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.
4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.
5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.
6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.
7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-2

Требуется повысить ударную вязкость (у) листового материала из деформируемого алюминиевого сплава при изменении содержания в нем цинка (x_1), толщины листа (x_2), температуры старения (x_3) и времени старения (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания цинка (%) – 6 и 1;

толщины листа (мм) – 9 и 1;

температуры старения (ºС) – 460 и 10;

времени старения (час) – 14 и 4.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=x_1x_2x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 6,75; № 2 – 5,25; № 3 – 5,75; № 4 – 4,25;

№ 5 – 7,50; № 6 – 8,50; № 7 – 7,00; № 8 – 5,50.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 5,75; № 10 – 6,25; № 11 – 7.00.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-3

Требуется повысить ударную вязкость (у) листового материала из деформируемого алюминиевого сплава при изменении содержания в нем цинка (x_1), толщины листа (x_2), температуры старения (x_3) и времени старения (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания цинка (%) – 6 и 1;

толщины листа (мм) – 9 и 1;

температуры старения (ºС) – 460 и 10;

времени старения (час) – 14 и 4.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом 1=-

$x_1x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 6,75; № 2 – 5,25; № 3 – 5,75; № 4 – 4,25;

№ 5 – 7,50; № 6 – 8,50; № 7 – 7,00; № 8 – 5,50.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 5,75; № 10 – 6,25; № 11 – 7.00.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-4

Требуется повысить ударную вязкость (y) листового материала из деформируемого алюминиевого сплава при изменении содержания в нем цинка (x_1), толщины листа (x_2), температуры старения (x_3) и времени старения (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания цинка (%) – 6 и 1;

толщины листа (мм) – 9 и 1;

температуры старения (ºС) – 460 и 10;

времени старения (час) – 14 и 4.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=x_2x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 6,75; № 2 – 5,25; № 3 – 5,75; № 4 – 4,25;

№ 5 – 7,50; № 6 – 8,50; № 7 – 7,00; № 8 – 5,50.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 5,75; № 10 – 6,25; № 11 – 7.00.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-5

Требуется повысить предел выносливости при 400ºC (y) среднелегированной стали при изменении содержания в ней углерода (x_1), молибдена (x_2), марганца (x_3) и титана (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания углерода (%) – 0,35 и 0,05;

содержания молибдена (%) – 0,75 и 0,25;

содержания марганца (%) – 0,8 и 0,2;

содержания титана (%) – 0,45 и 0,15.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=x_1x_2x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 37,5; № 2 – 34,5; № 3 – 35,5; № 4 – 32,5;

№ 5 – 39,0; № 6 – 41,0; № 7 – 38,0; № 8 – 35,0.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 36,9; № 10 – 36,5; № 11 – 37,0.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-6

Требуется повысить предел выносливости при 400ºС (y) среднелегированной стали при изменении содержания в ней углерода (x_1), молибдена (x_2), марганца (x_3) и титана (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания углерода (%) – 0,35 и 0,05;

содержания молибдена (%) – 0,75 и 0,25;

содержания марганца (%) – 0,8 и 0,2;

содержания титана (%) – 0,45 и 0,15.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=-x_1x_2x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 37,5; № 2 – 34,5; № 3 – 35,5; № 4 – 32,5;

№ 5 – 39,0; № 6 – 41,0; № 7 – 38,0; № 8 – 35,0.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 36,9; № 10 – 36,5; № 11 – 37,0.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-7

Требуется повысить предел выносливости при 400ºС (y) среднелегированной стали при изменении содержания в ней углерода (x_1), молибдена (x_2), марганца (x_3) и титана (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания углерода (%) – 0,35 и 0,05;

содержания молибдена (%) – 0,75 и 0,25;

содержания марганца (%) – 0,8 и 0,2;

содержания титана (%) – 0,45 и 0,15.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=x_1x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 37,5; № 2 – 34,5; № 3 – 35,5; № 4 – 32,5;

№ 5 – 39,0; № 6 – 41,0; № 7 – 38,0; № 8 – 35,0.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 36,9; № 10 – 36,5; № 11 – 37,0.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-8

Требуется повысить предел выносливости при 400ºC (y) среднелегированной стали при изменении содержания в ней углерода (x_1), молибдена (x_2), марганца (x_3) и титана (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания углерода (%) – 0,35 и 0,05;

содержания молибдена (%) – 0,75 и 0,25;

содержания марганца (%) – 0,8 и 0,2;

содержания титана (%) – 0,45 и 0,15.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=-x_2x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 37,5; № 2 – 34,5; № 3 – 35,5; № 4 – 32,5;

№ 5 – 39,0; № 6 – 41,0; № 7 – 38,0; № 8 – 35,0.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 36,9; № 10 – 36,5; № 11 – 37,0.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F- критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-9

Требуется повысить предел прочности при 300ºC (y) листового титанового сплава при изменении содержания в нем алюминия (x_1), олова (x_2), температуры отжига листового материала (x_3) и температуры горячей деформации (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания алюминия (%) – 5 и 1;

содержания олова (%) – 2,5 и 0,5;

температуры отжига листов (ºС) – 600 и 20;

температуры горячей деформации (ºС) – 1000 и 100.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом 1=-$x_1x_2x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 71; № 2 – 65; № 3 – 67; № 4 – 61;

№ 5 – 74; № 6 – 78; № 7 – 72; № 8 – 66.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 69; № 10 – 70; № 11 – 68.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-10

Требуется повысить предел прочности при 300ºС (y) листового титанового сплава при изменении содержания в нем алюминия (x_1), олова (x_2), температуры отжига листового материала (x_3) и температуры горячей деформации (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания алюминия (%) – 5 и 1;

содержания олова (%) – 2,5 и 0,5;

температуры отжига листов (ºС) – 600 и 20;

температуры горячей деформации (ºС) – 1000 и 100.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=x_1x_2x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 71; № 2 – 65; № 3 – 67; № 4 – 61;

№ 5 – 74; № 6 – 78; № 7 – 72; № 8 – 66.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 69; № 10 – 70; № 11 – 68.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-11

Требуется повысить предел прочности при 300ºС (y) листового титанового сплава при изменении содержания в нем алюминия (x_1), олова (x_2), температуры отжига листового материала (x_3) и температуры горячей деформации (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания алюминия (%) – 5 и 1;

содержания олова (%) – 2,5 и 0,5;

температуры отжига листов (ºС) – 600 и 20;

температуры горячей деформации (ºC) – 1000 и 100.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=x_1x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 71; № 2 – 65; № 3 – 67; № 4 – 61;

№ 5 – 74; № 6 – 78; № 7 – 72; № 8 – 66.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 69; № 10 – 70; № 11 – 68.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-12

Требуется повысить предел прочности при 300ºC (y) листового титанового сплава при изменении содержания в нем алюминия (x_1), олова (x_2), температуры отжига листового материала (x_3) и температуры горячей деформации (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания алюминия (%) – 5 и 1;

содержания олова (%) – 2,5 и 0,5;

температуры отжига листов (ºC) – 600 и 20;

температуры горячей деформации (ºC) – 1000 и 100.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=-x_2x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 71; № 2 – 65; № 3 – 67; № 4 – 61;

№ 5 – 74; № 6 – 78; № 7 – 72; № 8 – 66.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 69; № 10 – 70; № 11 – 68.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-13

Требуется повысить коррозионную стойкость в парах ртути (y) сплава вольфрама с никелем и медью при изменении содержания в нем никеля (x_1), меди (x_2), температуры горячей деформации (x_3) и температуры отжига (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания никеля (%) – 6 и 1;

содержания меди (%) – 3 и 1;

температуры горячей деформации (ºC) – 1050 и 50;

температуры отжига (ºC) – 1050 и 50.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом 1=-

$x_1x_2x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 64; № 2 – 40; № 3 – 48; № 4 – 24;

№ 5 – 76; № 6 – 92; № 7 – 68; № 8 – 44.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 59; № 10 – 60; № 11 – 55.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-14

Требуется повысить коррозионную стойкость в парах ртути (y) сплава вольфрама с никелем и медью при изменении содержания в нем никеля (x_1), меди (x_2), температуры горячей деформации (x_3) и температуры отжига (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания никеля (%) – 6 и 1;

содержания меди (%) – 3 и 1;

температуры горячей деформации (ºС) – 1050 и 50;

температуры отжига (ºС) – 1050 и 50.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=-x_1x_2x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 64; № 2 – 40; № 3 – 48; № 4 – 24;
№ 5 – 76; № 6 – 92; № 7 – 68; № 8 – 44.
3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:
№ 9 – 59;   № 10 – 60;   № 11 – 55.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-15

Требуется повысить коррозионную стойкость в парах ртути (y) сплава вольфрама с никелем и медью при изменении содержания в нем никеля (x_1), меди (x_2), температуры горячей деформации (x_3) и температуры отжига (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:
содержания никеля (%) – 6 и 1;
содержания меди (%) – 3 и 1;
температуры горячей деформации (ºС) – 1050 и 50;
температуры отжига (ºС) – 1050 и 50.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=x_1x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:
№1 – 64; № 2 – 40; № 3 – 48; № 4 – 24;
№ 5 – 76; № 6 – 92; № 7 – 68; № 8 – 44.
3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 59; № 10 – 60; № 11 – 55.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-16

Требуется повысить коррозионную стойкость в парах ртути (y) сплава вольфрама с никелем и медью при изменении содержания в нем никеля (x_1), меди (x_2), температуры горячей деформации (x_3) и температуры отжига (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания никеля (%) – 6 и 1;

содержания меди (%) – 3 и 1;

температуры горячей деформации (°С) – 1050 и 50;

температуры отжига (°С) – 1050 и 50.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=x_2x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 64; № 2 – 40; № 3 – 48; № 4 – 24;

№ 5 – 76; № 6 – 92; № 7 – 68; № 8 – 44.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 59; № 10 – 60; № 11 – 55.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-17

Требуется повысить коррозионную стойкость в 2 % серной кислоте (y) нержавеющей стали при изменении содержания в ней хрома (x_1), никеля (x_2), алюминия (x_3) и марганца (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

Содержания хрома (%) – 16,5 и 0,5;

содержания никеля (%) – 7 и 1;

содержания алюминия (%) – 2 и 0,5;

содержания марганца (%) – 2,5 и 0,5.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=-x_1x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 0,81; № 2 – 0,75; № 3 – 0,77; № 4 – 0,71;

№ 5 – 0,84; № 6 – 0,88; № 7 – 0,82; № 8 – 0,76.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 0,80; № 10 – 0,79; № 11 – 0,78.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-18

Требуется повысить коррозионную стойкость в 2 % серной кислоте (у) нержавеющей стали при изменении содержания в ней хрома (x_1), никеля (x_2), алюминия (x_3) и марганца (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

Содержания хрома (%) – 16,5 и 0,5;

содержания никеля (%) – 7 и 1;

содержания алюминия (%) – 2 и 0,5;

содержания марганца (%) – 2,5 и 0,5.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=x_1x_2x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 0,81; № 2 – 0,75; № 3 – 0,77; № 4 – 0,71;

№ 5 – 0,84; № 6 – 0,88; № 7 – 0,82; № 8 – 0,76.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 0,80; № 10 – 0,79; № 11 – 0,78.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-19

Требуется повысить коррозионную стойкость в 2 % серной кислоте (y) нержавеющей стали при изменении содержания в ней хрома (x_1), никеля (x_2), алюминия (x_3) и марганца (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

Содержания хрома (%) – 16,5 и 0,5;

содержания никеля (%) – 7 и 1;

содержания алюминия (%) – 2 и 0,5;

содержания марганца (%) – 2,5 и 0,5.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=-x_1x_2x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 0,81; № 2 – 0,75; № 3 – 0,77; № 4 – 0,71;

№ 5 – 0,84; № 6 – 0,88; № 7 – 0,82; № 8 – 0,76.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 0,80; № 10 – 0,79; № 11 – 0,78.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F- критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-20

Требуется повысить коррозионную стойкость в 2 % серной кислоте (y) нержавеющей стали при изменении содержания в ней хрома (x_1), никеля (x_2), алюминия (x_3) и марганца (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

Содержания хрома (%) – 16,5 и 0,5;

содержания никеля (%) – 7 и 1;

содержания алюминия (%) – 2 и 0,5;

содержания марганца (%) – 2,5 и 0,5.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=x_2x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 0,81; № 2 – 0,75; № 3 – 0,77; № 4 – 0,71;

№ 5 – 0,84; № 6 – 0,88; № 7 – 0,82; № 8 – 0,76.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 0,80; № 10 – 0,79; № 11 – 0,78.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-21

Требуется повысить ударную вязкость (y) конструкционной стали при изменении содержания в ней углерода (x_1), марганца (x_2), температуры закалки (x_3) и времени изотермической выдержки (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания углерода (%) – 0,35 и 0,05;

содержания марганца (%) – 1 и 0,25;

температуры закалки (°C) – 850 и 50;

времени изотермической выдержки (мин) – 15 и 5.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=x_2x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 7,5; № 2 – 4,5; № 3 – 5,5; № 4 – 2,5;

№ 5 – 9,0; № 6 – 11,0; № 7 – 8,0; № 8 – 5,0.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 6,5; № 10 – 7,5; № 11 – 5,5.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-22

Требуется повысить ударную вязкость (y) конструкционной стали при изменении содержания в ней углерода (x_1), марганца (x_2), температуры закалки (x_3) и времени изотермической выдержки (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания углерода (%) – 0,35 и 0,05;

содержания марганца (%) – 1 и 0,25;

температуры закалки (°C) – 850 и 50;

времени изотермической выдержки (мин) – 15 и 5.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=-x_1x_2x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 7,5; № 2 – 4,5; № 3 – 5,5; № 4 – 2,5;

№ 5 – 9,0; № 6 – 11,0; № 7 – 8,0; № 8 – 5,0.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 6,5; № 10 – 7,5; № 11 – 5,5.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-23

Требуется повысить ударную вязкость (y) конструкционной стали при изменении содержания в ней углерода (x_1), марганца (x_2), температуры закалки (x_3) и времени изотермической выдержки (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания углерода (%) – 0,35 и 0,05;

содержания марганца (%) – 1 и 0,25;

температуры закалки (ºC) – 850 и 50;

времени изотермической выдержки (мин) – 15 и 5.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом 1=-

$x_1x_2x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 7,5; № 2 – 4,5; № 3 – 5,5; № 4 – 2,5;

№ 5 – 9,0; № 6 – 11,0; № 7 – 8,0; № 8 – 5,0.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 6,5; № 10 – 7,5; № 11 – 5,5.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

Вариант 4-24

Требуется повысить ударную вязкость (у) конструкционной стали при изменении содержания в ней углерода (x_1), марганца (x_2), температуры закалки (x_3) и времени изотермической выдержки (x_4).

В качестве основного уровня и интервалов варьирования выбраны соответственно для:

содержания углерода (%) – 0,35 и 0,05;

содержания марганца (%) – 1 и 0,25;

температуры закалки (°С) – 850 и 50;

времени изотермической выдержки (мин) – 15 и 5.

Задание.

1. Составить таблицу условий эксперимента.

2. Составить план эксперимента, состоящий из 8 опытов. В план включить еще 3 опыта на основном уровне. В качестве плана выбрать дробную реплику $\mathbf{2^{4-1}}$ с определяющим контрастом $1=x_1x_3x_4$. Построить систему оценок коэффициентов регрессии. План записать в кодовом (нормализованном) и натуральном масштабах.

8 опытов плана дали следующие результаты:

№1 – 7,5; № 2 – 4,5; № 3 – 5,5; № 4 – 2,5;

№ 5 – 9,0; № 6 – 11,0; № 7 – 8,0; № 8 – 5,0.

3 опыта на основном уровне дали следующие результаты:

№ 9 – 6,5;   № 10 – 7,5;   № 11 – 5,5.

3. По данным опытов на основном уровне определить дисперсию и среднеквадратичную ошибку опыта.

4. Рассчитать коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы.

5. Записать линейную модель и формулы перехода от кодированных значений факторов к натуральным значениям.

6. Проверить адекватность линейной модели по t- и F-критериям.

7. Наметить опыты крутого восхождения по градиенту линейной модели.

3.4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Выполнение контрольной работы предусматривает решение типовых задач по первичной математической обработке результатов лабораторного и промышленного экспериментов, а также задач, связанных с планированием многофакторных промышленных экспериментов. При решении данных задач следует пользоваться теоретическим материалом соответствующих учебных тем.

3.4.1 Понятие экспериментального исследования. Ошибки измерений.

Основные теоретические положения и понятия тем 1.1, 1.2 и 1.3, несмотря на их простоту, являются базой, на которой строится весь теоретический и практический материал раздела 1. Изучение теоретического материала необходимо начинать с уяснения сути и содержание экспериментального исследования, его цели и условия реализации.

Экспериментальное исследование – (от латинского слова experiment – проба, опыт) – это метод познания, при помощи которого изучаются реальные явления, реальные функциональные связи между параметрами, характеризующими состояние изучаемого объекта. Экспериментальное исследование дает возможность получить на основе непосредственных измерений изучаемой характеристики ее зависимость от изменяемых параметров. Важной **задачей эксперимента** является проверка гипотез и теоретических предсказаний.

Экспериментальные исследования разнообразны по решаемым задачам и содержанию, по совокупности параметров одновременно обрабатываемых в ходе исследования. Основу экспериментального исследования составляет **эксперимент** – система операций или наблюдений, направленных на получение информации об объекте исследования. Составной частью эксперимента является **опыт** – воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях при возможности регистрации и количественной оценки состояния или результатов функционирования исследуемого объекта.

Эксперимент может быть качественным или количественным. Содержательная сторона эксперимента (как качественного, так и количественного) определяется его целью.

Целью качественного эксперимента является установление только факта существования некоторого явления". В случае детерминированных параметров качественный эксперимент не требует использования сложных измерительных устройств и систем обработки данных. В случае исследования стохастических явлений или при исследовании процессов с недетерминированными параметрами, эксперимент усложняется либо требованием повышения точности измерений (чувствительности измерительных приборов), либо требованием увеличения числа измерений.

Целью количественного (или измерительного) эксперимента является установление количественных связей между параметрами, которые описывают состояние системы.

Количество одновременно измеряемых (управляемых) параметров определяет сложность эксперимента. По сложности эксперимент разделяю на лабораторный и промышленный.

Любое экспериментальное исследование содержит, как минимум, **три основных этапа**. Это – измерение, аналитическое описание результатов и феноменологическое объяснение результатов эксперимента.

Условия проведения количественного (измерительного) эксперимента: наличие объекта исследования; наличие численных параметров, характеризующих состояние объекта исследования;

возможность управления объектом исследования; воспроизводимость результатов измерительного эксперимента.

Любое экспериментальное исследование неразрывно связано с точными измерениями, которые дают информацию об объекте исследования и обеспечивают технические возможности изготовления прецизионных устройств, получения сверхпрочных и наноматериалов, создания механизмов и приборов. Измерения, проводимые во время экспериментального исследования, требуют от инженера, исследователя владения современной измерительной аппаратурой, знания основных приемов и способов измерений, обработки и интерпретации экспериментально полученных данных.

Рассмотрим вначале содержание понятий физической величины и измерения, как способа определения ее значения.

В самом общем случае, под **физической величиной** будем понимать любую величину, имеющую определенное численное значение при фиксированных параметрах системы.

Измерение – это нахождение числового значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Результат измерения любой физической величины X всегда представляется в виде произведения: $X = a \times X_{эт}$, где a – численное значение величины X, $X_{эт}$ – единица измерения величины (**размерность**).

Каждой единицы измерения соответствует некоторый эталон. В настоящее время Международной системой единиц (СИ) установлено **семь основных единиц (эталонов) физических величин**: единица длины – метр [м]; единица массы – килограмм [кг]; единица времени – секунда [с]; единица термодинамической температуры – градус Кельвина [К]; единица силы тока – ампер [А]; единица силы света – кандела [кд]; единица количества вещества – моль [моль].

Кроме этих основных единиц введены две дополнительных: радиан (рад) и стерадиан (ср). Остальные единицы системы СИ являются производными.

Задачей измерения является вычисление величины $\boldsymbol{a}$ с возможно меньшей ошибкой. **Ошибкой измерения (или погрешностью измерения)** называется разность $\boldsymbol{z\text{-}a}$ между результатом измерения $\boldsymbol{z}$ и истинным значением $\boldsymbol{a}$ измеряемой величины. В начале эксперимента ошибка измерения является неизвестной величиной. Умение находить причину возникновения ошибок (погрешностей) измерений или умение оценить уровень (порядок) этой погрешности важен как для научного исследования, так и для инженерных расчетов. Погрешности характеризуют достоверность информации, на основании которой принимается инженерное решение или оценивается исследуемое явление.

Ошибки измерения делят на **систематические, случайные и грубые**.

Систематическая ошибка – это такая ошибка измерения, знак и величина которой остаются постоянными от опыта к опыту или изменяются по известному закону. Систематические ошибки больше связаны с принятым методом измерения и, в некотором смысле, могут называться методическими ошибками. Однако, появлению систематических ошибок способствуют и более общие, независящие от выбранного метода исследований, причины. Вопрос определения систематических ошибок является центральным во всей исследовательской работе, так как эти ошибки сдвигают истинное среднее значение измеряемой величины, в то время как случайные ошибки изменяют лишь уровень достоверности полученных результатов.

Систематическая ошибка, величина которой определена в результате дополнительных опытов или оценена из теоретических соображений, называется **поправкой**. Поправка служит для уточнения полученных результатов измерений.

Случайные ошибки – это ошибки вызванные большим количеством таких факторов, эффекты от действия которых столь незначительны, что их нельзя выделить или учесть в отдельности. Случайные ошибки являются неустранимыми, их нельзя исключить (в форме поправки) из результатов измерений. Учет влияния случайных ошибок основан на знании законов их распределения.

Грубые ошибки или промахи – это ошибки, возникающие в результате нарушения правил (условий) проведения измерений или в результате ошибки (промаха) экспериментатора. Внешним признаком промаха является его резкое отличие по величине от результатов остальных измерений.

При обнаружении грубой ошибки необходимо проверить – не нарушены ли условия измерения. В случае соблюдения условий эксперимента встает вопрос об отбрасывании результата измерения. Однако «отбрасывание» промахов является весьма ответственной задачей. Включение или отбрасывание результатов может неконтролируемым образом исказить результаты среднего значения и т.п.

3.4.2 Оценка ошибки измерения. Нормальный закон распределения случайных ошибок измерения

Систематическая погрешность (ошибка измерения) определяется следующим образом: $\Delta_{систем.}=\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{\mu}$ – математическое ожидание, $\boldsymbol{z}$ – истинное значение. Так как на практике $\boldsymbol{\mu}$ точно не может быть определено, то его значение заменяется средним значением измеряемой величины $\bar{z}$:

$$\Delta_{систем.} \approx \bar{z} - z$$

Случайные ошибки – это ошибки вызванные большим количеством таких факторов, эффекты от действия которых столь незначительны, что их нельзя выделить или учесть в отдельности. Случайные ошибки являются неустранимыми, их нельзя исключить (в форме поправки) из результатов измерений. Учет влияния случайных ошибок основан на знании законов их распределения. При анализе поведения случайных ошибок пользуются понятием случайной величины и законами их распределения.

Случайная величина – это величина, которая принимает то или иное значение с определенной вероятностью.

Генеральная совокупность случайной величины – это полный набор всех возможных значений случайной величины. Генеральная совокупность может содержать как бесконечно большое число случайных величин, так и конечное. Генральная совокупность характеризуется средним значением $\boldsymbol{\mu}$ случайной величины $\boldsymbol{z}$ и дисперсией $\boldsymbol{\sigma}^2$ (рассеянием).

Выборка. Если из генеральной совокупности случайным образом выбрать $\boldsymbol{n}$ величин, то такой массив называется выборкой объема $\boldsymbol{n}$.

Любая случайная величина $\boldsymbol{z}$ изменяясь случайным образом может иметь значение в пределах некоторого интервала $[\boldsymbol{z_i}, \boldsymbol{z_{i+1}}]$. Причем каждому интервалу $[\boldsymbol{z_i}, \boldsymbol{z_{i+1}}]$ соответствует вполне определенное число, называемое вероятностью попадания величины z в интервал $[z_i, z_{i+1}]$. Обозначается $P(z)$.

В самом общем случае $P(z)$ может быть определена как отношение числа m попаданий величины z в интервал $[z_i, z_{i+1}]$. к числу всех возможных значений n величины z:

$$P(z_i < z < z_{i+1}) = \frac{m}{n}$$

Функция, описывающая распределение вероятностей попадания z по всем или выделенным для рассмотрения интервалам $[z_i, z_{i+1}]$: $\int_{z_i}^{z_{i+1}} P(z)dz$ называется **плотностью распределения**. При чем: $\int_{-\infty}^{+\infty} P(z)dz = 1$.

Нормальный закон распределения случайных величин (или плотность нормального распределения) имеет следующий вид:

$P(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(z-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, где параметр σ – характеризует точность измерения случайной величины z.

Основные свойства нормального закона включают следующие основные положения:

- нормальный закон распределения случайных величин (ошибок измерений) отражает свойство симметрии случайных ошибок, т.е. случайные ошибки разных знаков встречаются примерно одинаково часто;

- свойство концентрации ошибок измерений – малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются чаще, чем большие;

- если случайная величина z распределена по нормальному закону, то при любых постоянных $c>0$ и d величина $cz+d$ также распределены по нормальному закону;

- если случайная величина z и x распределены по нормальному закону, то их сумма $z+x$ распределена по нормальному закону.

Графическое представление плотности распределения вероятности позволяет получить семейство кривых, которые называются **кривыми распределения**.

Любой закон распределения случайной величины можно задать графически, таблично либо с помощью числовых характеристик. **Основными числовыми характеристиками нормального закона распределения** являются математическое ожидание и дисперсия. Эти величины можно вводить двумя способами – теоретически (метод моментов) и на основе результатов обработки выборки случайной величины. Рассмотрим метод моментов задания числовых характеристик нормального закона распределения случайной величины (случайной ошибки измерения). Для этого введем ряд следующих понятий.

Начальный момент случайной величины z к-ого порядка называется интеграл следующего вида:

$$\alpha_\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} P(z) z^\kappa dz$$

Начальный момент нулевого порядка равен единице $\alpha_0=1$. так как для нормального распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(z)dz = 1$$

Начальный момент первого порядка:

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(z)zdz = \mu$$ – т.е. равен среднему значению величины **z**.

Величина $\boldsymbol{\mu}$ (начальный момент первого порядка $\boldsymbol{\alpha_1}$) есть **математическое ожидание** самой величины ***z*** и называется центром распределения случайной величины **z**. ***(*** $\boldsymbol{\alpha_1=\mu}$ ***)***.

Разность $\boldsymbol{z-\alpha_1}$ (отклонение случайной величины от ее центра) называется **центрированной случайной величиной**.

Центральный момент к-ого порядка случайной величины *z* называется интеграл:

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(z - \alpha_1\right)^k \cdot p\left(z\right) dz$$

Не трудно показать, что:

M_0=1.

M_1=0: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(z-\alpha_1)\cdot p(z)dz \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} zp(z)dz - \alpha_1\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(z)dz \Rightarrow \alpha_1-\alpha_1=0$

$\alpha_1 = const = \mu$

Центральный момент второго порядка:

$M_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(z-\alpha_1\right)^2\cdot p\left(z\right)dz = \sigma^2$ называется **дисперсией** $\boldsymbol{\sigma^2}$ или ***Д(z)***.

Специальное название центральному моменту второго порядка дано потому, что он является наиболее важной характеристикой нормального распределения.

Корень квадратный из дисперсии называется **средним квадратическим отклонением случайной величины *z* от ее центра распределения** и обозначается ***σ(z)***. Другое название ***σ*** – **стандартная ошибка** или **стандарт**.

Свойства дисперсии.

1. Дисперсия суммы или разность двух и более взаимно независимых случайных величин <u>всегда</u> равна сумме дисперсии этих величин. ***Д(x±z±y)=Д(x)+Д(z)+Д(y).***

2. Если ***C=const***, то ***Д(C±z)=Д(z), Д(C×z)=C²×Д(z)***

Среднеквадратическое отклонение ***σ***, равное корню квадратному из дисперсии, имеет физический смысл. Для выяснения физического смысла ***σ*** введем величину: $U=(z-\mu)/\sigma$. Величина ***U*** характеризует отклонение ***z*** от ***μ*** в единицах ***σ***.

Эта величина (***u)*** также имеет нормальное распределение с центром распределения равным нулю.

Подсчитаем вероятность ***W(U_p)*** того, что случайное значение ***U=Up*** больше некоторой заранее заданной величины ***К***.

Т.е. найти ***p(U_p),*** для $U_p = \dfrac{z_p-\mu}{\sigma} \geq K$.

Вид нормального закона для вычисления полной вероятности:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p\left(z\right)dz = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(z-\mu\right)^2/\left(2\sigma^2\right)}dz \qquad (3.1)$$

Выполним замену переменных:

$u = \dfrac{z-\mu}{\sigma}$, тогда $\dfrac{(z-\mu)^2}{\sigma^2} = u^2$, $du = \dfrac{dz}{\sigma}$. Подставляя эти замены в уравнение (3.1) получим:

$1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$. Так как данная функция симметрична относительно центра распределения (т.е. относительно нуля), то:

$$1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Последнее уравнение разобьем в правой части на два слагаемых:

$1 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{u_p} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int\limits_{u_p}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$, необходимо помнить, что ***u>0***.

В полученном уравнении интеграл $\varPhi_л(u_p) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{u_p} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ называется **интегралом вероятности** или **функцией Лапласа.**

Интеграл ***Ф***

Интеграл $\boldsymbol{\varPhi_л(u_p)}$ – характеризует вероятность попадания величины ***u*** в симметричный интервал **[-u$_p$,u$_p$]**.

Второе слагаемое оценивает вероятность $\boldsymbol{W(U_p)}$ попадания величины ***u*** за пределы интервала **[-*u$_p$*,*u$_p$*]**.

$$\varPhi_л(u_p) + W(u_p) = 1$$

Величина функции Лапласа протабулирована.

$$W(u_p) = 1 - \varPhi_л(u_p).$$

Определим вероятность того, что случайная величина ***z*** будет отличаться от ее среднего значения ***μ*** на один, два и три стандарта.

При использовании $U = \dfrac{z-\mu}{\sigma}$.

Если $z - \mu = \sigma$, т.е отклонение ***z*** от ***μ*** равно одному стандарту, то **u=1**.

Только 31,73% всех значений будут отличаться от ***μ*** больше чем на ***σ***, только 4,55% - больше чем на ***2σ*** и только 0,27% - больше чем на ***3σ***.

Так при $z - \mu = \sigma$ $\qquad W(U_p) = 0{,}3173$

$z - \mu = 2\sigma$ $\qquad W(U_p) = 0{,}0455$

$$z-\mu=3\sigma \qquad\qquad W(U_p)=0,0027$$

При $U_p=0$, т.е. при $z=\mu$, вероятность $W(U_p)$, т.е. вероятность того, что при измерении $z\neq\mu$ равно 100%. С ростом U_p вероятность его отклонения от $\boldsymbol{\mu}$ более заданной точности резко уменьшается. Условно принимается, что вероятность 0,27% является малой, и потому случайные отклонения больше, чем на 3σ, считаются невероятными.

Последнее позволяет сформулировать **«Правило** 3σ**».** Если измеряемая величина имеет значение отличающееся от среднего более чем на 3σ, то результат не может быть объяснен действиями случайных факторов и связан с систематическими ошибками (т.е. имеет физическую причину) или является грубой ошибкой (**промахом**).

Рассмотрим методы оценки вероятности того, что данное измерение является промахом.

1. <u>Метод исключения при известной σ.</u>

Пусть проведено n измерений величины z: $z_1, z_2,\ldots, z_n$. Пусть один из результатов измерений z_* резко отличается от остальных измерений. Надо оценить является ли z_* промахом.

Считаем среднее арифметическое значение измеренных величин:

$$\overline{z}=\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n} \qquad (z_* \text{ в эту сумму не включаем})$$

Найдем разность: $z_*-\overline{z}$.

Подсчитаем: $\sigma\sqrt{(n+1)/n}$

Сравним: $t=\dfrac{|z_*-\overline{z}|}{\sigma\sqrt{(n+1)/n}}$ т.е.

Рассчитаем интеграл вероятность *Φ (t)* по таблицам.

Определим вероятность 1-2*Φ (t)*.

Т.е. рассчитаем вероятность того, что t примет значение не меньшее

Если 1-2 *Ф(t)* окажется очень малой, то «выскакивающее» значение является грубой ошибкой для оценки уровня малых вероятностей используют один из трех уровней (например α):

5%-ый уровень (исключаются ошибки, вероятность появления которых меньше 0,05);

1%-ый уровень (исключаются ошибки, вероятность появления которых меньше 0,01);

0,1%-ый уровень (исключаются ошибки, вероятность появления которых меньше 0,001).

Т.е. если α=0,01 и

1-2 *Ф(t)*<0,01, то значение z_* можно считать грубой ошибкой с надежностью вывода $P = 1 - \alpha = 0,99$

<u>Пример</u>: Есть 41 независимое измерение со средней квадратической ошибкой $\sigma = 0,133$. Из них есть $z_* = 6,866$ - величина, рассматриваемая как промах. $\overline{z}$ из остальных 40 измерений равно 6,5.

Решение: $\left|z_* - \overline{z}\right| = 0,366$; $t = \dfrac{0,366}{0,133\sqrt{41/40}} = 2,72$;

1-2 *Ф* (2,72)=0,0066<0,007

Следовательно с надежностью выхода 1-0,07=0,993

z_* содержит грубую ошибку.

<u>2. Метод исключения при неизвестной σ</u>

Оценим σ по формуле эмпирического стандарта:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - \overline{z}\right)^2} \qquad t = \frac{\left|z_* - \overline{z}\right|}{S}.$$

Полученное значение t-критерия сравнивают с критическим значением критерия Стьюдента $t_n(P)$, которое определяют из статистических таблиц. Если $t > t_n(P)$, то z_* исключают как грубую ошибку.

3.4.3 Математическая обработка результатов экспериментальных исследований

Мы уже отмечали, что числовые характеристиками нормального закона распределения можно вводить на основе результатов обработки выборки случайной величины. Получаемые таким образом характеристики нормального закона распределения называются оценками. Эти оценки могут быть точечными и интервальными. Так как в реальности исследователю приходиться сталкиваться именно с этим типом оценок, то рассмотрим их более подробно. Рассмотрим, каким образом оценивают ошибки и доверительные вероятности в реальных исследованиях, в которых известен обычно набор n случайных результатов измерений величины y_i.

Говоря боле строгим языком, рассмотрим, как решается следующая задача экспериментального исследования. А именно, получение обоснованных выводов о действительном значении отклика с учетом погрешностей измерения при ограниченном числе измерений.

Типы оценок истинного значения измеряемой величины при относительно малом числе измерений и их свойства.

Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины y по результатам $\boldsymbol{n}$ независимых измерений этой величины. Допустим, что все $\boldsymbol{y}_i$, $\boldsymbol{i} = 1,\dots,\boldsymbol{n}$, не содержат грубых и систематических ошибок (т.е. неверные результаты отброшены, а систематические ошибки учтены в виде поправок).

Тогда требуется:

а) указать такую функцию $g(y_1, y_{2,\dots}y_n)$, которая дает достаточно хорошее приближение к значению a. Такая функция называется **точечной оценкой** значения a.

б) указать границы интервала $(g-\varepsilon_1, g+\varepsilon_2)$, который с заданной вероятностью Р включает истинное значение a. Такая оценка называется **доверительной оценкой**, Р – **доверительной вероятностью** или **надежностью оценки**, $(g-\varepsilon_1, g+\varepsilon_2)$ - **доверительный интервал**, а его границы **доверительными границами**.

Чтобы обеспечить хорошее приближение к истинному значению a, доверительная оценка (функция $g(y_1,\dots,y_n)$) должна обладать такими свойствами как: несмещенность, состоятельность, эффективность.

1. **Несмещенность**: Оценка $\boldsymbol{A}_*$ измеряемого параметра $\boldsymbol{A}$ называют несмещенной если ее математическое ожидание (т.е. теоретическое среднее значение) равно измеряемому параметру $\boldsymbol{A}$.

1.1) Требование несмещенности гарантирует отсутствие систематических ошибок при измерении параметра $\boldsymbol{A}$.

1.2) Оценка $\boldsymbol{A}_*$ изменяется от выборки к выборке и зависит от объема выборки, т.е. является случайной величиной.

1.3) Меру рассеивания $\boldsymbol{A}_*$ характеризуют дисперсией Д($\boldsymbol{A}_*$). (В зависимости от величины выборки изменяется $\boldsymbol{A}_*$ и изменяется Д($\boldsymbol{A}_*$)).

2. **Эффективность**:

Эффективной оценкой называют несмещенную оценку $\boldsymbol{A}_*$, которая имеет наименьшую дисперсию Д($\boldsymbol{A}_*$) среди всех возможных несмещенных оценок параметра $\boldsymbol{A}$.

3. **Состоятельность**:

Оценка $\boldsymbol{A}_*$ параметра $\boldsymbol{A}$ называется состоятельной, если при неограниченном увеличении числа измерений $\boldsymbol{n}$ (т.е. неограниченном увеличении объема выборки) эта оценка $\boldsymbol{A}_*$ приближается сколь угодно близко к значению оцениваемого параметра $\boldsymbol{A}$.

Это означает, что для любого фиксированного $\varepsilon_i > 0$ (i=1,2), при $n \to \infty$ вероятность $P(|g-a| < \varepsilon_i, i=1,2) \to 1$.

Точечные оценки измеряемой величины. Оценка среднего значения измеряемой величины.

Оценку неизвестного параметра генеральной совокупности случайной величины одним числом называют точечной оценкой. Отклик оценивается по результатам прямых или косвенных измерений. Способ оценки зависит от природы отклика (случайная или неслучайная величина) и точности измерений.

1) Отклик является неслучайной величиной. Ошибки измерения малы по сравнению со значениями отклика.

При ***i***-ом измерении получим: $Y = y_i \pm \Delta_i$, где $\boldsymbol{Y}$ – истинное значение измеряемой величины (отклика); $\boldsymbol{y}_i$– измеренное значение отклика; Δ_i – погрешность измерения.

Если $\Delta_i < (0{,}01...0{,}02)y_i$, то погрешностью измерения можно пренебречь и полученное после первого измерения значение $\boldsymbol{y_i}$ принять за истинное.

2) Отклик является неслучайной величиной, но погрешностью измерения пренебречь нельзя.

Если все ***n*** измерений величины ***a*** проведены с одинаковой точностью, то такие измерения называют **равноточными измерениями**.

При равноточных измерениях в качестве оценки истинного значения величины *y* используют среднее арифметическое значение результатов измерений.

Среднее арифметическое значение величины *y*:

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n} = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) / n \tag{3.2}$$

При расчете величины дисперсии по результатам экспериментальных измерений следует руководствоваться следующими правилами.

<u>*Вариант 1*</u>. Измерение <u>известной</u> величины *a* (эталона).

В качестве эффективной оценки дисперсии используют средний квадрат отклонения результатов измерений $y_1, y_2, ... y_n$ от значения a.

$$\sigma^2 \approx S_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a)^2 \tag{3.3}$$

<u>*Вариант 2*</u>. Измерение <u>неизвестной</u> величины.

$$\sigma^2 \approx S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2, \tag{3.3'}$$

Сомножитель $\dfrac{1}{n-1}$ – гарантирует несмещенность оценки.

Среднее квадратическое отклонение величины y_i от среднего значения $\overline{y}$:

$$S = \sqrt{\frac{(y_1 - \overline{y})^2 + ... + (y_n - \overline{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}; \tag{3.4}$$

Величина стандартного отклонения в квадрате: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)$ называется **эмпирической дисперсией**.

Точность соответствия $\overline{y}$ и S^2 истинному значению тем выше, чем больше число измерений ***n***.

Рассмотренные оценки являются несмещенными и состоятельными. Если случайные ошибки измерения строго подчиняются нормальному закону распределения вероятностей, то оценки будет эффективными. При неограниченном числе измерений оценки также становятся эффективными.

3) При оценке неравноточных измерений.

В этом случае при обработке результатов экспериментальных измерений используют **веса измерений** – числа $(P_i = 1/\sigma_i^2)$ обратнопропорциональные дисперсиям ошибок измерений.

Взвешенное среднее арифметическое значение:

$$\overline{y} = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i} \qquad (3.5)$$

Взвешенное среднее квадратическое отклонение:

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum P_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum P_i}} \qquad (3.6)$$

Эта оценка несмещенная и состоятельная. При дополнительном предположении, что случайные ошибки измерения подчиняются нормальному закону распределения вероятностей, оценка является эффективной.

Вес измерения– это некоторое число, характеризующее мощность (или значимость) измерения. Чем больше вес ***i***-ого измерения, тем в большей степени данное измерение соответствует истинному значению ***a*** измеряемой величины в статистическом смысле. Вес измерения пропорционален числу измерений и обратно пропорционален дисперсии среднего значения результатов измерений (дисперсии средних значений обратно пропорциональны количествам измерений).

Однако, при оценках измеряемых величин важна не величина весов, а их отношение друг к другу, т.е., как правило, задают

$P_1 : P_2 : ... : P_i : ... : P_n$. Где P_i можно задать одним из следующих способов: а) $P_i = 1/\sigma_i^2$; б) $P_i = m_i$ (чем больше объем измерений в серии, тем выше надежность средних); в) при использовании приближенных значений дисперсий S_i^2 в качестве веса принимают величину $P_i = \frac{m_i}{S_i^2}$.

Дополнительные точечные оценки точности неравноточных измерений

Вариант 3. одним и тем же прибором производят m серий измерения некоторой величины. В качестве оценки дисперсии применяют взвешенное среднее из эмпирических дисперсий.

$$\sigma^2 = S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + ...(n_m - 1)S_m^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + ... + (n_m - 1)}, \tag{3.7}$$

где $n_1, n_2, ...n_m$ - количество измерений в сериях, $S_1^2, S_2^2, ..., S_m^2$ - эмпирические дисперсии соответствующей серии измерений. Эта оценка является несмещенной и состоятельной, но является асимптотически эффективной.

Однако, эта оценка (вариант 3) использует большее количество информации, чем оценка варианта 2. Это делает данную оценку более надежной.

В частном случае:

Когда число измерений в каждой серии одинаково и равно m: т.е. число серий i=1, …, m. Число измерений в серии: $n_i = n (i = 1, ..., m)$.

$$\sigma^2 \approx S^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i^2 \tag{3.8}$$

Т.е. в качестве оценки дисперсии принимается среднее арифметическое значение эмпирических дисперсий.

Вариант 4. проведено m серий измерений одной и той же величины. По результатам измерения известны только 1) количества измерений в каждой серии $n_1, n_2, ...n_m$ и 2) средние арифметические результатов измерений $\bar{y}_1, \bar{y}_2, ...\bar{y}_m$ в каждой серии.

В качестве оценки дисперсии применяют эмпирическую дисперсию из средних:

$$\sigma^2 \approx \bar{S}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2, \tag{3.9}$$

где $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i\bar{y}_i$, $N = n_1 + n_2 + ... + n_m$. Оценка является несмещенной и состоятельной. При $\boldsymbol{m} \to \infty$ является также эффективной.

4) Вычисление средних с выбором начала отсчета

При подсчете среднего значения величины ***y*** с выбранным началом отсчета с оценки проводят при линейной замене.

$y_i = c + hu_i$, где $i = 1,...,k$

где ***h*** – ***const*** (шаг варьирования новой переменной); u_i – новая переменная величина, $u_i = \frac{y_i - c}{h}$

Тогда среднее значение $\bar{y}$ можно определить следующим образом

$$\bar{y} = c + h\bar{u}, \text{ где } \bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i \tag{3.10}$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$S^* = h\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i(u_i - \bar{u})^2} = h\sqrt{u^{\bar{2}} - (\bar{u})^2}, \tag{3.11}$$

где $u^{\bar{2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^2$

Для контроля вычислений весь расчет повторяют с другим началом отсчета $\boldsymbol{c}_1$. Результаты вычисления $\bar{y}$ и ***S*** должны совпадать с точностью до возможных ошибок округления.

Пример расчета характеристик генеральной совокупности результатов измерений.

Даны результаты измерений некоторой величины. При этом некоторые z_i результаты повторялись m_i раз. Всего сделано ***n*** измерений. $n = \sum_{i=1}^{k=5} m_i$. Найти среднее значение и эмпирический стандарт.

Номер измерения i	z_i	m_i	
1	35,6	1	35,6
2	35,9	3	107,7
3	36,1	3	108,3
4	36,2	2	72,4
5	36,6	1	36,6

z=36,06

Алгоритм.

1. Выбираем за начало отсчета величины *z* величину с=36,0
2. Задаем шаг варьирования новой переменной *h*=0,1
3. Перейдем от переменной *z* к новой переменной u: $u_i = \frac{z_i - c}{h} = \frac{z_i - 36,0}{0,1}$

3. Найдем $\bar{u}$: $\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i u_i}{\sum m_i} = \frac{6}{10} = 0,6$, где $\bar{z} = 36 + 0,1 \cdot \bar{u} = 36,06$

4.

$$S^* = h \cdot \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = h\sqrt{\frac{\sum (m_i u_i^2)}{n} - (\bar{u})^2} = 0,1\sqrt{\frac{66}{10} - (0,6)^2} = 0,1\sqrt{6,24} = 0,25$$

Среднее квадратическое отклонение S*=0,25

Исходные данные		**Расчет**		
z_i	m_i	u_i	$m_i u_i$	$m_i u_i^2$
35,6	1	-4	-4	16
35,9	3	-1	-3	3
36,1	3	+1	+3	3
36,2	2	+2	+4	8
36,6	1	+6	+6	36
Сумма	$\sum m_i = n$ =10	-	$\sum m_i u_i$ = 6	$\sum m_i u_i^2$ = 66

5) Вычисление средних для интервального ряда данных.

Метод вычисления средних с выбором начала отсчета наиболее удобен при расчете средних в случае, когда все данные сгруппированы по интервалам одинаковой длины. Когда используется данный метод? Если измеряемая величина (отклик) является случайной величиной и размах ошибки измерения пренебрежимо мал по сравнению с полем рассеяния значений отклика. Оценка таких величин требует проведения большого числа измерений. При $\boldsymbol{n} > 30$ удобнее группировать измеренные значения $\boldsymbol{y}$ по интервалам одинаковой длины $\boldsymbol{h}$. Для этого все поле рассеяния делится на (предпочтительно нечетное) число интервалов (7…15) длиной $\boldsymbol{h}$ и подсчитывается количество $\boldsymbol{m_i}$ значений отклика, попавших в каждый $\boldsymbol{i}$-ый интервал. Принимается, что все значения отклика, попавшие в $\boldsymbol{i}$-ый интервал, равны координате середины этого интервала. Далее используется методика расчета средних значений с выбором начала отсчета.

<u>*Вариант 5*</u>. Имеется интервальный ряд данных. Величина среднего квадрата отклонения:

$$S_*^2 = h^2(\overline{u}^2 - (\overline{u})^2)\,;\ \overline{u} = \frac{\overline{y} - c}{h} \qquad (3.12)$$

Оценка является смещенной оценкой истинного значения величины $\boldsymbol{a}$. Смещение зависит от длины интервала $\boldsymbol{h}$ (пропорциональна квадрату величины интервала – $\boldsymbol{h}^2$). Если длина интервала составляет не более десятой доли всего диапазона результатов измерений, то в качестве оценки дисперсии применяют **исправленную эмпирическую дисперсию**:

$$\sigma^2 \approx S^{*2} - h^2/12 \qquad (3.13)$$

Величина $\boldsymbol{h}^2/12$ носит название **поправка Шеппарда**. Эта поправка устраняет главную часть смещения. Поэтому оценку дисперсии (3.13) можно считать несмещенной. Необходимо учитывать при выборе $\boldsymbol{h}$, что длина интервала должна быть мала в сравнении с σ (в 2-3 раза меньше σ).

Во всех рассмотренных выше случаях эмпирический стандарт $S = \sqrt{S^2}$, т.е. эмпирическая средняя квадратическая ошибка, дает смещенную (т.е. несколько уменьшенную) оценку средней квадратической ошибки σ. Смещение уменьшается с ростом числа измерений: при ***n*** = 16 смещение сотавляет 2%, при ***n*** = 26 величина смещения будет менее 1%.

Доверительные оценки средних

Т.е. оценка интервала $(g-\varepsilon_1, g+\varepsilon_2)$, который с заданной вероятностью ***P*** включает истинное значение ***a*** параметра ***y***.

При относительно небольшом числе измерений целесообразно применять интервальную оценку отклика:

$$\bar{y}-t(P,n)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}<y<\bar{y}+t(P,n)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}, \tag{3.14}$$

где ***t(P,n)*** – критерий Стьюдента, ***S*** – оценка стандартного отклонения погрешностей измерения; ***P*** – доверительная вероятность (***n*** < 15).

Допущения: 1. Случайные ошибки подчинены нормальному закону распределения.

2. Доверительная оценка симметричная $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$, т.е. $|\bar{y}-a|<\varepsilon$, где $\bar{y}$ - среднее арифметическое значение: $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$,

n – число измерений. Величина ε определяется по заданной доверительной вероятности *P* в виде одного из трех уровней 0,95; 0,99; 0,999.

1) Доверительная оценка при известной точности измерений.

Если до начала эксперимента известна средняя квадратическая ошибка σ (или другая связанная с ней характеристика точности измерения), то доверительная оценка ε имеет вид:

$|a-\bar{y}|<\varepsilon=t(P)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где ***n*** – число измерений. Множитель ***t*** = ***t(P)*** – определяется по заданной доверительной вероятности ***P*** из условия: $2\Phi(t)=P$.

Следовательно: $$\varepsilon=t(P)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{3.15}$$

2) Доверительная оценка при неизвестной точности измерений.

Если средняя квадратическая ошибка σ заранее не известна, то вместо нее используют эмпирический стандарт

$$S \approx S^* \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2} \qquad (3.16)$$

В этом случае ***S*** является оценкой σ.

Тогда, доверительная оценка:

$|a - \overline{y}| < t(P,k)\frac{S}{\sqrt{n}}$, где $k = n - 1$ следовательно:

$$|a - \overline{y}| < t(P,k)\frac{S^*}{\sqrt{k}} \qquad (3.17)$$

Учтем, что $\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{S^*}{\sqrt{k}}$, тогда $S = S^* \sqrt{\frac{n}{n-1}}$.

В данном случае множитель ***t(P,k)*** зависит не только от ***P***, но и от числа измерений ***n***.

3) Доверительная оценка для интервального ряда.

Для интервальных рядов доверительная оценка возможна по формуле (3.15) при известной средней квадратической ошибке σ. При неизвестной σ формула (3.16) не применима. Вместо нее используют правило трех сигм с исправленным эмпирическим стандартом:

1. Длина интервалов ***h*** должна быть достаточно малой - ***h*** в 2…3 раза меньше S^*.
2. Надежность оценки (3.17) можно считать приемлемой Р > 0,99 при достаточно большом числе опытов (100 и более).

4) Доверительная оценка при неравноточных измерениях

Вариант 1. Есть результаты ***n*** неравноточных измерений истинного значения величины ***a***: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Каждое из этих ***x*** (результатов измерений) есть среднее серии равноточных измерений с количества измерений в серии m_i.

$m_1, m_2, \ldots m_i \ldots m_n$ – количество измерений (равноточных) в сериях.

$x_1, x_2, \ldots x_\varepsilon \ldots x_n$ – средние в неравноточных сериях.

Тогда, доверительная оценка истинного значения величина ***a***:

$$\left|a-\overline{x}\right|<t(P,k)\frac{S}{\sqrt{N}},\text{ где } \overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}m_i x_i,\ N=\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot$$

Эмпирический стандарт $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-\overline{x})^2}$, где $\boldsymbol{k = n - 1}$ (число степеней свободы), $\boldsymbol{P}$ – доверительная вероятность.

Вариант 2.

Если для m_n серий измерения некоторой величины $\boldsymbol{x}$ известны средние квадратические отклонения для каждой серии измерений:

$m_1,...,m_i,...m_n$ – число измерений в серии

$x_1,...,x_i,...,x_n$ – среднее в серии

$S_1^*,...,S_i^*,...,S_n^*$ – средние квадратические отклонения от средних в каждой серии

Тогда эмпирический стандарт можно оценить более точно:

$$S=\sqrt{\frac{1}{N-n}\sum_{i=1}^{n}m_i S_i^{*2}}$$

Число степеней свободы: $\boldsymbol{k = N - n}$. Так как $\boldsymbol{N - n > n - 1}$, т.е. число степеней свободы увеличивается, то увеличивается точность доверительной оценки

$$\varepsilon=t(P,k)\frac{S}{\sqrt{N}}$$

Вариант 3.

Если для результатов неравноточных измерений $x_1,x_2,...,x_n$ известны точные значения весов или отношения между ними:

$$P_1:P_2:...:P_n=\frac{1}{\sigma_1^2}:\frac{1}{\sigma_2^2}:...:\frac{1}{\sigma_n^2}$$, где (σ_i^2 – дисперсия значения $\boldsymbol{x}_i$).

Тогда, доверительная оценка истинного значения $\boldsymbol{a}$ измеряемой величины:

$$\left|a-\overline{x}\right|<t(P,k)S_{\overline{x}}\ .\text{ где } \overline{x}=\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n}P_i x_i,\ P=\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot$$

Эмпирический стандарт среднего арифметического неравноточных измерений $S_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_i (x_i - \bar{x})^2}{P(n-1)}}$, где $\boldsymbol{k = n\text{-}1}$, число степеней свободы, ***P*** – доверительная вероятность, ***t(P, k)*** – критерий Стьюдента.

Доверительные оценки средней квадратической ошибки.

При большом числе измерений доверительную оценку средней квадратической ошибки σ записывают в виде оценки относительного отклонения оцениваемого значения σ от соответствующего эмпирического стандарта ***S*** (т.е. идет сравнение в выбранной точечной оценкой).

$S(1-q) < \sigma < S(1+q)$. где $S(1-q)$ и $S(1+q)$ – границы доверительного интервала. Коэффициент $q = q(P,k)$ зависит от доверительной вероятности (***P***) (надежности оценки) и числа степеней свободы ***к***.

При достаточно большом числе ***к*** можно пользоваться правилом 3σ. Доверительная оценка имеет вид:

$$S(1-\frac{3}{\sqrt{2\kappa}}) < \sigma < S(1+\frac{3}{\sqrt{2\kappa}})$$

Надежность ***P*** такой доверительной оценки равна: ***P*** = 0,99 при ***k***> 47; ***P*** = 0,992 при ***k*** > 100; ***P*** = 0,995 при ***k*** > 200.

При малом числе измерений симметричные оценки средней квадратической ошибки неприемлемы, т.к. при малых количествах измерений эмпирический стандарт имеет асимметрическое распределение.

3.4.4 Проверка статистических гипотез

Понятие статистической гипотезы.

Статистическая гипотеза – это предположение относительно статистических параметров генеральной совокупности или закона распределения случайных величин, сделанное на основании выборочных данных.

Процедуру сопоставления выдвинутой гипотезы с выборочными данными называют **проверкой статистической гипотезы**.

Основная проверяемая гипотеза обозначается H_0 и называется **нулевой гипотезой**. При ее проверке формулируется **альтернативная гипотеза**, которая обозначается H_1.

Например. Проверяется равенство математического ожидания генеральной совокупности некоторому значению μ_0. Тогда нулевая гипотеза (H_0) запишется следующим образом (H_0): $M(Y) = \mu_0$, а альтернативная гипотеза (H_1): $M(Y) \neq \mu_0$.

Критерием статистической гипотезы – называют правило, позволяющее принять или отвергнуть ту или иную гипотезу на основании выборки из генеральной совокупности.

При проверке гипотез используют следующие понятия:

Ошибка первого рода – гипотеза H_0 отвергается, в то время как она верна.

Ошибка второго рода - гипотеза H_0 принимается, в то время как в действительности верна гипотеза H_1.

Уровень значимости критерия статистической гипотезы (α) – называют вероятность ошибки первого рода. Чем меньше α, тем меньше вероятность отклонить правильную гипотезу. Допустимую ошибку 1-ого рода обычно задают заранее, используя стандартные значения: α = 0,05; 0,01; 0,001.

Мощность критерия гипотезы H_0 относительно альтернативной гипотезы H_1 – вероятность $(1-\beta)$ принятия гипотезы H_1, когда она верна, где β – вероятность ошибки второго рода.

Последствия ошибок 1-ого и 2-ого рода могут быть различными. Например, применительно к радиолокации, α определяет вероятность пропуска сигнала, β – вероятность ложной тревоги. Применительно к производству и торговле α определяет риск поставщика (забраковка по выборке всей партии изделий, удовлетворяющих стандарту), β – риск потребителя(приём по выборке всей партии изделий, не удовлетворяющих стандарту). Одновременное уменьшение ошибок 1-ого и 2-ого рода возможно только при увеличении объёма выборок.

При проверке гипотезы H_0 относительно альтернативной гипотезы H_1 лучшим является тот критерий, который обеспечивает наибольшую мощность при том же самом уровне значимости.

Следует всегда помнить, что статистическими методами гипотезу можно только опровергнуть или не опровергнуть (принять), но не доказать.

Общая методика проверки статистических гипотез.

Методический подход к проверке статистических гипотез основан на определении закона распределения случайной величины по известному закону распределения другой случайной величины, функционально связанной с первой.

1. На основании результатов выборки $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ формируют нулевую H_0 и альтернативную H_1 гипотезы.

2. Из результатов выборки формируют функцию выборки $T_n = T(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, которая называется *статистикой критерия*. Вид статистики критерия – Пирсона, Стьюдента, Фишера, Кохрена и т.д. - зависит от типа конкретной рассматриваемой гипотезы.

3. Задавая уровень значимости α по статистике критерия T_n определяют критическую область S – область где нарушаются условия нулевой гипотезы. Для её отыскания достаточно найти критическую точку $t_{кр}$ – границу (или квантиль) отделяющую критическую область S от остальной области возможных значений статистики критерия.

Границы определяются из следующих соотношений:

$P(T_n > t_{кр}) = \alpha$ – для правосторонней критической области;

$P(T_n < t_{кр}) = \alpha$ – для левосторонней критической области;

$P(T_n < t_{кр\ левая}) = P(T_n > t_{кр\ правая}) = \alpha/2$ – для двухсторонней критической области.

Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым находят критическую точку, удовлетворяющую приведенным выше соотношлениям.

4. Для выборки $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ подсчитывают наблюдаемое значение статистики критерия $T_{набл} = T(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = t$.

5. Если t принадлежит области S (например, $t > t_{кр}$ для правосторонней области S), то нулевую гипотезу H_0 отвергают.

Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению

Пусть сформулированы две следующие гипотезы:

- нулевая гипотеза **(H_0): $M(Y) = \mu_0$**, которая говорит, что математическое ожидание измеряемой случайной величины ***Y*** равно **μ_0**, и

- альтернативная гипотеза **(H_1): $M(Y) \neq \mu_0$**.

Для проверки нулевой гипотезы из генеральной совокупности значений случайной величины ***Y*** сделана выборка объемом ***m***. Выборка подчиняется закону нормального распределения случайной величины.

В этом случае:

Оценка математического ожидания в выборке:

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$$

Оценка дисперсии (стандартного отклонения):

$$S^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \overline{y})^2$$

Нулевая гипотеза оценивается по критерию Стьюдента ***t*(*P, m*)**.

Наблюдаемое значение критерия Стьюдента рассчитываем по формуле:

$$t_н = \frac{\left|\overline{y} - \mu_0\right|}{S\sqrt{m}}$$

Критическое значение критерия Стьюдента $t_к$ определяется для выбранной доверительной вероятности **$P=1-\alpha$** и заданного объема выборки ***m***.

При **$t_{набл} < t_к$** данные выборки не противоречат нулевой гипотезе.

При **$t_{набл} > t_к$** нулевая гипотеза отвергается.

Проверка гипотезы о равенстве средних значений

Допустим, что целью эксперимента является нахождение (или выявление) различий между значениями определенного параметра ***Y*** в разных объектах исследования.

<u>Пример 1</u>: При создании нового материала (или прибора) может быть обнаружено, что значение какого-либо его параметра (твердость, содержание углерода, относительное удлинение и т.п.) отличается от значений этого же параметра у ранее созданного материала (или прибора), но это отличие незначительно.

Необходимо проверить не вызвано ли это различие ошибками эксперимента.

<u>Пример 2</u>: На предприятии в разных условиях изготавливают изделия с одними и теми же нормируемыми номинальными параметрами. Контроль обнаруживает расхождение между средними значениями этих параметров ($\overline{Y_1}$ и $\overline{Y_2}$).

Разными условиями могут быть – разное оборудование или разные технологии. Нормируемым параметром могут быть – отклонение формы, точность размеров, качество поверхности и т.п.

Для выяснения вопроса о случайном или не случайном расхождении параметров $\overline{Y_1}$ и $\overline{Y_2}$ необходимо провести две серии экспериментов, т.е. получить две выборки объемом $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$ и для каждого из них подсчитать средние арифметические. Измерения должны быть независимыми, равноточными в пределах одной выборки, распределение ошибок подчиняется нормальному закону распределения.

При этом дисперсии ошибок измерений могут быть известны заранее (σ_1^2 и σ_2^2) или неизвестны заранее.

<u>Случай 1</u>: Сравнение средних при известных дисперсиях.

Алгоритм:

1) подсчитываем отношение:

$$t_н = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\sigma_1^2 / m_1 + \sigma_2^2 / m_2}}$$

если $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$, то

$$t_н = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}$$

2) Задаем желаемую вероятность **P=** 0,9; 0,95; 0,99 и по ней находим **t(P)**.

3) Если **$t_н$>t(P),** то расхождение средних считается значимым (неслучайным) с надежностью выбора **P**.

Если **$t_н$<t(P),** то нет оснований считать расхождение средних значимым.

<u>Случай 2</u>: Сравнение средних при неизвестной дисперсии.

В этом случае сравнение средних производят только при добавочном предположении, что дисперсии ошибок в обоих сериях измерений одинаковы. Предположение принимается без проверки, либо проверяется гипотеза об однородности дисперсий.

Алгоритм:

1) В этом случае для каждой серии измерений (для каждой выборки объемом $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$) подсчитывают средние значения $\overline{Y}_1$ и $\overline{Y}_2$ и величины эмпирических дисперсий S_1^2 и S_2^2.

2) Подсчитываем отношение

$$t_н = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{S\sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}} = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{S}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}},$$

где

$$S = \sqrt{\frac{(m_1 - 1)\cdot S_1^2 + (m_2 - 1)\cdot S_2^2}{(m_1 - 1) + (m_2 - 1)}}$$

3) Задаем желательную вероятность вывода **P**.

4) Находим ***t(P,к)*** при степенях свободы ***к=m₁+m₂-2***

5) Если $t_н < t(P,к)$ расхождение случайное (незначимое).

Если $t_н > t(P,к)$ расхождение значимое

Если $t_н \leq t(P,к)$, т.е. расхождение между $t_н$ и $t(P,к)$ незначительное, то следует увеличить количество экспериментов.

Проверка гипотезы о равенстве (однородности) дисперсий.

При обработке экспериментальных данных, выполненных в различных условиях, возникает задача сравнения точности измерений.

Пусть по результатам двух измерений получены две независимые выборки из генеральной совокупности объемами $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$ ($\boldsymbol{m_1 \neq m_2}$). Для каждой из выборок рассчитаны эмпирические дисперсии: S_1^2 и S_2^2. ($S_1^2 \neq S_2^2$).

Будем считать, что $S_1^2 > S_2^2$.

Для решения вопроса о случайном или неслучайном расхождении дисперсий рассматривают отношение большей дисперсии к меньшей. Проверка проводится при помощи **критерия Фишера (*F*** $F_к$**)**.

Алгоритм:

1) Вычисляем наблюдаемое значение критерия Фишера $S_1^2 / S_2^2 = F_н$. Для принятого допущения $\boldsymbol{F}_\text{н} > 1$ всегда.

2) Задаем желаемую надежность

P = 0,9; 0,95; 0,99.

3) Для заданного ***P***, по $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ находим $\boldsymbol{F}_\text{к}$ – критическое значение Фишера.

4) Если $\boldsymbol{F}_\text{н} > \boldsymbol{F}_\text{к}$, то расхождение дисперсий считают неслучайным – значимым, с надежностью ***P***. Т.е., в этом случае точность измерения в выборках существенно различается.

Пусть необходимо проверить гипотезу о равенстве (однородности) дисперсий в ***n*** выборках, содержащих одинаковый объем числа измерений ***m***. Так же решается задача выделения большей дисперсии из многих дисперсий. Например, из множества серий измерений обнаружена серия где эмпирическая дисперсия заметно больше остальных.

В этом случае используют **критерий Кохрена**.

1) для ***n*** выборок определяют эмпирические дисперсии:

$S_1^2,\ S_2^2,\ \ldots,\ S_i^2, \ldots, S_n^2$., где что $S_1^2 > S_i^2$, ***i*** > 1.

2) вычисляем наблюдаемое значение критерия Кохрена:

$$G = \frac{S_1^2}{\sum_{i=1}^{n} S_i^2}$$

3) определяем критическое значение критерия Кохрена $G_к$

4) если $G > G_к$, то:

– при проверке однородности дисперсии: – считают что гипотеза об однородности не подтверждается,

– при оценке большей дисперсии – считают, что данная серия измерений проведена с меньшей точностью, чем остальные серии.

Определение необходимого количества измерений.

Из теории математической статистики известно, что увеличивая количество измерений ***n*** при неизменной точности измерений можно увеличить надежность доверительных оценок (3.15) и (3.17) или сузить доверительный интервал.

Необходимое количество измерений для достижения требуемой точности **ε** и требуемой надежности ***P*** можно определить заранее только в том случае, когда известна средняя квадратическая ошибка измерений. Все измерения предполагают равноточными и независимыми. В этом случае количество необходимых измерений вычисляется из (3.15), откуда $n \geq \left[\frac{t(P)}{\varepsilon}\right]^2 \sigma^2$, где ***t=t(P)*** находится через интеграл вероятностей ***2Φ(t)=P*** .

Если $\boldsymbol{\sigma^2}$ заранее неизвестна, но известен хотя бы ее порядок, то для определения ***n*** надо задать надежность ***P*** и параметр $q = \frac{\varepsilon}{S}$, где ***S*** – будущий эмпирический стандарт ошибки. Для этого пользуются таблицей 1.

Проверка случайности и независимости результатов измерений в выборке.

До статистической обработки результатов измерений отклика необходимо убедиться в том, что они являются стохастически независимыми (нулевая гипотеза H_0). Альтернативная гипотеза H_1 – предположение о наличии монотонного или циклического смещения (дрейфа) значения отклика, вызванного неконтролируемым фактором.

Таблица 1. Определение необходимого количества измерений.

P / *q*	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1,0	5	7	9	11	17
0,5	13	18	25	31	50
0,4	19	27	37	46	74
0,3	32	46	64	78	127
0,2	70	99	139	171	277
0,1	273	387	545	668	1089
0,05	1084	1540	2168	2659	4338

В этом случае за критерий статистической гипотезы выбирают **критерий последовательных разностей τ**:

$\tau = c^2 / S^2$, где $c^2 = \frac{1}{2(m-1)} \cdot \sum_{i=1}^{m-1} (Y_{i+1} - Y_i)^2$, ***m*** – объем выборки, $\boldsymbol{S^2}$ – оценка дисперсии, ***i*** – порядковый номер измерения отклика $\boldsymbol{Y_i}$ в выборке.

Критическое значение $\boldsymbol{\tau_к}$ определяют по объему выборки ***m*** и надежности ***P***. Если $\boldsymbol{\tau<\tau_к}$, то $\boldsymbol{H_0}$ отвергают.

Проверка нормального закона распределения случайной величины.

Все выкладки, проведенные в предыдущих лекциях, сделаны в предположении справедливости гипотезы нормального распределения случайных ошибок измерений. Если результаты эксперимента ставят под сомнение их соответствие гипотезе нормального распределения, то необходимо провести дополнительное число опытов и применить **критерий соответствия хи-квадрат** (χ^2) (критерий Пирсона). Порядок расчета следующий.

Результаты измерений группируют по интервалам. Интервалы должны покрывать всю числовую ось (-∞; +∞). Количество данных в каждом интервале должно быть не менее 5-ти (лучше 10-ти). Для каждого интервала ($\boldsymbol{y_{i-1}, y_i}$) подсчитывают число $\boldsymbol{m_i}$ результатов измерения. Затем вычисляют вероятность $\boldsymbol{P_i}$ попадания измеряемой величины в [***i***-1, ***i***] – интервал при нормальном законе распределения вероятностей:

$P_i = \Phi\left(\frac{y_i - \overline{y}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{y_{i-1} - y_{отч.}}{S}\right)$, где **Ф** – интеграл вероятности, $\overline{y}$ - среднее арифметическое, ***S*** – эмпирический стандарт (средняя квадратическая ошибка).

Затем вычисляют наблюдаемое значение критерия Пирсона: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - n \times p_i)^2}{n \times p_i}$, где ***l*** – число всех интервалов, ***n*** – число всех результатов измерений $n = \sum_{i=1} m_i$.

Если наблюдаемое значение критерия Пирсона будет больше критического значения $\chi^2_{кр}$ при выбранной доверительной вероятности $\boldsymbol{P}$ и числе степеней свободы $\boldsymbol{k = l}$-3, то с надежностью $\boldsymbol{P}$ можно считать, что в рассматриваемой серии экспериментов распределение вероятностей случайных ошибок отличается от нормального.

3) Эффективность критерия хи – квадрат повышается, если в каждый из выделенных интервалов попадает примерно одинаковое количество данных.

3.4.5 Дисперсионный анализ

Дисперсионный анализ предназначен для выявления степени влияния контролируемых факторов на отклик. При этом фактор может быть количественным или качественным. Для оценки сравнительного влияния каждого фактора на отклик необходимо установить количественный показатель этого влияния. Основное предположение метода в том, что общая ошибка измерения некоторого параметра $\boldsymbol{Y}$ складывается из случайной ошибки (σ_ε^2) и влияния контролируемого фактора $\boldsymbol{X}$, значения которого задаются на $\boldsymbol{m}$ уровнях (σ_x^2). В качестве показателя влияния фактора принимают величину называемую дисперсией фактора.

Тогда если $\boldsymbol{X}$ варьируется на $\boldsymbol{m}$ уровнях и случайная ошибка измерения равна нулю ($\sigma_\varepsilon^2 = 0$), то в результате измерения параметра (отклика) $\boldsymbol{Y}$ получаем $\boldsymbol{m}$ истинных значений $\boldsymbol{y}_1,\ldots,\ \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{m}}$ (т.е. на каждом уровне вместо серии данных имеем только одно значение $\boldsymbol{y_j}, \boldsymbol{j}=1,\ldots,\boldsymbol{m}$).

Если в качестве дисперсии фактора выбрать величину равную:

$\sigma_x^1 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(y_j - \overline{y})^2$, где $\overline{y} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j$, то σ_x^2 не связана с действием случайной величины, а определяется только влиянием фактора $\boldsymbol{X}$ на отклик $\boldsymbol{Y}$.

Изучение влияния факторов по величинам их дисперсий удобно, т.к. это простейшая мера рассеивания измеряемой величины и аналогична мере рассеивания под действием случайных параметров. Это позволяет сравнивать степени влияния случайных и неслучайных факторов на измеряемую величину. Такое исследование факторов по их дисперсиям получило название дисперсионного анализа.

Однофакторный дисперсионный анализ.

В процессе эксперимента фактор $\boldsymbol{X}$ поддерживают на $\boldsymbol{n}$ уровнях. На каждом $\boldsymbol{i}$-ом уровне варьирования фактора проводят $\boldsymbol{m_i}$ дублирующих экспериментов. Значение $\boldsymbol{m_i}$ может быть одинаковым на уровнях или отличаться от уровня к уровню. Представим полученные результаты в виде таблицы 2.

Таблица 2. Представление результатов измерений для однофакторного дисперсионного анализа.

№	Уровень фактора	Результаты измерений	Число дублирующих опытов
1	$\boldsymbol{X}_1$	$Y_{11}, Y_{12}, ..., Y_{1j}, ...Y_{1m_1}$	$\boldsymbol{m}_1$
2	$\boldsymbol{X}_2$	$Y_{21}, Y_{22}, ..., Y_{2j}, ...Y_{2m_2}$	$\boldsymbol{m}_2$
…	…	…	…
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{X_i}$		$\boldsymbol{m_i}$
…	…	…	…
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{X_n}$	$Y_{n1}, Y_{n2}, ..., Y_{nj}, ...Y_{nm_n}$	$\boldsymbol{m_n}$

Рассеяние результатов измерения в одной строке определяется случайными погрешностями. Рассеяние между строками – дополнительным действием изучаемого фактора. Алгоритм расчета следующий.

1) Для каждой серии дублирующих опытов вычисляют оценки среднего арифметического $\bar{y}_i$ и дисперсии воспроизводимости $S^2_{B_i}$:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}\ ,\quad S^2_{B_i} = \frac{1}{m_i - 1}\sum_{j=1}^{m_i}(Y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

2) Проверяют однородность ряда дисперсий $S^2_{B_1}, S^2_{B_2}, ..., S^2_{B_i}, ..., S^2_{B_n}$ для каждой пары. Если $\boldsymbol{m_i}$ различно для каждого $\boldsymbol{i}$, то при помощи критерия Фишера. При m_i=m=const, то применяют критерий Кохрена. Если гипотеза однородности дисперсий подтверждается, то приступают к анализу.

3) Делаем допущения, что результат любого измерения $Y_{ij} = \mu + \gamma_i + \varepsilon_{ij}$, где μ – средняя арифметическая всех $n \times m$ измерений, γ_i - погрешность, определяемая влиянием контролируемого фактора, ε_{ij} - погрешность, вызванная случайными факторами.

4) Влияние случайных факторов ε_{ij} оценивается средней дисперсией воспроизводимости:

$$S_B^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{B_i}^2$$

5) Влияние на рассеивание значений отклика совместного действия контролируемых и случайных факторов оценивается полной дисперсией:

$$S_0^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(Y_{ij} - \mu)^2 \text{ , где } N = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ ; } \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{y}_i$$

6) Влияние на рассеивание значений отклика контролируемого фактора оценивается дисперсией:

$$S^2(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{y}_i - \mu)^2$$

7) Проверяем однородность дисперсий $S^2(x)$ и S_B^2:

7.1.) Вычисляем наблюдаемое значение критерия Фишера: $F_н = S^2(x)/S_B^2$

7.2.) Вычисляем число степеней свободы $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$

7.3.) Задаем доверительную вероятность ***P***.

7.4.) Находим критическое значение критерия Фишера $\boldsymbol{F}_к$ при заданных степенях свободы. Если $\boldsymbol{F}_н > F_к$, то влияние фактора существенно. Тогда считается, что есть ***n*** нормально распределенных совокупностей, каждая из которых имеет одну и ту же дисперсию $\sigma^2 = S_B^2$ и соответствующее математическое ожидание $\overline{y}_i$.

Оценку дисперсии средних значений, вызванную влиянием исследуемого фактора ***X***, производят по формуле:

$$S_{\mu}^{2}=\frac{n-1}{N}\left[S^{2}(x)-S_{B}^{2}\right]$$

Если $\boldsymbol{F}_{н}<\boldsymbol{F}_{к}$ (для заданных $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$), то влияние фактора Х несущественно и все результаты измерений Y_{ij} относятся к одной генеральной совокупности, имеющей среднее арифметическое μ и дисперсию S_0^2

3.4.6 Корреляционный анализ

При изучении зависимости между двумя величинами, каждая из которых подвергается случайному рассеиванию (неконтролируемому разбросу), применяются методы корреляционного анализа. Некоторая **величина считается независимой** от других величин есть значения, которые принимает данная величина, не зависят от значений этих других величин.

Таким образом, **основная задача корреляционного анализа** – это выявление значимости связи (или меры зависимости) между случайными величинами и получение усредненного закона поведения каждой из величин в зависимости от значений другой величины.

Функция регрессии (регрессия) $\boldsymbol{y}$ на $\boldsymbol{x}$ – это зависимость между величинами y и x, при которой каждому значению величины x соответствует среднее из значений величины $\boldsymbol{y}$. Аналогично может быть определена регрессия $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{y}$.

Линия регрессии – графическое изображение функции регрессии.

Коэффициент корреляции (или корреляционные отношения) – мера зависимости между величинами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Дальше будем рассматривать только парную корреляцию в предположении что $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ – случайные переменные, имеющие нормальное распределение.

Случай линейной корреляции.

Корреляция $\boldsymbol{y}$ на $\boldsymbol{x}$ (или $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{y}$) называется линейной, если обе функции регрессии линейны.

Коэффициентом линейной корреляции ρ между случайными величинами ***x*** и ***y*** называют математическое ожидание произведения их нормированных отклонений:

$$\rho = M\left(\frac{x-a}{\sigma_x}\cdot\frac{y-в}{\sigma_y}\right),$$ где $a = Mx$ и $в = My$ – центры распределения случайных величин ***x*** и ***y***; σ_x^2 и σ_y^2 – дисперсии распределения случайных величин *x* и *y*.

Коэффициент корреляции можно записать через корреляционный момент:

$$\rho = \frac{1}{\sigma_x\sigma_y}M\left(x-a\right)\cdot\left(y-в\right),$$ где величина $M\left(x-a\right)\cdot\left(y-в\right)$ – называется корреляционным моментом.

Коэффициент корреляции – безразмерная величина, которая принимает значение в интервале [-1; +1], (т.е. $\left|\rho\right| \le 1$). ρ не зависит от выбора начала отсчета и масштаба измерения величин ***x*** и ***y***.

Равенство коэффициента корреляции нулю означает, что величина ***x*** и ***y*** являются независимыми (некоррелируемыми), т.е. одному значению ***x*** соответствует неединственное значение ***y***. Исключение составляет случай нелинейной корреляции.

Равенство $\left|\rho\right| = 1$ означает наличие линейной функциональной зависимости между ***x*** и ***y***. Каждому значению ***x*** соответствует определенное значение ***y***. Это означает, что величина ***y*** может быть представлена линейной функцией от ***x***: $y = Ax + B$,

3.4.7 Регрессионный анализ

Цель регрессионного анализа – установление вида и параметров аналитической зависимости математического ожидания ***M(y)*** от уровней одного им нескольких факторов ***X***, когда результаты эксперимента представлены в виде независимой выборки пар $x_1, y_1; x_2, y_2; ...; x_n y_n$.

Искомая функция называется **моделью регрессионного анализа** или **регрессионной моделью *Y* на *X***.

Коэффициенты регрессии – параметры установленной регрессионной модели.

Особенность построения регрессионной модели состоит в том, что наличие случайных ошибок измерения (т.е. наличие «шума» в эксперименте) делает неразумным подбор такой формулы, которая точно описывала бы все опытные данные. Другими словами, график искомой функции не должен проходить через все экспериментальные точки (Рис. 1), а должен сглаживать «шум».

Основные допущения регрессионного анализа:

1. Отклик ***Y*** – случайная величина с нормальным законом распределения. При большом объеме экспериментальных исследований гипотеза о нормальности распределения можно проверить используя критерий x^2. Нарушение нормальности распределения величины ***Y*** может привести к получению численных оценок, за которыми ничего не стоит.

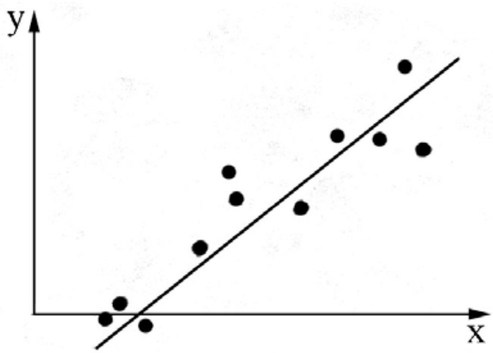


Рисунок 1 - Пример «сглаживания» экспериментальных данных.

2. Дисперсия ***Y*** не зависит от ее абсолютной величины. Т.е. погрешность измерения величины отклика подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием равным нулю. Верны гипотеза однородности дисперсии в разных точках факторного пространства.

3. Значения факторов неслучайные величины, некоррелированны между собой.

Обозначим выбранную функциональную зависимость в виде: $y = f(x; a_0, a_1, ..., a_n)$, где $a_0, a_1, ..., a_n$ – параметры регрессионной модели, подлежащие определению.

Если нет теоретических соображений о виде регрессионной модели, то ее представляют в виде полинома: $y = \sum_{j=0}^{n} a_j x_j + a_0$, в случае линейной модели: $y = a_0 + a_1 x$ э

В виде степенного ряда: $y = ae^{вx} + c$

В виде тригонометрического ряда: $y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \left[a_j \cos(j\omega x) + в(j\omega x) \right]$

В виде суммы ортогональных многочленов Чебышева: $y = \sum_{j=0}^{n_0} в_j P_j(x)$

Для нахождения параметров регрессионной модели используют метод наименьших квадратов.

Содержание метода наименьших квадратов.

Поиск параметров регрессионной модели состоит в нахождении минимума следующей функции: $S = \sum_{k=1}^{N} \left[y_k - f(x_k; a_0, a_1, ..., a_n) \right]^2$ – для случая если все y_k измерены с одинаковой точностью, или: $S = \sum_{k=1}^{N} \left[y_k - f(x_k; a_0, a_1, ..., a_n) \right]^2 \cdot \omega_к$ - для случая неравноточных измерений, где $\omega_к$ – веса измерений.

Если все измерения отклика y_k проведены с одинаковой точностью, но при различном числе измерений m_k при каждом значении y_k, то весами измерений могут служить количества измерений в сериях $\omega_к = m_k$ *(к=1,2,…,N)*/

Минимум функции ***S*** означает равенство нулю всех частных первых производных данной функции:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; ..., \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0$$

Таким образом, для ($\boldsymbol{n}$+1) неизвестного имеем систему ($\boldsymbol{n}$+1) уравнений. Если в регрессионную модель параметры a_i входят линейно, то последняя система уравнений будет также линейна относительно этих параметров.

3.4.8 Планирование эксперимента. Полный факторный эксперимент

Построение регрессионной модели при ПФЭ.

Планирование эксперимента, как научный метод исследования, появился в 40-х годах прошлого столетия. **Планирование эксперимента** – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

Основные задачи, решаемые при планировании экспериментальных исследований состоят в: минимизация общего числа опытов; одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс, по специальным правилам, называемым алгоритмами; использование математического аппарата, формализующего действия экспериментатора; разработка или выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии опытов.

Для успешной реализации стратегии планирования эксперимента необходимо правильно выбрать факторы и уровни их варьирования, а также выбрать отклик, наиболее полно характеризующий измеряемые свойства системы. Здесь мы приведем наиболее общие требования, предъявляемые к факторам и отклику.

При проведении многофакторного эксперимента, все множество уровней факторов, при которых проводится измерение отклика, задается **матрицей условий эксперимента**:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{K1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{K2} \\ x_{1N} & x_{2N} & x_{KN} \end{pmatrix},$$ где $\boldsymbol{K}$ – число контролируемых факторов, N – число опытов (измерений). Значения отклика, полученные для каждого из 1…N измерений, представляют в виде **матрицы наблюдений**.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_N \end{pmatrix}.$$

Для ***К*** факторов, которые изменяются на ***Р*** уровнях число возможных опытов равно $P^к$. Например, для ***К***=5 при числе уровней ***Р***=5 количество возможных опытов $\boldsymbol{P^к}$=3125. При таком большом числе возможных опытов ясно, что провести их все становится нереальным. Возникает задача минимизации числа опытов при сохранении требования к точности полученных выводов. Рассмотрим как данная задача решается применением математических методов планирования эксперимента.

При экспериментальном исследовании технологических процессов или зависимости свойств материалов от их состава или метода получения могут решаться две задачи. Первую задачу называют **интерполяционной**. Эта задача состоит в построении регрессионной модели для предсказания значений изучаемого параметра, зависящего от ряда факторов. Модель объекта исследования получают используя результаты опытов.

Вторую задачу называют **экстремальной**. Экстремальная задача заключается в отыскании условий некоторого процесса, обеспечивающих получение оптимального значения выбранного параметра.

При исследовании многофакторного процесса реализации всех возможных опытов требует большой трудоемкости. Это делает и интерполяционную и экстремальную задачи нерешаемыми проблемами. Решению таких задач при названных условиях способствует планирование эксперимента.

При построении плана эксперимента предполагается, что в общем случае, математическая модель процесса имеет вид:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij} x_i x_j + ... + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2$$

, где первая сумма учитывает влияние факторов x_i, ($\boldsymbol{i = 1,\ldots,k}$) на величину изучаемого отклика ***Y***; вторая сумма учитывает парные взаимодействия факторов; многоточия указывают на то, что модель может включать тройные взаимодействия; последнее слагаемое указывает на то, что модель может быть второго порядка; ***k*** – число контролируемых факторов.

Порядок модели до опыта неизвестен. В этом случае применяют **последовательное планирование эксперимента.**

На первом этапе выдвигают гипотезу о линейности модели:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i \ .$$

Затем реализуют эксперимент, необходимый для определения параметров линейной модели. Проверяется адекватность модели. Если модель неадекватна, то выдвигают гипотезу о значимом влиянии взаимодействия факторов, сначала парных, затем тройных. Например, линейная модель, учитывающая парные взаимодействия:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij} x_i x_j$$

Если данная модель также является неадекватной, то выдвигается гипотеза о квадратичности модели и т.д.

Определение области факторного пространства.

Область факторного пространства определяет границы варьирования факторов в ходе эксперимента. Область факторного пространства определяется исходя из теоретических или каких-либо дополнительных соображений. При этом должны учитываться следующие ограничения на выбор границ области определения факторов:

1) максимально или минимально допустимые значения факторов. Например, температура не может быть ниже температуры абсолютного нуля.

2) технико-экономические ограничения. Например, стоимость сырья, дефицитность компаний, время проведения эксперимента.

3) технические или технологические условия процесса.

Определив область факторного пространства необходимо определить подобласть внутри которой будет проведено планирование эксперимента. Этот этап включает выбор основного уровня фактора и выбор интервала варьирования факторов.

Основным (или нулевым) уровнем фактора называют его значение, принятое за исходное в плане эксперимента. Сочетание основных уровней всех факторов принимают за исходную точку для построения плана эксперимента, т.е. за центр плана.

Построение плана эксперимента состоит в выборе экспериментальных точек, симметричных относительно центра плана. Для этого выбирают интервал варьирования факторов.

Интервал варьирования факторов – это некоторое число (для каждого фактора свое) прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание нижний уровень фактора. Интервал варьирования не может быть выбран меньше ошибки измерения данного фактора и не может быть настолько большим, чтобы верхний или нижний уровни выходили за пределы области определения фактора.

Для облегчения обработки результатов экспериментальных исследований факторы нормализуют. Например:

$$x_i = \frac{x_B - x_O}{\Delta x},$$

где $\boldsymbol{x_B}$ – верхний уровень фактора,

$\boldsymbol{x_O}$ – основной уровень фактора,

$\Delta \boldsymbol{x}$ – интервал варьирования фактора,

$\boldsymbol{x_i}$ – значения нормализованного фактора на нижнем уровне.

Таким образом, нормализованные факторы принимают значение +1 на верхнем уровне и -1 на нижнем уровне. Для определения параметров линейной модели достаточно в опыте каждый фактор фиксировать на одном из двух уровне – верхнем и нижнем.

Построение планов ПФЭ.

Эксперимент, в котором используются все возможные сочетания уровней факторов, называют полным факторным экспериментом (ПФЭ). Когда число уровней каждого фактора равно 2, то число опытов ПФЭ $\boldsymbol{N}$ будет равно: 2^k, где $\boldsymbol{k}$ – число факторов.

План проведения эксперимента и его результаты записывают в виде таблицы, которую называют **матрицей планирования**. Если результаты эксперимента в таблицу не записывают, то такая таблица, содержащая только уровни факторов, называется **факторным планом**. Для упрощения записи условий эксперимента в матрице планирования вместо «+1» и «-1» пишут «+» и «-».

Пример факторного плана для $\boldsymbol{k} = 2$

№ опыта	x_1	x_2	x_1x_2
1	+	-	-
2	+	+	+
3	-	-	+
4	-	+	-

$\boldsymbol{N} = 2^2$

Пример матрицы планирования для $\boldsymbol{k} = 2$ для линейной модели: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$

№ опыта	x_1	x_2	y
1	+	+	y_1
2	+	-	y_2
3	-	+	y_3
4	-	-	y_4

Каждый столбец в матрице планирования называют вектор-столбцом, а каждую строку – вектор-строкой.

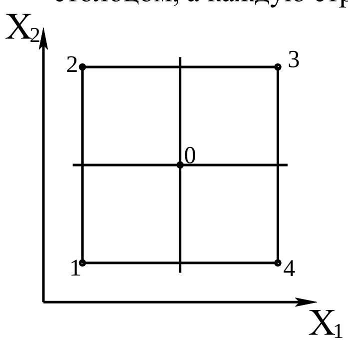


Рисунок 2 – Графическое представление области планирования эксперимента.

Построение полного факторного плана $\boldsymbol{2^k}$ можно дать геометрическую интерпретацию. На рисунке представлена область определения факторов $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$. Изобразим (т. 0) в области определения факторов основной уровень и проведем через него новые оси координат, параллельные осям натуральных значений факторов. Затем, выберем масштабы по новым осям так, чтобы интервал варьирования по ним натурализованных факторов равнялся единице. Тогда условия проведения опытов будут соответствовать вершинам квадрата, центром которого является основной уровень (т. О), а каждая сторона параллельна одной из осей координат и равна двум интервалам варьирования. Номера вершин квадрата соответствуют номерам опытов в матрице планирования. Площадь внутри квадрата 1-2-3-4 называют **областью эксперимента**. В задачах интерполяции область эксперимента есть область предсказываемых значений отклика.

Наиболее простым способом построения ФП при любом числе факторов является метод последовательного достраивания полного факторного плана. Он заключается в том, что для построения полного факторного плана при $\boldsymbol{k}$ факторах повторяют дважды план для $\boldsymbol{(k\text{-}1)}$ факторов, сначала при нижнем уровне $\boldsymbol{k}$-ого фактора, а затем при его верхнем уровне.

Свойства матрицы полного факторного эксперимента типа 2^k.

1) Симметричность матрицы планирования относительно центра эксперимента.

Алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю: $\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0$, где $\boldsymbol{j}$ – номер фактора, $\boldsymbol{N}$– число опытов.

2) Условие нормировки матрицы планирования. Сумма квадратов элементов каждого вектор-столбца равна числу опытов: $\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = N$.

3) Ортогональность матрицы планирования. Сумма по-членных произведений любых двух вектор-столбцов равна нулю:

$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} x_{ui} = 0$, $\boldsymbol{j \neq u}$, $\boldsymbol{j, u}$ = 0, 1, …,$\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{k}$ – число факторов.

4) Ротатабельность матрицы планирования. Точность предсказания значений отклика одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления. Это свойство особенно важно в экстремальных задачах, где направление движения к оптимуму заранее неизвестно.

Определение параметров линейной модели.

Определение параметров нормализованной линейной модели вида:

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^{k} a_k x_k$$ производится по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$a_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i \ ,$$

где $\boldsymbol{j}$ = 1,…, $\boldsymbol{k}$. $\boldsymbol{k}$ – число факторов; $\boldsymbol{i}$ = 1,…, $\boldsymbol{N}$. $\boldsymbol{N}$ – число факторов; $\boldsymbol{x_{ji}}$ – значение фактора $\boldsymbol{x_j}$ в $\boldsymbol{i}$-ом опыте.

Так как каждый фактор варьируют на двух уровнях (+1) и (-1), то вычисление параметров модели сводится к следующему. К столбцу, содержащему значения отклика ($\boldsymbol{y_k}$) приписывают знаки соответствующего столбца ($\boldsymbol{x_i}$), алгебраически складывают полученные значения отклика и результат делят на число опытов матрицы планирования экспериментов.

Следует отметить, что для расчета параметра $\boldsymbol{a_i}$ используют <u>только</u> столбец $\boldsymbol{x_i}$, т.е. <u>все</u> параметры модели определяются <u>независимо</u> друг от друга.

Проверка значимости коэффициентов модели

Все параметры линейной модели определяются с одинаковой дисперсией по формуле $S^2(a_i) = S_B^2 / N$, где дисперсия воспроизводимости S_B^2 определяется по следующим правилам.

1) Если в каждой серии опытов проводили по m параллельных опытов, то:

$$S_B^2 = \frac{1}{N(m-1)}\sum_{i=1}^{N}\ \sum_{u=1}^{m}(y_{ij} - \overline{y}_i)^2 \ ,$$ где $\boldsymbol{N}$ – число серий опытов в плане; $\boldsymbol{i}$– номер серии опытов; $\boldsymbol{j}$– номер опыта в серии; $\overline{y}_i$ – среднее значение отклика в $\boldsymbol{i}$-ой серии опытов.

2) Если каждая серия содержит только один опыт, то для определения дисперсии воспроизводимости в центре плана проводится серия из $\boldsymbol{m}$ опытов. Тогда:

$$S_B^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{u=1}^{m}(y_{ou} - \overline{y}_o)^2$$

Доверительный интервал для параметров линейной модели равен:

$$\Delta a_i = \pm t(P, mN) \cdot \frac{S_B^2}{\sqrt{mN}}$$

Значения критерия Стьюдента определяют из соответствующих таблиц.

Параметр модели считается статистически значимым если его абсолютная величина больше доверительного интервала $|a_i| > |\Delta a_i|$. Статистически незначимые параметры считаем равными нулю.

Проверка адекватности модели

Дисперсия адекватности равна:

1) для случая если каждый опыт плана проводился только по одному разу: $S_{ag}^2 = \frac{1}{N-(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{N} y^2 - N \sum_{j=1}^{k} a_j^2 \right)$

2) для случая если каждый опыт в матрице планирования повторялся ***m*** раз: $S_{ag}^2 = \frac{1}{m-\left(N-(k+1)\right)} \left(\sum_{u=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} y^2 - mN \sum_{j=1}^{k} a_i^2 \right)$

Адекватность модели определяется по критерию Фишера.

1) Наблюдаемое значение критерия Фишера $F_í = {S_{ag}^2}/{S_B^2}$.

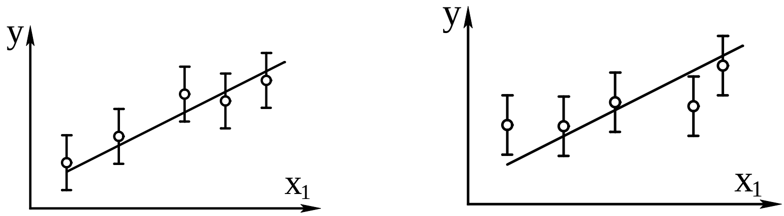
2) Критическое значение критерия Фишера определяют по таблицам.

3) Если $F_í < F_k$, то модель адекватна. Если $F_í > F_k$, то следует переходить к следующему этапу планирования, т.е. находить параметры моделей, учитывающих парные взаимодействия.

Качественно понятие адекватности можно продемонстрировать на следующем примере (Рис. 3).

На рис.3 приведена линия регрессии с одинаковым разбросом экспериментальных точек относительно этой линии. На этих же графиках указан средний разброс в каждой экспериментальной точке.

На рис.3а видно, что разброс в точках такого же порядка, что и разброс относительно линии регрессии. Следовательно, модель адекватно описывает результаты эксперимента. Во втором случае требуется более сложная модель для описания экспериментальных точек.



а б

Рисунок 3 – Пример адекватной (а) и неадекватной (б) математической модели.

Вычисление параметров математической модели с парными (или тройными) взаимодействиями определяются по аналогичным формулам:

$$a_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{zi}x_{ji})y_i$$

В силу ортогональности матрицы планирования эффекты взаимодействия оцениваются независимо от линейных эффектов. Дисперсия адекватности оценивается также.

Дробный факторный эксперимент.

Дробный факторный эксперимент (ДФЭ) называют эксперимент, реализующий часть (дробную реплику) полного факторного эксперимента. ДФЭ позволяет определять параметры линейной модели при минимуме опытов.

При линейном росте числа независимых факторов (***k***) число экспериментов полного факторного плана (ПФП) растет как $\boldsymbol{2^k}$. Таким образом, количество опытов в ПФЭ значительно превосходит число определяемых коэффициентов линейной модели. Во многих практических задачах влияние взаимодействий второго и более высоких порядков пренебрежимо мало.

Эффективность ПФЭ при линейном моделировании невысока из-за разности между числом опытов и числом коэффициентов линейной модели. Другими словами, ПФЭ обладает избыточностью опытов. Возможно ли сократить число опытов за счет той информации, которая не очень существенна при построении линейных моделей?

Правило сокращения числа опытов формулируется следующим образом: чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить вектор-столбец МП, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь. Тогда значение нового фактора в условиях опытов определяется знаками этого столбца.

Пример: для x_3 использован вектор-столбец x_1x_2 ПФЭ 2^2.

Наличие четырех опытов позволяет оценить четыре параметра линейной модели: a_0, a_1, a_2, a_3.

Таблица 4 Пример построения дробного факторного плана 2^{3-1}

Номер опыта	x_1	x_2	x_3 (x_1x_2)	y
1	-	-	+	y_1
2	+	-	-	y_2
3	-	+	-	y_3
4	+	+	+	y_4

Возникает два вопроса?

1. Возможно ли получать при таком планировании несмешанные оценки параметров линейной модели?

2. Как выбирать a'priori взаимодействия, которые можно заменить на новый фактор?

Применение ДФЭ всегда связано с совместным оцениванием нескольких коэффициентов математической модели. Например, для выше приведенного примера, каждый из найденных коэффициентов a_i содержит оценку двух теоретических коэффициентов регрессии:

$$a_0 \to \beta_0 + \beta_{123}; \quad a_1 \to \beta_1 + \beta_{23}; \quad a_2 \to \beta_2 + \beta_{13}; \quad a_3 \to \beta_3 + \beta_{12}$$

Указанные теоретические коэффициенты не могут быть оценены раздельно, так как вектор-столбцы МП для линейных членов и парных произведений совпадают (иначе говоря – полностью коррелированны).

Для обозначения дробных реплик, в которых ***P*** линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия, используют условную запись $\boldsymbol{2^{k-P}}$, где ***k*** – общее число независимых факторов.

Таблица 5 Примеры и условные обозначения дробных реплик.

Число факторов	**Дробная реплика**	**Условное обозначение**	**Число опытов**	
			ДФЭ	ПФЭ
3	1/2 реплика от 2^3	2^{3-1}	4	8
4	1/2 реплика от 2^4	2^{4-1}	8	16
5	1/4 реплика от 2^5	2^{5-2}	8	32
6	1/8 реплика от 2^6	2^{6-3}	8	64

Для получения системы совместных оценок и анализа разрешающей способности дробных реплик используют понятия генерирующего и определяющего соотношения (определяющего контраста).

Определяющее соотношение (определяющей контраст) – это соотношение, задающее элементы столбца МП для фиктивной переменной (всегда равно +1 или -1). Получают перемножением элементов вектор-столбцов МП: $x_1x_2x_3 = 1$; $x_1x_2x_3x_4 = 1$ и т.д.

Определяющее соотношение помогает определять смешанные эффекты. Соотношения, задающие эти оценки можно найти, последовательно перемножая независимые факторы на определяющее соотношение. Например, для x_1 смешанный эффект определяется как $x_1x_2x_3 \times x_1 = x_1^2x_2x_3$, где $x_1x_2x_3 = 1$. Так как $x_i^2 = 1$ всегда, то $x_1 = x_2x_3$ и т.д.

Генерирующее соотношение – соотношение служащее для построения дробной реплики. В рассмотренном примере, это: $x_3 = x_1x_2$. Это соотношение показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект.

Разрешающая способность полуреплик определяется их генерирующим соотношением. Разрешающая способность тем выше, чем более высок порядок взаимодействий, с коэффициентами которых смешаны линейные коэффициенты.

Построение ДФП требует обязательного анализа смешивания основных эффектов с эффектами взаимодействия. Это позволяет точно представлять, какую информацию приходится терять в дробных планах.

Пример выбора полуреплик для ДФП 2^{4-1}. Возможны следующие решения:

1) $x_4 = x_1x_2$	5) $x_4 = - x_1x_2$
2) $x_4 = x_1x_3$	6) $x_4 = - x_1x_3$
3) $x_4 = x_2x_3$	7) $x_4 = - x_2x_3$
4) $x_4 = x_1x_2x_3$	8) $x_4 = - x_1x_2x_3$

Наибольшая разрешающая способность у реплик 4 и 8. Их следует выбирать в первую очередь, т.к. тройные взаимодействия обычно менее важны чем парные в линейных моделях.

Определяющее соотношение $1=x_1x_2x_3x_4$ (т.е. возьмем полуреплику для которой контраст равен +1. В принципе можно взять другую полуреплику для которой контраст равен $-1=x_1x_2x_3x_4$). Тогда генерирующее соотношение $x_4 = x_1x_2x_3$.

Получаем следующие совместные оценки:

$x_1 = x_2x_3x_4$	$x_1x_2 = x_3x_4$
$x_2 = x_1x_3x_4$	$x_1x_3 = x_2x_4$
$x_3 = x_1x_2x_4$	$x_1x_4 = x_2x_3$
$x_4 = x_1x_2x_3$	

Следовательно параметры линейной модели: $a_1 = \beta_1 + \beta_{234}$;

$a_2 = \beta_2 + \beta_{134}$; $a_3 = \beta_3 + \beta_{124}$; $a_4 = \beta_4 + \beta_{123}$; $a_{12} = \beta_{12} + \beta_{34}$;

$a_{13} = \beta_{13} + \beta_{24}$; $a_{14} = \beta_{14} + \beta_{23}$.

4. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО РАЗДЕЛУ 2

1. Понятие «алгоритм расчета». Примеры алгоритмов расчета. Вычислительный алгоритм.
2. Источники и классификация погрешностей численного решения задач.
3. Понятие абсолютной и относительной погрешности. Правила определения погрешности вычисления.
4. Форма записи числовых данных в памяти ЭВМ и погрешность машинных вычислений.

5. Постановка задачи о приближении функций. Понятия точечного и интегрального приближения. Экстраполяция. Вид обычного и тригонометрического интерполяционных полиномов.

6. Интерполирование функций (общие положения).

7. Интерполирование многочленами Лагранжа. Точность интерполирования многочленами Лагранжа.

8. Понятие конечных разностей и их свойства.

9. Интерполяционный полином Ньютона. Использование полинома Ньютона для построения формул линейного и квадратичного интерполирования. Точность интерполирования полиномами Ньютона.

10. Интерполирование периодических функций обобщенными тригонометрическими полиномами.

11. Понятие «гармонический анализ». Гармоники. Вычисление коэффициентов Фурье для четных и нечетных функций.

12. Общие сведения об интерполяции сплайнами. Определение коэффициентов кубического сплайна.

13. Точечное и интегральное квадратичное аппроксимирование функций.

14. Понятие ортогональных функций и системы ортогональных функций. Аппроксимирование ортогональными функциями.

15. Основные свойства обобщенного полинома степени m с коэффициентами Фурье. Понятие нормы элемента $\boldsymbol{x}$, полной и неполной систем функций, условие полноты.

16. Равномерное приближение функций методом расчета среднего квадратичного отклонения.

17. Роль численных методов в решении алгебраических уравнений. Метод вложенных отрезков.

18. Понятие итерации и реккурентной формулы. Метод простой итерации (последовательных приближений). Достаточные условия сходимости итерационного процесса.

19. Общие сведения о решении алгебраических уравнений итерационными методами. Метод касательных.

20. Понятие итерации и реккурентной формулы. Метод секущих.

21. Метод простой итерации (последовательных приближений). Достаточные условия сходимости итерационного процесса. Метод хорд.

22. Понятие точных и приближенных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Зейделя.

23. Понятие точных и приближенных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Сущность метода Гаусса и правила Крамера.

24. Понятие стационарных и нестационарных, явных и неявных итерационных методов решения систем линейных уравнений. Метод простой итерации.

25. Интерполирование многочленами Лагранжа. Построить многочлен $\boldsymbol{L}_3(x)$ при следующих условиях: $\boldsymbol{L}_3'(1) = 1$, $\boldsymbol{L}_3(0) = 1$, $\boldsymbol{L}_3(-1) = 1$, $\boldsymbol{L}_3(2) = 0$.

26. Интерполирование многочленами Лагранжа. Построить многочлен $\boldsymbol{L}_3(x)$ при следующих условиях: $\boldsymbol{L}_3(-1) = 0$, $\boldsymbol{L}_3(1) = 1$, $\boldsymbol{L}_3(2) = 2$, $\boldsymbol{a_1} = 1$.

27. Понятие разделенных разностей и их свойства. Понятия «интегральная сумма», «квадратурная формула».

28. Численное дифференцирование в случае равностоящих узлов путем замены функции интерполяционным многочленом.

29. Численное дифференцирование в случае равностоящих узлов методом неопределенных коэффициентов.

30. Вычислительная погрешность формул численного дифференцирования. Выбор оптимального шага дифференцирования.

31. Квадратурная формула прямоугольников. Допущения при выводе данной формулы. Оценка погрешности численного интегрирования. Геометрическая интерпретация формулы прямоугольников.

32. Квадратурная формула трапеций. Допущения при выводе данной формулы. Оценка погрешности формулы трапеций, геометрическая интерпретация формулы трапеций.

33. Квадратурная формула Симпсона, допущенная при выводе формулы, оценка погрешности численного интегрирования.

34. Метод (правило) Ромберга.

35. Решение задачи Коши с помощью степенных рядов.

36. Метод Эйлера (ломаных) решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Геометрическое построение ломаной Эйлера. Недостатки метода.

37. Модификации метода Эйлера численного решения задачи Коши (усовершенствованный метод ломаных и метод Эйлера-Коши).

38. Формулировка задачи Коши. Общая характеристика методов Рунге-Кутта. Общие правила выбора метода численного решения задачи Коши.

39. Метод Адамса (суть метода, вывод формулы Адамса).

40. Общая характеристика многошаговых методов решения задачи Коши. Сущность метода Милна.

41. Метод неопределенных коэффициентов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

42. Особенности интегрирования систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений второго порядка.

43. Понятие краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Запись краевой задачи в конечно-разностной форме.

44. Сущность метода прогонки численного решения краевых задач (на примере правой прогонки). Условия устойчивости метода прогонки.

45. Сущность метода аппроксимирующих функций численного решения краевых задач. Метод коллокации. Метод наименьших квадратов. (общие положения)

46. Суть метода сеток решения дифференциальных уравнений в частных производных. Понятия: «сетка» в одномерной и двумерной областях, «сеточная функция», «разностная схема». Неравномерные сетки. Треугольная сетка.

47. Применение метода сеток к решению уравнений эллиптического типа. Метод линейной интерполяции для граничных узлов сеточной области.

48. Метод сеток решения уравнений параболического типа. Явная разностная схема и ее устойчивость.

49. Неявная разностная схема решения уравнений параболического типа. Метод прогонки решения уравнения теплопроводности.

50. Общие сведения о решении методом сеток уравнений гиперболического типа.

51. Содержание задачи оптимизации. Понятие «целевая функция», «допустимое множество», «точка экстремума», «точка локального экстремума», «точка глобального экстремума».

52. Теорема Вейерштрасса. Численное решение одномерных задач безусловной оптимизации (метод равномерного распределения точек и его модификация).

53. Сущность многомерных задач оптимизации. Метод покоординатного спуска.

54. Сущность численного решения экстремальных задач. Метод градиентного спуска. Метод наискорейшего спуска.

55. Сущность численного решения экстремальных задач. Особенности решения задач оптимизации вблизи области экстремума. Проблема многоэкстремальности.

56. Сущность методов численного решения задач на нахождение условного экстремума.

57. Задачи линейного программирования и их эквивалентность. Понятия «целевая функция», «план», «допустимая задача».

58. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования.

59. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.

60. Основные виды линейных интегральных уравнений. Решение интегральных уравнений методом замены интеграла квадратурной суммой.

61. Основные виды линейных интегральных уравнений. Решение интегральных уравнении методом замены ядра на вырожденное.

62. Сущность методов Монте-Карло (на примере вычисления определенного интеграла). Методы вычисления последовательности случайных чисел.

63. Понятия «моделирование» и «модель». В чем состоит цель моделирования? Что определяет вид модели?

64. Что такое модель? Классификация моделей.

65. Требования к моделям. Отношения подобия реального объекта и модели.

66. Идеализация и абстракция при моделировании. Примеры.

67. Что такое «математическая модель» и «математическое моделирование»? Классификация математических моделей.

68. Достоинства математического моделирования и его основные этапы.

69. Выбор адекватного математического аппарата для описания математической модели (на примере моделей движения твердого тела, сплошной среды, сильно разряженных газов).

70. Модель типа «черный ящик». Области применения. Требования к параметрам модели. Математическая формулировка модели.

71. Модель состава системы. Математическое описание модели состава.

72. Модель структуры. Граф, виды графов. Математическое описание модели структуры. Примеры моделей структуры.

73. Прямые задачи моделирования, характерные черты, основные проблемы построения. Приведите примеры таких задач.

74. Обратные задачи моделирования, их характерный признак. Условная классификация обратных задач. Приведите примеры таких задач.

75. Понятие некорректно поставленных задач математического моделирования.

76. Понятие комплексного сквозного моделирования сложных технологических объектов. Приведите примеры.

77. Особенности построения математических моделей управляемых технических систем. Критерий оценки соответствия системы цели управления.

78. Моделирование стохастических процессов.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Исследования и изобретательство в машиностроении / М. Ф. Пашкевич [и др.]; под общ. ред. М. Ф. Пашкевича. – Могилев : Бел.-Рос. унив-т, 2005. – 294 с.

2. Кузьмичев, Д. А. Автоматизация экспериментальных исследований / Д. А. Кузьмичев, И. А. Радкевич, А. Д. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 392 с.

3. Полтавский, В. В. Основы измерений физических величин / В. В. Полтавский. – Минск : БГТУ, 2005. – 273 с.

4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятности, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2008. – 320 с.

5. Махаринский, Е. П. Планирование эксперимента в машиностроении / Е. П. Махаринский, П. И. Ящерицын. – Минск : Вышейшая школа, 1987. – 217 с.

6. Поршнев, С. В. Вычислительная математика. Курс лекций / С. В. Поршнев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.

7. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учебное пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987. – 600 с.

8. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М. : Наука, 1978. – 589 с.

9. Вербжицкий, В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / В. М. Вербжицкий. – М. : Издательский дом ОНИКС 21 век, 2005. – 432 с.

10. Тихонов, А. Н. Вводные лекции по прикладной математике / А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. – М. : Наука, 1984. – 192 с.

11. Тихонов, А. Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А. Н. Тихонов, В. Д. Кальнер, В. Б. Гласко. – М: Машиностроение, 1990. – 264 с.

12. Нестеров, С. Б. Методы расчета вакуумных систем / С. Б. Нестеров, Ю. К. Васильев, А. К. Андросов. – М. : МЭИ, 2004. – 220 с.

13. Тарасик, В. П. Математическое моделирование технических систем / В. П. Тарасик. – Минск : БГПА, 1997. – 120 с.

Дополнительная литература

14. Боровиков, В. П. Statistica – статистический анализ и обра-ботка данных в среде Windows / В. П. Боровиков, И. П. Боровиков. – М. : Информационно-издательский дом «Филинъ», 1998. – 608 с.

15. Боровиков, В. П. Прогнозирование в системе Statistica в среде Windows / В. П. Боровиков, Г. И. Ивченко. – М. : Финансы и статистика, 1999. – 384 с.

16. Боровиков, В. П. Программа Statistica для студентов и инженеров / В. П. Боровиков. – М. : Компьютерпресс, 2001.

17. Кетков, Ю. Л. MATLAB 6.x: программирование численных методов / Ю. Л. Кетков, А. Ю. Кетков, М. М. Шульц. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 672 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.. 3
1. ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН........................... 5
2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА........................ 6
3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА.. 12
3.1 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.... 13
3.2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ (ПО РАЗДЕЛУ 1).. 17
3.3 ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ (ПО РАЗДЕЛУ 1)... 22
3.4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.................. 63
3.4.1 Понятие экспериментального исследования. Ошибки измерений.. 63
3.4.2 Оценка ошибки измерения. Нормальный закон распределения случайных ошибок измерения........................... 67
3.4.3 Математическая обработка результатов экспериментальных исследований... 73
3.4.4 Проверка статистических гипотез.......................... 85
3.4.5 Дисперсионный анализ.. 94
3.4.6 Корреляционный анализ... 97
3.4.7 Регрессионный анализ... 98
3.4.8 Планирование эксперимента. Полный факторный эксперимент... 101
4. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО РАЗДЕЛУ 2... 112
РЕКОМЕНДУЕМАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА..................... 118

Учебное издание

ИВАНОВ Игорь Аркадьевич

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ

Программно-методический комплекс

Подписано в печать 11.02.2013. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 7,03. Уч.-изд. л. 5,50. Тираж 50. Заказ 1261.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.