

УДК 539.3

А. В. ЧИГАРЕВ, доктор физико-математических наук, Белорусский национальный технический университет, Минск, А. В. БОРИСОВ, кандидат технических наук, филиал НИУ «Московский энергетический институт (Технический университет)», Смоленск, Россия

ОПИСАНИЕ РОСТА МИКРОТРЕЩИН В ТАЗОБЕДРЕННОМ СУСТАВЕ ЧЕЛОВЕКА

Изложен расчет коэффициентов интенсивности усилий и моментов около вершины меридиальной трещины в сферической оболочке шарнира-сустава в случае, когда к берегам трещины приложены равномерно распределенные усилия и моменты при симметричном распределении напряжений относительно линии трещины.

Предполагается, что замкнутая оболочка нагружена равномерным внутренним давлением интенсивности q . Данное предположение хорошо согласуется с моделью реального сустава, в котором, как указывалось выше, имеющаяся смазка обеспечивает равномерное гидростатическое давление по всей поверхности сустава и не допускает непосредственного контакта в суставе трущихся поверхностей.

Проведены численные оценки коэффициентов интенсивности усилий для модели сферического сустава-шарнира модели экзоскелета. Взяты числовые данные для реального человека.

Полученные зависимости для всех коэффициентов интенсивности показывают, что больше нагружается хрящевая ткань и она имеет больший ресурс к восстановлению, т.е. залечиванию при возникновении трещин, в отличие от костной ткани. Чем больше начальное расстояние между трещинами, тем большие значения коэффициентов интенсивности возможны.

Введение. Так как рассматривается модель механической системы, максимально приближенная к движениям человека, возникает необходимость моделирования шарниров-суставов, позволяющих осуществлять движения звеньев во всех координатных плоскостях. Предлагается математическая модель шарнира для выяснения нагрузок и напряжений, возникающих в многослойной конструкции, с целью дальнейшего выяснения ресурса эксплуатации. Подобная модель может способствовать снижению энергозатрат при движениях стержневой механической системы за счет снижения сил сопротивления и рекуперации энергии, как в человеческом организме.

Так как опорно-двигательный аппарат человека считается совершенным, будем в качестве основы для моделирования шарнира использовать информацию о суставе.

В экспериментальных работах в Центральном институте травматологии и ортопедии установлено, что головка тазобедренного сустава является практически идеальной сферой, за исключением шейки бедра [1].

В работах [2–5] показано, что смазка в суставе является жидкокристаллической и обеспечивает практически нулевое трение в зоне контакта и сглаживание всех несовершенств поверхности: шероховатостей, асферичности, неровностей и других отклонений поверхности от идеальной сферы. Эта смазка обеспечивает практически равномерное гидростатическое давление в суставе.

Также имеет место внутреннее давление костного мозга на элементы сустава [1].

В данном исследовании учтем многослойность и многокомпонентность структуры сустава: наличие хряща, надкостницы, кости, внутреннего губчатого вещества.

В процессе жизни человека в суставе происходят изменения, связанные с множеством причин. В результате этих изменений возникают отклонения формы от идеальной сферической, появляются шероховатости

поверхности, неравномерности распределения давления, приводящие к появлению и росту микротрещин.

Так как экзоскелет должен повторять свойства эндоскелета человека, предложим математическую модель распространения трещин в материале шарнира-сустава, пригодную для описания процессов в биологическом и искусственном материалах. Рассмотрим модель роста трещины в шарнире-суставе эндо- и экзоскелета человека при следующих предположениях. Ходьба представляет собой процесс циклического нагружения шарнира-сустава, который приводит к постепенному подрастанию трещины. То есть в суставе при ходьбе в фазе опоры возникают нагрузки, которые приводят к росту трещины, и есть процессы разгрузки, которые залечивают трещину, однако в среднем наблюдается рост трещины.

Сустав является системой идеальных сферических оболочек, что хорошо соответствует модели тазобедренного сустава человека. В каждом слое свойства материала одинаковы. Данное допущение является оправданным, т.к. в реальном суставе наблюдается подобная слоистая структура: один слой – гиалиновый хрящ, второй – надкостница, третий – костная ткань и т.д. В каждом из слоев свойства, в среднем, одинаковы. Но сфера может быть достаточно много, количество слоев в предложенной модели не ограничено, и, тем самым, можно с хорошей точностью аппроксимировать свойства реального сустава.

Материалы и методы. Коэффициенты интенсивности усилий и моментов около вершины меридиальной трещины в сферической оболочке в случае, когда к берегам трещины приложены равномерно распределенные усилия и моменты при симметричном распределении напряжений относительно линии трещины (рисунок 1), то есть когда трещина нагружена усилиями $P_y(x,0) = -p_1 = \text{const}$ и изгибающими моментами $M_y(x,0) = -p_3 = \text{const}$, имеют вид [6]

$$K_1 = p_1 \sqrt{l} (1 + 3\pi\lambda^2/32 + \lambda^4/(1024(3 + \nu))[(9\pi^2 - 6)(3 + \nu) - 28\nu + 4(83 - 3\nu)\ln(\lambda\gamma_0/4) - 48(1 + 3\nu)\ln^2(\lambda\gamma_0/4)]) + (6p_3 \sqrt{l} / h)(\sqrt{1 - \nu^2} / \sqrt{3})(\lambda^2/[32(3 + \nu)])(-7 - 12\ln(\lambda\gamma_0/4) + (\pi\lambda^2/[32(3 + \nu)])(47 - 3\nu - 24(5 + 3\nu))\ln(\lambda\gamma_0/4)) + O(\lambda^6 \ln \lambda);$$

$$K_3 = - (p_1 h \sqrt{l} / 2)(3 + \nu) / \sqrt{3(1 - \nu^2)} (\lambda^2/[32(3 + \nu)])(-1 - 7\nu - 4(1 + 3\nu)\ln(\lambda\gamma_0/4) + (\pi\lambda^2/1024)(1 + 3\nu)/(3 + \nu)) [9 - \nu - 8(5 + 3\nu)\ln(\lambda\gamma_0/4)] + p_3 \sqrt{l} (1 + [(1 + 3\nu)/(3 + \nu)](\pi\lambda^2/32) + (\lambda^4/[512(3 + \nu)])\{-5 - 17\nu + [\pi^2(1 + 3\nu)^2/(6 + 2\nu)] - 2(1 + 3\nu)\ln(\lambda\gamma_0/4)(1 + 12\ln(\lambda\gamma_0/4))\}) + O(\lambda^6 \ln \lambda).$$

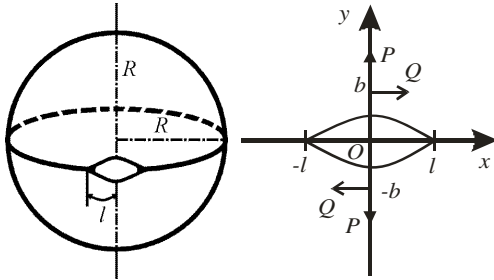


Рисунок 1 – Модель сферической оболочки с трещиной: слева – одномерный случай, справа – двумерное блуждание

Если рассматривать прямолинейную модель распространения трещины, т.е. одномерное блуждание при нормальной нагрузке $p_1 = qR/2$, то $p_3 = 0$. При этом остается только один коэффициент интенсивности усилий и моментов K_1 . При этом предполагаем, что замкнутая оболочка нагружена равномерным внутренним давлением интенсивности q . Данное предположение хорошо согласуется с моделью реального сустава, в котором имеющаяся смазка обеспечивает равномерное гидростатическое давление по всей поверхности сустава и не допускает непосредственного контакта в суставе трущихся поверхностей [2–5].

Если есть двумерное блуждание, то будут сдвигающие нагрузки, при этом будет коэффициент K_2 . При действии постоянной антисимметричной нагрузки на берегах трещины, т.е. сдвигающего усилия $S(x, 0) = -p_2 = \text{const}$ и обобщенной перерезывающей силы $Q_y(x, 0) = -p_4 = \text{const}$, коэффициенты интенсивности имеют вид [6]

$$K_2 = p_2 \sqrt{l} (1 + \pi\lambda^2/32 + (\lambda^4/1024)(\pi^6 - 6 + 24\ln(\lambda\gamma_0/4)) + (p_4 l \sqrt{l} / h)[\lambda^2 \sqrt{3(1 - \nu^2)} / 32(3 + \nu)](1 - \pi\lambda^2/16) + O(\lambda^6 \ln \lambda),$$

$$K_4 = - [p_2 h \sqrt{l} / \sqrt{3(1 - \nu^2)}] (\lambda^2/64)[(5 - \nu + \pi\lambda^2(9 - \nu)/32] + (p_4 l \sqrt{l} / 2)(1 + (\lambda^4(3 - \nu)/[512(3 + \nu)])(1 + 4\ln(\lambda\gamma_0/4))) + O(\lambda^6 \ln \lambda).$$

Трещина имеет длину $2l$, сфера – радиус R , ν – коэффициент Пуассона, λ – малый параметр, характеризующий относительное расстояние между трещинами $\lambda = 2l/d = 0,5$ (чаще всего, вообще $0 \leq \lambda \leq 5,5$), d – расстояние между центрами трещинами, $\ln\gamma_0 = 0,5772$ – постоянная Эйлера, h – толщина оболочки. Произведем

численные оценки для модели головки тазобедренного сустава. Эти коэффициенты удовлетворяют определенным условиям разрушения, после чего трещина начнет развиваться по криволинейной траектории:

$$\theta = 2\text{arctg}[(k_1 - \sqrt{k_1^2 + 8k_2^2}) / (4k_2)].$$

Уравнение предельного равновесия при этом запишется в виде $\cos^3(\theta/2)(k_1 - 3k_2 \text{tg}(\theta/2)) = k_1$, где $k_1 = K_1 / \sqrt{\pi}$ связан с коэффициентом сноса, а $k_2 = K_2 / \sqrt{\pi}$ – с коэффициентом диффузии. Если $k_2 \neq 0$, то трещина флуктуирует.

При ходьбе есть сдвиговые нагрузки (см. рисунок 1). При действии на берега трещины постоянной самоуравновешенной нагрузки $\sigma_{y^{\pm}} - i\tau_{xy^{\pm}} = -s = \text{const}$, где $\sigma_{y^{\pm}}, \tau_{xy^{\pm}}$ – компоненты тензора напряжений, знаками «+» и «-» отмечены граничные значения.

Коэффициенты интенсивности входят в выражение $k_1^{\pm} - ik_2^{\pm} = s \sqrt{l}$, и в этом случае они равны:

$$k_1 = \frac{P\sqrt{l}}{\pi(1 + \chi)\sqrt{b^2 + l^2}} (1 + \chi + 2b^2/(b^2 + l^2));$$

$$k_2 = \frac{Q\sqrt{l}}{\pi(1 + \chi)\sqrt{b^2 + l^2}} (1 + \chi - 2b^2/(b^2 + l^2)),$$

где P и Q – сосредоточенные нормальная и сдвигающая силы соответственно; χ – упругая постоянная, $\chi = 3 - 4\nu$ – для плоской деформации, $\chi = (3 - \nu)/(1 - \nu)$ – для обобщенного плоского напряженного состояния.

Результаты. Проведем численные оценки коэффициентов интенсивности усилий для модели сферического сустава-шарнира модели экзоскелета (рисунок 2). Возьмем числовые данные для человека, использованные и полученные ранее [7].

На всех рисунках синяя линия соответствует хрящевой ткани головки тазобедренного сустава, коричневая – костной ткани в модели двухкомпонентной оболочки.

Рассмотрим поведение материалов сустава ткани при нагрузках, соответствующих движениям опорно-двигательного аппарата человека. Нагрузки получим из результатов численного моделирования [7]. В этом случае имеется еще дополнительно зависимость коэффициентов интенсивности от времени, поэтому получаем трехмерные графики (рисунки 3, 4).

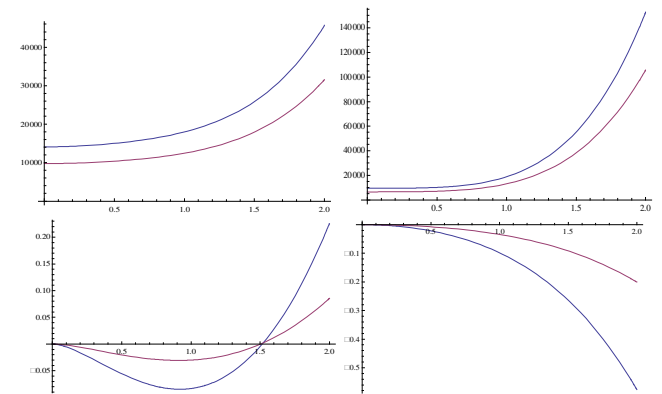


Рисунок 2 – Зависимость коэффициентов интенсивности усилий K_1, K_2, K_3, K_4 , от относительного расстояния между трещинами λ

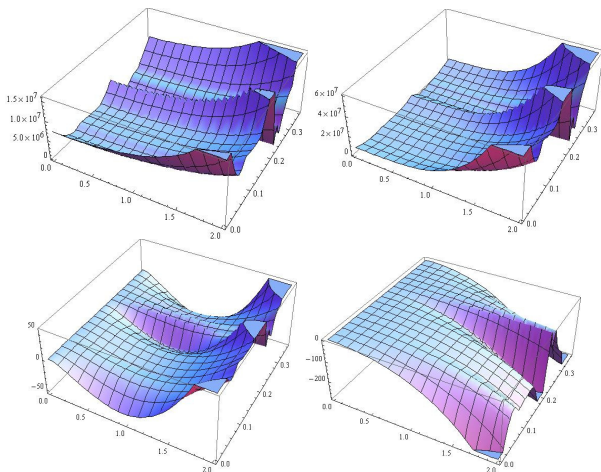


Рисунок 3 – Зависимость коэффициентов интенсивности усилий для хрящевой ткани K_i ($i = 1, \dots, 4$) от относительного расстояния между трещинами при переменной нагрузке, изменяющейся с течением времени при ходьбе человека

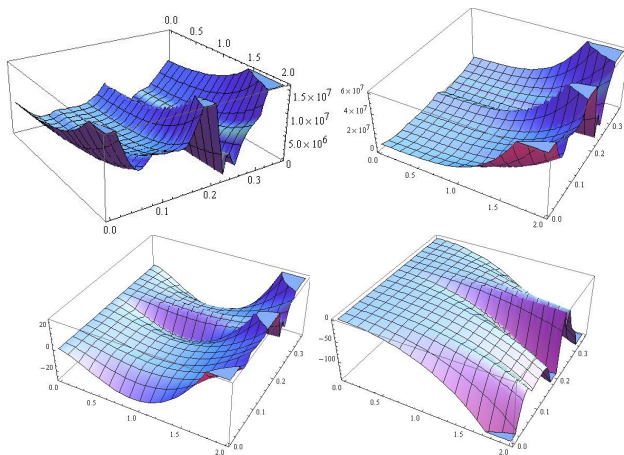


Рисунок 4 – Зависимость коэффициентов интенсивности усилий для костной ткани K_i ($i = 1, \dots, 4$) от относительного расстояния между трещинами при переменной нагрузке, изменяющейся с течением времени при ходьбе человека

Получено 28.04.2016

A. V. Chigarev, A. V. Borisov. Description of the growth of microcracks in the hip joint of the person.

The aim of this study is the calculation of the coefficients of intensity of efforts and moments about the top Meridian cracks in the spherical shell of the hinge-joint in the case when the crack is applied uniformly distributed forces and moments for a symmetrical stress distribution on the crack line.

It is assumed that a closed shell is loaded with uniform internal pressure of intensity q . This assumption is in good agreement with the model of the real joint, in which, as indicated above, the existing grease provides uniform hydrostatic pressure over the entire surface of the joint and prevents direct contact in the joint rubbing surfaces.

Numerical evaluation of the coefficients of intensity of effort to model a spherical joint-hinge model of the exoskeleton. Numerical data taken for a real person.

The dependences obtained for all intensity factors show that the more loaded the cartilage and it has more resources to recover, i.e. when healing of cracks, in contrast to bone tissue. The greater the initial distance between the cracks, the larger the values of the coefficients of intensity possible.

Выводы. По результатам расчетов видно, что зависимость от времени носит циклический характер. Зависимости для всех коэффициентов интенсивности показывают, что больше нагружается хрящевая ткань и она имеет больший ресурс к восстановлению, т.е. заживанию при возникновении трещин, в отличие от костной ткани. Чем больше начальное расстояние между трещинами, тем большие значения коэффициентов интенсивности возможны.

Список литературы

- 1 **Гаврюшенко, Н. С.** Материаловедческие аспекты создания эрозионностойких узлов трения искусственных суставов человека : дис. ... д-ра техн. наук / Н. С. Гаврюшенко. – М., 2000. – 234 л.
- 2 **Морейнис, И. Ш.** Биомеханический анализ ходьбы в норме и на протезах / И. Ш. Морейнис, Г. П. Гриценко, С. Г. Левит // Протезирование и протезостроение. – М. : ЦНИИПП, 1971. – Вып. 26. – С. 7–16.
- 3 A method for defining flow and rheological constants of viscoplastic biomaterials : Part 2 / S. V. Shilko, S. L. Gavrilenko, V. F. Khizhenok, I. N. Stakan, S. P. Salivonchik // Russian Journal of Biomechanics. – 2003. – Vol. 7. – № 2. – P. 11–23.
- 4 **Chernous, D. A.** Modelling of contractive activity of the muscle tissue / D. A. Chernous, S. V. Shilko // Russian Journal of Biomechanics. – 2006. – Vol. 10. – № 3. – P. 53–62.
- 5 **Gavrilenko, S. L.** A method for determining flow and rheological constants of viscoplastic biomaterials : Part 1 / S. L. Gavrilenko, R. A. Vasin, S. V. Shilko // Russian Journal of Biomechanics. – 2002. – Vol. 6. – № 3. – P. 92–98.
- 6 **Панасюк, В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дащышин. – Киев : Наукова думка, 1976. – 443 с.
- 7 **Борисов, А. В.** Динамика эндо- и экзоскелета : [моногр.] / А. В. Борисов. – Смоленск : Смоленская городская типография, 2012. – 296 с.