4. Предложенные уравнения могут быть использованы для расчета и оценки неравномерности нагрева заготовок в вертикальных промышленных циклонных нагревательных устройствах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С а б у р о в, Э. Н. Циклонные нагревательные устройства с интенсифицированным конвективным теплообменом / Э. Н. Сабуров. – Архангельск: Сев.-Зап. кн. изд-во, 1995. – 341 с.
2. О с о б е н н о с т и обтекания и теплоотдачи цилиндра, смещенного с оси циклонного потока / Ю. Л. Леухин [и др.] // Проблемы энергетики… (Изв. высш. учеб. заведений). – 2008. – № 3–4. – С. 20–31.
3. Л е у х и н, Ю. Л. Особенности обтекания цилиндра, смещенного с аэродинамической оси циклонного потока / Ю. Л. Леухин, Э. Н. Сабуров, Д. В. Васильев // Энергетика… (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 1999. – № 3. – С. 56–62.

Представлена кафедрой
теплотехники № 14 Поступила 07.07.2008

УДК 621.1

АНАЛИЗ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД

Докт. техн. наук, проф. ЕСЬМАН Р. И., БОНДАРЕНКО Ю. В.

Белорусский национальный технический университет,
ОДО «ЭНЭКА»

Процессы распространения теплоты в сплошной среде подчиняются закону Фурье и описываются следующим дифференциальным уравнением теплопроводности, устанавливающим связь между пространственным и временным изменениями температуры тела:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\kappa \operatorname{grad} T\right) + f.$$

Для решения данного дифференциального уравнения необходимо знать распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (временные условия однозначности), геометрическую форму тела и закон теплового взаимодействия между поверхностью тела и окружающей средой (пространственные условия однозначности). Для анизотропных сред каждый характеризующий среду физический параметр – теплопроводность, плотность и теплоемкость – представляется в виде тензора второго ранга. Например, соотношение для тензора теплопроводности в декартовой системе координат имеет вид [1]

$$\begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} \end{pmatrix}.$$

Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности в обобщенных координатах перепишется в следующем виде:

$$c(x_i)\rho(x_i)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\kappa_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + f(x_i).$$

Решение уравнения теплопроводности определяется с точностью до некоторой произвольной функции. Для устранения произвольности задаются краевые условия, включающие начальные и граничные условия. Рассмотрим постановку краевых условий при определении температурного поля цилиндрического тела

$$\Phi = \Omega T = \left(\left\{x_i\right\} \in \Omega,\ t \in T\right).$$

Краевые условия на основаниях цилиндра соответствуют начальным условиям при $t = 0$ или $t = t_0$ на границе цилиндра, $\partial\Omega$ – граничным условиям. Более сложные условия могут определяться в произвольном сечении цилиндра. В случае учета конечности распространения теплоты в среде необходимо задавать два условия по времени для гиперболического уравнения теплопроводности.

Для численного решения уравнений необходимо выполнение следующих корректно поставленных условий [2]:

- решение задачи существует;
- решение единственное;
- решение непрерывно зависит от коэффициентов в уравнении, граничных и начальных условий.

Рассмотрим граничные и начальные условия для уравнения теплопроводности. При численном решении задачи будем использовать сетку с границей вдоль оси y в ортогональной системе координат (рис. 1).

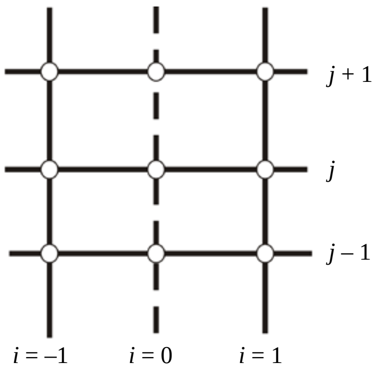

Рис. 1. Пространственный шаблон на границе сред

Среди граничных условий для уравнения теплопроводности выделяются четыре основных.

Граничные условия первого рода (условие Дирихле) состоят в задании температурного поля на границе цилиндра $\partial\Omega$

$$T(x_{0i},t)=\tau(x_{0i},t),\ (x_{0i})\in\partial\Omega.$$

Для приближенного представления на сетке имеем

$$T_0^j=T_{-1}^j=\tau_0.$$

Граничные условия второго рода (условия Неймана) состоят в задании теплового потока на границе цилиндра $\partial\Omega$.

Для изотропной среды:

$$\kappa\frac{\partial T(x_{0i},t)}{\partial n}=q(x_{0i},t),\ (x_{0i})\in\partial\Omega;$$

$$\kappa\frac{T_0^j-T_{-1}^j}{h_x}=q_0,$$

где h_x – шаг сетки вдоль оси X.

Для анизотропной среды

$$\kappa_{ij}\frac{\partial T(x_{0i},t)}{\partial x_j}\cos(n,x_i)=q(x_{0i},t),(x_{0i})\in\partial\Omega.$$

Для двумерного случая в ортогональной системе координат:

$$\kappa_{xx}\frac{T_{-1}^j-T_0^j}{h_x}+\kappa_{xy}\frac{T_0^{j-1}-T_0^j}{h_y}=q_{0x};$$

$$\kappa_{yx}\frac{T_{-1}^j-T_0^j}{h_x}+\kappa_{yy}\frac{T_0^{j-1}-T_0^j}{h_y}=q_{0y},$$

где h_x, h_y – шаг сетки вдоль осей.

Граничные условия третьего рода характеризуют закон конвективного теплообмена на границе цилиндра $\partial\Omega$.

Для изотропной среды

$$\kappa\frac{\partial T\left(x_{0i},t\right)}{\partial n}+\alpha\left(T-T_c\right)=0,\left(x_{0i}\right)\in\partial\Omega.$$

Для анизотропной среды

$$\kappa\frac{T_0^j-T_1^j}{h_x}+\alpha\left(T_0^j-T_c\right)=0.$$

Для двумерного случая анизотропной среды:

$$\kappa_{xx}\frac{T_0^j-T_1^j}{h_x}+\kappa_{xy}\frac{T_0^{j-1}-T_0^j}{h_y}+\alpha\left(T_0^j-T_c\right)=0;$$

$$\kappa_{yx}\frac{T_0^j - T_1^j}{h_x} + \kappa_{yy}\frac{T_0^{j-1} - T_0^j}{h_y} + \alpha\left(T_0^j - T_c\right) = 0.$$

Граничные условия четвертого рода характеризуют условия сопряженности сред в случае нестационарного температурного поля.

В случае теплового контакта двух сред необходимо задавать условия сопряженности на границе контакта. Для идеального контакта двух сред выполняются следующие условия сопряженности:

- непрерывность температуры:

$$T - T_0 = 0;$$

$$T_{-1}^j - T_0^j = 0;$$

- непрерывность теплового потока:

$$\kappa\frac{\partial T(x_{0i}, t)}{\partial n} = \kappa_0\frac{\partial T_0\left(x_{0i}, t\right)}{\partial n};$$

$$\kappa\frac{T_0^j - T_{-1}^j}{h_x} = \kappa\frac{T_1^j - T_0^j}{h_x}.$$

В ряде случаев тепловой контакт сопровождается радиационно-конвективным теплообменом на границах раздела сред и приходится решать сопряженную задачу.

Граничные условия с учетом теплового излучения в приближении абсолютно черного тела и с учетом конвективного теплообмена на границе раздела сред (твердое тело – жидкость, тело – тело, жидкость – жидкость) формулируются следующим образом:

$$\kappa\frac{\partial T\left(x_{0i}, t\right)}{\partial n} + \alpha\left(T - T_c\right) + \sigma\left(T - T_c\right)^4 = 0,\ \left(x_{0i}\right) \in \partial\Omega.$$

Для изотропной среды

$$\kappa\frac{T_0^j - T_1^j}{h_x} + \alpha\left(T_0^j - T_c\right) + \sigma\left(T_0^j - T_c\right)^4 = 0.$$

Для двумерного случая анизотропной среды:

$$\kappa_{xx}\frac{T_0^j - T_1^j}{h_x} + \kappa_{xy}\frac{T_0^{j-1} - T_0^j}{h_y} + \alpha\left(T_0^j - T_c\right) + \sigma\left(T_0^j - T_c\right)^4 = 0;$$

$$\kappa_{yx}\frac{T_0^j - T_1^j}{h_x} + \kappa_{yy}\frac{T_0^{j-1} - T_0^j}{h_y} + \alpha\left(T_0^j - T_c\right) + \sigma\left(T_0^j - T_c\right)^4 = 0.$$

В случае фазовых превращений граничные условия на границе раздела фаз описываются условиями Стефана [3]:

$$T - T_0 = 0;$$

$$T_{-1}^j - T_0^j = 0;$$

$$\kappa \frac{\partial T(x_{0i}, t)}{\partial n} - \kappa_0 \frac{\partial T_0\left(x_{0i}, t\right)}{\partial n} = -E v_n;$$

$$\kappa \frac{T_0^j - T_{-1}^j}{h_x} - \kappa \frac{T_1^j - T_0^j}{h_x} = -E v_n,$$

где $v_n = \dfrac{d\xi}{dt}$ – скорость движения границы раздела фаз; E – энтальпия фазового перехода.

При изменении фазового состояния вещества могут меняться не только теплофизические характеристики, но и, например, оптические. В таком случае могут изменяться условия сопряженности на границах сред. Например, при изменении прозрачности среды теплообмен будет осуществляться не только через контакт, но и посредством излучения через прозрачную стенку:

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial n} + \kappa_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial n} + \sigma(T_1 - T_3)^4 = 0, \, (x_i) \in \partial\Omega;$$

$$\kappa_1 \frac{\widehat{T}_0^j - \widehat{T}_{-1}^j}{h_x} + \kappa_2 \frac{\breve{T}_1^j - \breve{T}_0^j}{h_x} + \sigma\left(\widehat{T}_0^j - \breve{T}_n\right)^4 = 0.$$

ВЫВОД

Проведен анализ начальных и граничных условий для нестационарного уравнения теплопроводности в случае изотропной и анизотропной сред. Особое внимание уделяется нелинейным граничным условиям, обусловленным фазовыми превращениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у, Л. Д. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 7. – 247 с.

2. С а м а р с к и й, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

3. П о л я н и н, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.

Представлена кафедрой
промтеплоэнергетики и теплотехники

Поступила 06.06.2008