УДК 51.7

В.М. РОМАНЧАК, М.А. ГУНДИНА

ВЫДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОМПОНЕНТЫ РАЗЛОЖЕНИЕМ ПО СИНГУЛЯРНЫМ ВЕЙВЛЕТАМ

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

В работе предлагается применять дискретное вейвлет-преобразование с сингулярным вейвлетом для выделения периодической составляющей из сигнала. Традиционно считается, что для базисного вейвлета должно выполняться условие допустимости (среднее значение вейвлета равно нулю). Для сингулярных вейвлетов условие допустимости не выполняется. В качестве сингулярного вейвлета можно использовать дельтаобразные функции, которые участвуют в оценках Парзена-Розенблатта, Надарая-Ватсона. С помощью сингулярного вейвлета определяется дискретное вейвлет-преобразование. Подобное преобразование изучалось нами ранее для непрерывного случая. Были получены теоретические оценки скорости сходимости суммы вейвлет-преобразований; предложены различные варианты и дано теоретическое обоснование применению метода сингулярных вейвлетов; сформулированы достаточные условия равномерной сходимости суммы вейвлет-преобразований. Показано, что с помощью вейвлет-преобразования можно решать задачу непараметрической аппроксимации функции. Разложение по сингулярным вейвлетам является новым методом и в настоящее время отсутствуют примеры его приложения к решению прикладных задач. В данной работе анализируются возможности метода сингулярных вейвлетов. Сделано предположение, что в некоторых случаях из сигнала можно выделить медленную и быструю компоненту, и такая гипотеза подтверждается численным решением реальной задачи. Аналогичный анализ проводится и с помощью параметрического уравнения регрессии, которое позволяет выделить периодическую составляющую из сигнала. Сравнение результатов расчетов подтверждает, что непараметрическая аппроксимация, основанная на сингулярных вейвлета, и применение параметрической регрессия может приводить к аналогичным результатам.

Ключевые слова: *вейвлет, вейвлет-преобразование, окно Парзена-Розенблатта, непараметрическая аппроксимация, ядерная оценка Надарая-Ватсона.*

Введение

В литературе, посвященной изучению обработки сигналов, представляют интерес алгоритмы, которые позволяют раскладывать сигнал на составляющие. Один из подходов к решению этой проблемы – это предварительное разложение исходного сигнала на более простые составляющие (вейвлеты). Такой подход нашел широкое применение (А. Гроссмана и Ж. Морле [1], А. Хаара [2], А. Кальдерона [3], И. Добеши [4]). В настоящее время классические вейвлеты применяются в задачах распознавания образов; при обработке и синтезе различных сигналов.

Наряду с классическими вейвлетами, для которых среднее значение на всей числовой равно нулю, можно рассматривать и сингулярные вейвлеты для которых среднее значение на числовой оси равно единице [5–7]. С помощью сингулярных вейвлетов удобно представлять сигнал как сумму вейвлетов, которые содержат разные масштабные постоянные. Достоинством такого подхода является простой числовой алгоритм и естественная интерпретация полученной информации о сигнале.

Основные определения

Пусть для функции y(x) выполняется условие на бесконечности

$$|\psi(x)| \le \frac{d}{1+x^2}, \tag{1}$$

где d – некоторая положительная константа и для функции $\psi(x)$ существует конечное среднее значение C_ψ:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)\,d\tau. \tag{2}$$

Из условий (1) и (2) следует, что функция $\psi(x)$ принадлежит пространству $L^1(R)$. Функцию $\psi(x)$ назовем *базисным вейвлетом*.

Обычно для базисного вейвлета должно выполняться условие допустимости: среднее, определяемое по формуле (2), должно равняться нулю: $C_\psi = 0$. Если считать, что для вейвлета среднее не равно нулю ($C_\psi \neq 0$), то такой базисный вейвлет будем называть сингулярным [5–6]. Например, сингулярным вейвлетом является функция плотности нормального распределения. Будем считать, что среднее значение сингулярного вейвлета равно единице: $C_\psi = 1$. Для бесконечного промежутка вейвлет-преобразование определяется по формуле [7]:

$$W(f)(x,a_0) = \frac{1}{a_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\psi\left(\frac{\tau - x}{a_0}\right)d\tau, \quad (3)$$

где a_0 – масштаб преобразования, $a_0 > 0$.

Фактически вейвлет-преобразование осуществляет сглаживание функции. Если определено вейвлет-преобразование (3), то для функции $f(x)$ справедливо тождество:

$$f(x) = \frac{1}{a_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\psi\left(\frac{\tau - x}{a_0}\right)d\tau - $$

$$-\frac{1}{a_0}\int_{-\infty}^{\infty} (f(\tau) - f(x))\psi\left(\frac{\tau - x}{a_0}\right)d\tau. \quad (4)$$

Тождество (4) будем называть вейвлет-разложением первого порядка функции $f(x)$. Его можно записать в виде суммы вейвлет-преобразования (3) и невязки первого порядка $F_1(x)$:

$$f(x) = W(f)(x,a_0) + F_1(x). \quad (5)$$

где $F_1(x) = W(f(x) - f)(x,a_0)$. Если выполнить вейвлет-разложение остаточного члена $F_1(x)$ в формуле (5) с масштабом a_1 и подставить в формулу (5), получим вейвлет-разложение функции $f(x)$ второго порядка:

$$f(x) = W(f)(x,a_0) + WF_1(x,a_1) + F_2(x). \quad (6)$$

где $F_2(x) = W(F_1(x) - F_1)(x,a_2)$ – невязка второго порядка.

Выражение (6) является тождеством, в котором остаточный член $F_2(x)$ определяет степень точности, с которой можно заменить функцию $f(x)$ суммой двух вейвлет-преобразований. Аналогично можно получить вейвлет-разложение произвольного порядка. Введение сингулярных вейвлетов расширяет возможности теории вейвлетов и ядерных оценок типа Надарая – Ватсона [8–9].

По аналогии с непрерывным вейвлет преобразованием (3) определим дискретное вейвлет-преобразование функции $f(x)$ по формуле:

$$W(x,a) = \frac{1}{C(x,a)}\sum_{i=0}^{n} f(\tau_i)\psi\left(\frac{\tau_i - x}{a}\right). \quad (7)$$

где $C(x,a) = \sum_{i=0}^{n}\psi\left(\frac{\tau_i - x}{a}\right)$. Тогда для вейвлет-преобразования (7) справедливо вейвлет-разложение (5). Областью определения вейвлет-преобразования $W(f)(x,a)$ является вся действительная ось, а остаточный член $F_1(x)$ определен в точках разбиения $x \in \{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n\}$.

Алгоритм дискретной аппроксимации функции

Рассмотрим алгоритм дискретной аппроксимации функции на примере функции, для которой не выполняются условия Липшица. Пусть значения τ_i, $i = 1, \ldots, n$ принадлежат интервалу $[-1, 1]$, и известны значения функции $y_i = f(\tau_i)$ в этих точках.

Присваиваем начальные значения y_i коэффициентам вейвлета нулевого порядка:

$$F_{0,i} = y_i,\ i = 1, \ldots, \text{n}. \quad (8)$$

Вычисляем коэффициенты вейвлет-преобразования, используя дискретный аналог формул (5), (6):

$$F_{k+1,i} = F_{k,i} - WF_k(\tau_i, a_k), \quad (9)$$

где $k = 1, \ldots K$; $F_{k,j}$ – значения коэффициентов вейвлета k-го порядка, $a_k = \alpha 2^{-k}$, α – постоянная.

$$WF_k(x,a_k) = \frac{\sum_i F_{k,i}\psi\left(\frac{\tau_i - x}{a_k}\right)}{\sum_i \psi\left(\frac{\tau_i - x}{a_k}\right)}. \quad (10)$$

Восстанавливаем функцию $f_K(x) \approx f(x)$ во всех точках интервала $[A, B]$, используя аналог формулы (9):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{K-1} WF_k(x,a_k) + F_K(x). \quad (11)$$

Выделение периодической компоненты сигнала

Аппроксимацию функцией $f_K(x)$ можно интерпретировать как результат сглаживания данных или как интерполяцию (квази–интерполяцию). Используя различные порядки аппроксимации K, получим различные степени сглаживания функции, которые можно использовать в задаче фильтрации сигнала. Для этого функцию $f_K(x)$ удобно представить в виде суммы двух компонент:

$$f_k(x) = S(x) + T(x), \qquad (12)$$

где $S(x) = \sum_{k=0}^{m} WF_k(x, a_k), T(x) = \sum_{k=m+1}^{K} WF_k(x, a_k).$

Преобразование $WF_k(x, a_k)$ определено по формуле (10). Тогда выполняется равенство $f(x) = S(x) + T(x) + F_{K+1}(x)$. Невязку аппроксимации $F_{K+1}(x)$ в узлах x_i можно найти непосредственно по формуле:

$$F_{K+1}(x_i) = f(x_i) - S(x_i) - T(x_i). \qquad (13)$$

Параметры вейвлет-разложения (13) можно выбрать таким образом, чтобы компонента $S(x)$ изменялась медленно, а компонента $T(x)$ изменялась быстро, и остаток был достаточно мал.

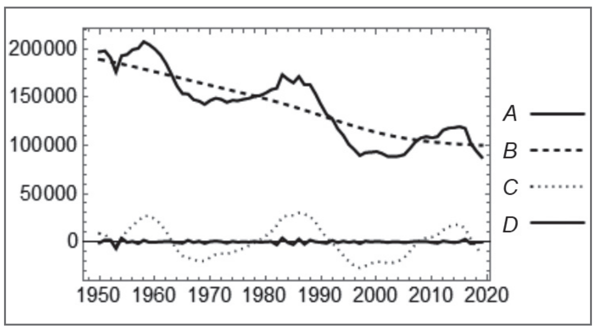
Пример. Сингулярные вейвлеты

Рассмотрим временной ряд рождаемости в Республике Беларусь за период 1950–2019 годы. Пусть τ_i – год, для которого определен уровень рождаемости; y_i – уровень рождаемости за текущий год τ_i. Аппроксимируем дискретный ряд наблюдений $y_1, y_{2, \ldots,} y_n$ непрерывной функцией $f(x)$ такой, что $f(x_i) = y_i$. Функцию $f_K(x)$ используя формулу (12) представим в виде суммы медленной $S(x)$ и быстрой $T(x)$ компонент. Выбраны следующие параметры вейвлет-разложения $m = 1$, $K = 5$, $a_k = 2^{-k}$; сингулярный вейвлет $\psi(t) = e^{-t^2}$. Результаты расчетов представлены на рис. 1.

Параметрическая регрессия и сглаживание

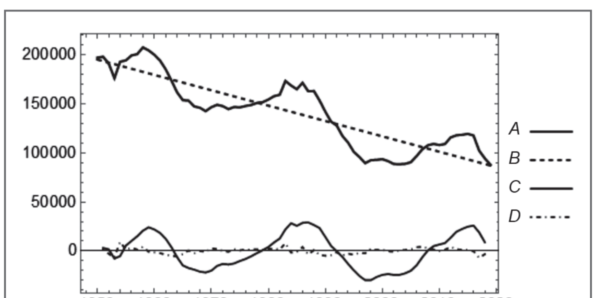
Рассмотрим процедуру разложения этого же временного ряда в системе *Mathematica*, используя классический регрессионный анализ. Под разложением временного ряда будем понимать разделение его на систематическую и периодическую составляющие. Построим график периодической и систематической составляющей временного ряда, используя аддитивную модель и встроенные функции системы *Mathematica* [10]. Аппроксимирующую кривую в системе *Mathematica* по методу наименьших квадратов можно получить, используя команду *Fit*[*data*, {1, *x*}, *x*]. Соответствующая кривая *B* представлена на рис. 2.

Для определения коэффициента детерминации использована опция *RegressionReport*->{*RSquared*} функции *Regress*. Данная функция реализована в пакете «*LinearRegression*», к которому идет обращение в системе *Mathematica*. Коэффициент детерминации для линейного тренда равен 0,76. Для многочлена второго, третьего и четвертого порядка соответственно 0,77; 0,78 и 0,80. При этом применение многочленов второй, третьей степени не существенно увеличивает коэффициент детерминации, а выбор многочлена четвертой степени приводит к периодическим колебаниям в уравнении регрессии, поэтому ограничимся линейной аппроксимацией. Затем находим разность ординат исходного графика *A* и графика *B*. Для оценки периодической трендовой составляющей использован метод сглаживания разности кривых *A* и *B*. В результате вычисления простого скользящего среднего используя функцию *MovingAverage*, получена кривая *C*, представленная на рис. 2.



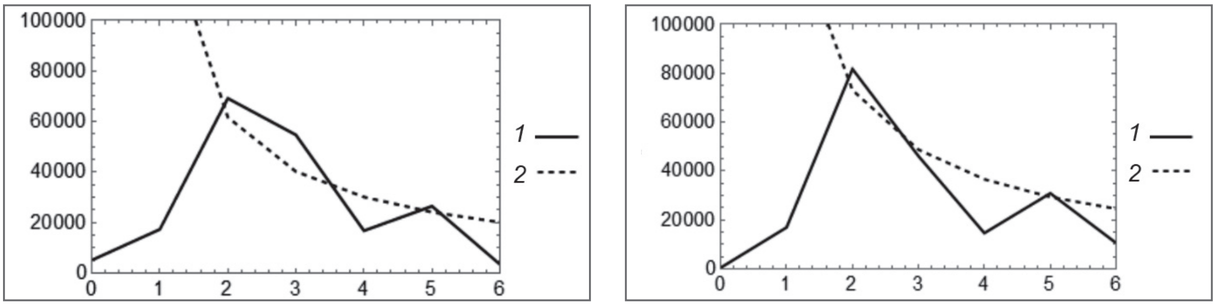
A – исходные данные y_i; *B* – медленная компонента *S(x)*; *C* – быстрая компонента *T(x)*; *D* – остаток

Рис. 1. Компоненты *f(x)*, построенные с применением сингулярных вейвлетов



A – исходные данные y_i; *B* – линейный тренд *S(x)*; *C* – периодическая составляющая *T(x)*, D – остаток

Рис. 2. Компоненты f(x), построенные на основе линейной регрессии



1 – спектр $T(x)$; 2 – спектр $S(x)$

Рисунок 3.– Амплитудный спектр для компонент, полученных с помощью сингулярных вейвлетов (слева), и с помощью применение линейного тренда и скользящего среднего (справа)

Дополнительно проведем спектральный анализ Фурье исходных данных и быстрой (периодической) компоненты.

Как видно из рис. 3, спектральный анализ исходных данных не обнаружил периодическую аддитивную компоненту. Спектр быстрой компоненты указывает на наличие периодической составляющей с периодом равным приблизительно 35 лет.

Заключение

В работе изучаются свойства вейвлет-преобразований на конечном промежутке. Показано, что вейвлет-преобразования можно использовать для аппроксимации функциональных зависимостей. Сформулированы и доказаны достаточные условия сходимости ряда вейвлет-преобразований. В качестве примера проведено исследование показателя рождаемости за определенный временной период.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Grossman, A.** Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related tranforms // A. Grossman, J. Morlet / Lectures on Recent Results Grossman, A. Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related tranforms.– 1985.– V.1.– P. 135–165.
2. **Haar, A.** Zur Theorie der orthogonalen Funktionsysteme / A. Haar.– Math.Ann.– 1910.– V.69.– P. 331.
3. **Meyer, Y.** Wavelets: Algorithms and applications // Y. Meyer // S.I.A.M.– 1993.– V.36.– P. 526–528.
4. **Добеши, И.** Десять лекций по вейвлетам. / И. Добеши. Ижевск: НИЦ РХД, 2001.– 464 с.
5. **Романчак, В.М.** Аппроксимация сингулярными вейвлетами/ В.М. Романчак // Системный анализ и прикладная информатика,–2018. -№ 2 – С. 23–28.
6. **Романчак, В.М.** Аппроксимация экспертных оценок сингулярными вейвлетами / В.М. Романчак, П.М. Лаппо // Вестник Гродненского гос.ун. Сер. 2: Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление,–2017.–Т. 7, № 1.–С.132–139.
7. **Романчак В.М.** Сингулярные вейвлеты на конечном интервале/ В.М. Романчак // Информатика.– 2018. № 15(4).– С. 39–49.
8. **Надарая, Э.А.** Об оценке регрессии / Э.А. Надарая // Теория вероятностей и ее применение.–1964.– Т. 9, № 1.– С. 157–159.
9. **Watson, G.S.** Smooth regression analysis / G.S. Watson // Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Ser. A.–1964.– Vol. 26,– P. 359–372.
10. **Coghlan, A.** A little book of R for time series [Электронный ресурс].– Режим доступа: https://buildmedia.readthedocs.org/media/pdf/a-little-book-of-r-for-time-series/latest/a-little-book-of-r-for-time-series.pdf.– Дата доступа: 2.05.2020.

REFERENCES

1. **Grossman A.** Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related transforms. Lectures on Recent Results Grossman, 1985, vol. 1, pp.135–165.
2. **Haar A.** Zur Theorie der orthogonalen Funktionsysteme. Math.Ann, 1910, vol. 69, pp. 331.
3. **Meyer Y.** Wavelets: Algorithms and applications. S.I.A.M, 1993, vol. 36, pp. 526–528.
4. **Dobeshi I.** Desjat' lekcij po vejvletam. Ten lectures on wavelets. Izhevsk, SRC «RCD», 2001, 464 p. (in Russian).
5. **Romanchak V.M.** Approksimacija singuljarnymi vejvletami. Approximation by singular wavelets. System analysis and applied informatics, 2018, no. 2, pp. 23–28. (in Russian).
6. **Romanchak V.M., Lappo P.M.** Approksimacija jekspertnyh ocenok singuljarnymi vejvletami. Approximation of expert estimates by singular wavelets. Bulletin of the Grodno State University, Ser. 2, 2017, vol. 7, no. 1, pp. 132–139. (in Russian).
7. **Romanchak V.M.** Singuljarnye vejvlety na konechnom interval. Singular wavelets on a finite interval. Informatika, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 39–49. (in Russian).

8. **Nadaraya E.A.** Ob ocenke regressii. About Regression Estimation. Probability Theory and Its Application, 1964, vol. 9, no. 1, pp. 157–159. (in Russian).
9. **Watson G.S.** Smooth regression analysis. Sankhya, The Indian Journal of Statistics Nadaraya E.A. Ob ocenke regressii. About Regression Estimation. Probability Theory and Its Application, 1964, vol. 9, no. 1, pp. 157–159. (in Russian).
10. **Coghlan, A.** A little book of R for time series [Electronic resource].– Access Mode: https://buildmedia.readthedocs.org/media/pdf/a-little-book-of-r-for-time-series/latest/a-little-book-of-r-for-time-series.pdf.– Date of access: 2.05.2020.

Поступила	После доработки	Принята к печати
01.08.2020	10.08.2020	01.09.2020

ROMANCHAK V.M., HUNDZINA M.A.

ISOLATION OF A PERIODIC COMPONENT BY SINGULAR WAVELET DECOMPOSITION

The Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

In this paper, we propose to use a discrete wavelet transform with a singular wavelet to isolate the periodic component from the signal. Traditionally, it is assumed that the validity condition must be met for a basic wavelet (the average value of the wavelet is zero). For singular wavelets, the validity condition is not met. As a singular wavelet, you can use the Delta-shaped functions, which are involved in the estimates of Parzen-Rosenblatt, Nadaraya-Watson. Using singular value of a wavelet is determined by the discrete wavelet transform. This transformation was studied earlier for the continuous case. Theoretical estimates of the convergence rate of the sum of wavelet transformations were obtained; various variants were proposed and a theoretical justification was given for the use of the singular wavelet method; sufficient conditions for uniform convergence of the sum of wavelet transformations were formulated. It is shown that the wavelet transform can be used to solve the problem of nonparametric approximation of the function. Singular wavelet decomposition is a new method and there are currently no examples of its application to solving applied problems. This paper analyzes the possibilities of the singular wavelet method. It is assumed that in some cases a slow and fast component can be distinguished from the signal, and this hypothesis is confirmed by the numerical solution of the real problem. A similar analysis is performed using a parametric regression equation, which allows you to select the periodic component of the signal. Comparison of the calculation results confirms that nonparametric approximation based on singular wavelets and the application of parametric regression can lead to similar results.

Keywords: *wavelet, wavelet transform, parsen window–Rosenblatt, nonparametric approximation, nuclear assessment Nadaraya-Watson.*

Романчак Василий Михайлович, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры «Инженерная математика», Белорусский национальный технический университет, Минск. Телефон 8–029–6323422.
E-mail: Romanchak@bntu.by.

Гундина Мария Анатольевна, кандидат физ.-мат., доцент кафедры «Инженерная математика», Белорусский национальный технический университет, Минск. Телефон 8–029–5030786.
E-mail: hundzina@bntu.by.