

УДК 621.1

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕЛАХ

Докт. техн. наук, проф. ЕСЬМАН Р. И., инж. УСТИМОВИЧ В. А.

*Белорусский национальный технический университет*

Композиционные материалы, в силу своей структуры обладающие уникальными свойствами, широко применяются в современном производстве. В этом ряду значительный интерес вызывают стеновые строительные, тканевые и конструкционные продукты нового класса – волокнистые и многослойные, позволяющие получать изделия с заданными свойствами. Такие материалы типа «сэндвич» применяются в строительном производстве (гипсоволокнистые, гипсокартонные с огнеупорными, водостойкими и другими свойствами).

Использование многослойных материалов с заданным сочетанием физико-механических свойств открывает большие возможности для изготовления изделий и конструкций с повышенными качеством и эксплуатационными характеристиками для различных отраслей народного хозяйства Республики Беларусь. Выбор и комплектация разнородных слоев подобных продуктов обеспечивают получение изделий с набором заданных характеристик: высокопрочных, жаростойких, антикоррозионных и т. п.

Рассмотрим теплофизические особенности процесса теплообмена в многослойной стенке в общей постановке. Отдельные слои могут претерпевать фазовые или химические превращения (отвердевание термореактивных смол, гипсовых наполнителей, испарение или конденсация в пористых теплозащитных материалах). Расчет проводим с учетом фазовых превращений и зависимостей теплофизических характеристик сопряженных тел от температуры.

На рис. 1 приведена схема системы рассматриваемых тел в условиях симметрии. Приняты обозначения: 1 – металлическая или металлокерамическая матрица; 2 – неметаллическое покрытие (керамика, стекло- или базальтоволокнистые материалы); 3 – слой, в котором происходят фазовые или химические превращения (термореактивные смолы, гипс); 4, 5 – неметаллические слои со специальными свойствами (армированный углерод,

термостойкие покрытия и т. д.). Количество и материалы слоев могут быть различными в соответствии со служебными характеристиками и функциональными особенностями многослойной стенки.

Найдем распределение температуры в системе сопряженных тел для каждого момента времени. В этих условиях температурное поле многослойной стенки описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений переноса теплоты (ввиду нелинейности потоков теплоты и граничных условий) с соответствующими краевыми условиями. Изменение температуры по сечению (вдоль координаты  $x$ ) в любой момент времени для каждого слоя многослойной стенки определяется из решения системы дифференциальных уравнений теплопроводности

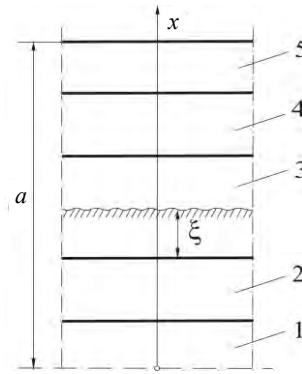


Рис. 1

$$c_i(T_i)\rho_i(T_i)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial x}\right], \quad (1)$$

где  $i$  – индекс, определяющий принадлежность уравнения и параметров к различным слоям многослойной стенки;  $c_i(T_i)$  – удельная теплоемкость  $i$ -го слоя как функция температуры;  $\rho_i(T_i)$  – плотность материала  $i$ -го слоя как функция температуры;  $\lambda_i(T_i)$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя как функция температуры;  $x$  – координата, направленная по нормали к поверхности стенки.

Условия теплового сопряжения на границах слоев (граничные условия IV рода) имеют вид:

$$\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial x} = \lambda_{i-1}(T_{i-1})\frac{\partial T_{i-1}}{\partial x}, \quad (2)$$

$$x = x_i; \quad T_i = T_{i-1}, \quad (3)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $x_i$  – длина сопряжений  $i$ -го и  $(i-1)$ -го слоев.

В соответствии с условием задачи принимаем, что теплообмен на внешней поверхности многослойной стенки происходит по закону Ньютона – Рихмана. Тогда с учетом симметричной модели граничные условия запишутся так:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad (4)$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda(T - T_c) \quad \text{при} \quad x = a. \quad (5)$$

Начальные условия имеют вид

$$T_i(x, 0) = T_{i0} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Для рассматриваемой схемы (рис. 1) для слоя 3 решается задача с фазовыми превращениями с подвижной границей фаз.

На границе раздела фаз (в слое 3) при  $x = \xi$  запишем условия фазового перехода [1]:

$$T'_3 = T''_3 = T_\phi(\xi, t); \quad (7)$$

$$\lambda'_3 \frac{\partial T_3(\xi, t)}{\partial x} - \lambda''_3 \frac{\partial T_3(\xi, t)}{\partial x} = \rho_3 r \frac{d\xi}{dt} \quad \text{при } x = \xi, \quad (8)$$

где  $T_\phi$  – температура фронта фазовых превращений;  $\rho_3$  – плотность материала;  $r$  – удельная теплота фазового перехода.

Линейный источник при координате  $x = \xi$  представим с помощью  $\delta$ -функции Дирака. При этом воспользуемся основным свойством  $\delta$ -функции [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - \xi) dx = f(\xi). \quad (9)$$

Для решения задачи фазового перехода применяется метод сглаживания:  $\delta$ -функция заменяется  $\delta$ -образной функцией  $\delta(T - T_\phi, \Delta)$ , отличной от нуля лишь на интервале  $(T_\phi - \Delta, T_\phi + \Delta)$  и удовлетворяющей условию нормировки:

$$\int_{T_\phi - \Delta}^{T_\phi + \Delta} \delta(T - T_\phi, \Delta) dT = 1. \quad (10)$$

Сглаживая на интервале  $(T_\phi - \Delta, T_\phi + \Delta)$  функции  $\delta'_3(T)$ ,  $\delta''_3(T)$ ,  $c'_3(T)$ ,  $\lambda'_3(T)$ ,  $\lambda''_3(T)$ , например, при линейной зависимости между значениями в твердой фазе при  $T < T_\phi - \Delta$  и в жидкой фазе при  $T > T_\phi + \Delta$ , получим квазилинейное уравнение, по форме совпадающее с дифференциальным уравнением (1). Для решения полученного квазилинейного уравнения можно использовать разностные методы.

Из граничных условий (2) видно, что температурные функции на границе слоев не имеют разрывов, а претерпевают разрыв первые производные. Этот факт дает возможность рассматривать систему сопряженных тел как стенку с теплофизическими свойствами, зависящими от координаты и температуры и терпящими разрыв на границе слоев.

Учитывая это обстоятельство, а также вводя безразмерные переменные, перепишем систему дифференциальных уравнений и краевые условия в безразмерных переменных:

$$c(u, x) \rho(u, x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]; \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad (12)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = -au \quad \text{при } x = 1; \quad (13)$$

$$u = (x, 0) = u_0(x), \quad (14)$$

где  $u$  – безразмерная температура, определяется в каждой точке системы в любой момент времени;  $u = \frac{T - T_0}{T_0}$ ;  $x$  – безразмерная координата, пред-

ставляющая отношение текущей координаты к наружному размеру многослойной стенки;  $T_0$  – температура окружающей среды.

Для решения поставленной задачи используем метод сеток. Для численного решения уравнения (11) перейдем к конечно-разностному аналогу. Расчетную область многослойного тела заполним нерегулярной сеткой с узлами  $x_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , причем количество узлов в каждом слое обозначаем через  $n_i$ . Тогда шаг сетки на каждом слое  $h_i = a_i/n_i$ , где  $a_i$  – безразмерная толщина  $i$ -го слоя. Введем в рассмотрение также фиктивную сетку, узлы которой на полшага  $h_i$  сдвинуты к оси, так что границы слоев отстают на полшага от смежных узлов. Обозначим нумерацию узлов сетки от  $-1$  до  $n$ , где  $n = \sum_1^5 n_i$ .

Для конечно-разностной аппроксимации производных в (11) используем четырехточечную неявную схему. Тогда рассматриваемую задачу можно свести к итерационной системе алгебраических уравнений

$$\alpha_i^2 \rho_i c_i \frac{u_i^{/+1} - u_i^/}{\tau} = \frac{1}{h} \left( \lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}^{/+1} - u_i^{/+1}}{h_+} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i^{/+1} - u_{i-1}^{/+1}}{h_-} \right), \quad (15)$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Аналогичным образом проведем аппроксимацию краевых условий на соответствующей сетке. Разностный аналог граничных условий имеет вид:

$$\lambda_{n-\frac{1}{2}} \frac{u_n^{/+1} - u_{n-1}^{/+1}}{h_n} = -\alpha \frac{u_n^{/+1} + u_{n-1}^{/+1}}{2}; \quad (16)$$

$$u_i^0 = \bar{u} \quad \text{при } i = 1, 0, \dots, n-1;$$

$$u_i^0 = 0 \quad \text{при } i = n_1, n+1, \dots, n.$$

Начальные условия запишем следующим образом:

$$u_{-1} = u_0. \quad (17)$$

Теплофизические коэффициенты в выражениях (15), (16) вычисляем по температуре на предыдущем временном слое, взятой в узле сетки при целом индексе и в середине между двумя узлами при половинном индексе.

Количество  $(n+2)$  уравнений (15), (16) определяем  $(n+2)$  неизвестных сеточных функций  $n_i (i = -1, 0, \dots, n)$ . На каждом временном шаге система  $(n+2)$  уравнений (15), (16) решается с помощью прогоночных соотношений:

$$\beta_0 = 1; \quad \gamma_0 = 1;$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}} l(\bar{h}h_+) + \lambda_{i-\frac{1}{2}} l(\bar{h}h_-) + c_i \rho_i \frac{a^2}{\tau}}{\lambda_{i+\frac{1}{2}} l(\bar{h}h_+) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} l(\bar{h}h_-) \beta_i}; \quad (18)$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}} / (\bar{h}h_-) \gamma_i + \frac{\bar{a}^2}{\tau} c_i \rho_i u_i'}{\lambda_{i+\frac{1}{2}} / (\bar{h}h_+)},$$

где  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

$$u_n^{i+1} = \frac{\gamma_n}{1 + \alpha a h_n / \left( 2\lambda_{n-\frac{1}{2}} \right)} - \beta_n$$

$$1 - \alpha a h_n / \left( 2\lambda_{n-\frac{1}{2}} \right)$$

$$u_{i-1}^{i+1} = u_i^{i+1} \beta_i + \gamma_i,$$

где  $i = n, n-1, \dots, 0$ ;

$$h_+ = x_{i+1} - x_i; \quad h_- = x_i - x_{i-1};$$

$$\bar{h} = \frac{h_+ + h_-}{2}; \quad h_n = x_n - x_{n-1}.$$

## ВЫВОД

По результатам численного эксперимента установлен характер распределения температур в сечении многослойной стенки, который определяется геометрическими соотношениями и термическим сопротивлением отдельных слоев стенки. При наличии слоя с фазовыми и химическими превращениями теплота поглощается в основном данным слоем. Температурное поле многослойной стенки в определенной степени зависит также от тепловых условий на поверхностях стенки. Из анализа температурного поля выявлена роль начальных параметров и толщин отдельных слоев стенки.

Набор материалов отдельных слоев обусловлен функциональными особенностями стенки (прочностными, термо- и жаростойкими, антикоррозионными и т. д.) и зависит от эксплуатационных свойств изделий, их служебного назначения.

Универсальность разработанной математической модели и численного метода решения позволяет рассчитывать многослойные изделия с заданными служебными характеристиками для различных отраслей народного хозяйства (энергетической, нефтехимической, машино- и приборостроительной и т. д.).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е с ь м а н, Р. И. Расчеты процессов литья / Р. И. Есьман, Н. П. Жмакин, Л. И. Шуб. – Минск: Вышэйш. шк., 1977. – 264 с.

Представлена кафедрой  
промышленной теплоэнергетики  
и теплотехники

Поступила 10.11.2006