



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

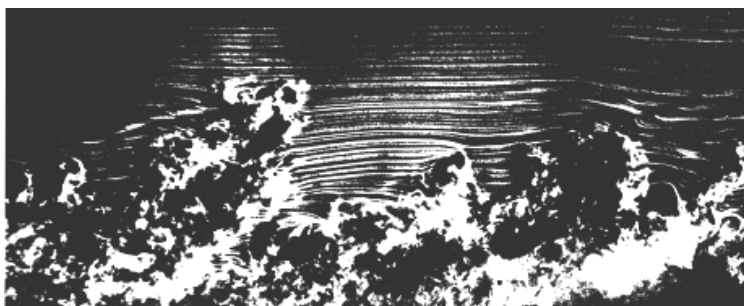
Кафедра кораблестроения и гидравлики

И. В. Качанов
В. В. Кулебякин
В. К. Недбальский

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Курс лекций

Часть 4



Минск
БНТУ
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра кораблестроения и гидравлики

И. В. Качанов
В. В. Кулебякин
В. К. Недбальский

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Курс лекций

В 4 частях

Часть 4

Минск
БНТУ
2014

УДК 532.5 – 533.6

ББК 30.123я7

К30

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *С. П. Фисенко*;

доктор физико-математических наук *В. А. Бабенко*

Качанов, И.В.

К30 **Механика жидкости и газа: курс лекций: в 4 ч. / И. В. Качанов, В. В. Кулебякин, В. К. Недбальский. – Минск : БНТУ, 2010–2014. – Ч. 4. – 58 с. ISBN 978-985-550-014-9 (Ч. 4).**

Издание содержит изложение основных разделов механики жидкости и газа в объеме курса лекций, предусмотренных учебным планом для строительных специальностей БНТУ. Может быть использовано в самостоятельной работе студентов, для подготовки к экзаменам и зачетам, при проведении лабораторных работ и практических занятий, окажет большую помощь студентам других специальностей, изучающим гидравлику.

Издается с 2010 г. Часть 3 настоящего издания вышла в 2012 г. в БНТУ.

УДК 532.5 – 533.6

ББК 30.123я7

ISBN 978-985-550-014-9 (Ч. 4)

ISBN 978-985-525-261-1

© Качанов И. В.,

Кулебякин В. В.,

Недбальский В. К., 2014

© Белорусский национальный
технический университет, 2014

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТЕЙ

1.1. Общие положения

При рассмотрении движения жидких и газообразных сред ряд его параметров (скорость, давление, энергия и т. д.) задается или определяется в виде функциональных зависимостей, опирающихся на фундаментальные физические законы и выраженных, как правило, в виде дифференциальных уравнений. Эти уравнения служат как для выявления качественных особенностей того или иного типа движения, так и для определения численных значений характеризующих его параметров с помощью различных математических операций. Однако зачастую при решении гидромеханических задач приходится сталкиваться с непреодолимыми математическими проблемами, которые пока не позволяют получить аналитические решения, необходимые для инженерной практики. В некоторых случаях вообще отсутствует математическая постановка задачи, поскольку рассматриваемое явление настолько сложно, что для него пока еще нет адекватной модели течения. При этом следует иметь в виду, что любая физико-математическая модель лишь с каким-то приближением описывает поведение изучаемого объекта, а степень этого приближения обусловлена упрощающими предпосылками и гипотезами, которые положены в ее основу. Общий принцип сводится к тому, что с усложнением математической модели какого-либо течения жидкости за счет более полного учета влияющих на него факторов уменьшаются возможности получения точного, имеющего практическое значение решения задачи. Но даже если модель разрешима, т. е. определяющие ее уравнения могут быть проинтегрированы, то считать, что поставленная конкретная задача решена, можно только тогда, когда полученные результаты удовлетворительно согласуются с тем, что наблюдается в реальности. Если модель более-менее адекватно отражает поведение и свойства реального объекта, то ее можно улучшить, т. е. ввести дополнительные факторы, не учтенные ранее.

Вышесказанное подчеркивает определяющую роль экспериментальных исследований в изучении сложных течений жидкостей и газов, особенно в случаях, когда отсутствует адекватная модель того или иного явления. Для правильной реализации эксперимента и

обработки его результатов необходимо вникать в сущность рассматриваемого явления и выполнить общий качественный его анализ. При постановке опыта очень важно дать ответ на вопросы о выборе параметров модели и виде зависимостей, характеризующих исследуемые стороны явления. Этот анализ может быть проведен с использованием теории размерностей и подобия, с помощью которой можно выбрать минимальное число безразмерных параметров, в наиболее удобной форме отражающих основные эффекты изучаемого явления. Следует понимать, однако, что ролью теоретической основы эксперимента применение теории подобия не ограничивается; она дает методы построения оптимальной структуры зависимостей и безразмерных комбинаций входящих в них физических параметров. В начальной стадии изучения сложных явлений теория размерностей иногда является единственно возможным теоретическим методом. С помощью теории размерностей и подобия можно получить особо ценные выводы при рассмотрении явлений, которые зависят от большого числа параметров.

Одно из наиболее удачных определений понятия «подобие» принадлежит академику Л.И. Седову: «Два явления мы называем физически подобными, если по заданным характеристикам одного явления можно получить все характеристики другого явления простым пересчетом, аналогичным переходу от одной системы единиц измерения к другой системе».

В общем случае различают три вида подобия: геометрическое, кинематическое и динамическое. Наиболее простым является подобие геометрическое, требующее, чтобы линейные размеры природы и модели находились в постоянном соотношении, иначе говоря, модель повторяет природу в выбранном масштабе. Если параметры натурального объекта (потока) отметить индексом 1, а модельного – индексом 2, то все линейные размеры геометрически подобных потоков будут связаны соотношением

$$\frac{L_1}{L_2} = k_L,$$

где k_L – линейный масштаб.

В геометрически подобных потоках вышеуказанным соотношением связаны все линейные размеры, в том числе и координаты точек потоков, которые называются сходственными. Если в натурном потоке выбрать его характерный линейный размер (например, диаметр трубы или обтекаемого тела) L_n , а в модельном – соответствующий размер L_m за единицы измерения всех линейных величин, то можно найти отношения

$$\frac{L_1}{L_n} = \bar{L}_1;$$

$$\frac{L_2}{L_m} = \bar{L}_2,$$

которые могут быть (в частности) безразмерными координатами сходственных точек потоков. Можно записать

$$k_L = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_2} \frac{L_n}{L_m} = \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_2} k_L$$

и, следовательно,

$$\frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_2} = 1.$$

Таким образом, безразмерные координаты сходственных точек в натурном и модельном потоках одинаковы.

Обозначим скорости в сходственных точках установившихся потоков как u_i и u_2 , а их проекции на i -ю ось координат соответственно u_{1i} и u_{2i} . Если отношение

$$\frac{u_{1i}}{u_{2i}} = k_{ui}$$

одинаково для любой пары сходственных точек, то такие потоки называются кинематически подобными. Легко показать, что кинематическое подобие потоков предполагает геометрическое подобие их линий тока. Действительно, уравнения линий тока в натурном и модельном потоках (для случая плоского течения)

$$\frac{dx_1}{u_{1x}} = \frac{dy_1}{u_{1y}},$$

$$\frac{dx_2}{u_{2x}} = \frac{dy_2}{u_{2y}},$$

и, если почленно разделить эти уравнения друг на друга, получим

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{dy_1}{dy_2} \frac{u_{1x}}{u_{2x}} \frac{u_{2y}}{u_{1y}} = \frac{dy_1}{dy_2} k_u \frac{1}{k_u} = \frac{dy_1}{dy_2}$$

или

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{dy_1}{dx_1}.$$

Последнее соотношение показывает, что углы наклона касательных к линиям тока для двух потоков одинаковы в сходственных точках, что и определяет геометрическое подобие картины линий тока. Для установившихся течений это будет также геометрическим подобием траекторий движения жидких частиц.

Если потоки неустановившиеся, то условие кинематического подобия должно выполняться в сходственные моменты времени, определяемые соотношениями

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = k_t.$$

Если Δt_1 и Δt_2 – малые интервалы времени, за которые жидкие частицы проходят сходственные отрезки путей, то

$$u_1 = \Delta L_1 / \Delta t_1;$$

$$u_2 = \Delta L_2 / \Delta t_2;$$

$$k_t = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} \frac{u_2}{u_1} = \frac{k_L}{k_u} = \text{const.}$$

Таким образом, в случае неустановившихся потоков, они будут кинематически подобными, если отношение отрезков времени, затрачиваемых жидкими частицами на прохождение сходственных отрезков путей, является постоянной величиной.

Если в кинематически подобных потоках выбрать характерные масштабы скоростей v_1 и v_2 и с их помощью определить безразмерные скорости

$$\frac{u_1}{v_1} = \bar{u}_1;$$

$$\frac{u_2}{v_2} = \bar{u}_2,$$

то можно показать, что в сходственных точках безразмерные скорости будут одинаковы:

$$\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} = \frac{u_1}{u_2} \frac{v_2}{v_1} = k_u \frac{1}{k_u} = 1.$$

И, наконец, имея в виду, что механическое движение происходит под действием сил, вводится понятие динамического подобия, которое требует, чтобы в сходственных точках натурального и модельного течений равнодействующие сил, приложенных к жидким частицам, находились в постоянном соотношении. Если обозначить проекции сил на координатные оси через F_{1i} и F_{2i} , то сформулированное выше условие можно записать как

$$\frac{F_{1i}}{F_{2i}} = k_F = \text{const.}$$

Из приведенных определений понятно, что кинематическое и динамическое подобия могут существовать только при наличии геометрического подобия. Если же в сходственных точках двух геометрически подобных потоков выполняются условия еще и кинематического и динамического подобия, то такие потоки называются *механически подобными*.

Рассмотрим условие существования динамического подобия в случае действия на жидкие частицы сил инерции. Как известно, в этом случае движение любой механической системы подчиняется второму закону Ньютона

$$f = m \frac{du}{dt}.$$

Для двух жидких частиц (в натурном и модельном потоках) можно записать

$$f_1 = m_1 \frac{du_1}{dt_1} \text{ и } f_2 = m_2 \frac{du_2}{dt_2}.$$

Разделив почленно первое уравнение на второе, получим

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{du_1}{du_2} \frac{dt_2}{dt_1},$$

или, переходя к характерным масштабам физических величин:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{M_1}{M_2} \frac{U_1}{U_2} \frac{T_2}{T_1}.$$

Далее, учитывая, что

$$M = \rho V \cong \rho L^3,$$

имеем

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 L_1^3 U_1 T_2}{\rho_2 L_2^3 U_2 T}.$$

Очевидно, что L/T есть скорость, поэтому

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 L_1^2 U_1^2}{\rho_2 L_2^2 U_2^2},$$

т. е.

$$\frac{F_1}{\rho_1 L_1^2 U_1^2} = \frac{F_2}{\rho_2 L_2^2 U_2^2},$$

что, собственно, является условием динамического подобия.

Таким образом, для двух механически подобных систем сохраняется числовое равенство в сходственных точках безразмерных комплексов $\frac{F}{\rho L^2 U^2}$. Этот комплекс, названный в честь И. Ньютона,

обычно обозначается двумя первыми буквами его фамилии, а условие динамического подобия коротко записывается как постоянство критерия подобия Ньютона:

$$Ne = \frac{F}{\rho L^2 U^2} = \text{idem.}$$

Из определений кинематического и динамического подобия вытекает, что безразмерные координаты сходственных точек, безразмерные скорости и силы одинаковы. Вообще говоря, нетрудно убедиться, что все физические параметры механически подобных потоков, представленные в безразмерном виде, для сходственных точек одинаковы. Одинаковость безразмерных значений физиче-

ских параметров можно рассматривать как определение механического подобия. В свою очередь, должны быть одинаковыми системы дифференциальных уравнений, представленные в безразмерном виде, из которых получаются эти параметры. Учитывая, что конкретное решение системы уравнений, описывающей рассматриваемый гидродинамический процесс, может быть получено только при учете заданных начальных и граничных условий, приходим к выводу, что начальные и граничные условия, представленные в безразмерной форме, для механически подобных потоков также должны быть одинаковыми.

Таким образом, если две системы описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями и имеют одинаковые граничные условия и если значения всех параметров в этих уравнениях и граничных условиях равны, то при условии существования единственности решения эти две системы механически подобны.

Следует, однако, понимать, что существуют качественно различные (не подобные механически) физические явления, описываемые одинаковыми уравнениями. Такие явления называются аналогиями, например, электрогидродинамическая аналогия, в которой используется одинаковость описания уравнением Лапласа распределения электрического потенциала и потенциала скорости.

Важно отметить, что для обеспечения механического подобия в натурном и модельном потоках требуется постоянство безразмерных комплексов, называемых критериями подобия и включающих характерные параметры процессов. Это позволяет существенно сократить объем экспериментов при исследовании течений жидкостей и газов и рационально выбирать условия их проведения. Ответ на вопрос о выборе критериев подобия, характеризующих исследуемый процесс, является определяющим при моделировании.

1.2. Критерии механического подобия, понятие автомодельности

В механике жидкости наиболее общими соотношениями, описывающими движение вязких сред, является система уравнений Навье–Стокса. Рассмотрим одну из проекций этих уравнений в декартовой системе координат и преобразуем ее в безразмерный вид.

В проекции на ось x имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \\ & = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Выберем характерные масштабы физических параметров L , ν , T , P , X_0 и с их помощью образуем безразмерные величины

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{y} = \frac{y}{L}; \quad \bar{z} = \frac{z}{L};$$

$$\bar{u}_x = \frac{u_x}{\nu}; \quad \bar{u}_y = \frac{u_y}{\nu}; \quad \bar{u}_z = \frac{u_z}{\nu};$$

$$p = \frac{p}{P}; \quad \bar{X} = \frac{X}{X_0}; \quad \bar{t} = \frac{t}{T}.$$

Плотность и вязкость считаем величинами постоянными, поэтому выбирать для них характерный масштаб нет необходимости. После замены размерных параметров на безразмерные уравнение примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{T} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{t}} + \frac{\nu^2}{L} \left(\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{y}} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{z}} \right) = \\ & = \bar{X} X_0 - \frac{P}{\rho L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu \nu}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{z}^2} \right). \end{aligned}$$

В этой форме уравнение еще не является безразмерным, поскольку в нем имеются размерные комплексы перед каждым диф-

ференциальным членом. Чтобы получить безразмерный вид уравнения, нужно разделить его на любой из этих комплексов, например, на v^2 / L .

Тогда получим действительно безразмерное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{L}{vT} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{y}} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{z}} = \\ & = \frac{X_0 L}{v^2} \bar{X} - \frac{P}{\rho v^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{v}{vL} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{z}^2} \right), \end{aligned}$$

причем безразмерными являются не только члены уравнения, но и стоящие перед ними комплексы из характерных физических параметров процесса.

В соответствии с принципами механического подобия, изложенными в предыдущем разделе, эти комплексы, входящие в уравнение в качестве коэффициентов, должны быть одинаковыми для подобных потоков, т. е.

$$\frac{L}{vT} = \text{idem}; \quad \frac{X_0 L}{v^2} = \text{idem};$$

$$\frac{P}{\rho v^2} = \text{idem}; \quad \frac{v}{vL} = \text{idem}.$$

Выписанные выше безразмерные комплексы являются, таким образом, критериями подобия и получили собственные наименования (в честь выдающихся ученых-механиков):

$$\frac{L}{vT} = \text{Sh} \text{ – критерий гомохронности, или число подобия Струхаля};$$

$$\frac{v^2}{gL} = \text{Fr} \text{ – число Фруда (в случае действия силы тяжести } X_0 = g);$$

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu \text{ – число Эйлера;}$$

$$\frac{vL}{\nu} = Re \text{ – уже известное число Рейнольдса.}$$

Обобщая изложенное, можно сделать вывод, что одинаковые безразмерные дифференциальные уравнения в сочетании с одинаковыми безразмерными граничными и начальными условиями, а также с одинаковыми значениями критериев подобия являются необходимыми условиями механического подобия. Вопрос о достаточности этих условий для существования механического подобия связан с теоремой существования и единственности решения уравнений Навье–Стокса, которая в общем случае не доказана. На практике существование и единственность класса потоков, подобного натурному, предполагают а priori, модель выполняют в соответствии с необходимыми условиями подобия, а ее принадлежность к указанному классу проверяют при сопоставлении результатов измерений на модели с данными (пусть и ограниченными), полученными на натуре.

Рассмотрим физический смысл критериев подобия, выражения для которых мы получены выше. Число Sh представляет собой отношение локальных сил инерции к конвективным. Чтобы показать это, рассмотрим отношение соответствующих членов в уравнении движения Навье–Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{v}{T} \sim \frac{L}{vT} = Sh.$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{v}{L}$$

Число Эйлера Eu выражает отношение сил давления к силам инерции:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{1}{\rho} \frac{p}{L} \sim \frac{p}{\rho v^2} = Eu.$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{v}{L}$$

Число Фруда Fr характеризует отношение сил инерции к силам тяжести:

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{g} \sim \frac{v \frac{v}{L}}{g} \sim \frac{v^2}{gL} = Fr.$$

Число Рейнольдса Re представляет отношение сил инерции к силам вязкости:

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \sim \frac{v \frac{v}{L}}{v \frac{v}{L^2}} \sim \frac{vL}{v} = Re.$$

Следует отметить, что соответствующие критерии дают только оценку отношения тех или иных сил по порядку величины (отношение – не значит равно), кроме того, вопрос о правильности интерпретации чисел подобия как отношения соответствующих сил ставился рядом исследователей. Во всяком случае, еще Прандтль высказывал мнение о том, что число Рейнольдса не всегда равно отношению силы инерции к силе внутреннего трения. Более точным и правильным является утверждение, что если две системы геометрически подобны и течение в них происходит при одинаковых числах Рейнольдса, то отношение сил инерции к силам трения в обоих потоках одинаково.

Очевидно, что для достижения полного механического подобия необходимо одновременное равенство в сравниваемых потоках нескольких критериев. Рассмотрим в этой связи, например, совместимость критериев Re и Fr.

Если $Fr = idem$:

$$\frac{v_1^2}{g_1 L_1} = \frac{v_2^2}{g_2 L_2}; \quad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{g_2 L_2}{g_1 L_1}}.$$

Таким образом, масштабы характерных величин должны быть связаны между собой:

$$k_u = \sqrt{k_L k_F}.$$

Если $Re = idem$:

$$\frac{v_1 L_1}{v_1} = \frac{v_2 L_2}{v_2}; \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1 L_2}{v_2 L_1}.$$

Следовательно, масштабы величин должны удовлетворять соотношению

$$k_u = \frac{k_v}{k_L}.$$

Получается, что для того чтобы выполнить условие подобия по числу Fr , скорость модельного потока должна быть меньше скорости в натурном объекте, а удовлетворение требований подобия по числу Re требует противоположного. Практически следует считать, что критерии Фруда Fr и Рейнольдса Re несовместимы. Однако, учитывая, что в любом гидродинамическом явлении можно выделить лишь одну силу, влияние которой на характер движения является определяющим, можно проводить моделирование только по одному критерию подобия. В частности, течения со свободной поверхностью в поле сил тяжести обычно моделируются с использованием критерия Фруда, напорные течения в трубах и каналах без образования свободной поверхности – с помощью критерия Рейнольдса. Если изучается установившееся движение, при котором параметры потока не изменяются с течением времени, то из рассмотрения выпадает число Струхала. Число Эйлера чаще всего является неопределяющим критерием и представляет собой функцию Fr и (или) Re . Очевидно, что моделирование по какому-либо одному критерию подобия оставляет открытым вопрос о подобии других сил, этим критерием не учитываемых. Такое подобие является приближенным, однако теория подобия позволяет указать рациональную методику внесения поправок на неточность соблюдения ее требований.

Следует отметить некоторые особенности моделирования течений жидкости и газа, не рассматриваемые теоретически. Первая из них обусловлена невозможностью практической реализации полного геометрического подобия, в связи с чем возникли понятия геометрического подобия в «большом» и «малом». Кажется очевидным, что, по определению, геометрическое подобие натурального объекта и модели может быть легко реализовано, ведь, по существу, это введение некоего числа – геометрического – масштаба для пересчета размеров. Однако подобие геометрических характеристик натурального и модельного объектов относится к подобию в «большом». Вместе с тем в реальности стенки как натурального проекта, так и модели имеют какую-то шероховатость. Очевидно, что моделирование естественной шероховатости практически невозможно и геометрическое подобие в «малом» недостижимо. Вторая особенность в общем связана с этим и называется «масштабным эффектом». Суть его в том, что моделирование, основанное на классических принципах теории подобия, не обеспечивает масштабный переход. Это означает, что эффективность различного рода промышленных технологических аппаратов оказывается не такой, какая должна была бы быть по результатам, полученным пересчетом с модельных испытаний. Более того, она ухудшается по мере увеличения размеров аппаратов. Это зачастую вынуждает отказываться от испытаний на моделях и переходить к испытаниям на объектах, построенных в натуральную величину, что резко повышает стоимость экспериментов, а при создании особо крупных аппаратов такой подход вообще невозможно реализовать. Исследования, выполненные в последние годы, показали, что в основе масштабного эффекта лежат чисто гидродинамические явления: неравномерность распределения потоков по сечению аппарата, увеличение масштабов турбулентности, соотношение этих масштабов и шероховатости поверхности и т. п.

В заключение рассмотрим понятие автомодельности, широко употребляемое в теории подобия. При моделировании какого-либо явления значения критериев подобия можно определить лишь для тех из них, которые заданы в постановке задачи. Например, рассматривая течение в трубе, можно определить число Re (по размерам канала и средней скорости на входе), но нельзя определить число Eu , поскольку величины давлений заранее неизвестны и могут быть определены только из решения задачи. Таким образом, в любой

задаче некоторые из критериев могут быть вычислены только после ее решения и, следовательно, являются функциями других критериев, которые определяются через исходные параметры и называются определяющими. Следует понимать, что в зависимости от постановки задачи определяющие критерии могут становиться неопределяющими, и наоборот. Может также сложиться ситуация, когда ни один из критериев не является определяющим, тогда комбинация из них будет играть роль определяющего критерия.

Представим, что в интересующем нас процессе (течение в трубе) определяющим критерием является число Рейнольдса и связь между критериями подобия выражается зависимостью вида $Eu = f(Re)$. Как показывает опыт, при увеличении числа Рейнольдса зависимость $Eu = f(Re)$ при некотором конкретном для каждого случая значении числа Re , называемом граничным, «вырождается», т. е. число Эйлера перестает зависеть от числа Рейнольдса. Очевидно, при этом механизм процесса таков, что никаких условий для подобия не требуется и все процессы такого типа автоматически подобны между собой. Этот случай и называется автомодельностью, т. е., вообще говоря, под автомодельной понимают область, в которой неопределяющее число подобия перестает зависеть от определяющего. Действительно, в области, где $Eu = f(Re)$ экспериментатор должен заботиться о том, чтобы значения определяющего критерия подобия для натурального объекта и модели совпадали: $Re_n = Re_m$, что далеко не всегда возможно. В автомодельной же области достаточно, чтобы значение этого критерия превышало некоторое граничное $Re_n \geq Re_{гр}$. Нужно лишь помнить, что какого-то универсального значения $Re_{гр}$ не существует, это число всегда зависит от природы изучаемого процесса.

1.3. Метод размерностей, π -теорема

Зависимости, связывающие между собой различные параметры гидродинамических процессов, представляют, как правило, физические законы (или следствия из них), поэтому их структура и форма не должны зависеть от используемой системы единиц измерения. Учитывая это, а также возможность использования для выражения физических величин различных систем единиц, можно установить общие свойства соотношений, описывающих физические процессы.

Если некоторые из этих физических величин принять за основные и установить для них единицы измерения, то единицы измерения прочих величин будут выражаться с использованием связывающих их зависимостей через единицы измерения основных величин. Принятые для основных параметров единицы измерения называются основными, а все остальные – производными. Число основных единиц измерения можно выбирать произвольно, однако увеличение количества основных единиц приводит к введению дополнительных физических постоянных. В механике достаточно выбрать единицы измерения только для трех основных величин: единицы длины, массы и времени. После выбора основных единиц измерения единицы измерения остальных механических величин получаются автоматически из их определения с использованием физических закономерностей.

Под *размерностью* понимают выражение (иногда его называют формулой) в виде зависимости, связывающей символ производной единицы измерения с символами основных единиц. Так, если ввести символ единицы длины L , символ единицы массы M , символ единицы времени T , то размерностью площади будет L^2 , размерностью скорости L/T или LT^{-1} , размерностью силы MLT^{-2} . При этом важно понимать, что любое правильное физическое соотношение, выраженное в виде уравнения, должно быть размерностно однородным, что означает строго одинаковую размерность величин как в правой, так и в левой его частях. Достаточно очевидным является также такое утверждение: отношение двух численных значений какой-нибудь производной величины не должно зависеть от выбора масштабов для основных единиц измерения. Например, отношение площади, занимаемой окнами дома, к площади стен должно остаться неизменным, если сами площади выражать в m^2 , mm^2 или km^2 .

Рассмотрим, например, некую функциональную зависимость между размерной величиной A и другими размерными величинами A_1, A_2, \dots, A_n , причем некоторые из этих параметров могут быть переменными:

$$A = f(A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n).$$

Установим структуру функции f , полагая, что она выражает некоторый физический закон. Допустим, что первые k среди размерных величин A имеют независимые размерности (число основных единиц измерения, естественно, должно быть больше или равно k). Независимость размерности означает, что формула размерности любой из величин не может быть представлена как степенная комбинация из формул размерностей других величин. Так, например, размерности длины L , скорости LT^{-1} и энергии ML^2T^{-2} независимы, а размерности длины L , скорости LT^{-1} и ускорения LT^{-2} – зависимы. Среди механических величин, как правило, встречается не более трех с независимыми размерностями. В соответствии с вышесказанным, размерности параметров A, A_{k+1}, \dots, A_n можно выразить через размерности величин A_1, A_2, \dots, A_k .

Если для k независимых величин в нашем функциональном соотношении ввести обозначения для их размерностей

$$[A_1] = R_1, [A_2] = R_2, \dots, [A_k] = R_k,$$

то размерности остальных величин будут иметь вид

$$[A] = R_1^{m_1} R_2^{m_2} \dots R_k^{m_k};$$

$$[A_{k+1}] = R_1^{p_1} R_2^{p_2} \dots R_k^{p_k}, \dots, [A_n] = R_1^{q_1} R_2^{q_2} \dots R_k^{q_k}.$$

Изменим теперь единицы измерения величин с независимыми размерностями A_1, A_2, \dots, A_k соответственно в $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ раз. Тогда все величины изменят свои численные значения в новой системе единиц (со штрихом) и будут выражаться соотношениями

$$A'_1 = \alpha_1 A_1; \quad A' = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k} A;$$

$$A'_2 = \alpha_2 A_2; \quad A'_{k+1} = \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_k^{p_k} A_{k+1};$$

.....

$$A'_k = \alpha_k A_k; \quad A'_n = \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_k^{q_k} A_n.$$

Важно отметить, что вид исходной функциональной зависимости при этом не должен измениться, поскольку, как было условлено, она выражает некий физический закон. В новой системе единиц эта зависимость примет вид

$$A' = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k} A = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k} f(A'_1, A'_2, \dots, A'_n) = \\ = f(\alpha_1 A_1, \dots, \alpha_k A_k, \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2}, \dots, \alpha_k^{p_k} A_{k+1}, \dots, \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2}, \dots, \alpha_k^{q_k} A_n).$$

Поскольку на выбор масштабов не накладывалось никаких ограничений, т. е. они произвольны, то их величины можно определить таким образом, чтобы сократить число аргументов в функции f :

$$\alpha_1 = \frac{1}{A_1}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{A_2}; \quad \dots; \quad \alpha_k = \frac{1}{A_k}.$$

Таким образом, первые k аргументов функции f примут постоянное значение, равное единице и, следовательно, число аргументов сократится на величину k . В этой относительной системе единиц значения других параметров определяются формулами

$$A' = \frac{A}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_k^{m_k}}; \quad A'_{k+1} = \frac{A_{k+1}}{A_1^{p_1} A_2^{p_2} \dots A_k^{p_k}}; \quad \dots; \quad A'_n = \frac{A_n}{A_1^{q_1} A_2^{q_2} \dots A_k^{q_k}}.$$

Очевидно, что полученные комплексы являются безразмерными и вообще не зависят от выбора системы тех единиц измерения, через которые выражаются величины A_1, A_2, \dots, A_k . Вводя для них обозначения $\pi, \pi_1, \dots, \pi_{n-k}$, рассматриваемое исходное соотношение можно записать, как

$$\pi = f(1, 1, \dots, \pi_1, \dots, \pi_{n-k})$$

или

$$\varphi(\pi, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}) = 0.$$

Таким образом, выражающая некий физический закон функциональная связь между $n + 1$ размерными величинами, из которых k величин имеют независимые размерности, может быть представлена в виде соотношения между $n - k + 1$ безразмерными величинами $\pi, \pi_1, \dots, \pi_{n-k}$, представляющими собой комбинации из $k + 1$ размерных величин. Это основная теорема теории подобия, получившая название π -теоремы.

В приложении этой теоремы к задачам о движении вязкой упругой жидкости можно классифицировать три группы размерных параметров:

- геометрические характеристики, выражающие размеры и формы граничных поверхностей (L_1, L_2 и т. д.);
- кинематические и динамические характеристики течения: скорость u , давление p , касательное напряжение τ , сила сопротивления F ;
- характеристики физических свойств жидкости: плотность ρ , вязкость μ , поверхностное натяжение σ , упругость ϵ .

Использование анализа размерностей для решения конкретных практических задач связано с необходимостью составления функциональной зависимости, которая на следующем этапе обрабатывается специальными приемами, приводящими в конечном итоге к получению чисел π (чисел подобия). Основным, носящим творческий характер является первый этап, так как получаемые результаты зависят от того, насколько правильно и полно представление исследователя о физической природе процесса. Другими словами, насколько функциональная зависимость правильно и полно учитывает все параметры, влияющие на изучаемый процесс. Составление полного списка параметров, определяющих исследуемый процесс, таким образом, является важной частью решения задачи методом размерностей.

В качестве конкретного примера использования метода размерностей рассмотрим задачу о течении вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе. Предположим, что проблема состоит в определении структуры зависимости падения давления Δp на участке трубы длиной l .

Из геометрических параметров для труб можно указать длину участка l и диаметр трубы d . При этом разумно считать, что потери должны быть как-то связаны с состоянием внутренней поверхности трубы, т. е. с шероховатостью k ее стенок. Полагаем, что при тече-

нии заданной жидкости (плотность ρ и вязкость μ) между характерной скоростью v и падением давления на мерном участке устанавливается однозначное соответствие. Падение давления вдоль трубы обусловлено затратами энергии на преодоление сил вязкого трения и, очевидно, обратно пропорционально ее длине, поэтому с целью сокращения числа переменных целесообразно рассматривать не Δp , а $\Delta p / l$, т. е. потери давления на единицу длины трубы. Таким образом, зависимость в данном случае будет иметь вид

$$\varphi\left(v, \rho, \mu, d, \frac{\Delta p}{l}, k\right) = 0.$$

Число размерных параметров, влияющих на решение, 6, число параметров с независимой размерностью 3 (скорость v , плотность ρ и диаметр d). Следовательно, число безразмерных комплексов 3, а искомая зависимость примет вид

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0,$$

где числа π – безразмерные критерии подобия.

Вопрос – как их найти? Самый незамысловатый способ – рассмотреть всевозможные комбинации определяющих параметров и выбрать из них безразмерные, но независимые. Существует, однако, простой алгоритм, предложенный еще Рэлеем, которым мы воспользуемся. Из определяющих параметров задачи выбираем три, содержащих основные единицы измерения. Пусть это будут параметры с независимой размерностью v, d, ρ . Образует из них числа π в виде степенных функций, умноженных на один из остальных параметров:

$$\pi_1 = v^{x_1} d^{y_1} \rho^{z_1} \frac{\Delta p}{l};$$

$$\pi_2 = v^{x_2} d^{y_2} \rho^{z_2} \mu;$$

$$\pi_3 = v^{x_3} d^{y_3} \rho^{z_3} k.$$

Теперь остается найти показатели степеней x, y, z , исходя из условия безразмерности образованных таким способом комплексов. Составим формулы размерности:

$$[\pi_1] = (LT^{-1})^{x_1} (L)^{y_1} (ML^{-3})^{z_1} (ML^{-2}T^{-2}) = L^{x_1+y_1-3z_1-2} T^{-x_1-2} M^{z_1+1};$$

$$[\pi_2] = (LT^{-1})^{x_2} (L)^{y_2} (ML^{-3})^{z_2} (ML^1T^{-1}) = L^{x_2+y_2-3z_2-1} T^{-x_2-1} M^{z_2+1};$$

$$[\pi_3] = (LT^{-1})^{x_3} (L)^{y_3} (ML^{-3})^{z_3} L = L^{x_3+y_3-3z_3+1} T^{-x_3} M^{z_3}.$$

$$x_1 + y_1 - 3z_1 - 2 = 0,$$

$$-x_1 - 2 = 0,$$

$$z_1 + 1 = 0,$$

$$\text{отсюда } \pi_1 = \nu^{-2} \rho^{-1} d \frac{\Delta p}{l} = \frac{\Delta p}{\rho \nu^2} \frac{d}{l} = \text{Eu} \frac{d}{l}.$$

$$x_2 + y_2 - 3z_2 - 1 = 0,$$

$$-x_2 - 1 = 0,$$

$$z_2 + 1 = 0,$$

$$\text{отсюда } \pi_2 = \nu^{-1} \rho^{-1} d^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho \nu d} = \frac{\nu}{\nu d} = \text{Re}^{-1}.$$

$$x_3 + y_3 - 3z_3 + 1 = 0,$$

$$x_3 = 0,$$

$$z_3 = 0,$$

$$\text{отсюда } \pi_3 = d^{-1} k = \frac{k}{d}.$$

Таким образом, структура искомой зависимости потерь давления по длине трубы, выраженная через безразмерные критерии, образованные из размерных параметров течения, имеет вид

$$F\left(\text{Eu} \frac{d}{l}, \text{Re} \frac{k}{d}\right) = F\left(\frac{\Delta p}{\rho \nu^2} \frac{d}{l}, \frac{\nu d}{\nu}, \frac{d}{l}\right) = 0.$$

Учитывая, что число Эйлера Eu в данном случае является определяющим критерием подобия, эту зависимость можно переписать в виде

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = \frac{l}{d} \varphi \left(Re, \frac{k}{d} \right)$$

или

$$\Delta p = \varphi \left(Re, \frac{k}{d} \right) \frac{l}{d} \rho v^2.$$

Обозначив

$$\lambda = 2\varphi \left(Re, \frac{k}{d} \right),$$

получим известную (уже не раз упоминавшуюся в данном курсе лекций) формулу Дарси–Вейсбаха для потерь давления при течении вязкой жидкости в цилиндрической трубе:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}.$$

Таким образом, методы теории размерностей позволяют из общих соображений получить структуру связи параметров течения в виде функциональной зависимости безразмерных критериев, составленных из размерных параметров движения жидкости, ее физических свойств и геометрических характеристик области течения. При этом конкретный вид того или иного соотношения либо величину коэффициентов, входящих в эту функциональную зависимость, следует уточнять по результатам численного расчета и экспериментальным данным.

2. СИЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОТОКА ЖИДКОСТИ НА ОГРАНИЧИВАЮЩИЕ ЕГО ТВЕРДЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Используя теорему об изменении количества движения жидкости и предполагая течение одномерным, можно в общем виде получить решение задачи о величине и направлении сил, с которыми установившийся поток жидкости (или газа) воздействует на твердые поверхности. Рассмотрим применение уравнения количества движения для случая плоской задачи о силовом воздействии свободной струи, натекающей на преграду. Расчетная схема такого течения приведена на рис. 2.1.

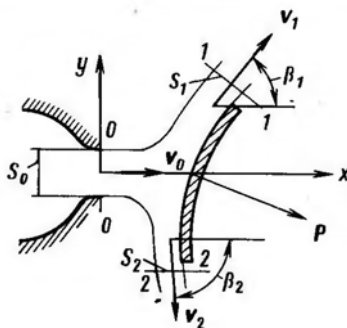


Рис. 2.1

Представим, что двумерная струя жидкости истекает со скоростью v_0 из плоского сопла в пространство, заполненное газом, и сталкивается с криволинейной цилиндрической стенкой. При этом происходит разделение потока на две неравные части со скоростями v_1 и v_2 . Направления скоростей этих потоков, как естественно предположить, определяются касательными к поверхностям стенки. В предположении идеальности жидкости (т. е. пренебрегая силами трения по сравнению с инерционными силами) из уравнения Бернулли для элементарной струйки, распространяющейся вдоль поверхности стенки, для сечений $0-0$ и $1-1$ можно получить

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Поскольку давление в любом поперечном сечении струи равно давлению в окружающем пространстве, т. е.

$$p_0 = p_1 = p_{\text{атм}},$$

то, очевидно, $v_0 = v_1$. Если провести такую же операцию для сечений 0–0 и 2–2, то можно убедиться, что $v_0 = v_2$, т. е. скорость при растекании по преграде сохраняет свою величину. Это естественно, поскольку силами трения пренебрегали, и это обстоятельство дает возможность распределения скоростей по поперечным сечениям потоков считать однородными. Запишем уравнение количества движения для замкнутой контрольной поверхности, состоящей из свободной поверхности струи, поперечных сечений 0–0, 1–1, 2–2 и поверхности стенки, пренебрегая также силами тяжести:

$$\vec{P} = \rho Q_0 \vec{v}_0 - \rho Q_1 \vec{v}_1 - \rho Q_2 \vec{v}_2.$$

В этом выражении отсутствуют силы давления в соответствующих поперечных сечениях потоков жидкости 0–0, 1–1 и 2–2, поскольку избыточные давления в них равны нулю. Запишем полученное уравнение в проекциях на оси координат, показанные на рис. 2.1:

$$P_x = \rho Q_0 v_0 - \rho Q_1 v_0 \cos \beta_1 - \rho Q_2 v_0 \cos \beta_2;$$

$$P_y = -\rho Q_1 v_0 \sin \beta_1 - \rho Q_2 v_0 \sin \beta_2,$$

где $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 < 0$ – углы схода струи с преграды.

На практике часто реализуются ситуации, когда преграда расположена симметрично относительно натекающей струи. В этом случае $Q_1 = Q_2 = Q_0/2$ и $\beta_1 = -\beta_2$, поэтому предыдущие формулы упрощаются:

$$P_x = \rho Q_0 v_0 (1 - \cos \beta); \quad P_y = 0.$$

При этом из выражения для силы давления следует, что в случае $\beta = \pi/2$

$$P_x = \rho Q_0 v_0,$$

но может возрасти для значений угла $\beta > \pi/2$, поскольку в этом случае $\cos \beta < 0$.

Максимальное значение силы давления достигается, если $\beta = \pi$, т. е. когда поток на преграде разворачивается в обратную сторону:

$$P_{x \max} = 2\rho Q_0 v_0.$$

Это обстоятельство используют в конструкциях гидравлических турбин, придавая ковшам их рабочего колеса форму, изображенную на рис. 2.2.

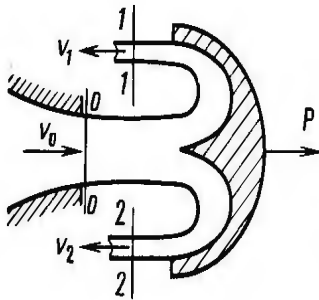


Рис. 2.2

Рассмотрим широко распространенный случай натекания струи на плоскую преграду под углом α между осью струи и плоскостью стенки (рис. 2.3).

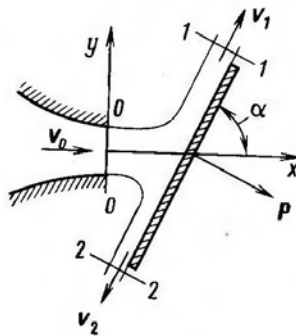


Рис. 2.3

Очевидно, что сила давления при этом будет направлена по нормали к поверхности преграды, поскольку действующим остается предположение о пренебрежении силами трения по сравнению с силами инерции. Тогда проекция силы давления на направление, перпендикулярное поверхности стенки, выразится как

$$P = \rho Q_0 v_0 \sin \alpha.$$

Проекция этого же уравнения для силы давления на направление скорости v_1 позволяет определить соотношение между расходами Q_1 и Q_2 :

$$\rho Q_0 v_0 \cos \alpha - \rho Q_1 v_0 + \rho Q_2 v_0 = 0$$

или

$$Q_0 \cos \alpha = Q_1 - Q_2.$$

Используя очевидное соотношение

$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$

можно получить зависимости для расходов разделившегося потока:

$$Q_1 = Q_0 \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

$$Q_2 = Q_0 \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Отметим в заключение, что полученные решения справедливы лишь в случае, если размер преграды достаточно велик по сравнению с поперечным размером струи на выходе из сопла.

3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

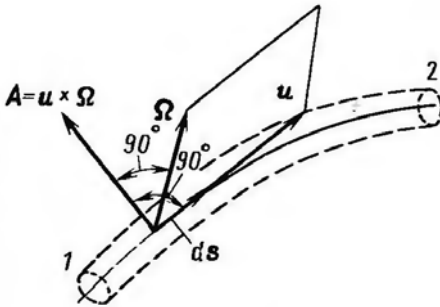


Рис. 3.1

Рассмотрим произвольный отрезок элементарной трубки тока в нестационарном движении вязкой несжимаемой жидкости (рис. 3.1). Уравнения движения жидкости, записанные в форме Громеки–Лэмба, имеют вид (см. часть 2)

$$-\text{grad}E + \nu \nabla^2 \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \vec{\Omega},$$

где $E = \pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}$;

π – потенциал массовых сил;

p – давление;

ρ – плотность жидкости;

\vec{u} – вектор мгновенной скорости;

ν – кинематический коэффициент вязкости;

$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{u}$ – завихренность течения.

Выберем на линии тока в момент времени t направленный отрезок дуги $d\vec{S}$ и скалярно умножим на него все члены уравнения движения:

$$-\text{grad}E \cdot d\vec{S} + \nu \nabla^2 \vec{u} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - (\vec{u} \times \vec{\Omega}) \cdot d\vec{S}.$$

Очевидно, что векторное произведение $\vec{A} = \vec{u} \times \vec{\Omega}$ направлено по нормали к плоскости, в которой расположены образующие его векторы, а поскольку векторы $d\vec{S}$ и \vec{u} – коллинеарны, то последний член в правой части уравнения будет тождественно равен нулю и уравнение переписется как

$$-\text{grad}E \cdot d\vec{S} + v\nabla^2\vec{u} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Следует отметить также, что для каждого данного момента времени

$$\text{grad}E \cdot d\vec{S} = \frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy + \frac{\partial E}{\partial z} dz = d_S E$$

является полным дифференциалом функции E по направлению S .

Учитывая вышесказанное, уравнение можно записать в виде

$$-d_S E + v\nabla^2\vec{u} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Если проинтегрировать полученное уравнение вдоль линии тока от некоторого сечения 1 до сечения 2 (для определенного момента времени), получим

$$E_1 - E_2 + v \int_1^2 \nabla^2\vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Полагая, что массовые силы, действующие на жидкость, являются силами тяжести, т. е. их потенциал определяется как $\pi = gz$, можно привести уравнение к привычному виду:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_{\text{тр}} + h'_{\text{ин}},$$

где $h'_{\text{ин}} = \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ – потери напора, обусловленные нестационарностью течения, а

$$h'_{\text{тр}} = -\frac{\nu}{g} \int_1^2 \nabla^2 \vec{u} \cdot d\vec{S} = -\frac{\nu}{g} \int_1^2 (\nabla^2 u_x dx + \nabla^2 u_y dy + \nabla^2 u_z dz) -$$

потери напора вследствие вязкого трения соответственно.

Все члены полученного уравнения имеют размерность длины, но по физическому смыслу представляют собой удельную энергию на единицу веса. Продемонстрируем это на примере величины $\frac{P}{\rho g}$.

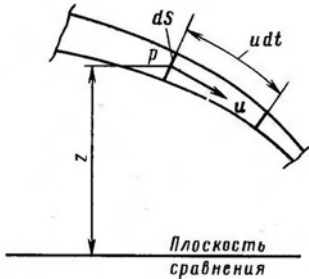


Рис. 3.2

Если рассмотреть какое-либо живое сечение dS элементарной трубки тока (рис. 3.2), где скорость равна u , а давление соответственно p , то при перемещении частиц жидкости, первоначально расположенных в этом сечении, за время dt на расстояние $u dt$ силы давления $p dS$ произведут работу $p dS u dt$. Если отнести ее величину к весу жидкости в объеме $dS u dt$, т. е. разделить на величину $\rho g dS u dt$, то получим величину $\frac{p}{\rho g}$, представляющую собой удельную работу сил давления на единицу веса жидкости.

Физический смысл величины $h'_{\text{тр}}$ очевиден из вида формулы, ее определяющей. Поскольку величины $\nu \nabla^2 u_x$, $\nu \nabla^2 u_y$, $\nu \nabla^2 u_z$ представляют собой проекции сил вязкости на оси координат, отнесенные к единице массы жидкости, то интеграл определяет работу этих сил на пути от сечения 1 к сечению 2 (см. рис. 3.1). Множитель $1/g$ переводит величину этой удельной работы на единицу веса. Механическая энергия, расходуемая на преодоление вязких сил трения, необратимо диссипирует в тепло, поэтому $h'_{\text{тр}}$ называют потерей удельной энергии или потерей напора вследствие вязкости.

Для общего случая неустановившегося течения в правой части уравнения Бернулли имеется член $h'_{\text{ин}}$, который называется *инерционным напором*. Его величина зависит от локального ускорения

жидких частиц и положительна, если течение ускоряется, или отрицательна в случае замедления течения. Инерционный напор представляет обратимые (в отличие от напора вязкого трения) изменения кинетической энергии потока, обусловленные нестационарностью течения.

Рассмотрим теперь применение полученного выше нестационарного уравнения Бернулли для элементарной струйки вязкой несжимаемой жидкости к одномерному неустановившемуся потоку в рамках струйной модели течения. При этом ограничимся рассмотрением только потоков, в которых форма линий тока не меняется во времени, т. е. большинства течений в трубах и каналах с недеформируемыми стенками. Для таких движений можно обобщить нестационарное уравнение Бернулли на поток конечных размеров, как ранее это было сделано для установившихся течений.

Поскольку предполагается, что форма линий тока не меняется во времени, то векторы $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ и $d\vec{S}$ коллинеарны и их скалярное произведение можно заменить произведением модулей. Тогда среднее по живому сечению потока F значение инерционного напора можно вычислить по выражению

$$h_{\text{ин}} = \frac{1}{\rho g Q_F} \int h'_{\text{ин}} \rho g u \, dF = \frac{1}{Q_F} \int u \, dF \frac{1}{g} \int \frac{\partial u}{\partial t} \, dS.$$

Ввиду того, что жидкость несжимаема, а форма линий тока неизменна, расход в элементарной трубке тока $u \, dF$ постоянен в каждый данный момент по всей длине трубки, т. е. не зависит от S . Поэтому можно поменять порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} h_{\text{ин}} &= \frac{1}{Qg} \int_1^2 dS \int_F u \frac{\partial u}{\partial t} \, dF = \frac{1}{Qg} \int_1^2 dS \frac{\partial}{\partial t} \int_F \frac{u^2}{2} \, dF = \\ &= \frac{1}{2Qg} \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_0 v^2 F) \, dS = \frac{1}{2Qg} \int_1^2 2\alpha_0 F v \frac{\partial v}{\partial t} \, dS, \end{aligned}$$

где v – средняя по сечению скорость;

$$\alpha_0 = \frac{\int u^2 dF}{v^2 F} - \text{коэффициент количества движения, который}$$

полагаем не зависящим от времени.

При наших предположениях расход Q зависит от времени, но не зависит от координаты S , следовательно, можно записать

$$Q(t) = V(t) \cdot F(S),$$

и далее

$$h_{\text{ин}} = \frac{1}{Qg} \int_1^2 \alpha_0 v F \frac{\partial v}{\partial t} dS = \frac{1}{g} \int_1^2 \alpha_0 \frac{\partial v}{\partial t} dS = \frac{1}{g} \int_1^2 \alpha_0 \frac{1}{F} \frac{dQ}{dt} dS = \frac{1}{g} \frac{dQ}{dt} \int_1^2 \frac{\alpha_0}{F} dS.$$

Когда течение происходит в цилиндрической трубе постоянного поперечного сечения ($F = \text{const}$), можно принять $\alpha_0 = \text{const}$, тогда

$$h_{\text{ин}} = \frac{\alpha_0}{g} \frac{L}{F} \frac{dQ}{dt} = \alpha_0 \frac{L}{g} \frac{dv}{dt}, \quad (3.1)$$

где $L = S_2 - S_1$ – расстояние между выбранными сечениями.

Таким образом, уравнение одномерного неустановившегося движения (нестационарного уравнения Бернулли) можно записать в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{\text{ин}} + h_{\text{тр}},$$

где α_1 и α_2 – коэффициенты Кориолиса, как раньше, в стационарном случае, $h_{\text{ин}}$ выражается формулой (3.1).

Отметим, что усреднение по поперечному сечению потока для остальных членов (кроме инерционного) нестационарного уравнения Бернулли не отличается от аналогичных операций, сделанных ранее с членами уравнения Бернулли для установившегося течения.

Потери напора $h_{тр}$, связанные с вязкостью, при неустановившемся течении также следует учитывать. Приближенно их определяют по формулам для установившегося движения, однако результаты некоторых исследований указывают на зависимость этих потерь от ускорений, сопровождающих нестационарные течения жидкостей.

Полученное выше уравнение для одномерного неустановившегося движения жидкости в прямолинейных трубах не является строгим, при его выводе использованы не вполне обоснованные приближения и допущения, однако оно достаточно успешно применяется в инженерных расчетах и дает приемлемые практические результаты.

4. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР В ТРУБАХ

Как показано в главе 3, в случае больших ускорений потока жидкости в трубе влияние инерционного напора может быть весьма существенным. Ситуации, приводящие к подобным явлениям, возникают, как правило, при резком открытии или закрытии затворов, включении-выключении насосов и т. п. Если формально рассматривать уравнение Бернулли для потока жидкости, полученное в предыдущем разделе, то при очень быстром (мгновенном) закрытии задвижки $\frac{dv}{dt} \rightarrow -\infty$, и, следовательно, $h_{ин} \rightarrow -\infty$, а это приводит к выводу о том, должно выполняться $p_2 \rightarrow \infty$, что не подтверждается опытными данными. Причина этого парадокса заключается в том, что уравнение Бернулли получено в предположении несжимаемости жидкости, а в условиях высоких давлений, сопровождающих явление гидравлического удара, учет упругости жидкости становится существенным.

Вначале рассмотрим качественную сторону процесса, называемого гидравлическим ударом, который происходит при больших ускорениях потока в трубе, приводящих к резкому изменению давления. Представим, что в цилиндрической трубе (рис. 4.1), выходящей из

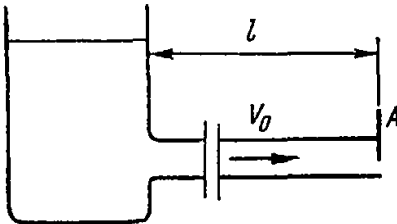


Рис. 4.1

большого резервуара с постоянным уровнем, в установившемся режиме течет жидкость со средней скоростью v_0 .

В определенный момент времени затвор A закрывается, в результате чего слои жидкости, непосредственно с ним соприка-

сающиеся, останавливаются, затем происходит последовательное торможение жидкости в других слоях, отстоящих на некотором расстоянии от затвора. При этом вследствие действия сил инерции происходит уплотнение (сжатие) остановившейся массы жидкости и, соответственно, повышение давления, под действием которого несколько расширяется участок трубы и повышаются напряжения в ее стенках. Расширение трубы сопровождается входом в нее некоторого дополнительного объема жидкости из резервуара.

Граница области повышенного давления будет распространяться по трубе в направлении, противоположном первоначальному течению жидкости, и через некоторое время достигнет входа трубы в резервуар. Поскольку емкость резервуара полагается большой и, соответственно, уровень жидкости в нем неизменен, то давление в начальном сечении трубы будет сохраняться постоянным. Таким образом, при достижении волной повышенного давления входа в резервуар заканчивается первая фаза гидравлического удара.

Вторая фаза удара начинается с того, что часть уплотненной жидкости будет вытолкнута из трубопровода в резервуар, давление в конце трубы, прилежащей к резервуару, понизится, и волна пониженного давления будет распространяться по направлению к затвору. Появление этой волны изменения давления называют *отражением ударной волны от входного конца трубы*. В момент, когда отраженная волна достигнет выходного конца с полностью закрытым затвором, произойдет новое отражение (без перемены знака) и начнется третья фаза удара с течением жидкости в трубе по направлению к резервуару. Таким образом, в течение второй и третьей фазы из трубы обратно в резервуар выльется объем жидкости, вошедший в трубу в первой фазе.

В момент когда волна пониженного давления достигнет начального сечения трубы (у резервуара), начнется четвертая фаза, которая сопровождается распространением по трубе волны повышенного давления. При этом жидкость вновь потечет в трубу, к концу четвертой фазы в трубе создадутся условия, близкие к началу первой фазы удара, и процесс повторится.

Таким образом, в каждом поперечном сечении трубы возникают колебания давления, которые будут постепенно затухать под действием сил вязкости. С практической точки зрения важно уметь определять максимальное повышение давления или безопасное время закрытия задвижки, соответствующее предельно допустимому повышению давления. Поэтому рассмотрим основные соотношения, характеризующие это явление.

Пусть в некоторый момент времени затвор A частично закроется, это приведет к уменьшению скорости на величину $\Delta v = v_0 - v$ в начале непосредственно у затвора, а затем это уменьшение распространится (как описано выше) на область жидкости, расположен-

ную вверх по течению. Допустим, что в момент t это изменение достигнет сечения $1-1$, а через малый промежуток времени Δt – сечения $2-2$ (рис. 4.2).

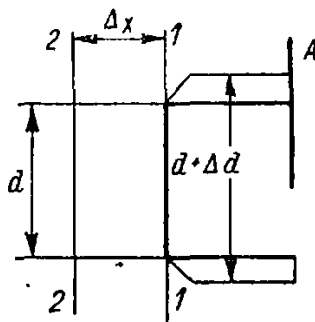


Рис. 4.2

Очевидно, что наряду с изменением скорости будут меняться другие параметры, характеризующие течение (давление, плотность и т. д.). Поскольку возмущение распространяется с некоторой скоростью a , то, очевидно, $a = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Массу жидкости, находящуюся между сечениями $1-1$ и $2-2$ в момент времени t прихода возмущения к сечению $1-1$, можно вычислить как

$$m = \rho S \cdot \Delta x,$$

где S – площадь поперечного сечения трубы.

После прохождения возмущения эта масса увеличится (вследствие уплотнения жидкости при повышении давления) и станет равной

$$m + \Delta m = (\rho + \Delta \rho) S \cdot \Delta x.$$

Следовательно, увеличение массы жидкости определится как

$$\Delta m = \Delta \rho S \cdot \Delta x.$$

С другой стороны, это увеличение можно определить как разность масс жидкости, вытекающей через сечение 1-1 со скоростью $v_0 - \Delta v$ и втекающей через сечение 2-2 со скоростью v_0 , т. е.

$$\Delta m = \rho S \cdot \Delta v \cdot \Delta t.$$

Приравнивая выражения для приращения массы, получим

$$\rho S \cdot \Delta v \cdot \Delta t = \Delta \rho S \cdot \Delta x = \Delta \rho S \cdot a \cdot \Delta t,$$

или, преобразуя:

$$a = \rho \frac{\Delta v}{\Delta \rho},$$

т. е. соотношение, связывающее скорость распространения ударной волны с изменениями плотности и скорости жидкости.

Применим к объему жидкости, находящейся между сечениями 1-1 и 2-2, теорему об изменении количества движения, которую в данном случае можно сформулировать, так: изменение импульса массы жидкости $\rho_{cp} S \cdot \Delta x \cdot \Delta v$ за время Δt равно силе давления, действующей на нее, $\Delta p \cdot S$:

$$\Delta p \cdot S = \rho_{cp} S \cdot \Delta v \frac{\Delta x}{\Delta t} = \rho_{cp} S \cdot \Delta v \cdot a$$

или

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{a \rho_{cp}}.$$

Полагая изменение плотности малой величиной (что подтверждается практическими результатами), можно считать $\rho_{cp} \sim \rho$, тогда

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{a \rho}.$$

Заменяя полученным выражением для изменения скорости жидкости соответствующий член в выведенном ранее уравнении для скорости распространения ударной волны, получим

$$a^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho}.$$

При выводе этого соотношения не накладывалось никаких ограничений на параметры жидкости и изменения ее скорости, поэтому оно справедливо для любого малого возмущения, возникшего (по тем или иным причинам) в потоке любой жидкости или газа. Как известно, полученная формула является определением скорости звука в данной среде при заданных ее параметрах, т. е. малые возмущения в потоках жидкостей и газов распространяются со скоростью звука, обусловленной их упругими свойствами. В свою очередь, упругость сред характеризуется коэффициентом сжимаемости, который определяется как

$$\beta_V = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

или

$$-\frac{\Delta V}{V} = \beta_V \cdot \Delta p,$$

а учитывая, что для постоянной массы жидкости относительное изменение объема эквивалентно относительному изменению плотности:

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \rho}{\rho},$$

получим $\beta_V = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta p}$,

т. е.

$$\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{1}{\rho \beta_V} = \frac{E}{\rho},$$

где $E = 1/\beta$ – величина, обратная коэффициенту сжимаемости, называемая модулем объемной упругости.

Таким образом, формула для скорости распространения малых возмущений в капельных жидкостях может быть переписана как

$$a = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Модуль объемной упругости зависит от температуры и давления и, например, для воды составляет величину около $2 \cdot 10^9$ Па при нормальных условиях, что определяет скорость звука равной примерно 1435 м/с.

Величина повышения давления определится из полученного выше соотношения

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{a\rho}$$

или

$$\Delta p = a\rho \cdot \Delta v = a\rho \cdot (v_0 - v),$$

которое при полностью закрытой задвижке ($v = 0$) будет наибольшим и выражается формулой Жуковского

$$\Delta p = \rho a v_0. \quad (4.1)$$

Если жидкость считать идеальной, а стенки трубопровода недеформируемыми, то повышение давления при гидравлическом ударе будет рассчитываться по формуле (4.1) и процесс колебаний давления в трубе будет бесконечным. В реальности из-за наличия вязких напряжений и деформации стенок трубопровода колебания давления меньше по величине и быстро затухают. В частности, учет деформации стенок трубопровода приводит к коррекции формулы для определения скорости распространения малых возмущений, принимающей вид

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{E} + \frac{d}{\delta E_{\text{ст}}} \right)}}$$

где ρ – плотность жидкости;

d и δ – диаметр трубопровода и толщина его стенок;

E и $E_{\text{ст}}$ – модуль упругости жидкости и материала трубы соответственно.

Очевидно, что при повышении жесткости стенок (увеличении толщины и повышении модуля упругости материала) величина скорости распространения возмущений будет расти, достигая максимального значения в случае недеформируемой трубы.

5. ИСТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

Для успешного решения ряда практических задач необходима связь между давлением в емкости, содержащей жидкость с известными физическими характеристиками, и расходом струи, вытекающей из нее в газовую атмосферу. При этом истечение может осуществляться через отверстие в стенке либо через короткую трубку специальной формы, называемую *насадком*. Следует различать случай истечения струи жидкости или газа в среду с теми же физическими свойствами (такая струя называется затопленной) от рассматриваемого в данном разделе течения струи жидкости в среде с резко отличающимися плотностью и вязкостью (соответственно эта струя называется незатопленной).

Рассмотрим истечение жидкости из резервуара (рис. 5.1), в котором создается определенное избыточное давление, в окружающую атмосферу через отверстие с острой кромкой. Вследствие проявления сил инерции в области за кромками отверстия наблюдается сжатие струи, т. е. уменьшение ее поперечного сечения с последующим незначительным расширением и, в дальнейшем, распадом свободной поверхности струи на отдельные капли. Если отверстие некруглое, то наблюдается явление, называемое *инверсией струи*, т. е. изменение формы ее поперечного сечения по длине. Объясняется это явление взаимодействием сил поверхностного натяжения и инерции.

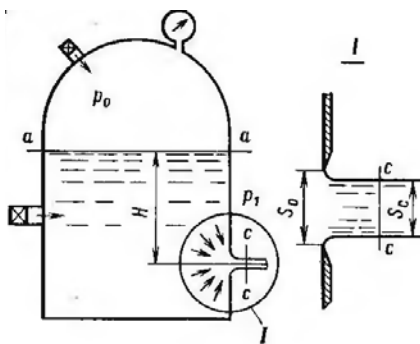


Рис. 5.1

Для вывода расчетных соотношений воспользуемся методами теории одномерных течений, а именно, запишем уравнение Бернулли для сечения $a-a$, совпадающего со свободной поверхностью жидкости в резервуаре, и $c-c$, представляющего сжатое сечение струи на выходе из отверстия (см. рис. 5.1). При выборе плоскости сравнения, проходящей через центр отверстия, уравнение Бернулли имеет вид

$$H + \frac{v_a^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + \zeta_0 \frac{v_c^2}{2g},$$

где ζ_0 – коэффициент местного сопротивления, обусловленного входом жидкости в отверстие.

Поскольку отверстие полагается малым, т. е. его размеры весьма малы по сравнению с размерами резервуара, то из условия сохранения расхода жидкости следует, что скорость опускания свободной поверхности v_a пренебрежимо мала по сравнению со скоростью истечения струи v_c . Поэтому ее величиной можно пренебречь и решить уравнение относительно скорости в сжатом сечении:

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0 + \zeta_0}} \sqrt{2g \left(H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g} \right)} = \varphi_0 \sqrt{2g \left(H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g} \right)}.$$

Величину

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0 + \zeta_0}}$$

называют *коэффициентом скорости*, который показывает отличие скорости истечения вязкой жидкости от аналогичной величины в случае идеальной жидкости. Очевидно, что для идеальной жидкости $\zeta_0 = 0$, $\alpha_0 = 1$, и, если принять, что избыточное давление отсутствует ($p_0 = p_1$), то получим формулу Торричелли

$$v_c = \sqrt{2gH}.$$

Объемный расход жидкости через отверстие определится как

$$Q = S_c v_c = \varphi_0 S_c \sqrt{2g \left(H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g} \right)} = \varphi_0 \varepsilon S_0 \sqrt{2g \left(H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g} \right)},$$

где $\varepsilon = \frac{S_c}{S_0}$ – коэффициент сжатия струи, показывающий уменьшение поперечного сечения струи на выходе из отверстия по отношению к площади самого отверстия.

Обычно вводят также коэффициент расхода $\mu = \varphi_0 \varepsilon$, поэтому соотношение для расхода можно окончательно переписать в виде

$$Q = \mu S_0 \sqrt{2g \left(H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g} \right)} = \mu \cdot S_0 \sqrt{2g H_d}, \quad (5.1)$$

где $H_d = H + \frac{p_0 - p_1}{\rho g}$ – действующий напор.

Коэффициент расхода зависит от числа Рейнольдса, на его величину влияют также числа Фруда и Вебера, определяющие отношения сил инерции к силам тяжести и поверхностного натяжения. Однако, по данным А.Д. Альтшуля, в диапазоне

$$Fr = \frac{2H}{d_0} \geq 10 \quad \text{и} \quad We = \frac{2gH\rho d_0}{\sigma} \geq 2500$$

влияние оказывает только число Рейнольдса. От этого числа также зависит коэффициент сжатия, поскольку им определяются условия течения при подходе к отверстию.

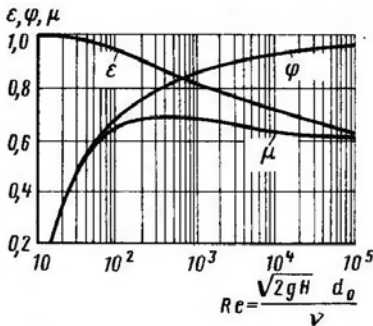


Рис. 5.2

Результаты обработки А.Д. Альтшулем опытных данных многих авторов для истечения жидкости из круглого отверстия в тонкой стенке приведены на рис. 5.2 в виде зависимости коэффициентов ε , φ , μ от числа Рейнольдса, построенного по диаметру отверстия, скорости истечения идеальной жидкости и коэффициенту кинематической вязкости.

Параметры струи можно изменять, если присоединять к отверстию короткие трубки различной формы – насадки. Один из наиболее распространенных типов насадков – внешний цилиндрический насадок – показан на рис. 5.3. Он представляет небольшой отрезок

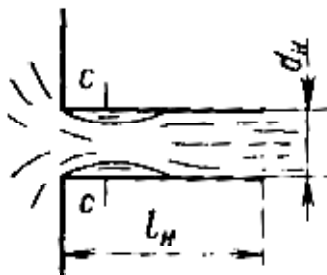


Рис. 5.3

цилиндрической трубы ($l_H \leq 10d_H$), присоединенный к отверстию с внешней стороны. При входе в него струя жидкости испытывает сжатие точно так же, как при истечении из отверстия, но поскольку она ограничена боковой стенкой насадка, то внутри него образуется кольцевая вихревая область (в сечении *с*).

Ввиду того, что скорость в сжатом сечении больше, чем в выходном (это следует из условия неразрывности или постоянства расхода), давление в сжатом сечении становится меньше атмосферного в соответствии с уравнением Бернулли, примененным для этих двух сечений. Таким образом, в сжатом сечении насадка возникает вакуум и, следовательно, течение жидкости на участке от свободной поверхности жидкости в резервуаре до сжатого сечения в насадке происходит под большим напором, нежели в случае его отсутствия. Поэтому скорость в сжатом сечении насадка будет больше, чем в сжатом сечении струи, вытекающей из отверстия при одинаковом напоре H . Это значит, что расход через насадок будет больше, чем через отверстие, при одинаковой их выходной площади. Следует, однако, отметить, что в случае использования насадка появляются дополнительные потери, обусловленные расширением потока после сжатого сечения, и потери на трение о стенки насадка. Как показывают расчетные и экспериментальные данные, при длине насадка $l_H \leq 4d_H$ эти потери меньше, чем выигрыш в действующем напоре. Поэтому данный насадок увеличивает расход жидкости, а еще большего эффекта можно достичь, используя конический расходящийся насадок с безотрывным режимом течения в диффузоре. Расчетные формулы для насадков имеют такой же вид, как для отверстия, однако величина коэффициентов в них

будет определяться конкретным типом насадка и зависеть не только от числа Рейнольдса, но и от относительной длины насадка l_H/d_H .

В случае истечения из резервуара с переменным уровнем жидкости, вообще говоря, для расчетов следует использовать уравнение Бернулли в нестационарной форме. Однако если процессы опорожнения или наполнения резервуара происходят достаточно медленно и ускорения жидкости малы, то можно применить уравнение Бернулли для установившегося течения, рассматривая течение как последовательную смену стационарных состояний, для каждого из которых применимы уравнения установившегося движения.

Рассмотрим процесс наполнения (опорожнения) резервуара, при котором часть жидкости вытекает через отверстие или насадок, но имеет место также приток жидкости в резервуар с постоянным расходом Q_n , не равным, вообще говоря, расходу истечения Q_0 .

Чтобы связать время изменения уровня жидкости в резервуаре с расходами, составим уравнение баланса объемов жидкости для слоя жидкости, расположенного на уровне z от выходного сечения отверстия (рис. 5.4). Если за время dt уровень жидкости изменился на dz , то очевидно, что

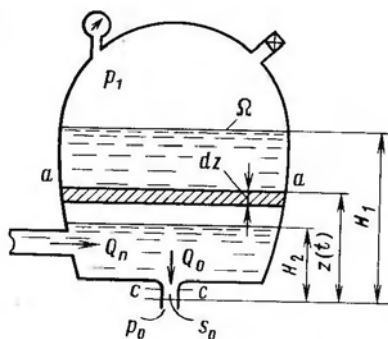


Рис. 5.4

$$\Omega \cdot dz = (Q_n - Q_0) \cdot dt,$$

где Ω – площадь поперечного сечения.

Отсюда

$$dt = \Omega dz / (Q_n - Q_0)$$

и время изменения уровня от H_1 до H_2 может быть определено интегрированием:

$$T = \int_{H_1}^{H_2} \frac{\Omega}{Q_n - Q_0} dz.$$

Полагая для простоты форму резервуара цилиндрической и заменяя расход истечения по формуле (5.1) (уровень жидкости $H = z$):

$$Q_0 = \mu S_0 \sqrt{2g \left(z + \frac{p_1 - p_0}{\rho g} \right)},$$

а принимая, что избыточное давление отсутствует, т. е. $p_1 = p_0$, получим

$$T = \frac{\Omega}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dz}{\sqrt{H_0 - \sqrt{z}}},$$

где H_1 и H_2 – начальное и конечное положение уровней жидкости в процессе ее течения;

T – время, за которое это произошло.

В вышеприведенной формуле введено обозначение напора H_0 как уровня, при котором приток жидкости равен расходу истечения:

$$Q_{\text{п}} = Q_0 = \mu S_0 \sqrt{2gH_0}.$$

Если теперь вычислить интеграл, то получим

$$T = \frac{2\Omega}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2} + \sqrt{H_0} \ln \frac{\sqrt{H_1} - \sqrt{H_0}}{\sqrt{H_2} - \sqrt{H_0}} \right).$$

Из данного соотношения очевидно, что если $H_2 \rightarrow H_0$, то $T \rightarrow \infty$, что означает установление стационарного режима, когда приток равен расходу и устанавливается режим течения с постоянным уровнем в резервуаре.

Если же $H_0 = 0$, т. е. приток отсутствует, то время опорожнения резервуара определится более просто:

$$T_0 = \frac{2\Omega}{\mu S_0 \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}),$$

а в случае наличия над свободной поверхностью избыточного давления $p_m = p_1 - p_0$ соответственно по формуле

$$T_1 = \frac{2\Omega}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \left(\sqrt{H_1 + \frac{p_m}{\rho g}} - \sqrt{H_2 + \frac{p_m}{\rho g}} \right).$$

Наибольший вакуум, возникающий внутри цилиндрического насадка в сжатом сечении струи, можно вычислить, используя уравнение Бернулли для выходного и сжатого сечений струи:

$$\frac{p_c}{\rho g} + \frac{v_c^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_c - v)^2}{2g},$$

где последний член определяет потери напора при резком расширении потока от сжатого сечения до выходного, вычисленные в соответствии с формулой Борда. Преобразуя это выражение, можно получить

$$\frac{p_a - p_c}{\rho g} = \frac{p_{\text{вак}}}{\rho g} = \frac{v}{g} (v_c - v) = \frac{v^2}{g} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = \frac{2\varphi^2 g H}{g} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = 2\varphi^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) H.$$

Здесь использовано также условие постоянства расхода $v = \varepsilon v_c$.

Из полученной формулы следует важный для практики вывод: истечение через цилиндрический насадок в атмосферу с заполнением выходного сечения возможно только при напорах, меньших предельного $H_{\text{пр}}$, который соответствует снижению давления в сжатом сечении до давления насыщенных паров жидкости при данных условиях, т. е. $p_c = p_{\text{н.п}}$:

$$H_{\text{пр}} = \frac{p_a - p_{\text{н.п}}}{2\varphi^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \rho g}.$$

При $H > H_{пр}$ происходит срыв режима работы насадка: струя жидкости отрывается от стенок и процесс истечения осуществляется как из отверстия с острой кромкой.

В случае истечения через насадок затопленной струи жидкости при некотором предельном напоре, конкретная величина которого определяется давлением насыщенных паров жидкости и заглублением насадка, будет наблюдаться кавитационный режим течения, сопровождающийся образованием и схлопыванием газовых пузырьков.

6. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ

Трубопроводы, используемые в различных технических устройствах обычно подразделяются на две группы:

- 1) простые, не содержащие ответвлений и представляющие собой одну или несколько последовательно соединенных труб, вообще говоря, разной длины и диаметров;
- 2) сложные, образованные путем разветвлений, боковых отводов, замыканий труб в кольцевые ветви различных длин и диаметров.

Принципиальная схема простого трубопровода приведена на рис. 6.1. Основными расчетными соотношениями для него являются

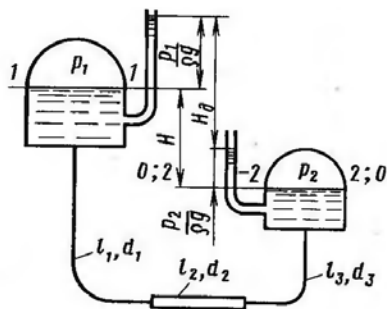


Рис. 6.1

уравнение Бернулли, уравнение неразрывности или постоянства расхода и формулы, определяющие коэффициенты сопротивления для различных режимов течения.

Рассмотрим типовые задачи гидравлического расчета вначале простых, а затем и элементов сложных трубопроводов. Для рис. 6.1 выберем плоскость сравнения 0-0 и расчетные сечения 1-1 и 2-2. Запишем уравнение Бернулли для

выбранных сечений, полагая скорости на свободных поверхностях резервуаров пренебрежимо малыми по сравнению со скоростями в трубопроводах из-за большого различия в их размерах:

$$H + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + \sum_{i=1}^n h_{wi} + \sum_{j=1}^m h_{fj},$$

где n — число участков труб постоянного диаметра, на каждом из которых потери напора составляют h_{wi} ;

m — число местных сопротивлений, на каждом из которых потери составляют h_{fj} .

Введем, как раньше, понятие действующего напора:

$$H_{\text{д}} = H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g}. \quad (6.1)$$

Тогда уравнение переписется как

$$H_{\text{д}} = \sum_{i=1}^n h_{wi} + \sum_{j=1}^m h_{fj}.$$

Если истечение по системе трубопроводов из резервуара 1 происходит не под уровень, как изображено на рис. 6.1, а в атмосферу (отсутствует резервуар 2), то уравнение Бернулли можно записать как

$$H + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g} + \sum_{i=1}^n h_{wi} + \sum_{j=1}^m h_{fj} + \frac{\alpha v_k^2}{2g},$$

где v_k – скорость на выходе из трубопровода.

Потери по длине и на местных сопротивлениях

$$h_{wi} = \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g};$$

$$h_{fj} = \zeta_j \frac{v_j^2}{2g}.$$

Если принять диаметр какого-либо участка (например, k -го) трубопровода за расчетный, то, исходя из условия постоянства расхода, можно записать

$$v_i = \frac{S_k}{S_i} v_k;$$

$$v_j = \frac{S_k}{S_j} v_k;$$

$$h_{wi} = \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{S_k^2}{S_i^2} \frac{v_k^2}{2g};$$

$$h_{fj} = \zeta_j \frac{S_k^2}{S_j^2} \frac{v_k^2}{2g}.$$

Тогда исходное уравнение Бернулли можно переписать как

$$H_d = \frac{v_k^2}{2g} S_k^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i l_i}{d_i S_i^2} + \sum_{j=1}^m \zeta_j \frac{1}{S_j^2} \right)$$

или, решая его относительно v_k :

$$v_k = \frac{1}{S_k \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i l_i}{d_i S_i^2} + \sum_{j=1}^m \zeta_j \frac{1}{S_j^2}}} \sqrt{2gH_d}.$$

Расход по трубопроводу запишется в виде

$$Q = \mu_T S_k \sqrt{2gH_d},$$

где μ_T – коэффициент расхода трубопровода, определяемый по формулам

$$\mu_T = \frac{1}{S_k \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i l_i}{d_i S_i^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_j}{S_j^2}}} \text{ – для рассматриваемой схемы с исте-}$$

чением под уровень;

$$\mu_T = \frac{1}{S_k \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i l_i}{d_i S_i^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_j}{S_j^2}}} \text{ – для случая истечения в атмосферу.}$$

В частном случае, когда трубопровод имеет одинаковый диаметр на всех участках, выражение для коэффициента расхода упрощается:

$$\mu_T = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{L}{d} + \sum_{j=1}^m \zeta_j}} \quad \text{— для истечения под уровень;}$$

$$\mu_T = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{L}{d} + \sum_{j=1}^m \zeta_j}} \quad \text{— для истечения в атмосферу.}$$

Здесь $L = \sum_{i=1}^n l_i$ — полная длина трубопровода.

Вышеприведенные формулы используют при расчете коротких трубопроводов, когда потери по длине сравнимы с потерями на местных сопротивлениях и, следовательно, необходимо учитывать и те и другие в совокупности.

На практике зачастую потери на местных сопротивлениях оказываются много меньшими, чем потери по длине (в этом случае трубопровод называется длинным), поэтому ими пренебрегают или учитывают способом эквивалентной длины. В соответствии с этим каждое местное сопротивление с потерей напора h_M виртуально (в расчетах) заменяют участком трубы длиной $L_{\text{ЭКВ}}$, выбираемой так, чтобы потери напора на этом участке равнялись бы h_M :

$$h_M = \zeta \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{L_{\text{ЭКВ}}}{d} \frac{v^2}{2g}$$

или

$$L_{\text{ЭКВ}} = \frac{\zeta}{\lambda} d.$$

В результате получается так называемая расчетная длина трубопровода, равная

$$L_0 = L + \sum_{j=1}^m L_{\text{ЭКВ},j},$$

а формула для вычисления средней скорости (в случае трубопровода постоянного диаметра) принимает вид

$$v = \sqrt{\frac{d}{\lambda \left(L + \sum_{j=1}^m L_{\text{ЭКВ},j} \right)}} \sqrt{2gH_d} = \sqrt{\frac{d}{\lambda L_0}} \sqrt{2gH_d},$$

а для расхода, соответственно

$$Q = S \sqrt{\frac{2gd}{\lambda}} \sqrt{\frac{H_d}{L_0}} = K \sqrt{\frac{H_d}{L_0}}.$$

Величину K называют *модулем расхода* или *расходной характеристикой трубопровода*. Его величина для круглых труб постоянного диаметра определяется как

$$K = S \sqrt{\frac{2gd}{\lambda}} = \sqrt{\frac{\pi^2 g d^5}{8\lambda}}.$$

Для квадратичной зоны сопротивления величина K зависит только от диаметра трубопровода и шероховатости его стенок, поэтому в диапазоне промышленного сортамента труб его значения табулированы и содержатся в справочниках.

Формулу, связывающую напор и расход с параметрами трубы, иногда используют в другой форме:

$$H = \frac{1}{K^2} L_0 Q^2 = A L_0 Q^2,$$

где A – удельное сопротивление трубопровода: $A = 1/K^2$, величина которого также табулирована в справочниках для квадратичной зоны сопротивления.

При параллельном соединении труб, т. е. когда начала трубопроводов сходятся в одной точке, так же как их концы – в другой, очевидно, что потери напора для каждого трубопровода между этими точками будут одинаковы. Но при этом расходы по каждой из труб, их соединяющих, будут различны и, как следует из вышеприведенной формулы, обратно пропорциональны их удельному сопротивлению.

При последовательном соединении трубопроводов, т. е. когда начало следующей трубы выходит из конца предыдущей, постоянным вдоль всей трубы остается расход, а потери напора будут складываться из потерь на отдельных участках.

В заключение рассмотрим основы расчета трубопроводов с равномерной раздачей расхода по пути. Если на участке трубопровода длиной L имеется распределенный расход на единицу длины $\frac{Q_{\text{п}}}{L}$, то полный путевой расход по длине L составит $Q_{\text{п}}$. Расход жидкости, движущейся дальше по трубопроводу, называют *транзитным* $Q_{\text{т}}$. При этом через некоторое сечение, расположенное на расстоянии x от начала трубы, будет проходить расход

$$Q = Q_{\text{т}} + \frac{Q_{\text{п}}}{L}(L - x) = (Q_{\text{т}} + Q_{\text{п}}) - \frac{Q_{\text{п}}x}{L}.$$

На бесконечно малом участке трубы dx потери напора составят

$$dh = \frac{Q^2}{K^2} dx = \frac{1}{K^2} \left[(Q_{\text{т}} + Q_{\text{п}}) - \frac{Q_{\text{п}}}{L} x \right]^2 dx.$$

Если проинтегрировать это выражение по всей длине трубопровода и произвести необходимые вычисления, то можно получить соотношение

$$h = \frac{L}{K^2} \left(Q_{\text{т}}^2 + Q_{\text{т}}Q_{\text{п}} + \frac{1}{3}Q_{\text{п}}^2 \right),$$

а при $Q_{\text{т}} = 0$

$$h = \frac{1}{3} \frac{Q_{\text{п}}^2}{K^2} L = \frac{1}{3} S Q_{\text{п}}^2.$$

Для определения расчетного расхода на практике удобнее использовать приближенную формулу

$$Q_{\text{расч}} = Q_{\text{т}} + \alpha Q_{\text{п}},$$

где $\alpha = 0,55$ – коэффициент эквивалентности.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Основы теории подобия и размерностей..... | 3 |
| 1.1. Общие положения..... | 3 |
| 1.2. Критерии механического подобия, понятие автомодельности..... | 10 |
| 1.3. Метод размерностей, π -теорема..... | 17 |
| 2. Силовое воздействие потока жидкости на ограничивающие его твердые поверхности..... | 25 |
| 3. Уравнение Бернулли для неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости..... | 29 |
| 4. Гидравлический удар в трубах..... | 35 |
| 5. Истечение вязкой жидкости из отверстий и насадков..... | 42 |
| 6. Гидравлический расчет трубопроводных систем..... | 50 |

Учебное издание

КАЧАНОВ Игорь Владимирович
КУЛЕБЯКИН Виталий Васильевич
НЕДБАЛЬСКИЙ Викентий Константинович

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Курс лекций

В 4 частях

Часть 4

Редактор *Т. Н. Микулик*
Компьютерная верстка *А. Г. Занкевич*

Подписано в печать 14.01.2014. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,37. Уч.-изд. л. 2,64. Тираж 100. Заказ 869.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск