УДК 625.72:55

**И. И. Леонович[1], А. П. Лащенко[2]**
[1] Белорусский национальный технический университет
[2] Белорусский государственный технологический университет

# ПРИМЕНЕНИЕ УПРУГОВЯЗКОЙ МОДЕЛИ К РАСЧЕТУ КОНСТРУКЦИЙ ДОРОЖНЫХ ОДЕЖД НЕЖЕСТКОГО ТИПА

К основным методам при расчете толщины конструктивных слоев дорожной одежды нежесткого типа можно отнести методы, основанные на теории упругости, что не является адекватной моделью поведения дорожной конструкции на практике. Задача исследования изменения напряжений и перемещений в слоистой системе с учетом реологических свойств материалов, применяемых в дорожном строительстве, является наиболее достоверной.

В статье авторами предлагается решение задачи по определению деформаций и напряжений дорожных одежд с учетом реологических свойств материалов на основе решения задач исходя из математических моделей исследуемых процессов. Рассматриваемая задача решена методом интегральных преобразований по временной координате.

**Ключевые слова:** конструкция дорожной одежды, реологические свойства материалов, математическое моделирование, интегральное преобразование.

**I. I. Leonovich[1], A. P. Lashchenko[2]**
[1]Belarusian National Technical University
[2]Belarusian State Technological University

# APPLICATION OF VISCOELASTIC MODELS TO DESIGN CALCULATIONS NON-RIGID PAVEMENT TYPE

The main objective of developing a method for calculating the thickness of the structural layers of the pavement-hole non-rigid type, include methods based on the theory of elasticity, which is not adequate to model the behavior of road design in practice. The research problem measurable ion of stresses and displacements in layered system based on the rheological properties of matter, crystals, used in road construction, is the most accurate.

The author offers a solution for the problem of determining the strain and stress pavements based on the rheological properties of materials on the basis of the decision of problems on the basis of mathematical models of the processes. This problem is solved by the method of integral transforms the time coordinate.

**Key words:** pavement structure, rheological properties of materials, mathematical modeling, integral transformation.

**Введение.** К числу основных методов, которые применяются в инженерной практике при расчете толщины конструктивных слоев дорожной одежды нежесткого типа, можно отнести методы, основанные на теории упругости (Н. Н. Иванова, А. И. Кривичсского, М. Б. Корсунского и др.), методы, основанные на теории накопления деформации, и эмпирические методы (CBR, AASHO, Хвима и др.).

Эти методы изучены достаточно подробно и детально изложены в литературе по проектированию и конструированию дорожных одежд автомобильных дорог нежесткого типа.

Однако расчету дорожных одежд с учетом ползучести материалов уделено недостаточное внимание. Так, в 1961 году М. Б. Корсунский [1] указал пути учета ползучести материалов при расчете дорожных одежд. Исходя из предположений, что известна функциональная зависимость изменений величины модуля упругости от скорости нагружения и продолжительности действия нагрузки, он сумел свести задачу теории ползучести к известным задачам теории упругости. Позже Б. С. Радовским [2] дана постановка задачи о напряженно-деформированном состоянии многослойного упруговязкого полупространства и получено решение для однородного упруговязкого полупространства в интегральном виде. Ползучесть материалов учтена И. А. Медниковым [3] в 1969 г. при решении задачи об изгибе бесконечно длинной упруговязкой балки на упруговязком основании, причем, как указывает автор, при некоторых принятых допущениях можно свести данную задачу к расчету нежестких дорожных одежд. Поэтому задача исследования изменения напряжений и перемещений в слоистой системе с учетом реологических свойств материалов, применяемых в дорожном строительстве, является актуальной.

**Основная часть**. На основании экспериментально полученных кривых ползучести при кратковременной нагрузке и сравнения решений дифференциальных уравнений, полученных на АВМ, нами был выбран и обоснован закон деформирования с учетом временной координаты для наиболее распространенных дорожно-строительных материалов.

Установлено, что для материалов, используемых в дорожном строительстве, с достаточной точностью для практических целей, может быть принята зависимость, которая описывается дифференциальным уравнением вида:

$$En\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + H\varepsilon = n\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma, \tag{1}$$

где $E$ – мгновенный модуль упругости; $n$ – время релаксации; $\varepsilon$ – деформация; $H$ – длительный модуль упругости; $\sigma$ – напряжение. Для решения уравнения (1) примем, что

$$b=n,\ a=H,\ \gamma=nE,\ \sigma=v(z,t),\ \varepsilon=\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}.$$

Кроме того, к нему прибавим уравнение перемещения частиц. В итоге получаем систему уравнений:

$$\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial t} =- a\frac{\partial u}{\partial z} + b\frac{\partial v}{\partial t} + v,$$
$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{2}$$

При исследовании упруговязких деформаций дорожных конструкций предположим, что они аппроксимированы в виде однородного слоя ограниченных размеров, который загружается нормальным давлением $v(z,\ t)$, изменяющимся во времени.

Начальные условия при сделанных предположениях будут иметь вид:

$$u\Big|_{t=0} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,$$
$$v\Big|_{t=0} = 0; \tag{3}$$

граничные же условия примут выражение:

$$v\Big|_{z=0} = \alpha(t),\ v\Big|_{z=h} = \beta(t),$$
$$\alpha(t) = \frac{4At}{T}\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right),$$
$$\beta(t) = \frac{4Bt}{T}\cdot\left(1-\frac{t}{T}\right). \tag{4}$$

Применяем одностороннее преобразование Лапласа по формуле

$$\bar{u}(z,\lambda) = \int_0^\infty u(z,t)\cdot e^{-\lambda\cdot t}dt$$

к системе (2) и, учитывая начальные и граничные условия (3), (4), получаем новую систему уравнений:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{1+b\lambda}{a+\gamma\lambda}\cdot\bar{v}(z,\lambda),$$
$$\frac{d\bar{v}}{dz} = \rho\lambda^2\bar{u}(z,\lambda). \tag{5}$$

Перейдем к изображениям в граничных условиях:

$$v(z,\lambda)\Big|_{z=0} = \frac{4A}{\lambda^2 T}\cdot\left(1-\frac{2}{\lambda T}\right),$$
$$v(z,\lambda)\Big|_{z=h} = \frac{4B}{\lambda^2 T}\cdot\left(1-\frac{2}{\lambda T}\right). \tag{6}$$

Смешанная задача (2)–(4) свелась к задачам (5), (6) в области изображения по Лапласу:

$$\bar{v}(z,\lambda) = \frac{4B}{\lambda^2 T}\cdot\left(1-\frac{2}{\lambda\cdot T}\right)\cdot\frac{sh(\omega z)}{sh(\omega h)} +$$
$$+ \frac{4A}{\lambda^2 T}\cdot\left(1-\frac{2}{\lambda T}\right)\cdot\frac{sh(\omega(h-z))}{sh(\omega h)}, \tag{7}$$
$$\omega^2 = \rho\lambda^2\cdot\frac{1+b\lambda}{a+\gamma\lambda}.$$

Переходим от изображения к оригиналу по формуле

$$u(z,t) = \int_{s-i\cdot\infty}^{s+i\cdot\infty}\bar{u}(s,\lambda)\cdot e^{\lambda\cdot t}d\lambda,$$

где интегрирование производится по любой бесконечной прямой $Re(\lambda) = s$, лежащей в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа, от $u(t)$.

Выберем прямую интегрирования $Re(\lambda) = s$ так, чтобы все особые точки функции $\bar{v}(z,\lambda)$ лежали левее этой прямой. Таким образом, правее этой прямой и на самой прямой, т. е. при $Re(\lambda) \geq s$, функция $\bar{v}(z,\lambda)$ особых точек не имеет. В этих предположениях интеграл (8) вычисляется на основании леммы Жордана [4].

Получим решение задачи (2)–(4) в области оригинала, которое удовлетворяет как дифференциальному уравнению (1), так и граничным условиям [4]:

$$v(z,t) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\bar{v}(z,\lambda)\cdot e^{\lambda t}d\lambda. \tag{8}$$

По основной теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\cdot\infty}^{s+i\cdot\infty}\bar{v}(z,\lambda)e^{\lambda t}d\lambda=\sum \mathrm{Res}\left[\bar{v}(z,\lambda)e^{\lambda t},\lambda_k\right], \quad (9)$$

где $\lambda_k$ – все особые точки подынтегральной функции $\bar{v}(z,\lambda)$.

Для удобства разбиваем интеграл (8) на сумму интегралов и вычисляем каждый в отдельности.

Приняв во внимание (9), имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{s-i\cdot\infty}^{s+i\cdot\infty}\frac{4Bsh(\omega z)}{\lambda^2 Tsh(\omega h)}e^{\lambda\cdot t}d\lambda=$$

$$=\sum \mathrm{Res}\left[\frac{4Bsh(\omega z)}{\lambda^2 Tsh(\omega h)}e^{\lambda\cdot t},\lambda_k\right]. \quad (10)$$

Функция $F(\lambda)=\dfrac{4Bsh(\omega z)}{\lambda^2 Tsh(\omega h)}$ имеет множество полюсов: полюс $\lambda = 0$ кратности два. Решив $\sin(i\omega h) = 0$, получим кубическое уравнение относительно $\lambda$:

$$h^2\rho b\lambda^3 + h^2\rho\lambda^2 + \pi^2\gamma k^2\lambda + \pi^2 ak^2 = 0,$$

где $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3...$

Из этого уравнения очевидно, что $\lambda_{1k}$, $\lambda_{2k}$, $\lambda_{3k}$ являются простыми полюсами. Вычеты относительно этих полюсов имеют вид:

$$\mathrm{Res}\left[F(\lambda)e^{\lambda\cdot t},0\right]=\frac{4Btz}{th}, \quad (11)$$

$$\mathrm{Res}\left[F(\lambda)e^{\lambda\cdot t},\ \lambda_{1k}\right]=$$

$$=\frac{4Be_{1k}t\sin(i\omega_{1k}z)}{T\left(2\lambda_{1k}\sin(i\omega_{1k}h)+\omega'_{1k}\lambda_{1k}^2 ih\cos(i\omega_{1k}h)\right)}, \quad (12)$$

где $\omega_{1k} = \omega(\lambda_{1k})$,

$$\omega'=\omega'(\lambda_{1k})=\frac{2\gamma\rho\lambda_{1k}^2+(\rho\gamma+3ab)\lambda_{1k}+2\rho a}{2(a+\gamma\lambda_{1k})^2\sqrt{\rho\dfrac{1+b\lambda_{1k}}{a+\gamma\lambda_{1k}}}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\cdot\infty}^{s+i\cdot\infty}\frac{4Bsh(\omega z)}{\lambda^2 Tsh(\omega h)}e^{\lambda\cdot t}d\lambda=\frac{4Btz}{Th}+$$

$$+\frac{4B}{T}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_{jk}t}sh(\omega_{jk}z)}{2\lambda_{jk}sh(\omega_{jk}h)-\omega'_{jk}\lambda_{jk}^2 ihch(\omega_{jk}h)}. \quad (13)$$

Аналогично находим остальные три интеграла. В итоге будем иметь искомое решение:

$$v(z,t)=\frac{4Btz}{Th}+\frac{4at(h-z)}{Th}-\frac{4Bt^2z}{T^2h}-$$

$$-\frac{4At^2(h-z)}{T^2h}+\frac{4B}{T}\left(1-\frac{2}{T}\right)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_{jk}t}sh(\omega_{jk}z)}{2\lambda_{jk}sh(\omega_{jk}h)-\omega'_{jk}\lambda_{jk}^2 ihch(\omega_{jk}h)}+$$

$$\frac{4A}{T}\cdot\left(1-\frac{2}{T}\right)\times$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_{jk}t}sh(\omega_{jk}(h-z))}{2\lambda_{jk}sh(\omega_{jk}h)-\omega'_{jk}\lambda_{jk}^2 ihch(\omega_{jk}h)}. \quad (14)$$

Для определения деформации из второго уравнения системы (2) ищем решения в области изображения по Лапласу:

$$\bar{u}(z,\lambda)=\frac{1}{\rho\lambda^2}\frac{d\bar{v}(z,\lambda)}{dz}. \quad (15)$$

Для этого, подставив (14) в (15) и применив обратное преобразование Лапласа, ищем решение для функции $u(z,t)$ в области оригинала по Лапласу:

$$u(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\left[\frac{4B}{\rho\lambda^4 T}\left(1-\frac{2}{\lambda T}\right)\frac{\omega ch(\omega z)}{sh(\omega h)}-\right.$$

$$\left.-\frac{4A}{\rho\lambda^4 T}\left(1-\frac{2}{\lambda T}\right)\frac{\omega ch(\omega(h-z))}{sh(\omega h)}\right]e^{\lambda t}d\lambda. \quad (16)$$

Используя лемму Жордана и основную теорему теории вычетов, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{4B}{\rho T}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_{jk}^2 e^{\lambda_{jk}t}sh(\omega_{jk}z)}{4\lambda_{jk}^3 sh(\omega_{jk}h)-\omega'_{jk}\lambda_{jk}^4 ihch(\omega_{jk}h)}-$$

$$-\frac{8B}{\rho T^2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_{jk}^2 e^{\lambda_{jk}t}sh(\omega_{jk}(hz))}{5\lambda_{jk}^4 sh(\omega_{jk}h)-\omega'_{jk}\lambda_{jk}^5 ihch(\omega_{jk}h)}+$$

$$+\frac{4A}{\rho T}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_{jk}^2 e^{\lambda_{jk}t}sh(\omega_{jk}(h-z))}{4\lambda_{jk}^3 sh(\omega_{jk}h)-\omega'_{jk}\lambda_{jk}^4 ihch(\omega_{jk}h)}-$$

$$-\frac{8A}{\rho T^2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_{jk}^2 e^{\lambda_{jk}t}sh(\omega_{jk}(h-z))}{5\lambda_{jk}^4 sh(\omega_{jk}h)-\omega'_{jk}\lambda_{jk}^5 ihch(\omega_{jk}h)}.$$

Приведенные расчетные формулы позволяют определять напряжение и деформацию дорожной одежды во времени, решать практические инженерные задачи. Нами получены численные решения вышепредставленных зависимостей.

**Заключение.** Нужно отметить, что проведенные теоретические исследования и полученные результаты расчетов по формулам позволяют в период проектирования автомобильной дороги определять величину толщины дорожных слоев с учетом реологических свойств материалов, применяемых в дорожном строительстве.

Предложенные способы определения компонент тензора перемещений дорожных одежд и земляного полотна могут быть использованы проектными дорожными организациями для расчета дорожных одежд по двум предельным состояниям, что позволит в комплексе с существующими расчетными методами более полно учитывать реальные свойства используемых материалов и исключить развитие недопустимых деформаций ползучести в течение всего срока службы дорожной одежды.

## Литература

1. Корсунский М. Б. Деформации дорожных одежд и фактор времени // Автомобильные дороги. 1961. № 7. С. 25–27.

2. Радовский Б. С. Поведение дорожной конструкции как слоистой вязкоупругой среды под действием подвижной нагрузки // Изв. вузов, сер.: Строительство и архитектура, 1975. № 4. С. 141–146.

3. Медников И. А. К теории изгиба многослойных и армированных плит // Труды Союздорнии. М.: Транспорт, 1969. Вып. 7. С. 90–103.

4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1965.

## References

1. Korsunskiy M. B. Warp pavements and the time factor. *Avtomobil'nyye dorogi* [Automotive pre-horns]. 1961, no. 7, pp. 25–27 (In Russian).

2. Radovskiy B. S. Behavior of road construction as a layered viscoelastic medium under the effect of the moving load. *Izvestiya vuzov* [Math. universities], series: Construction and architecture, 1975, no. 4, pp. 141–146 (In Russian).

3. Mednikov I. A. By bending theory of multilayer plates and reinforced. *Trudy Soyuzdornii* [Proceedings Soyuzdornii]. Moscow, Transport, 1969, vol. 7, pp. 90–103.

4. Lavrentev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of theory of functions of complex variables]. Moscow, 1965.

## Информация об авторах

**Леонович Иван Иосифович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Строительство и эксплуатация дорог». Белорусский национальный технический университет (220014, г. Минск, пр-т Независимости, 150, Республика Беларусь).

**Лащенко Анатолий Павлович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: lap830@mail.ru.

## Information about the authors

**Leonovich Ivan Iosifovich** – D Sc (Engineering), Professor, Professor of the Department of Construction and Operation of Roads. Belarusian National Technical University (150, Nezavisimosti Ave., 220014, Minsk, Republic of Belarus).

**Lashchenko Anatoly Pavlovich** – PhD (Engineering), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Informatics and Computer Graphics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lap830@mail.ru

*Поступила 15.02.2016*