УДК 628.18

Устойчивость круглой пластины

Лаппо И. А.
Научный руководитель Миронов Д.Н.
Белорусский национальный технический университет

Аннотация. В статье рассмотрено осесимметричное напряженно-деформированное состояние круглой пластины, которые входят в состав и являются составным элементом многих конструкций. Найдена методика с помощью которой можно определить время, по истечению которого пластина потеряет устойчивость, в зависимости от напряжения и температуры.

В случае осесимметричного начального напряженного состояния круглой пластины, когда $S^{o} = 0$, а начальные усилия $T_r^{o} = T_r^{o}(r)$ и $T_\theta^{o} = T_\theta^{o}(r)$ являются функциями только радиуса r, интегрирование общего уравнения сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. В полярной системе координат основное линеаризованное уравнение для пластины, нагруженной контурными внешними усилиями, принимает вид [1, 2]:

$$D\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2\omega}{d\theta^2}\right)- \\ -T_r^0\frac{d^2\omega}{dr^2}-T_\theta^0\left(\frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2\omega}{d\theta^2}\right)=0 \tag{1}$$

В это уравнение входят только четные производные по окружной координате θ, поэтому решение уравнения (1) можно найти в виде ряда:

$$\omega(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(r)\cos n\theta \tag{2}$$

где $\omega_n(r)$ – некоторые функции координаты r. При этом граничные условия могут быть произвольными, но неизмененными по всему контуру пластины.

Подстановка выражения (2) в уравнение (1) приводит к системе обыкновенных независимых дифференциальных уравнений.

$$D\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2\omega_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr}-\frac{n^2\omega_n}{r^2}\right)-$$
$$-T_r^0\frac{d^2\omega_n}{dr_n}-T_\theta^0\left(\frac{1}{r}\frac{d\omega_n}{dr}-\frac{n^2\omega_n}{r^2}\right)=0 \qquad (3)$$

Решение этих уравнений, удовлетворяющие заданным граничным условиям, дают собственные функции и собственные значения задачи; наименьшее из собственных значений параметра нагрузки будет критическим.

Уравнение (3) наиболее просто интегрируются при постоянных сжимающих начальных усилиях T_r^o и T_θ^o (рис. 1):

$$T_r^0=-q=const; \qquad T_\theta^0=-q=const.$$

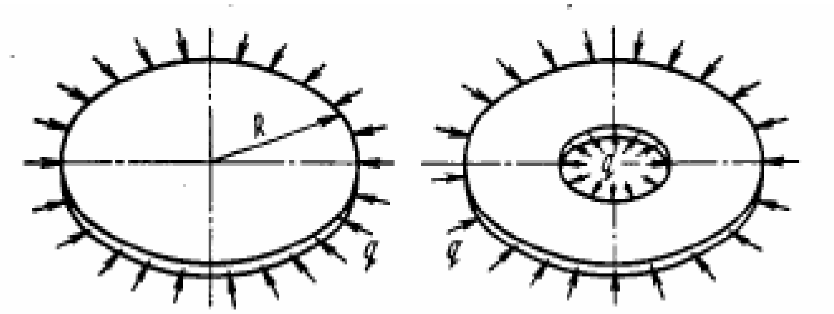

Рис. 1. Начальные усилия

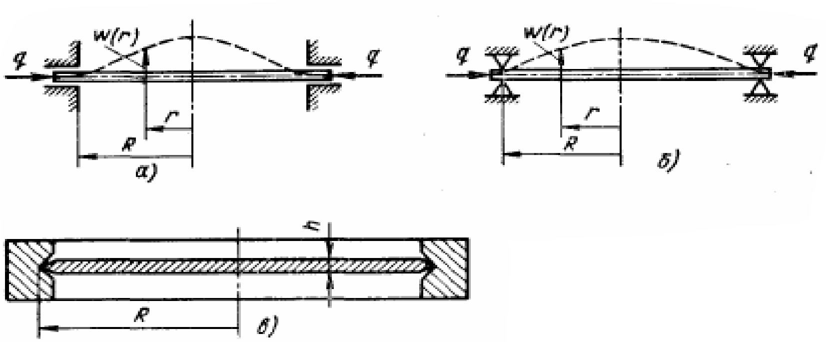

Рис. 2. Прогиб пластины

В этом случае уравнения (3) будут иметь вид:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2\omega_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\omega_n}{dr}-\frac{n^2\omega_n}{r^2}\right)+$$
$$+k^2\left(\frac{d^2\omega_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\omega_n}{dr}-\frac{n^2\omega_n}{r^2}\right)=0, \tag{4}$$

где $k^2=\dfrac{q}{D}$.

При осесимметричной форме потери устойчивости (при n=0) решение уравнения (4) имеет вид:

$$\omega_0(r)=C_1J_0(kr)+C_2Y_0(kr)+C_3\ln kr+C_4;$$

при неосесимметричной форме потери устойчивости, когда $n\neq 0$,

$$\omega_n(r)=C_1J_n(kr)+C_2Y_n(kr)+C_3r^{-n}+C_4r^n \quad (n = 1, 2, 3),$$

где $J_n(kr)$ и $Y_n(kr)$ – функции Бесселя первого и второго рода; эти функции табулированы. Дальнейшее решение задачи не вызывает никаких трудностей. Рассмотрим несколько примеров. Сплошная пластина равномерно сжата по контуру (рис. 2). Независимо от способа закрепления контура прогибы и углы поворота в центре сплошной пластины не должны обращаться в бесконечность. Поэтому для осесимметричной и неосесимметричной форм потери устойчивости необходимо принять C_2=0 и C_3=0, так как $Y_0(kr)\to\infty$, $\ln kr\to\infty$ и $Y_n(kr)\to\infty$, $r^{-n}\to\infty$ при $r\to 0$. Необращающиеся в бесконечность при $r=0$ решения для сплошной пластины как при осесимметричной, так и при неосесимметричной форме потери устойчивости имеют вид:

$$\omega_n(r)=A_1J_n(kr)+A_2r^n \quad (n=0,1,2,...). \tag{5}$$

Если контур пластины защемлен (рис. 2. а), то граничные условия на этом контуре при $r=R$: 1) $\omega=0$; 2) $\dfrac{d\omega}{dr}=0$. Соответственно граничные условия для $\omega_n(r)$: 1) $\omega_n(R)=0$; 2) $\omega_n'(R)=0$.

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по r.

Подчиняя решение (5) этим граничным условиям, получаем однородную систему уравнений относительно произвольных постоянных A_1 и A_2:

$$A_1 J_n(kR) + A_2 R^n = 0;$$
$$A_1 J_n^{'}(kR) + A_2 n R^{n-1} = 0.$$

Равенство нулю определителя этой системы дает уравнение

$$nR^{n-1} J_n(kR) - R^n J_n^{'}(kR) = 0. \tag{6}$$

Функции Бесселя первого рода связаны между собой дифференциальным соотношением

$$J_n^{'}(x) = \frac{n}{x} J_n - J_{n-1}.$$

Поэтому

$$J_n^{'}(kr) = \frac{n}{r} J_n(kR) - kJ_{(n+1)}(kr).$$

При $k \neq 0$ из уравнения (6) получим

$$J_{(n+1)}(kr) = 0. \tag{7}$$

Корни полученного характеристического уравнения приводят к собственным значениям параметра k, связанного с внешним усилием q. Для определения критической нагрузки необходимо вычислить наименьшее собственное значение параметра k, поэтому для каждого n достаточно найти первый корень уравнения (7). Так, для n = 0 находим $(kR)_1$=3,832; n=1 – первый корень $(kR)_1$=5,135 и т.д. Следовательно, для сплошной пластины с защемленным наружным контуром наименьшее собственное значение q_1 дает первый корень уравнения (7) при n=0, т.е.

$$q_{кр} = \frac{(3{,}832)^2 D}{R^2} = 14{,}68 \frac{D}{R^2}. \tag{8}$$

Потеря устойчивости защемленной по контуру пластины происходит по осесимметричной форме и вид изогнутой срединной поверхности (рис. 2, а) описывается (с точностью до постоянного множителя) функцией, получаемой из (5) при kR = 3,832 и n = 0:

$$\omega_{кр}(r)=\left[1-\frac{J_0\left(3{,}832\dfrac{r}{R}\right)}{J_0(3{,}832)}\right],$$

поскольку из первого граничного условия при n = 0 следует

$$A_2 = -A_1J_0(kR) = -A_1J_0(3{,}832).$$

Температурные задачи устойчивости круглых пластин.

Линеаризованные уравнения дают возможность найти критический уровень внутренних начальных усилий, независимо от того, какими причинами эти усилия вызваны (наоборот, закритической области поведение пластины определяется характером внешних причин, приведших к потере устойчивости). Поэтому при осесимметричном нагреве круглой пластины исследование устойчивости плоского состояния равновесия можно проводить с помощью уравнения (3). Начальные внутренние усилия T_r^{o} и T_θ' должны быть определены с учетом нагрева пластины.

Рассмотрим наиболее простой случай температурной потери устойчивости пластины. Круглая тонкая пластина равномерно нагревается вместе с массивной обоймой (рис. 2, в). Температурные коэффициенты линейного расширения материалов пластины и обоймы соответственно равны a_1 и a_2. Температура Δt^o отсчитывается от температуры того начального состояния, при котором радиальный зазор между пластиной и обоймой отсутствует, а контактное усилие q_k равно нулю. Когда $a_1>a_2$, при нагреве между пластиной и обоймой возникает контактное усилие q_k, равномерно сжимающее пластину (если $a_1<a_2$, то сжимающее контактное усилие возникает при охлаждении).

В силу симметрии задачи $S^0 = 0$; $T_r^0 = T_\theta^0 = -q_k$. В нагреваемой пластине

$$\varepsilon_r^0=\frac{1}{Eh}(T_r^0-\mu T_\theta^0)+a_1\Delta t^0=-\frac{q_k}{Eh}(1-\mu)+a_1\Delta t^0;$$

$$\varepsilon_\theta^0=\frac{1}{Eh}(T_\theta^0-\mu T_r^0)+a_1\Delta t^0=-\frac{q_k}{Eh}(1-\mu)+a_1\Delta t^0;$$

$$\gamma^0=0.$$

Если обойму считать жесткой и пренебречь ее деформацией от контактного усилия q_k то, приравнивая температурные окружные удлинения обоймы окружным удлинениям пластины, получаем

$$q_k = \frac{(a_1 - a_2)\Delta t^0 Eh}{1-\mu},$$

где E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины, причем в данном случае без усложнения задачи можно считать их изменяющимися с температурой.

Для определения критического значения $\Delta t^0_{кр}$ можно воспользоваться формулой:

$$q_{кр} = K\frac{D}{R^2}.$$

Откуда следует, что

$$\Delta t^0_{кр} = K\frac{D(1-\mu)}{R^2 Eh(a_1 - a_2)} = \frac{1}{a_1 - a_2}\frac{K}{12(1+\mu)}\left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

Значение коэффициента K зависит от способа закрепления пластины в обойме (свободное опирание, защемление, упругая заделка).

Примечательно, что в окончательную формулу для $\Delta t^0_{кр}$ не входит модуль упругости материала пластины.

Этот способ используют и для решения более сложных температурных задач устойчивости круглых осесимметрично нагретых пластин. Сначала из решения задачи термоупругости определяют усилия T_r^0 и T_θ^0, а затем находят наименьшее собственное значение уравнения (3). Однако точные решения подобных задач удается найти в исключительных случаях. В общем случае решения получают приближенным методом.

Определить момент потери устойчивости круглой неравномерно нагретой пластины под действием распределённой нагрузки в условиях ползучести, радиусом 200 мм и шириной 25 мм. Материал оболочки Х18Н10(12)Т.

После проведения расчета в Ansys наблюдаем форму потери устойчивости, изображенную на рисунке 3, и получен график зависимости прогиба (по радиусу) от времени, изображенный на рисунке 4. Расчет произведен с помощью трёх модулей Steady-State Thermal, Static Structural и Linear Buckling. Пластина по контуру находится в неподвижной заделке и на верхнюю часть пластины действует распределённая нагрузка q=6 МПа. По контуру будем считать, что пластина охлаждается до 2^0 С, а в нижней части нагревается до 80^0 С.

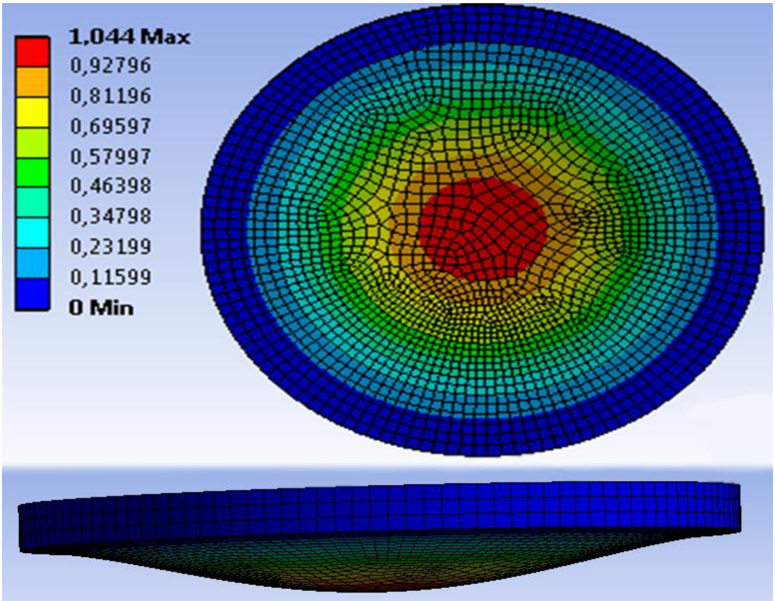

Рис. 3. Форма потери устойчивости

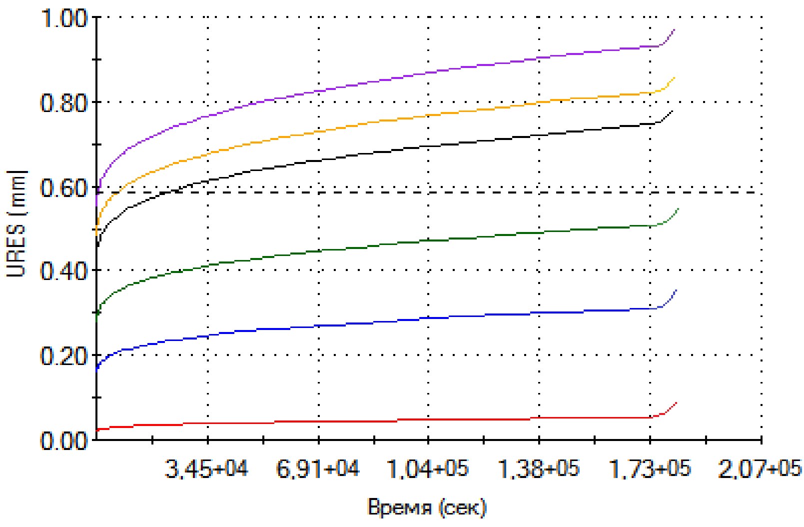

Рис. 4. График зависимости прогиба от времени
(кривые построены для выбранных точек распределённых по радиусу)

Форма потери устойчивости и кривая зависимости прогиба от времени совпадают с теоретическими значениями.

Вывод

При заданной распределённой нагрузке, неравномерно нагретая круговая пластина по контуру и по радиусу, теряет устойчивость в течение 48 часов. Полученные расчетные данные показывают значительное влияние деформаций ползучести на прочностные характеристики круговой пластины и подтверждают важность учета в расчетах условий ползучести.

Литература

1. Алфутов, Н. А. Устойчивость пластин. Решение основного уравнения для круглых пластин / Н. А. Алфутов // Инженерный сборник. – 1956. – Т. 23. – С. 163–166.

2. Алфутов, Н. А. Устойчивость пластин. Температурные задачи устойчивости круглых пластин / Н. А. Алфутов // Инженерный сборник. – 1956. – Т. 23. – С. 166–168.

УДК 628.1

Развитие водоснабжения армии со времен средневековья и до окончания Великой Отечественной войны

Мосько А. А.
Научный руководитель Романчук С. Н.
УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Снабжения водой военнослужащих является одной из основных задач инженерной службы. Проблема водоснабжения стоит еще с древнейших времен. Не просто так человек привлекал для решения данной проблемы лучшие достижения в области науки и техники.

Еще древними египтянами и индейцами были созданы системы водохранилищ и платин, специальные колеса и машины, чтобы поднимать воду из глубин. Центральная и средняя Азия в свою очередь славилась устройством колодцев глубиной до 500 метров. Знаменитая на весь мир Римская система водопроводов имела протяженность около 450 километров. С помощью которой римлянам ежедневно доставляли 1 миллион литров воды.

В XIX веке произошел мощный толчок в развитии водоснабжения, который был связан с углубленным изучением в области медицины и гигиены. Благодаря правильной эксплуатации водопроводов и соответствующему надзору резко сократилось количество заболеваний брюшным тифом