

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ, МЕТАЛЛУРГИЯ

УДК 669.017+536.4

С. М. КАБИШОВ, И. А. ТРУСОВА, П. Э. РАТНИКОВ

ФОРМИРОВАНИЕ НАРУЖНОГО СЛОЯ МЕЛКИХ РАЗОРИЕНТИРОВАННЫХ ДЕНДРИТОВ ПРИ НЕПРЕРЫВНОЙ РАЗЛИВКЕ ЗАГОТОВОК

*Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь,
e-mail: boxsmk@gmail.com*

Представлена расчетная методика, которая позволяет оценить влияние внешнего охлаждения и интенсивности циркуляции расплава в жидком ядре заготовки на формирование наружной корочки мелких разориентированных кристаллов. С использованием методики можно установить момент времени, когда плоский фронт теряет устойчивость и начинается рост столбчатых дендритов. Решение обратной задачи дает возможность определить толщину шлакового гарнисажа в верхней части кристаллизатора.

Ключевые слова: фронт кристаллизации, расплав, двухфазная зона, кластер, дендрит, структура, интенсивность теплообмена.

S. M. KABISHOV, I. A. TRUSOVA, P. Je. RATNIKOV

FORMATION OF THE OUTER LAYER OF SMALL UNDIRECTED DENDRITES AT CONTINUOUS CASTING OF STEEL

*Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus,
e-mail: boxsmk@gmail.com*

A calculation method that allows assessing the impact of external cooling and circulation intensity of melt in the liquid core of the workpiece formation of outer crust of fine disoriented crystals is presented. One can also obtain the time when the plane front will lose stability and growth of columnar dendrites begins. When solving the inverse problem it is possible to set the parameters of an existing layer of slag-forming mixture on top of the mold.

Keywords: crystallization front, melt two-phase zone, cluster, dendrite structure, intensity of cooling.

В настоящее время не существует общепринятой теории, где были бы сформулированы причины возникновения того или иного типа структуры в затвердевающем слитке. В качестве причин перехода от гладкого фронта к ячеистому и далее к росту столбчатых дендритов рассматриваются факторы, такие как наличие в расплаве большого количества нерастворимых включений, являющихся центрами кристаллизации, неравномерность теплообмена на поверхности слитка, химическая неоднородность расплава и пр. [1–10 и др.]. Достоинством многих работ, представленных в технической литературе, является сопоставление расчетных результатов с экспериментальными данными. Однако возможность применения указанных методик на практике, как правило, ограничена, так как они не всегда позволяют достоверно описать процесс формирования кристаллической структуры слитка. Не претендуя на обобщение и критику различных гипотез, в данной работе приведен анализ начального этапа формирования кристаллической структуры непрерывно-литой заготовки, в частности, возникновение и рост наружного слоя мелких разориентированных кристаллов и условия его перехода к ячеистому фронту.

Практически во всех теоретических работах по рассматриваемой тематике отмечается, что наружный слой мелких разориентированных дендритов формируется в условиях интенсивного

охлаждения расплава. Применительно к технологии непрерывной разливки стали такие условия наблюдаются в момент первоначального контакта расплава с водоохлаждаемыми стенками в верхней части кристаллизатора. Вместе с тем результаты металлографических исследований показывают, что толщина этого слоя даже у сталей одинакового химического состава, разлитых на одной и той же машине непрерывного литья заготовок (МНЛЗ) (данные центральной заводской лаборатории ОАО «Белорусский металлургический завод»), не имеет постоянного значения (таблица, п. 4, п. 6). Видимо, в данном случае различались технологические параметры разливки (температура перегрева расплава, скорость разливки, состав и толщина шлакообразующего слоя (ШОС) и др.). Прослеживалась тенденция увеличения толщины мелкозернистой корочки у сталей с более высоким содержанием углерода и легирующих компонентов. Несмотря на ограниченность объема данных, можно предположить, что основную роль в формировании слоя мелких разориентированных дендритов играют условия охлаждения в кристаллизаторе МНЛЗ и химический состав разливаемой стали.

Данные, представленные в таблице, позволяют выдвинуть еще одну гипотезу: по мере увеличения массивности заготовки (размеров сечения) толщина наружной мелкозернистой корочки уменьшается. Вероятнее всего, это объясняется снижением скорости разливки и, как следствие, изменением условий кристаллизации металла в верхней зоне кристаллизатора.

Размеры кристаллизационных зон при разливке заготовок сечением 250×300 и 300×400 мм в условиях МНЛЗ-3 ОАО «Белорусский металлургический завод» [11]

№ п.п.	Марка стали	Профиль, мм	Наружная мелкозернистая корочка, мм			Ширина зоны столбчатых кристаллов (до большой грани × до малой грани), мм		
			min	max	middle	min	max	middle
1	60С2ХФА	250×300	4	5	4	60×66	65×67	62×67
2	70Б	250×300	4	6	5	60×63	64×69	62×67
3	460	300×400	0	1	0,5	86×89	95×102	92×92
4	S355J2G3	300×400	3	2	2	70×93	74×94	72×93
5	20	300×400	0	1	0,5	82×88	96×94	91×91
6	S355J2G3	300×400	0	1	0,5	90×97	103×121	99×101
7	10	300×400	0	1	0,5	86×89	92×92	89×90

Чтобы оценить влияние различных факторов на процесс формирования наружной корочки непрерывно-литой заготовки, в данной работе предлагается анализ балансового уравнения растущего на фронте кристаллизации дендрита (кристаллита) при условии его сохранения без подплавления и разрушения. Рассматривается один акт кристаллизации продолжительностью τ_{cr} , в течение которого объем твердой фазы возрастает на величину V :

$$\rho_s L \frac{1}{\tau_{cr}} \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \tau_{cr}} V d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \tau_{cr} + \tau_c} q_l F_{l-s} d\tau = \rho_s c_s \Delta \bar{T}_d \frac{1}{\tau_{cr}} \left[V_0 + \frac{1}{\tau_{cr}} \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \tau_{cr}} V d\tau \right] + \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \tau_{cr} + \tau_c} q_s F_s d\tau, \quad (1)$$

где ρ_s , c_s – плотность и теплоемкость твердой фазы; V_0 – начальный объем твердой фазы; L – скрытая теплота кристаллизации; q_s – плотность теплового потока, отводимого от охлаждаемой поверхности заготовки; q_l – плотность теплового потока, отводимого от жидкой фазы к поверхности дендрита и фронта кристаллизации в пределах выделенного объема; $\Delta \bar{T}_d$ – изменение средней температуры твердой фазы (корочки) за время кристаллизации и последующего охлаждения $\tau_{cr} + \tau_c$.

Рассмотрим процесс кристаллизации, когда образуется слой мелких разориентированных кристаллов. При этом фронт кристаллизации можно считать плоским. Если формируется слой толщиной δ , то $\Delta F_{l-s} = 0$, $F_{l-s} = F_s$, $\Delta V = \delta F_s$ (рис. 1).

Будем считать, что толщина слоя δ , который формируется в течение одиночного акта кристаллизации за время τ_{cr} , имеет порядок, близкий к размерам кластера, т. е. 1 нм [12]. Выполним оценку условий теплообмена на границах выделенного участка, которые обеспечат формирование такого слоя. Температуру переохлаждения ограничим значением $\Delta T = 10$ °С [1], т. е. максимальной величиной, которая установлена в процессе экспериментов при кристаллизации многоком-

понентных сплавов в условиях, близких к условиям промышленных технологий. Дополнительным ограничением будет неподплавление формирующегося плоского слоя, т. е. вся теплота, подводимая за время τ_{cr} со стороны перегретой жидкой фазы и выделившаяся в процессе кристаллизации, отводится в твердую корочку и частично поглощается самим формирующимся слоем при разогреве. Это вполне соответствует реальным условиям кристаллизации стали в верхней части кристаллизатора. Максимальная величина разогрева образующегося слоя твердой фазы при данном условии не будет превышать значение температуры переохлаждения, т. е. ΔT . В противном случае температура слоя (или его поверхности) превысит температуру ликвидуса T_{liq} и он расплавится. Будем считать, что средняя температура разогрева образовавшегося слоя твердой фазы будет равна $0,5\Delta T$. Выразим из балансового уравнения δ для начального момента формирования корочки ($V_0 = 0$), когда с охлаждаемой поверхностью (прослойкой шлакообразующей смеси) контактирует металлическая жидкость:

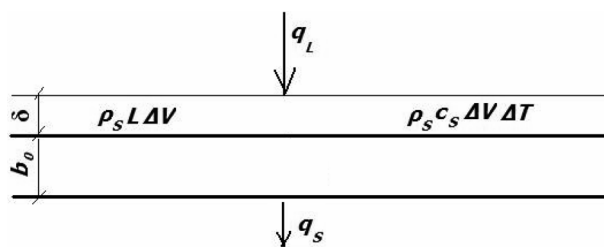


Рис. 1. Схема роста плоского слоя мелких разориентированных дендритов

$$\delta = \frac{\lambda_l \int_0^{\tau_{cr} + \tau_c} \text{grad} T_l d\tau - \lambda_s \int_0^{\tau_{cr} + \tau_c} \text{grad} T_s d\tau}{\rho_s (L - 0,5c_s \Delta T)}. \quad (2)$$

Принимая во внимание реальные значения теплоты кристаллизации и теплоемкости стали вблизи температуры фазового перехода, знаменатель всегда будет положительным и при реальных значениях температуры переохлаждения приблизительно равным $2 \cdot 10^9$. Тогда формирование плоского слоя толщиной 1 нм возможно при условии, что разность теплового потока со стороны жидкого ядра и потока, отводимого в твердую корочку, будет приблизительно составлять 2 Дж за время $\tau_{cr} \approx 10^{-6}$ с (ориентировочная продолжительность существования кластера в металлической жидкости вблизи температуры фазового перехода [1]). Фактически количество теплоты, подведенное к фронту кристаллизации со стороны жидкого ядра и выделившееся в процессе затвердевания плоского слоя, почти равно количеству теплоты, отведенному через твердую фазу и поглощенному слоем при разогреве. Однако необходимым условием формирования слоя мелких разориентированных дендритов является превышение интенсивности охлаждения над суммарным количеством теплоты, которая выделяется в процессе их кристаллизации и подводится к фронту со стороны жидкой фазы за промежуток времени $\tau_{cr} + \tau_c$.

Очевидно, что изменение интенсивности циркуляции расплава вблизи фронта кристаллизации либо снижение интенсивности охлаждения приведет к нарушению равновесия и торможению роста корочки из мелких разориентированных кристаллов. В кристаллизаторе МНЛЗ могут быть созданы такие условия, когда данный слой вообще не образуется. Увеличение толщины слоя на большую величину за время $\tau_{cr} + \tau_c$ возможно лишь в том случае, когда температура на его поверхности, контактирующей с жидкостью, при выделении скрытой теплоты кристаллизации не будет повышаться, так как при достижении температуры ликвидуса T_{liq} присоединение еще одного кластера (группы кластеров) будет невозможно.

Принимая во внимание, что процесс кристаллизации протекает не монотонно, а циклически [9], когда этапы формирования твердой фазы чередуются с периодами, в течение которых жидкость у фронта кристаллизации переохлаждается до температуры $T_{liq} - \Delta T$, разобьем процесс формирования корочки из мелких разориентированных кристаллов на N шагов ($i \in N$). Будем считать, что продолжительность каждого i -го шага одинакова и равна $\tau_{cr} + \tau_c$.

На $(i+1)$ -м шаге после появления твердой корочки выражение (2) будет иметь следующий вид:

$$\delta_{i+1} = \frac{\lambda_l \int_{\tau_i}^{\tau_i + \tau_{cr} + \tau_c} \text{grad} T_l d\tau - \lambda_s \int_{\tau_i}^{\tau_i + \tau_{cr} + \tau_c} \text{grad} T_s d\tau + \rho_s \Delta i_s \sum_0^i \delta_i}{\rho_s (L - 0,5c_s \Delta T)}. \quad (3)$$

Перейдем к более детальному рассмотрению условий возникновения и роста слоя мелких разориентированных дендритов при кристаллизации в условиях МНЛЗ. Для этого необходимо проанализировать процесс отвода теплоты от поверхности затвердевающего слитка в кристаллизаторе.

Согласно рекомендациям [13], плотность теплового потока от слитка к стенке кристаллизатора равна

$$q = \frac{T_{\text{пов}} - T_{\text{ст}}}{R_0 + R_1 + R_2 + R_3}, \quad (4)$$

где R_0, R_1, R_2, R_3 – соответственно термическое сопротивление области контакта жидкой прослойки ШОС с поверхностью заготовки; термические сопротивления собственно жидкой и твердой прослоек ШОС; термическое сопротивление области контакта твердого слоя ШОС с кристаллизатором ($R_3 = 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot \text{К}/\text{Вт}$).

Термическое сопротивление области контакта жидкой прослойки ШОС с поверхностью заготовки $R_0 = 0$. Коэффициенты теплопроводности жидкой и твердой прослоек шлакового гарнисажа соответственно равны $\lambda_1 = 1,5 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\lambda_2 = 2,0 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ [13]. Общая толщина слоя ШОС при разливе блюмов со скоростью 0,4–1,1 м/мин составляет по разным оценкам [13, 14] от 0,08 до 0,4 мм. Поскольку формирование твердой корочки начинается в верхней части кристаллизатора, гарнисаж будет иметь максимальную толщину. Примем толщину шлакообразующего слоя $\delta_{\text{шос}} = 0,4 \text{ мм}$. Доля жидкой прослойки не превышает 20–25% (в рассматриваемом случае примем 0,1 мм) [13]. Температура поверхности заготовки в начале формирования корочки близка к температуре ликвидуса (раслав в момент контакта находится в жидком состоянии). Например, для стали ШХ15СГ данная температура составляет около 1450 °С, температура стенки кристаллизатора – 200 °С [9]. При таких параметрах плотность теплового потока, отводимого от поверхности заготовки в верхней части кристаллизатора, будет равна

$$q = \frac{1450 - 200}{\frac{0,0001}{1,5} + \frac{0,0003}{2,0} + 10^{-4}} \approx 4 \cdot 10^6 \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

При снижении температуры поверхности затвердевающей корочки до уровня температуры солидуса расплава (для стали ШХ15СГ $T_{\text{sol}} \approx 1320 \text{ °С}$) значение плотности теплового потока уменьшается. Однако по мере передвижения заготовки к нижней части кристаллизатора толщина прослойки ШОС также уменьшается. При этом в конце участка плотного контакта заготовки со стенками кристаллизатора она снижается в 2–3 раза из-за ферростатического давления расплава и конусности стенок. Если принять, что данный процесс происходит по линейной зависи-

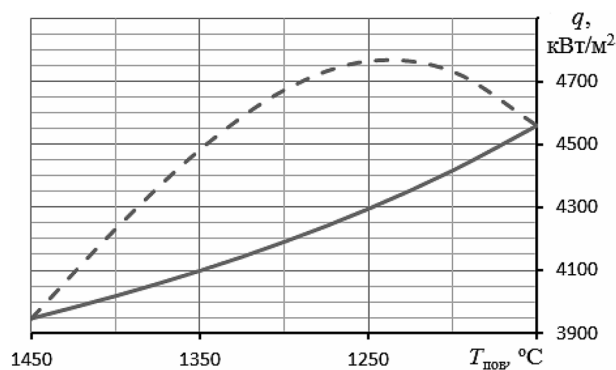


Рис. 2. Расчетная зависимость плотности теплового потока к стенке кристаллизатора от температуры поверхности заготовки: сплошная линия – толщина ШОС уменьшается по линейной зависимости при перемещении вниз вдоль вертикальной оси кристаллизатора; штриховая линия – то же, но по квадратичной параболе

мости, и учесть, что на участке кристаллизатора, где отсутствует газовый зазор, температура поверхности слитка, как показывают численные расчеты [8], снижается до 1150–1100 °С, то величина плотности теплового потока будет монотонно возрастать (рис. 2, сплошная линия). Если же предположить, что толщина шлакового гарнисажа на выбранном участке уменьшается по квадратичной параболе, то данная зависимость будет иметь явный экстремум в точке, где температура поверхности заготовки уменьшится до 1250 °С.

Учитывая результаты экспериментальных измерений интенсивности теплообмена по высоте кристаллизатора МНЛЗ [9], следует отметить, что задание квадратичной зависимости толщины ШОС в зоне плотного контакта

ближе к реальным условиям. Данная зависимость не позволяет точно определить изменение плотности теплового потока по мере снижения температуры поверхности заготовки. Однако полученные результаты показывают, что интенсивность теплообмена по высоте кристаллизатора в зоне плотного контакта будет в течение какого-то периода времени возрастать, что обусловлено, прежде всего, уменьшением толщины шлаковой прослойки. Следует отметить, что в реальных условиях разливки изменение толщины слоя ШОС имеет более сложный характер и зависит не от температуры поверхности, а от силы ферростатического давления жидкого металла, свойств ШОС, прочности формирующейся корочки слитка, режима качания кристаллизатора и других факторов. Поэтому реальные величины коэффициентов теплоотдачи могут отличаться от значений, полученных расчетным путем.

Разность среднеинтегральных плотностей тепловых потоков в формуле (2) можно оценить при учете продолжительности одиночного акта кристаллизации $\Delta\tau_{cr}$. При $\tau_{cr} \sim 10^{-6}$ с для формирования слоя толщиной 1 нм (порядок размера кластера) необходимо, чтобы данная разность составляла около $2 \cdot 10^6$ Вт/м².

Предположим, что распределение температур в твердой корочке по характеру близко к параболе [9]. Согласно экспериментальным исследованиям и результатам численных расчетов, диапазон температур на поверхности заготовки в верхней части кристаллизатора составляет около 1250–1350 °С (в расчетах примем $T_{пов} = 1300$ °С), соответственно температура на фронте кристаллизации равна T_{sol} . Температура перегрева расплава над линией ликвидуса перед разливкой составляет около 30–50 °С, температура на границе жидкой и двухфазной зоны равна $T_{liq} - \Delta T$. Для стали ШХ15СГ $T_{sol} = 1320$ °С, $T_{liq} = 1450$ °С, тогда распределение температур в твердой корочке можно представить в виде зависимости

$$T_s = T_{sol} - Ax^n.$$

Будем считать, что в рассматриваемый момент времени толщина сформировавшейся корочки $b = 1$ мм. С учетом значений температур, приведенных выше, определим величину постоянной A . При $x = b$ получим $T_s = T_{пов} = 1300 = 1320 - A \cdot 0,001^n$, отсюда $A = 2 \cdot 10^{3n+1}$.

Градиент температуры в твердой фазе будет равен $\text{grad}T_s = -nAx^{n-1} = -2n \cdot 10^{3n+1} x^{n-1}$. При начальной толщине твердой корочки 1 мм $\text{grad}T_s = -2n \cdot 10^{3n+1} x^{n-1} = -2n \cdot 10^4$ К/м. При температуре, близкой к температуре кристаллизации, коэффициент теплопроводности стали равен около 23–25 Вт/(м·К). Среднеинтегральная плотность теплового потока $\bar{q}_s = -\lambda_s \text{grad}T_s \approx 5n \cdot 10^5$ Вт/м². Согласно результатам расчетов, выполненных выше, $\bar{q}_s \approx 4 \cdot 10^6$ Вт/м². Следовательно, в начальный период разливки стали на МНЛЗ распределение температур в твердой корочке близко к параболе со степенью 8.

Будем считать, что к моменту возникновения слоя толщиной 1 мм и далее за время $\tau_{cr} + \tau_c$ плотность теплового потока q_s существенно не изменится (рис. 2) и также практически постоянным будет значение $\bar{q}_l = -\lambda_l \text{grad}T_l$. Тогда $q_l = \bar{q}_s - 2 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^6$ Вт/м².

Рост плоского слоя прекратится, когда величина числителя в выражении (3) станет равной нулю:

$$(\tau_{cr} + \tau_c)(\bar{q}_l - \bar{q}_s) = \rho_s \Delta i_s \sum_0^i \delta_i. \quad (5)$$

Очевидно, что при численном решении уравнения теплопроводности достаточно легко определить момент, когда гладкий фронт потеряет устойчивость и перейдет в ячеистый фронт и дальше – к росту столбчатых дендритов.

Необходимо отметить, что даже ориентировочная оценка значения температурного градиента в жидкой фазе в начальный период кристаллизации возможна только численным путем. Задание параболического распределения температур по аналогии с твердой корочкой в данном случае приведет к ошибочным результатам по некоторым причинам. Прежде всего, эффективный коэффициент теплопроводности жидкой фазы существенно зависит от интенсивности циркуляции расплава вблизи границы двухфазной зоны. Согласно [15], в турбулентном пограничном слое коэффициент температуропроводности пропорционален градиенту скорости. Посколь-

ку в кристаллизаторе характер течения расплава может быть турбулентным, то градиент скорости вблизи двухфазной зоны будет достигать больших значений и эффективный коэффициент теплопроводности расплава будет существенно превышать табличные величины.

Оценим влияние интенсивности циркуляции расплава в жидком ядре заготовки на толщину пограничного слоя. В [15] показано, что его толщина обратно пропорциональна корню квадратному из критерия Рейнольдса, т. е.

$$\delta \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\frac{\nu}{uD}}.$$

Кинематическая вязкость расплавленной стали вблизи температуры кристаллизации составляет $8,7 \cdot 10^{-7}$ м²/с. Скорость циркуляции расплава вблизи фронта кристаллизации по разным оценкам равна 0,05–0,1 м/с [8]. Порядок толщины пограничного слоя будет составлять тогда около 10^{-2} м. Повышение скорости циркуляции в 10 раз позволит уменьшить толщину пограничного слоя в три раза.

Согласно уравнению (3), увеличение плотности теплового потока со стороны жидкой фазы будет подавлять рост слоя мелких разориентированных кристаллов. Однако данный слой формируется в непосредственной близости к зеркалу расплава, возмущение которого (например, при помощи электромагнитного перемешивания) может привести к затягиванию в расплав шлаковых частиц, что недопустимо. По этой причине катушку электромагнитного перемешивания устанавливают на некотором расстоянии от верха кристаллизатора либо используют две катушки, и та, которая располагается выше, подавляет возмущения на зеркале расплава. Такой вариант при снижении интенсивности циркуляции расплава в верхней части кристаллизатора позволит увеличить толщину слоя мелких разориентированных дендритов. Следовательно, наиболее важным условием для его возникновения будет поддержание на требуемом уровне разности между интенсивностью внешнего охлаждения и плотностью теплового потока к затвердевающей корочке со стороны жидкой фазы.

При численном решении задач теплопроводности и движения расплава в жидком ядре заготовки с учетом методики, представленной выше, можно установить, обеспечивают ли существующие условия возникновение и рост слоя мелких разориентированных кристаллов на поверхности заготовки, а также определить момент времени, когда плоский фронт потеряет устойчивость и начнется рост столбчатых дендритов. При необходимости также можно решить обратную задачу и оценить параметры прослойки ШОС в верхней части кристаллизатора.

Список использованной литературы

1. Баландин, Г. Ф. Основы теории формирования отливки / Г. Ф. Баландин. – М.: Машиностроение, 1976. – 328 с.
2. Ефимов, В. А. Разливка и кристаллизация стали / В. А. Ефимов. – М.: Metallurgia, 1976. – 552 с.
3. Журавлев, В. А. Теплофизика формирования непрерывного слитка / В. А. Журавлев, Е. М. Китаев – М.: Metallurgia, 1974. – 216 с.
4. Самойлович, Ю. А. Формирование слитка / Ю. А. Самойлович. – М.: Metallurgia, 1977. – 160 с.
5. Чалмерс, Б. Теория затвердевания / Б. Чалмерс. – М.: Metallurgia, 1968. – 288 с.
6. Хворинов, Н. И. Кристаллизация и неоднородность стали / Н. И. Хворинов. – М.: Машгиз, 1958. – 392 с.
7. Флемингс М. Процессы затвердевания; пер. с англ. / М. Флемингс. – М.: Мир, 1977. – 424 с.
8. Стальной слиток. Т. 1. Управление кристаллической структурой / Ю. А. Самойлович [и др.]. – Мн.: Беларуская навука, 2000. – 583 с.
9. Стальной слиток. Т. 2. Затвердевание и охлаждение / Ю. А. Самойлович [и др.]. – Минск: Беларуская навука, 2000. – 637 с.
10. Вайнгард, У. Введение в физику кристаллизации металлов; пер. с англ. / У. Вайнгард. – М.: Мир, 1967. – 170 с.
11. Расчет зон столбчатых и глобулярных кристаллов при непрерывной разливке мелкосортных заготовок / О. В. Дубина [и др.] // Metallургическая и горнорудная промышленность. – 2003. – № 4. – С. 106–109.
12. Репях, С. И. Размеры кластеров при температуре плавления металлов / С. И. Репях // Сб. тр. III Междунар. науч.-практ. конф. «Metallurgia-2014» – Днепропетровск: Национальная металлургическая академия Украины. – 2014. – С. 184–186.
13. Исследование зоны контакта слитка и стенки кристаллизатора МНЛЗ / В. М. Паршин [и др.] // Сталь. – 1987. – № 9. – С. 26–28.
14. Зайцев, А. И. Физико-химические основы нового метода управления отводом тепла от слитка к кристаллизатору / А. И. Зайцев, А. В. Лейтес, А. Л. Либерман // Сталь. – 2003. – № 3. – С. 70–74.
15. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Гидродинамика. 3-е изд., перераб. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – М.: Наука. 1986. – 736 с.

Поступила в редакцию 11.06.2015