

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Практикум для студентов специальностей

1-38 01 01 «Механические и электромеханические  
приборы и аппараты»;

1-38 01 02 «Опτικο-электронные и лазерные приборы и системы»;

1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»;

1-38 02 02 «Биотехнические и медицинские аппараты и системы»;

1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением  
по образованию в области приборостроения*

УДК 53.082.75(076.5)

ББК 22.33

И88

С о с т а в и т е л и:

В. В. Черный, Ю. В. Развин, В. В. Красовский

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра общей физики БГУ;

зав. кафедрой физики БГУИР, канд. физ.-мат. наук,

доцент *Г. Ф. Смирнова*

И88 **Исследование** электростатических полей методом электролитического моделирования : практикум для студентов специальностей 1-38 01 01 «Механические и электромеханические приборы и аппараты»; 1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные приборы и системы»; 1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»; 1-38 02 02 «Биотехнические и медицинские аппараты и системы»; 1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности» / сост.: В. В. Черный, Ю. В. Развин, В. В. Красовский. – Минск: БНТУ, 2020. – 35 с.

ISBN 978-985-583-086-4.

Практикум содержит описание свойств электростатических полей и метода электролитического моделирования этих полей. Приведена схема экспериментальной установки для подобного моделирования. На основании экспериментальных данных определяется напряженность электрического поля в различных точках пространства, находящихся между электродами различной формы.

Практикум предназначен для студентов инженерных специальностей, изучающих раздел «Электричество и магнетизм» курса общей физики.

УДК 53.082.75(076.5)

ББК 22.33

ISBN 978-985-583-086-4

© Белорусский национальный  
технический университет, 2020

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

## **Цель работы:**

1. Изучить основные характеристики электростатического поля.
2. Изучить метод электролитического моделирования.

## **Задача работы:**

1. Определить форму эквипотенциальных поверхностей для электрического поля в проводящем электролите при различной форме электродов.
2. Определить в различных точках напряженность электрического поля и поток вектора напряженности.

## **Электрический заряд. Закон сохранения. Закон Кулона.**

Все тела в природе способны электризоваться, то есть приобретать электрический заряд. Наличие заряда проявляется в том, что заряженное тело взаимодействует с другими заряженными телами. Имеется два вида электрических зарядов, условно называемых положительными и отрицательными. Впервые такие термины были введены американским естествоиспытателем и общественным деятелем Б. Франклином. Электрический заряд является неотъемлемым свойством некоторых элементарных частиц.

Заряд большинства элементарных частиц одинаков по абсолютной величине. Его называют элементарным зарядом. Положительный элементарный заряд обозначается  $e$ . Значение его составляет  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кулона. Обычно положительные и отрицательные электрические заряды присутствуют в равных количествах. Такое тело электронейтрально. Если же в теле создать избыток зарядов одного знака, тело окажется заря-

женным. Поскольку всякий заряд  $q$  образуется целым числом элементарных зарядов, он является целым кратным  $e$ :

$$q = \pm Ne, \quad (1)$$

где  $N$  – целое число. Если  $N \gg 1$ , то дискретностью заряда можно пренебречь.

Система называется электрически изолированной, если через ограничивающую ее поверхность не могут проникать электрические заряды. **Суммарный заряд электрически изолированной системы не может измениться.** Это утверждение представляет собой закон сохранения электрического заряда.

Точечным зарядом называют заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от этого тела до других тел, несущих электрический заряд.

**Закон Кулона.** Сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}, \quad (2)$$

где  $k$  – коэффициент, зависящий от выбора системы единиц;

$q_1$  и  $q_2$  – величины зарядов;

$r$  – расстояние между зарядами.

В системе СИ коэффициент пропорциональности

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Он представлен в виде:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (3)$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная, имеющая размерность электрической емкости, деленной на длину и равная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

В векторной форме закон имеет вид:

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}, \quad (4)$$

где  $\vec{F}_{21}$  – сила, действующая на второй заряд со стороны первого;

$\vec{r}_{21}$  – радиус-вектор второго заряда относительно первого;

$k$  – коэффициент пропорциональности.

В однородной диэлектрической среде закон Кулона в системе СИ имеет вид:

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{21}}{\epsilon \cdot r_{21}^3}, \quad (5)$$

где  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Если на данный заряд действует система из  $N$  точечных зарядов, то результирующая сила равна

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (6)$$

Как видно, результирующая сила равна векторной сумме сил, действующих на данный заряд со стороны каждого из зарядов системы.

## Электрическое поле. Напряженность электрического поля.

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле. Это поле проявляет себя тем, что действует с некоторой силой на помещенный в него заряд. Для исследования поля применяют пробные заряды  $q_{\text{пр}}$ . Они представляют собой точечные заряды, абсолютная величина которых много меньше абсолютной величины зарядов, создающих поле.

Поместим пробный заряд  $q_{\text{пр}}$  в некоторую точку поля, создаваемого неподвижным точечным зарядом  $q$ . Согласно закону Кулона, сила, действующая на точечный заряд, равна

$$\vec{F} = k \frac{q_{\text{пр}} q \vec{r}}{r^3}.$$

Величина силы зависит как от величины пробного заряда, так и от интенсивности поля. Поэтому сила не может характеризовать интенсивность поля. Если же взять отношение  $\vec{F} / q_{\text{пр}}$ , то оно уже не зависит от величины  $q_{\text{пр}}$ , а зависит только от интенсивности поля и может быть принято в качестве количественной характеристики интенсивности поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}}. \quad (7)$$

Эту векторную величину называют напряженностью электрического поля в данной точке. Направление вектора совпадает с направлением силы, действующей на положительный пробный заряд.

Напряженность поля точечного заряда в точке, радиус-вектор которой относительно точечного заряда равен  $\vec{r}$ , про-

порциональна величине заряда  $q$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  от заряда до данной точки поля:

$$\vec{E} = k \frac{q\vec{r}}{r^3}. \quad (8)$$

На всякий заряд  $q$ , находящийся в электростатическом поле, будет действовать сила

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (9)$$

Формула (7) справедлива не только для напряженности поля точечного заряда, но также и для поля, создаваемого любой совокупностью неподвижных зарядов. При этом величина пробного заряда должна быть достаточно малой, чтобы не внести заметных изменений в исследуемое поле.

Напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создал бы каждый из зарядов системы в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (10)$$

Равенство (10) выражает принцип суперпозиции полей. Этот принцип позволяет определить напряженность поля любой системы зарядов.

Электрическое поле можно описать, определив для каждой точки величину и направление вектора  $\vec{E}$ . Совокупность этих векторов образует поле вектора напряженности электрического поля. Электрическое поле можно представить с помощью силовых линий или линий вектора напряженности. Эти линии проводятся таким образом, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора  $\vec{E}$  (рис. 1).

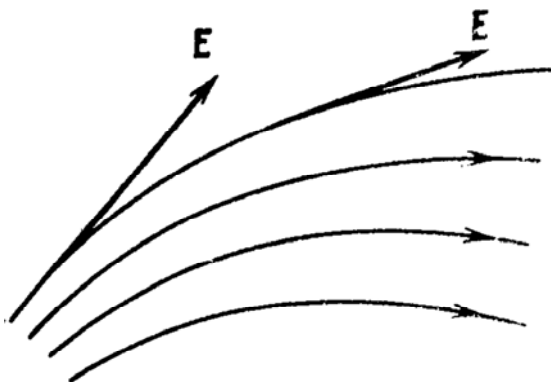


Рис. 1.

Плотность линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности площадки, перпендикулярной к линиям, было равно модулю вектора  $\vec{E}$ . Линии вектора  $\vec{E}$  для точечного заряда представляют собой совокупность радиальных прямых, направленных от заряда если он положителен, и к заряду, если он отрицателен (рис. 2).

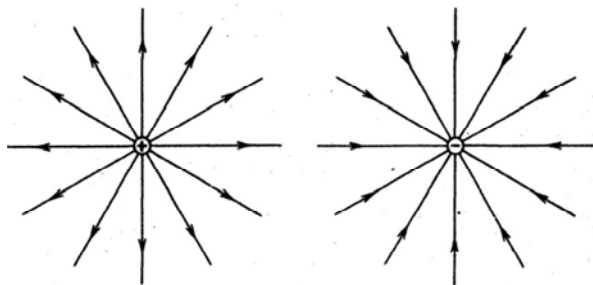


Рис. 2.

Потоком вектора  $\vec{E}$  через площадку  $dS$  называется величина, равная

$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha = E_n dS, \quad (11)$$



где  $E_n$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на направление внешней нормали к площадке (рис. 3).

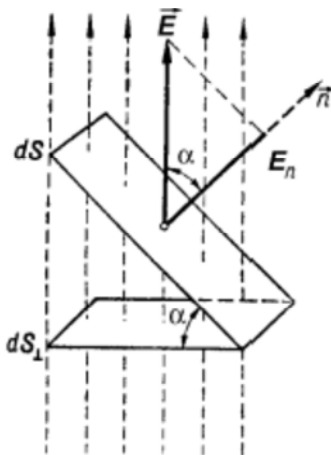


Рис. 3

Поток есть алгебраическая величина, причем знак его зависит от выбора направления нормали к площадке  $dS$ . Если направление вектора внешней нормали меняется на противоположное, то и знак  $\cos \alpha$  меняется на противоположный. Соответственно, знак  $d\Phi_E$  также меняется на противоположный.

### Теорема Гаусса и ее применение к вычислению напряженности полей

Определим поток вектора  $\vec{E}$  через сферическую поверхность радиусом  $r$ , в центре которой находится точечный заряд  $q > 0$ .

Для всех точек сферы модуль вектора  $\vec{E}$  одинаков и равен

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (12)$$

Разобьем сферу на  $n$  малых участков. Для каждого такого малого участка сферы площадью  $\Delta S$  вектор  $\vec{E}$  совпадает по направлению с вектором внешней нормали к сфере (рис. 4). Поэтому угол  $\alpha$  равен нулю, а  $\cos \alpha = 1$ . Поток вектора  $\vec{E}$  через участок  $\Delta S_i$  под номером  $i$  в соответствии с (11) будет равен  $d\Phi_{Ei} = E_i \Delta S_i \cos \alpha_i = E \Delta S_i$ .

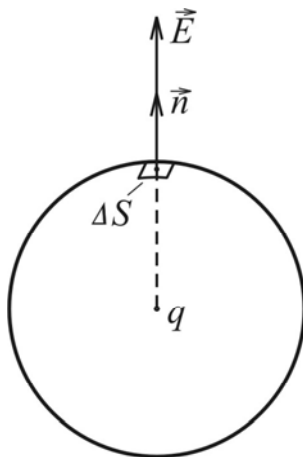


Рис. 4

Полный поток через сферу равен алгебраической сумме потоков через все элементарные участки, на которые разбита сфера:

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^n E \Delta S_i.$$

Поток будет равен пределу последней суммы при величине  $n$ , стремящейся к бесконечности:

$$\Phi_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (E \Delta S_i).$$

Данный предел называется интегралом от вектора напряженности по поверхности сферы

$$\Phi_E = \oiint_{S_{\text{сф}}} E dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (E \Delta S_i),$$

где символ  $\oiint_{S_{\text{сф}}}$  означает, что интеграл берется по замкнутой поверхности, которой в данном случае является поверхность сферы.

Так как напряженность  $E = \text{const}$ , ее можно вынести за знак суммы:

$$\Phi_E = \oiint_{S_{\text{сф}}} E \Delta S_i = E \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta S_i.$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n dS_i = S_{\text{сф}}$ , где  $S_{\text{сф}}$  – площадь сферы,

$S_{\text{сф}} = 4\pi r^2$ , то для потока получаем:

$$\Phi_E = \oiint_{S_{\text{сф}}} E dS = E \cdot 4\pi r^2.$$

Подставив сюда величину  $E$  из (10), получим:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (13)$$

Поток вектора  $\vec{E}$  через сферу равен величине заряда, находящегося в центре сферы, деленной на электрическую постоянную. Можно доказать, что справедливо более общее утвер-

ждение, представляющее собой теорему Гаусса для электростатического поля. Теорема формулируется следующим образом:

**Поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную:**

$$\Phi_E = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0}. \quad (14)$$

То, что имеется в виду именно алгебраическая сумма, означает, что заряды могут быть как положительными, так и отрицательными. Формула (14) относится к случаю, когда заряды являются точечными. Если же заряды распределены непрерывно в некотором объеме  $V$ , то теорема Гаусса принимает вид

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV,$$

где  $\rho$  – объемная плотность электрического заряда.

### **Потенциал. Эквипотенциальные поверхности**

Как видно из формулы (7), напряженность электрического поля является силовой векторной характеристикой поля. Кроме нее, электрическое поле характеризуется еще и скалярной энергетической величиной – потенциалом. Теоретически легче вести расчет потенциалов, чем напряженностей поля, так как математические операции со скалярными величинами более просты.

Особенностью электростатического поля является то, что работа поля по перемещению в нем электрического заряда не зависит от траектории, по которой заряд перемещается из

начального положения в конечное. Работа перемещения заряда по замкнутому контуру в электрическом поле равно нулю. Подобные поля называют потенциальными.

Потенциалом электростатического поля в данной точке называется величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q}, \quad (15)$$

где  $W_p$  – потенциальная энергия заряда  $q$ , равная работе, совершаемой силами электростатического поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность.

Из (15) вытекает, что заряд  $q$ , находящийся в точке поля с потенциалом  $\varphi$ , обладает потенциальной энергией, равной

$$W_p = q\varphi. \quad (16)$$

Следовательно, работа сил поля над зарядом  $q$  при перемещении его из точки 1 в точку 2 может быть выражена через разность потенциалов

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (17)$$

Таким образом, работа, совершаемая над зарядом силами электростатического поля по его перемещению, равна произведению величины заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек.

Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной поверхностью. Если потенциал задан как функция пространственных переменных (координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ ), то уравнение эквипотенциальной поверхности имеет вид:

$$f(x, y, z) = \text{const.}$$

Обычно поверхности проводят в пространстве таким образом, чтобы разность величин потенциала на соседних поверхностях была одинаковой.

В качестве примера рассмотрим эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда, для которого потенциал определяется формулой:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}. \quad (18)$$

Отсюда следует, что  $\varphi = \text{const}$  при  $r = \text{const}$ . Это значит, что поверхности равного потенциала будут концентрическими сферами, описанными вокруг точечного заряда (рис. 5). Цифрами указана величина потенциала на соответствующей эквипотенциальной поверхности.

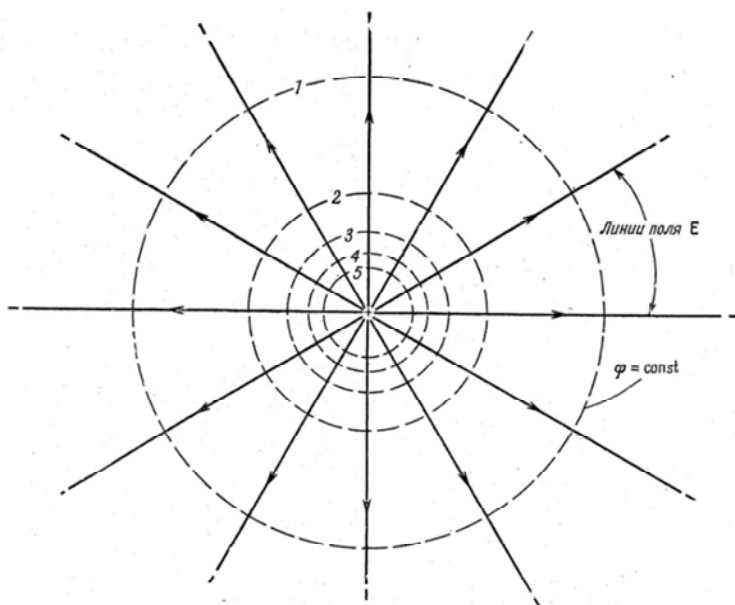


Рис. 5

Силовые линии и эквипотенциальные поверхности для системы из двух равных по модулю и противоположных по знаку точечных зарядов (эта система называется диполем) представлена на рис. 6.

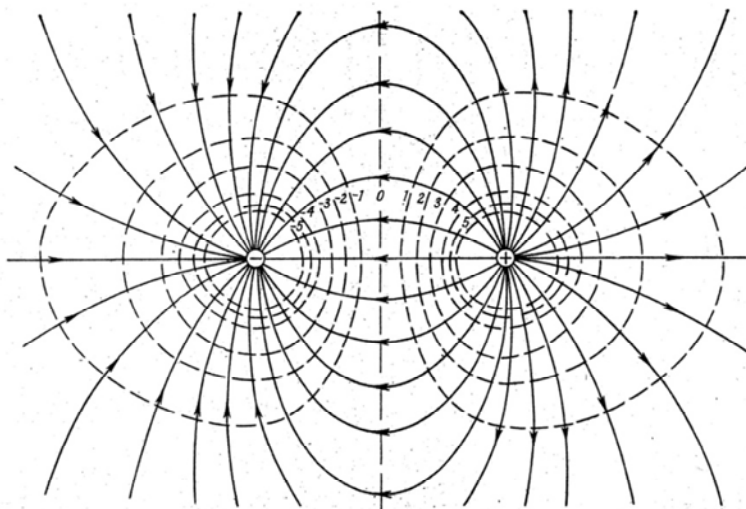


Рис. 6

Если сила не постоянна по величине или направлению, а перемещение заряда из начальной точки 1 в конечную 2 происходит по кривой, то траекторию разбивают на  $n$  маленьких участков. На каждом таком участке под номером  $i$ , ввиду того, что он короткий, можно полагать, что перемещение  $d\vec{l}_i$  происходит по прямой, а сила  $\vec{F}_i$  остается постоянной по модулю и направлению. Тогда работа на данном участке

$$dA_i = \vec{F}_i d\vec{l}_i = F_i dl_i \cos \alpha_i,$$

где  $\alpha_i$  – угол между векторами силы и перемещения на участке под номером  $i$ .

Полная работа на участке от начальной точки до конечной будет равна алгебраической сумме работ, совершенных на всех маленьких участках:

$$A \approx \sum_{i=1}^n F_i ds_i \cos \alpha_i.$$

Результат будет тем точнее, чем больше величина  $n$ . Предел данной суммы при величине  $n$ , стремящейся к бесконечности, называется криволинейным интегралом от вектора  $\vec{F}$  от начальной точки 1 до конечной 2 вдоль данной кривой:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (F_i ds_i \cos \alpha_i) = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 F \cos \alpha dl. \quad (19)$$

В случае, когда точечный заряд  $q_2$  перемещается в поле, создаваемом точечным зарядом  $q_1$ , величина работы сил поля

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{kq_1q_2}{r^2} \cos \alpha dl,$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния до начальной и конечной точек от заряда  $q_1$ .

Величина  $dl \cos \alpha$  представляет собой изменение расстояния до заряда  $q_1$  при бесконечно малом перемещении, равное  $dr$  (рис. 7). Тогда

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{kq_1q_2}{r^2} dr = kq_1q_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = kq_1q_2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = q_2 \left[ kq_1 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right];$$

$$A = q_2 (\varphi_1 - \varphi_2).$$



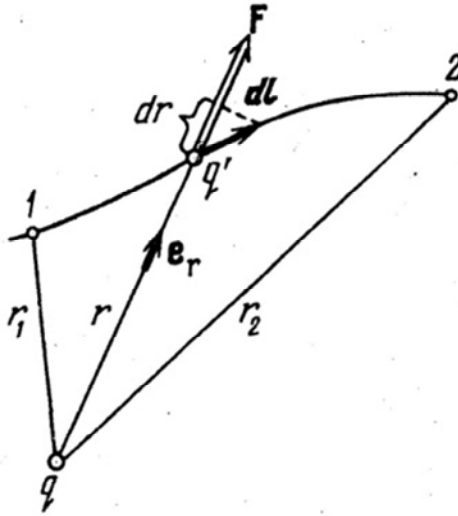


Рис. 7

Криволинейный интеграл по замкнутой кривой от некоторого вектора называется циркуляцией данного вектора. Циркуляция вектора силы представляет собой работу этого вектора на замкнутой кривой. Кулоновские силы являются консервативными: их работа на замкнутом контуре равна нулю:

$$\oint \vec{F} d\vec{l} = 0. \quad (20)$$

Это означает, что поле кулоновских сил является потенциальным.

Так как  $\vec{F} = q\vec{E}$ , то

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (21)$$

то есть циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна нулю.

## Градиент потенциала. Связь между напряженностью и потенциалом

Как показано выше, электрическое поле можно описать либо с помощью векторной величины  $\vec{E}$  (силовая характеристика), либо с помощью скалярной величины  $\Phi$  (энергетическая характеристика). Между ними существует связь, которая следует из связи силы с потенциальной энергией.

Работа сил электрического поля над зарядом  $q$  при его перемещении, определяемом вектором  $\vec{dl}$ , может быть представлена с одной стороны, как

$$dA = qE_l dl, \quad (22)$$

где  $E_l$  – проекция вектора напряженности на направление вектора элементарного перемещения  $\vec{dl}$ ;

$dl$  – модуль вектора перемещения.

С другой стороны, эта работа равна убыли потенциальной энергии:

$$dA = -d(q\Phi) = -q d\Phi = -q \frac{\partial \Phi}{\partial l} dl, \quad (23)$$

где  $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$  представляет собой производную от потенциала по направлению, задаваемому вектором  $\vec{dl}$ .

Приравнивая (22) и (23), получим:

$$qE_l dl = -q \frac{\partial \Phi}{\partial l} dl,$$

откуда имеем:

$$E_l = -\frac{\partial \Phi}{\partial l}. \quad (24)$$

Через  $l$  обозначено произвольно выбранное направление в пространстве. В частности, оно может быть одной из координатных осей в декартовой системе координат:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Отсюда следует

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z = -\left(\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \quad (25)$$

Выражение в скобках представляет собой градиент скалярной функции  $\varphi$

$$\text{grad}\varphi = \left(\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \quad (26)$$

Тогда для напряженности получим:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (27)$$

Напряженность электрического поля равна минус градиенту от потенциала.

Градиент любой скалярной функции пространственных координат  $f(x, y, z)$  представляет собой векторную величину, определяемую как

$$\text{grad}f = \left(\vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right). \quad (28)$$

Направление вектора градиента совпадает с направлением, вдоль которого при смещении из данной точки функция  $f$  возрастает наиболее быстро. Частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$

представляют собой проекции вектора градиента на оси  $x, y, z$ . Производная по этому направлению  $\frac{\partial f}{\partial n}$  дает модуль градиента.

Для обозначения градиента скалярной функции  $f$  в векторном анализе используется символ, называемый дифференциальным оператором набла  $\nabla$ :

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (29)$$

Нахождение градиента формально рассматривается как умножение оператора набла на скалярную функцию:

$$\text{grad}f = \nabla f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (30)$$

### **Электролитическое моделирование электростатического поля**

Во многих случаях требуется знать картину электростатического поля внутри данного устройства (радиолампы, рентгеновские установки, электростатические линзы, ускорители частиц, фотоэлектронные умножители и другие электровакуумные приборы). Решить эту задачу теоретически чрезвычайно сложно. В таких случаях широко используют метод моделирования поля, когда экспериментально определяются параметры электрического поля между такими же электродами, что и в конкретном устройстве.

В основу изучения распределения потенциалов в электростатическом поле часто берется метод зондов. В исследуемую точку поля вводится специальный дополнительный электрод – зонд, изготовленный из проводящего материала (обычно из металла). Зонд должен в минимальной степени исказить своим присутствием исследуемое поле. Он соединяется проводником с прибором, который измеряет потенциал зонда по

отношению к какой-либо точке поля, потенциал которой принят равным нулю. **При этом, однако, зонд не принимает автоматически потенциал точки электростатического поля в воздухе, в которую он помещен.** Чтобы это имело место, необходимо обеспечить возможность натекания электрических зарядов на зонд или их стекание с зонда. С этой целью приходится применять специальные методы.

В одном из них используется так называемый пламенный зонд. Он представляет собой сочетание зонда в виде тонкой металлической проволоки (обычно из термостойкой платины) с маленьким пламенем газовой горелки. Наличие в газовом пламени ионов и электронов обеспечивает возможность стекания или натекания зарядов под действием сил электростатического поля до тех пор, пока зонд не примет потенциал той точки поля, в которую он помещен.

Однако работать с такими зондами неудобно и сложно. Кроме того, при измерениях в электростатических полях возникают серьезные специфические трудности, очень сильное влияние оказывают внешние помехи.

В то же время при измерениях в проводящих средах все подобные недостатки отсутствуют. **Поэтому разработан особый метод изучения электростатических полей путем искусственного воспроизведения их структуры в проводящих средах – электролитах, по которым проходит ток при таком же, что и в электростатическом поле, расположении электродов.** Для идентичности обоих полей должны быть выполнены следующие условия.

1. Напряжение между проводящими электродами должно поддерживаться постоянным (амплитуда переменного напряжения низкой частоты между электродами неизменна).

2. Проводимость электролита одинакова во всех точках и намного меньше проводимости материала электродов.

При выполнении данных условий поле между электродами в электролите будет таким же, что и электростатическое поле между находящимися в вакууме противоположно заряженными

ми электродами, аналогичными по форме и размерам и из такого же материала. Заряды электродов равны по модулю, а напряжение между одинаково в обоих случаях.

**Идентичность полей в вакууме и в проводящей среде означает, что совокупность эквипотенциальных поверхностей в двух этих полях будет одинаковой, а силовые линии совпадают с линиями тока.** Кроме того, если зонд выполнен из того же материала, что и электроды, контактная разность потенциалов не будет искажать результаты измерений потенциала.

Таким образом прямое изучение электростатического поля заменяется изучением его точной модели в проводящей среде, что является значительно более удобным с точки зрения процесса измерений.

Экспериментально проще производить измерения потенциалов, так как абсолютное большинство приборов измеряют разности потенциалов, а не напряженности электрического поля. Силовые линии строятся потом как кривые, перпендикулярные к эквипотенциальным поверхностям.

Для исследуемых полей имеет место правило подобия, позволяющее в различных масштабах воспроизводить подлежащие изучению поля. Данное правило утверждает, что если размеры электродов, создающих поле, и все расстояния между электродами изменены в одно и то же число раз, то структура поля остается прежней.

### **Описание лабораторной установки**

Схема лабораторной установки для электролитического моделирования электростатического поля изображена на рис. 8.

В ванну  $B$ , изготовленную из изолятора, помещают металлические электроды  $\mathcal{E}$ , поле между которыми необходимо исследовать. Ванна заполнена слабо проводящим электролитом. Ток между электродами создается генератором переменного тока низкой частоты. Переменный ток используется потому, что протекание его через электролит не сопровождается элек-

тролизом, то есть не происходит осаждение вещества на электродах. В измерительную часть установки входят ванна  $B$ , два электрода  $\mathcal{E}$ , зонд  $Z$ , изготовленный из того же металла, что и электроды, и вольтметр  $V$ , измеряющий напряжение между зондом и одним из электродов.

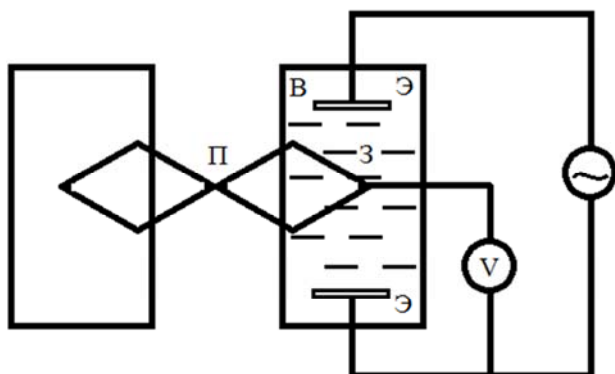


Рис. 8

Эквипотенциальные поверхности наносят на бумагу с помощью специального устройства – пантографа  $\Pi$ . Данный вариант пантографа представляет собой приспособление в виде двух раздвижных шарнирных параллелограммов с общей осью, закрепленной неподвижно на столе. Ось совпадает со смежными вершинами параллелограммов. На свободно перемещающихся вершинах параллелограммов укрепляются вертикально закрепленный зонд и вертикально закрепленный карандаш. Система рычагов пантографа устроена таким образом, что все перемещения зонда в горизонтальной плоскости автоматически повторятся карандашом, расположенным над бумагой. Бумага закрепляется на столике с помощью магнитных фиксаторов.

Когда зонд располагается в электролите в нужном месте, производится нажим на карандаш и на бумаге остается точка.

Процесс изучения поля сводится к следующему. Путем перемещения зонда в электролите определяют положение семи точек, в которых потенциал имеет одинаковую величину.

Аналогичные действия производят для других значений потенциала. Разность потенциалов между соседними поверхностями удобно выбирать одну и ту же.

Точки, соответствующие определенной величине потенциала, соединяют плавной кривой. Таким путем определяют положение соответствующей эквипотенциальной поверхности (точнее говоря, положение линии пересечения эквипотенциальной поверхности с плоскостью бумаги). Повторив это для всех значений потенциала, получают семейство эквипотенциальных поверхностей.

Семейство эквипотенциальных поверхностей можно дополнить силовыми линиями электрического поля используя тот факт, что силовые линии перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Измерив расстояние между эквипотенциальными поверхностями, определяют среднюю напряженность поля в точке, равноудаленной от обеих поверхностей.

**Задание по выполнению приведено в рабочей инструкции к данной лабораторной работе.**

### **Контрольные вопросы**

1. Что называется электростатическим полем?
2. Сформулируйте закон Кулона.
3. Что называется напряженностью электрического поля? В каких единицах она измеряется?
4. Что называется потенциалом электрического поля? В каких единицах он измеряется?
5. Сформулируйте принцип суперпозиции для напряженности и потенциала.
6. Что называют силовыми линиями поля?
7. Что такое эквипотенциальные поверхности?
8. Какая связь между потенциалом и напряженностью в данной точке поля?
9. В чем заключается метод электролитического моделирования электростатического поля?



## Примеры расчета наиболее важных симметричных электростатических полей в вакууме

### Электростатическое поле электрического диполя в вакууме

Электрическим диполем (или двойным электрическим полюсом, рис. 9) называется система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов ( $+q$ ,  $-q$ ), расстояние  $l$  между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля ( $l \ll r$ ).

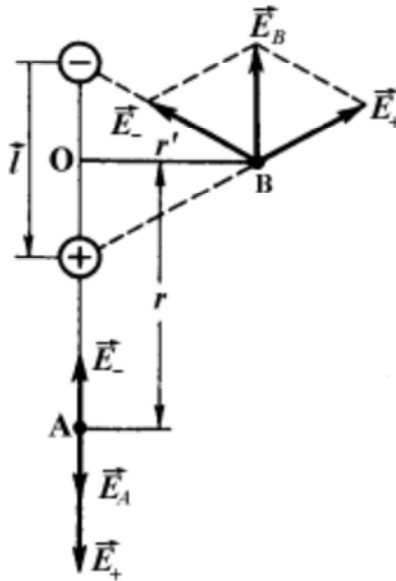


Рис. 9

Плечо диполя  $\vec{l}$  — вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними.

**Электрический момент диполя** – вектор, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению модуля заряда  $|q|$  на плечо  $\vec{l}$ :

$$\vec{p} = |q|\vec{l}. \quad (31)$$

1. Напряженность и потенциал поля диполя на продолжении оси диполя в точке  $A$  (см. рис. 9):

$$\vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_-;$$

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-.$$

Обозначим через  $r$  расстояние от точки  $A$  до середины диполя. Тогда, учитывая, что выполняется неравенство  $r \gg l$ , получаем:

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r-l/2)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r+l/2)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3},$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{r^3}. \quad (32)$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(r-l/2)} - \frac{q}{(r+l/2)} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^2},$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^2}. \quad (33)$$

2. Напряженность поля в точке  $B$  на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины при  $r' \gg l$ :

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r')^2 + (l/2)^2} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r')^2}.$$

Так как  $\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{r'}$ , то  $E_B = E_+ \frac{l}{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(r')^3}$ ,

или

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pe}{(r')^3}; \quad (34)$$

$$\varphi_B = 0. \quad (35)$$

Точка  $B$  равноудалена от зарядов  $+q$  и  $-q$  диполя, поэтому потенциал поля в точке  $B$  равен нулю. Вектор  $\vec{E}$  направлен противоположно вектору  $\vec{l}$ .

### ***Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости***

Бесконечная плоскость заряжена с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma = dq / dS$ . Линии напряженности перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от нее в обе стороны.

В качестве Гауссовой поверхности примем поверхность цилиндра, образующие которого перпендикулярны заряженной плоскости, а основания параллельны заряженной плоскости и лежат по разные стороны от нее на одинаковых расстояниях (рис. 10).

Так как образующие цилиндра параллельны линиям напряженности, то поток вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра равен нулю, а полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания  $2ES$ . Заряд, заключенный внутри цилиндра, равен  $\sigma S$ . По теореме Гаусса  $2ES = \sigma S \epsilon_0$ , откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (36)$$

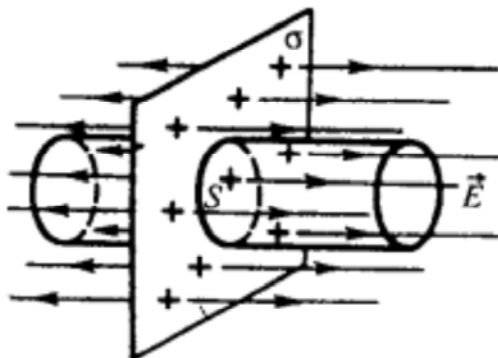


Рис. 10

Величина  $E$  не зависит от длины цилиндра, то есть напряженность поля на любых расстояниях одинакова по модулю. Такое поле называется **однородным**. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от плоскости, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1). \quad (37)$$

***Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей с равными по абсолютному значению поверхностными плотностям и зарядов  $\sigma > 0$  и  $-\sigma$***

Из предыдущего примера следует, что векторы напряженности  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  первой и второй плоскостей равны по модулю и всюду направлены перпендикулярно плоскостям (рис. 11, а). Поэтому в пространстве вне плоскостей они компенсируют друг друга, а в пространстве между плоскостями суммарная напряженность  $E = 2E_1$  (рис. 11, б).

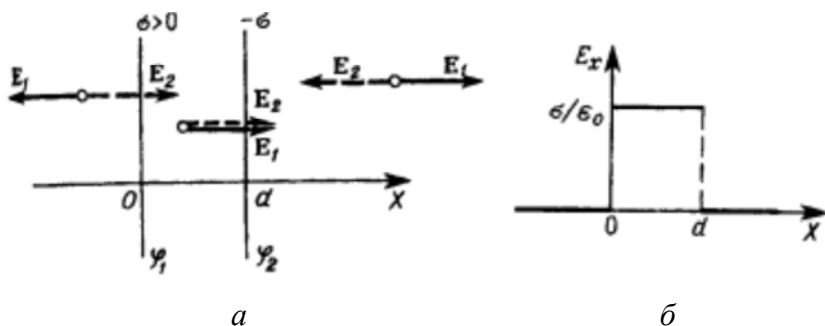


Рис. 11

Поэтому напряженность поля между плоскостями

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (38)$$

Поле между плоскостями однородное. Разность потенциалов между плоскостями

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}. \quad (39)$$

### ***Поле равномерно заряженной сферической поверхности***

Сферическая поверхность радиуса  $R$  с общим зарядом  $q$  заряжена равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$  (рис. 12, а).

Поскольку система зарядов и, следовательно, само поле является центрально-симметричным относительно центра сферы, то линии напряженности направлены радиально.

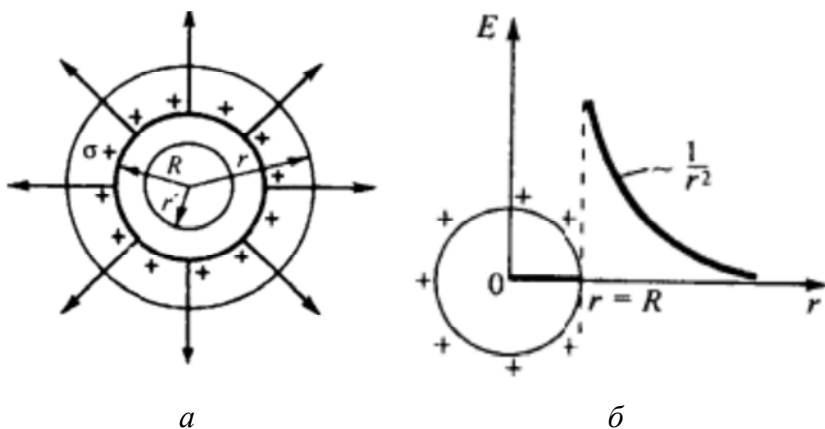


Рис. 12

В качестве Гауссовой поверхности выберем сферу радиусом  $r$ , имеющую общий центр с заряженной сферой. Если  $r > R$ , то внутри поверхности попадает весь заряд  $q$ . По теореме Гаусса

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0},$$

откуда следует

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (40)$$

или

$$E = \frac{\sigma R^2 q}{\epsilon_0 r^2}. \quad (41)$$

При  $r < R$  замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферы  $E = 0$ . Зависимость  $E(r)$  представлена на рис 12, б.

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра сферы ( $r_1 > R$ ,  $r_2 > R$ ), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (42)$$

Если принять  $r_1 = r$  и  $r_2 = \infty$ , то потенциал поля вне сферической поверхности

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (43)$$

Вне заряженной сферы поле такое же как поле точечного заряда  $q$ , находящегося в центре сферы. Внутри заряженной сферы поля нет, поэтому потенциал всюду одинаков и такой же, как на поверхности

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}.$$

### ***Поле объемно заряженного шара***

Заряд  $q$  равномерно распределен в вакууме по объему шара радиуса  $R$  с объемной плотностью  $\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{4\pi R^3 / 3}$ . Центр шара является центром симметрии поля.

1. Для поля вне шара ( $r > R$ ) получаем тот же результат, что и в случае сферической поверхности

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

2. При  $r = R$ :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0};$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}.$$

3. Внутри шара сфера радиусом  $r < R$  охватывает заряд

$$q = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}.$$

По теореме Гаусса

$$4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}.$$

Отсюда, для точек, лежащих внутри шара ( $r_1 < R$ ,  $r_2 < R$ ), с учетом  $\rho = \frac{q}{4\pi R^3 / 3}$ , получим

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

Зависимость  $E(r)$  представлена на рис. 13.



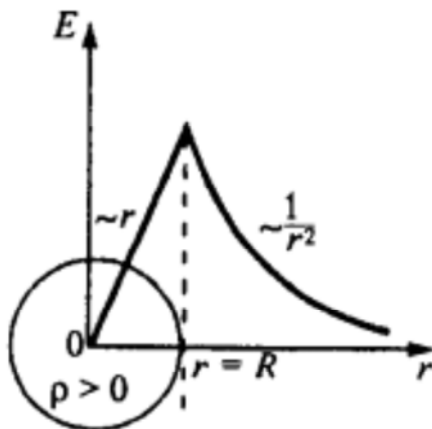


Рис. 13

Для точек, лежащих внутри шара

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r_2^2 - r_1^2).$$

### ***Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити)***

Бесконечный цилиндр радиуса  $R$  заряжен равномерно с линейной плотностью  $d\ell \tau = dq$ . Линии напряженности будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой густотой во все стороны относительно оси цилиндра.

В качестве Гауссовой поверхности выберем цилиндр радиусом  $r$  и высотой  $l$ , коаксиальный с заряженной нитью (рис. 14).

Торцы этого цилиндра параллельны линиям напряженности, поэтому поток через них равен нулю. Поток через боковую поверхность равен  $E2\pi r l$ .

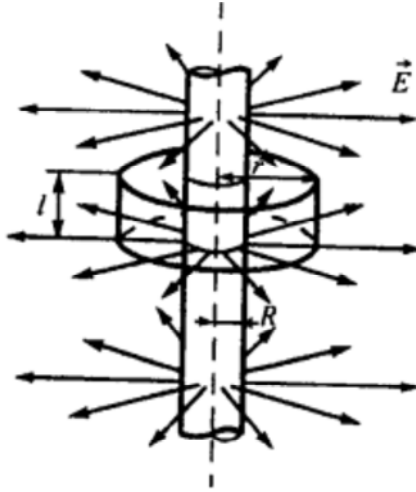


Рис. 14

По теореме Гаусса (при  $r > R$ ) выполняется равенство  $E2\pi rl = \frac{\tau l}{\epsilon_0}$ . Тогда при  $r_1 > R, r_2 > R$  получим:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}; \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Если  $r < R$ , то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому  $E = 0$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3 т. – М.: Наука, 1987. – Т. 2. – 496 с.
2. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3 т. – М.: КНОРУС, 2012. – Т. 2. – 576 с.
3. Наркевич, И. И. Физика: учеб. / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Мн.: Новое знание, 2004. – 792 с.
4. Трофимова, Т. И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – М.: «Академия», 2007. – 560 с.
5. Савельев, И. В. Курс физики: в 3 т. – М.: Наука, 1989. – Т. 2. – 428 с.

Учебное издание

**ИССЛЕДОВАНИЕ  
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ  
ПОЛЕЙ МЕТОДОМ  
ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Практикум для студентов специальностей  
1-38 01 01 «Механические и электромеханические  
приборы и аппараты»;  
1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные приборы и системы»;  
1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»;  
1-38 02 02 «Биотехнические и медицинские аппараты и системы»;  
1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»

Составители:  
**ЧЕРНЫЙ** Владимир Владимирович  
**РАЗВИН** Юрий Владимирович  
**КРАСОВСКИЙ** Василий Васильевич

Редактор *В. И. Акуленок*  
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 15.05.2020. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 1,64. Тираж 100. Заказ 629.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.