

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра высшей математики № 1

МАТЕМАТИКА

Сборник заданий  
для аудиторной и самостоятельной работы студентов  
инженерно-технических специальностей вузов

В 2 частях

Часть 1

М и н с к 2 0 0 5

В сборнике заданий для аудиторной и самостоятельной работы студентов приведены задачи и упражнения по основным разделам высшей математики в соответствии с действующей программой. В качестве основных рассматриваются 18 практических занятий для каждого из четырех семестров. К задачам, предназначенным для самостоятельной работы, предлагаются ответы, что поможет студенту сделать контроль правильности решаемых примеров.

Приведены варианты типовых расчетов, являющихся обязательным элементом учебных программ соответствующих специальностей БНТУ.

Издание является дополнением к существующим задачникам, будет полезным для студентов как дневной, так и заочной форм обучения и послужит лучшей организации их самостоятельной работы.

Составители:

А.Н. Андриянчик, Н.А. Микулик, Л.А. Раевская,  
Н.И. Чепелев, Т.И. Чепелева, Е.А. Федосик,  
В.И. Юринок, Т.С. Яцкевич

Рецензенты:

В.И. Каскевич, В.А. Нифагин

© А.Н. Андриянчик, Н.А. Микулик,  
Л.А. Раевская и др.,  
составление, 2005

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |  |           |
|---|--|-----------|
| <b>I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.</b> . . . . . |  | <b>6</b>  |
| З а н я т и е 1.  | Декартова и полярная системы координат. Построение графиков. . . . .                       | 6         |
| З а н я т и е 2.  | Действия над матрицами. Вычисление определителей. . . . .                                  | 7         |
| З а н я т и е 3.  | Обратная матрица. Решение невырожденных систем матричным методом. . . . .                  | 12        |
| З а н я т и е 4.  | Формулы Крамера. Ранг матрицы. . . . .   | 14        |
| З а н я т и е 5.  | Решение произвольных и однородных систем . . . . .   | 16        |
| З а н я т и е 6.  | Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов. . . . .         | 18        |
| З а н я т и е 7.  | Векторное и смешанное произведение векторов. . . . .                                       | 20        |
| З а н я т и е 8.  | Прямая на плоскости . . . . .  | 21        |
| З а н я т и е 9.  | Прямая и плоскость в пространстве. . . . .   | 23        |
| З а н я т и е 10.   | Кривые 2-го порядка на плоскости. Поверхности 2-го порядка. . . . .                        | 25        |
| З а н я т и е 11.   | Функция. Предел последовательности и предел функции. . . . .                               | 28        |
| З а н я т и е 12.   | Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функций. Точки разрыва. . . . .          | 31        |
| З а н я т и е 13.   | Дифференцирование функций. Логарифмическая производная. . . . .                            | 33        |
| З а н я т и е 14.   | Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Дифференциал функции. . . . . | 35        |
| З а н я т и е 15.   | Производные и дифференциалы высших порядков. . . . .                                       | 37        |
| З а н я т и е 16.   | Правило Лопиталья-Бернулли. Формула Тейлора. . . . .                                       | 39        |
| З а н я т и е 17.   | Монотонность функции. Экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции . . . . .        | 41        |
| З а н я т и е 18.   | Выпуклость и вогнутость графиков функций. Асимптоты. Построение графиков функций. . . . .  | 43        |
| <b>Типовой расчет № 1. «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии».</b> . . . . .   |  | <b>45</b> |

|  |   |                        |
|--|---|------------------------|
| <b>Типовой расчет № 2.</b>   | <b>«Предел функции. Производная и ее применение к исследованию функций и построению графиков».</b>  | <b>. . . 5 9</b>       |
| <b>II. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.</b> |   |                        |
| <b>З а н я т и е 1.</b>  | <b>Комплексные числа и действия над ними. Простейшие приемы интегрирования.</b>   | <b>. . . . . 7 6</b>   |
| <b>З а н я т и е 2.</b>  | <b>Интегрирование с помощью замены переменной в неопределенном интеграле.</b>   | <b>. . . . . 7 8</b>   |
| <b>З а н я т и е 3.</b>  | <b>Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.</b>   | <b>. . . . . 8 0</b>   |
| <b>З а н я т и е 4.</b>  | <b>Интегрирование рациональных функций.</b>   | <b>. . . . . 8 2</b>   |
| <b>З а н я т и е 5.</b>  | <b>Интегрирование тригонометрических выражений и простейших иррациональных функций.</b>   | <b>. . . . . 8 3</b>   |
| <b>З а н я т и е 6.</b>  | <b>Вычисление определенных интегралов.</b>  | <b>. . . . . 8 6</b>   |
| <b>З а н я т и е 7.</b>  | <b>Приложения определенных интегралов.</b>  | <b>. . . . . 8 7</b>   |
| <b>З а н я т и е 8.</b>  | <b>Несобственные интегралы.</b>   | <b>. . . . . 9 0</b>   |
| <b>З а н я т и е 9.</b>  | <b>Частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных. Производные и дифференциалы высших порядков.</b>                            | <b>. . . . . 9 1</b>   |
| <b>З а н я т и е 10.</b>   | <b>Производные сложной функций нескольких переменных. Производная функции, заданной неявно.</b>   | <b>. . . . . 9 4</b>   |
| <b>З а н я т и е 11.</b>   | <b>Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент</b>  | <b>. . . . . 9 6</b>   |
| <b>З а н я т и е 12.</b>   | <b>Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в замкнутой области. Условный экстремум.</b> | <b>. . . . . 9 8</b>   |
| <b>З а н я т и е 13.</b>   | <b>Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными и однородных дифференциальных уравнений первого порядка.</b>  | <b>. . . . . 1 0 0</b> |
| <b>З а н я т и е 14.</b>   | <b>Интегрирование линейных дифференциальных уравнений и уравнений Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.</b>                                      | <b>. . . . . 1 0 1</b> |

|  |       |
|--|-------|
| З а н я т и е 1 5. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижения порядка. ....                                       | 1 0 3 |
| З а н я т и е 1 6. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа. ....             | 1 0 4 |
| З а н я т и е 1 7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида. .... | 1 0 5 |
| З а н я т и е 1 8. Решение систем дифференциальных уравнений. Метод исключения. ....   | 1 0 6 |
| <b>Типовой расчет № 3. «Неопределенный и определенный интеграл».</b> ....  | 1 0 7 |
| <b>Типовой расчет № 4. «Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы».</b> ....   | 1 1 9 |

I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.  
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ  
ПЕРЕМЕННОЙ

**З а н я т и е 1**

*Декартова и полярная системы координат.  
Построение графиков*

**Аудиторная работа**

1.1. Построить графики функций:

1.1.1.  $y = 2^{\log_2 \cos x}$ .

1.1.2.  $y = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$ .

1.1.3.  $y = \begin{cases} 2^{x-1}, & 0 < x \leq 2, \\ -x^2 - 2x, & -3 < x \leq 0. \end{cases}$

1.1.4.  $y = 2x - |x-2| + 1$ .

1.1.5.  $y = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$ .

1.1.6.  $y = \sin |x| - 1$ .

1.1.7.  $y = \log_{1/2} x^2 + 1$ .

1.1.8.  $y = \frac{1}{|x|+1}$ .

1.2. Построить графики функций, заданных параметрически:

1.2.1.  $x = -1 + 2t, y = 2 - t$ .

1.2.2.  $x = t, y = t^2 - 4$ .

1.2.3.  $x = 2 \cos t, y = \sin t$ .

1.2.4.  $x = 1 - t^2, y = t - t^3$ .

1.2.5.  $x = at^2, y = bt^3$ .

1.2.6.  $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$ .

1.2.7.  $x = -1 + 2 \cos t, y = 3 + 2 \sin t$ .

1.2.8.  $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ .

1.3. Записать уравнения кривых в полярных координатах:

1.3.1.  $y = x$ .                      1.3.2.  $y = 1$ .                      1.3.3.  $x^2 + y^2 = 4$ .

1.3.4.  $x^2 + y^2 = 2y$ .                      1.3.5.  $x + y - 1 = 0$ .

1.3.6.  $x^2 - y^2 = a^2$ .

1.4. Построить графики функций:

1.4.1.  $r = 1$ .                      1.4.2.  $r = 2\varphi$ .                      1.4.3.  $r \cos \varphi = 2$ .

1.4.4.  $r = e^\varphi$                       1.4.5.  $r = 4 \cos \varphi$ .

1.4.6.  $r = 3 \sin 2\varphi$ .                      1.4.7.  $r = 2(1 + \cos \varphi)$ .

1.4.8.  $r = \frac{6}{3 + 2 \cos \varphi}$ .                      1.4.9.  $r = \frac{2}{1 + \sin \varphi}$ .

1.4.10.  $r = 2 \cos 3\varphi$ .                      1.4.11.  $r^2 = 36 \sin 2\varphi$ .

### Домашнее задание

1.5. Построить следующие кривые:

1.5.1.  $y = |x^2 - x - 2|$ .                      1.5.2.  $y = x + |x + 3|$ .

1.5.3.  $x = t^2 + 1$ ,  $y = t$ .                      1.5.4.  $x = t^3$ ,  $y = t^2$ .

1.5.5.  $r = 2 \sin \varphi$ .                      1.5.6.  $r = 3(1 - \sin \varphi)$ .

1.5.7.  $r = 4 \cos 2\varphi$ .                      1.5.8.  $r = \frac{3}{1 - \cos \varphi}$ .

### З а н я т и е 2

*Действия над матрицами. Вычисление определителей*

**Аудиторная работа**

2.1. Найти  $2A + 3B - C$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.2. Найти матрицу  $X$ , если

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}X = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 8 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

2.3. Даны матрицы  $A$  и  $B$ . Найти  $AB$  и  $BA$ , если:

2.3.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3.3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = (5 \quad -2 \quad 3).$$

2.4. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



2.5. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей  $A$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.6. Показать, что матрица  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  является корнем многочлена  $f(x) = x^2 - 3x + 5$ .

2.7. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.8. Вычислить определители по правилу Саррюса и разлагая по элементам 1-й строки:

$$2.8.1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$2.8.2. \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

2.9. Вычислить определители, разлагая по элементам ряда:

$$2.9.1. \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$2.9.2. \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.10. Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

$$2.10.1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$2.10.2. \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$$

2.11. Вычислить определители, предварительно упростив их:

$$2.11.1. \begin{vmatrix} x^2 + a^2 & ax & 1 \\ y^2 + a^2 & ay & 1 \\ z^2 + a^2 & az & 1 \end{vmatrix} \quad 2.11.2. \begin{vmatrix} 7 & 8 & 5 & 5 & 3 \\ 10 & 11 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

### Домашнее задание

2.12. Найти  $(A + 3B)^2$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.13. Найти те из произведений  $AB, BA, AC, CA, BC, CB$ , которые имеют смысл, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.14. Найти значение многочлена  $f(A)$  от матрицы  $A$ , если  $f(x) = 2x^2 - 2x + 7$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

2.15. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 4 \\ x & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.16. Найти  $\det(AB)$  и проверить, что  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.17. Вычислить определители, разлагая их по элементам ряда:

$$2.17.1. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$2.17.2. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

2.18. Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

$$2.18.1. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$2.18.2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

**Ответы.**

$$2.12. \begin{pmatrix} 96 & 12 & 8 \\ -18 & 54 & -8 \\ 51 & 85 & 111 \end{pmatrix}.$$

$$2.13. BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.14. \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$2.15. x_1 = -1, x_2 = 2.$$

$$2.16. 40.$$

$$2.17.1. 0.$$

$$2.17.2. 48.$$

$$2.18.1. 54.$$

$$2.18.2. 160.$$

### З а н я т и е 3

#### *Обратная матрица.*

#### *Решение невырожденных систем матричным методом*

#### **Аудиторная работа**

3.1. Найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

$$3.1.1. \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}. \quad 3.1.2. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad 3.1.3. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3.1.4. \begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}. \quad 3.1.5. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2. Решить матричные уравнения:

$$3.2.1. \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3.2.2. \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3.2.3. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

3.3. Решить системы матричным методом:

$$3.3.1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases} \quad 3.3.2. \begin{cases} -2x + 2y - z + 7 = 0, \\ x - 3y + z - 6 = 0, \\ 3x + y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$$

$$3.3.3. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5. \end{cases} \quad 3.3.4. \begin{cases} 2x - y + 5z = 4, \\ 3x - y + 5z = 0, \\ 5x + 2y + 13z = 2. \end{cases}$$

### Домашнее задание

3.4. Найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

$$3.4.1. \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}. \quad 3.4.2. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.5. Решить матричные уравнения:

$$3.5.1. X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3.5.2. \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.6. Проверить, являются ли системы невырожденными, и если являются, то решить их матричным методом.

$$3.6.1. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases} \quad 3.6.2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + 4x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

**Ответы.**

$$3.4.1. \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}. \quad 3.4.2. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

$$3.5.1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \quad 3.5.2. -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -14 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$3.6.1. x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2. \quad 3.6.2. x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -\frac{2}{3}.$$

## З а н я т и е 4

### Формулы Крамера. Ранг матрицы

#### Аудиторная работа

4.1. Решить системы, используя формулы Крамера:

$$4.1.1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$$

$$4.1.2. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$4.1.3. \begin{cases} 2x - y + 2z = 1, \\ 3x + 2y - z = 9, \\ x - 4y + 3z = -5. \end{cases}$$

$$4.1.4. \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 14 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 10 = 0. \end{cases}$$

4.2. При каких значениях  $\lambda$  ранг матрицы равен двум?

$$4.2.1. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$4.2.2. \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

4.3. Проверить справедливость неравенств  $r_{AB} \leq r_A, r_{AB} \leq r_B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4. Найти ранги матриц с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор:

$$4.4.1. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4.4.2. \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4.4.3. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad 4.4.4. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4.4.5. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

### Домашнее задание

4.5. Решить системы по правилу Крамера:

$$4.5.1. \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases} \quad 4.5.2. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

4.6. Проверить справедливость неравенства  $r_{A+B} \leq r_A + r_B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.7. Найти ранги матриц и указать какой-нибудь базисный минор:

$$4.7.1. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 4.7.2. \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & 10 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$4.7.3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Ответы.

4.5.1.  $x = 1, y = 3, z = 5.$       4.5.2.  $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -1.$

4.7.1. 2.    4.7.2. 3.    4.7.3. 3.

## З а н я т и е 5

### *Решение произвольных и однородных систем*

#### Аудиторная работа

5.1. Исследовать системы на совместность и в случае совместности решить их:

$$5.1.1. \begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases} \quad 5.1.2. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

$$5.1.3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

$$5.1.4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -3, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

5.2. Решить однородную систему и найти фундаментальную систему решений:

$$5.2.1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 5.2.2. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.2.3. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$



$$5.2.4. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0. \end{cases}$$

### Домашнее задание

5.3. Исследовать системы уравнений и в случае совместности решить их:

$$5.3.1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7. \end{cases} \quad 5.3.2. \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

$$5.3.3. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 = 1. \end{cases} \quad 5.3.4. \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

5.4. Решить системы:

$$5.4.1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 5.4.2. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

**Ответы.**

$$5.3.1. \text{ Несовместна.} \quad 5.3.2. \left\{ \left( \frac{5-7c}{5}, \frac{8c}{5}, c \right) \mid \forall c \in R \right\}.$$

$$5.3.3. x_1 = -1, x_2 = 1.$$

$$5.3.4. \left\{ \left( c_1, c_2, \frac{3-5c_1+25c_2}{9}, \frac{10c_2-2c_1}{3} \right) \mid \forall c_1, c_2 \in R \right\}.$$

$$5.4.1. x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.$$

$$5.4.2. \{(0, 2c_1 + c_2, c_1, c_2) \mid \forall c_1, c_2 \in R\}.$$

## З а н я т и е 6

### *Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов*

#### Аудиторная работа

6.1. Определить, для каких векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  выполняются следующие условия:

1)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ;

2)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$ ;

3)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ;

4)  $|\vec{a} + \vec{b}| = 0$ ;

5)  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ .

6.2. Даны векторы  $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$  и  $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$ . Определить проекции на координатные оси следующих векторов:

1)  $-\frac{1}{2}\vec{b}$ ;      2)  $2\vec{a}$ ;      3)  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

6.3. Проверить коллинеарность векторов  $\vec{a}(2; -1; 3)$  и  $\vec{b}(-6; 3; -9)$ . Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

6.4. Найти направляющие косинусы вектора  $\vec{a}(6; -2; -3)$ .

6.5. Определить модули суммы и разности векторов  $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$  и  $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ .

6.6. Даны точки  $A(-1; 2; 1), B(2; 1; -3), C(3; 0; 5)$ . Подобрать точку  $D$  так, чтобы четырехугольник  $ABCD$  был параллелограммом.

6.7. Найти  $(\vec{m} + 2\vec{n}, \vec{m} - \vec{n})$ , если

$$\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2; (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

6.8. Даны вершины четырехугольника

$$A(1; -2; 2), B(1; 4; 0), C(-4; 1; 1) \text{ и } D(-5; -5; 3).$$

Доказать, что его диагонали  $AC$  и  $BD$  взаимно перпендикулярны.

6.9. Вычислить внутренние углы треугольника  $ABC$ , если  $A(1; 2; 1), B(3; -1; 7), C(7; 4; -2)$ . Убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

6.10. Вычислить проекцию вектора  $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$  на ось вектора  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ .

### Домашнее задание

6.11. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(3; -5; 8)$  и  $\vec{b}(-1; 1; -4)$ , и косинус угла между его диагоналями.

6.12. Даны три вектора;  $\vec{a}(-2; 1; 1), \vec{b}(1; 5; 0)$  и  $\vec{c}(4; 4; -2)$ . Вычислить  $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{3a} - 2\vec{b})$ .

6.13. При каком значении  $\alpha$  векторы  $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$  взаимно перпендикулярны?

6.14. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1$ , вычислить угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ .

6.15. Найти координаты вектора  $\vec{b}$ , коллинеарного вектору  $\vec{a} = (2; 1; -1)$ , при условии что  $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$ .

**Ответы.**

$$6.11. |\vec{a} + \vec{b}| = 6, |\vec{a} - \vec{b}| = 14, \cos \varphi = \frac{16}{21}.$$

$$6.12. \text{пр.}_c(3\vec{a} - 2\vec{b}) = -11. \quad 6.13. \alpha = -6.$$

$$6.14. \alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}. \quad 6.15. \vec{b} = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

### З а н я т и е 7

#### **ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ**

##### **Аудиторная работа**

7.1. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны. Зная, что  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ , вычислить:

$$1) |[\vec{a}, \vec{b}]|; \quad 2) |[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]|; \quad 3) |[(3\vec{a} + \vec{b}), (\vec{a} - \vec{b})]|.$$

7.2. Даны векторы  $\vec{a} = (3; -1; -2), \vec{b} = (1; 2; -1)$ . Найти координаты векторных произведений: 1)  $[\vec{a}, \vec{b}]$ ; 2)  $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$ ; 3)  $[2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]$ .

7.3. Даны вершины треугольника  $A(1; -1; 2), B(5; -6; 2), C(1; 3; -1)$ . Вычислить площадь треугольника и длину высоты, опущенной из вершины  $B$  на сторону  $AC$ .

7.4. Найти вектор  $\vec{c}$ , ортогональный векторам  $\vec{a} = (2; -3; 1)$  и  $\vec{b} = (1; -2; 3)$  и удовлетворяющий условию  $(\vec{c}, \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$ .

7.5. Установить, компланарны ли векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , если  $\vec{a} = (2; 3; -1), \vec{b} = (1; -1; 3), \vec{c} = (1; 9; -1)$ .

7.6. Доказать, что четыре точки  $A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1), D(2; 1; 3)$  лежат в одной плоскости.

7.7. Даны вершины тетраэдра:  $A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D(-5; -4; 8)$ .  
Найти объем тетраэдра и длину высоты, опущенной из вершины  $D$ .

### Домашнее задание

7.8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = (0; -1; 1)$  и  $\vec{b} = (1; 1; 1)$ .

7.9. Лежат ли точки  $A(5; 5; 4), B(3; 8; 4), C(3; 5; 10), D(5; 8; 2)$  в одной плоскости?

7.10. Выяснить, правой или левой будет тройка векторов:  $\vec{a} = (3; 4; 0), \vec{b} = (0; -4; 1), \vec{c} = (0; 2; 5)$ .

7.11. Найти длину высоты параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ , если за основные взяты параллелограмм, построенный на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

7.12. Вычислить синус угла, образованного векторами  $\vec{a} = (2; -2; 1)$  и  $\vec{b} = (2; 3; 6)$ .

**Ответы.**

7.8.  $\sqrt{6}$ .      7.9. Нет, не лежат.      7.10. Левая.

7.11.  $\frac{16}{3\sqrt{14}}$ .      7.12.  $\sin \varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21}$ .

### З а н я т и е 8

#### Прямая на плоскости

#### Аудиторная работа

8.1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-1; 2)$  перпендикулярно вектору  $\overrightarrow{M_1M_2}$ , если  $M_1(2; -7), M_2(3; 2)$ .

8.2. Написать каноническое и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $A(3; -2)$  параллельно: а) вектору  $\vec{S}(1; 5)$ ; б) оси  $Oy$ .

8.3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-1; 8)$  и образующей с осью абсцисс угол, равный  $\frac{3\pi}{4}$ .

8.4. Даны вершины треугольника  $ABC$ :  $A(1; 2)$ ,  $B(2; -2)$ ,  $C(6; 1)$ . Найти:

1) уравнение стороны  $AB$ ;

2) уравнение высоты  $CH$ ;

3) уравнение медианы  $AM$ ;

4) уравнение прямой, проходящей через вершину  $C$  параллельно стороне  $AB$ ;

5) расстояние от точки  $C$  до прямой  $AB$ .

8.5. Найти расстояние между прямыми  $12x - 5y - 26 = 0$  и  $12x - 5y + 13 = 0$ .

8.6. Найти проекцию точки  $A(2; 6)$  на прямую  $3x + 4y - 5 = 0$ .

### Домашнее задание

8.7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $3x - 2y - 7 = 0$  и  $x + 3y - 6 = 0$  и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.

8.8. Найти точку  $O$  пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ , если  $A(-1; -3)$ ,  $B(3; 5)$ ,  $C(5; 2)$ ,  $D(3; -5)$ .

8.9. Найти уравнения перпендикуляров к прямой  $3x + 5y - 15 = 0$ , проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.

8.10. Записать уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-2; 3)$  и составляющей с осью  $Ox$  угол: а)  $45^\circ$ ; б)  $90^\circ$ ; в)  $0^\circ$ .

8.11. Найти точку  $B$ , симметричную точке  $A(8; 12)$  относительно прямой  $x - 2y + 6 = 0$ .

8.12. Найти один из углов между прямыми:

а)  $2x + 3y - 5 = 0$  и  $x - 3y - 7 = 0$ ;

б)  $\begin{cases} x = 4, \\ y = t + 7 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x = 3t - 1, \\ y = \sqrt{3t} + 2. \end{cases}$

**Ответы.**

8.7.  $x = 3$ .    8.8.  $O(3; 1/3)$ .

8.9.  $5x - 3y - 25 = 0$ ,  $5x - 3y + 9 = 0$ .

8.10. а)  $x - y + 5 = 0$ ;    б)  $x + 2 = 0$ ;    в)  $y - 3 = 0$ .

8.11.  $B(12; 4)$ .    8.12. а)  $\arccos \frac{7}{\sqrt{130}}$ ;    б)  $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ .

## З а н я т и е 9

### *Прямая и плоскость в пространстве*

#### Аудиторная работа

9.1. Даны две точки:  $M_1(3; -1; 2)$  и  $M_1(4; -2; -1)$ . Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_1$  перпендикулярно вектору  $\overline{M_1M_2}$ .

9.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки:  $M_1(1; 3; 4)$ ,  $M_2(3; 0; 2)$  и  $M_3(2; 5; 7)$ .

9.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1; 0; -2)$  перпендикулярно к плоскостям  $x - 2y + z + 5 = 0$  и  $2x - y + 3z - 1 = 0$ .

9.4. Найти расстояние между плоскостями  $2x - 3y + 6z - 21 = 0$  и  $4x - 6y + 12z + 35 = 0$ .

9.5. Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $M(4; -3; 2)$  перпендикулярно к плоскости  $x - 3y + 2z - 5 = 0$ .

9.6. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

9.7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2;0;-3)$  параллельно прямым

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

9.8. Найти проекцию точки  $A(3;-1;4)$  на плоскость  $2x + y - z + 5 = 0$ .

9.9. Найти проекцию точки  $A(2;3;1)$  на прямую  $\frac{x+7}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$  и расстояние от этой точки до данной прямой.

### Домашнее задание

9.10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(-1;2;3)$  параллельно плоскости, проходящей через точки  $M_1(1;0;-2)$ ,  $M_2(3;4;5)$ ,  $M_3(-1;2;0)$ .

9.11. Найти расстояние от точки  $M(2;1;1)$  до плоскости  $x + y - z + 1 = 0$ .

9.12. Определить, при каком значении параметра  $\alpha$  плоскость  $\alpha x + (2\alpha - 1)y + z - 5 = 0$ :

а) параллельна плоскости  $2x + 3y + z - 4 = 0$ ;

б) перпендикулярна плоскости  $3x + y - z = 0$ .

9.13. Найти координаты точки  $Q$ , симметричной точке  $P(-3;1;-9)$  относительно плоскости  $4x - 3y - z - 7 = 0$ .

9.14. Вычислить угол между прямой  $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$  и плоскостью  $2x + 3y - z + 1 = 0$ .

9.15. Пересекаются ли прямые  $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$  и  $\frac{x}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{5}$ ?



9.16. Найти координаты точки  $Q$ , симметричной точке  $P(2; -5; 7)$  относительно прямой, проходящей через точки  $M_1(5; 4; 6)$  и  $M_2(-2; -17; -8)$ .

9.17. Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами  $A(3; 6; -7)$ ,  $B(-5; 1; -4)$ ,  $C(0; 2; 3)$ , проведенной из вершины  $C$ .

**Ответы.**

9.10.  $x + 3y - 2z + 1 = 0$ . 9.11.  $\sqrt{3}$ . 9.12. а)  $\alpha = 2$ ; б)  $\alpha = 0,4$ .

9.13.  $Q(1; -2; -10)$ . 9.14.  $\sin \varphi = \frac{5}{7}$ ;  $\varphi \approx 45^\circ 36'$ . 9.15. Нет.

9.16.  $Q(4; -1; -3)$ . 9.17.  $x = 2t, y = -3t + 2, z = 17t + 3$ .

### З а н я т и е 10

*Кривые 2-го порядка на плоскости. Поверхности 2-го порядка*

#### Аудиторная работа

10.1. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

а) расстояние между фокусами равно 8, малая полуось равна 3;

б) малая полуось равна 6, эксцентриситет равен  $4/5$ .

10.2. Найти координаты фокусов и эксцентриситет эллипса

$$4x^2 + y^2 = 4.$$

10.3. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

а) расстояние между фокусами равно 30, а расстояние между вершинами равно 24;

б) действительная полуось равна 4 и гипербола проходит через точку  $M(2; 4\sqrt{2})$ .

10.4. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса  $6x^2 + 5y^2 = 30$ .

10.5. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что:

а) парабола имеет фокус  $F(0;2)$  и вершину в точке  $O(0;0)$ ;

б) парабола симметрична относительно оси  $Ox$  и проходит через точку  $M(4;-2)$ .

10.6. Составить канонические уравнения парабол, фокусы которых совпадают с фокусами гиперболы  $x^2 - y^2 = 8$ .

10.7. Выяснить, какая фигура соответствует каждому из данных уравнений, и (в случае непустого множества) изобразить ее в системе координат  $Oxy$ :

а)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ ;

б)  $3x^2 - 4y^2 - 12x - 8y + 20 = 0$ ;

в)  $y^2 - 3x - 4y + 10 = 0$ ;

г)  $2x^2 + 3y^2 + 6x + 6y + 25 = 0$ .

10.8. Определить вид поверхности и построить ее:

а)  $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$ ;

б)  $x = y^2 + 2z^2$ ;

в)  $2x^2 - y^2 + z^2 = 4$ ;

г)  $2x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$ ;

д)  $z^2 = 4x$ ;

е)  $x^2 + z^2 = 5$ .

### Домашнее задание

10.9. Найти уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями  $x \pm 2y = 0$ , а расстояние между вершинами, лежащими на оси  $Ox$ , равно 4.

10.10. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки  $M_1\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; -1\right)$  и  $M_2\left(-1; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ , и найти его эксцентриситет.

10.11. Найти длину общей хорды параболы  $y = 2x^2$  и окружности  $x^2 + y^2 = 5$ .

10.12. Написать уравнение параболы, проходящей через точки  $(0;0)$  и  $(-2;4)$ , если парабола симметрична: а) относительно оси  $Ox$ ; б) относительно оси  $Oy$ .

10.13. Какая фигура соответствует каждому из данных уравнений? Сделать чертеж, если это возможно.

а)  $4x^2 + 25y^2 + 4x - 10y - 8 = 0$ ;

б)  $x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0$ ;

в)  $x^2 - 6x + 2y + 11 = 0$ .

10.14. Определить вид поверхности и построить ее:

а)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ;

б)  $x^2 + 3z^2 - 8x + 18z + 34 = 0$ ;

в)  $5x^2 + y^2 + 10x - 6y - 10z + 14 = 0$ ;

г)  $xy = 1$ .

**Ответы.**

10.9.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ . 10.10.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ;  $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . 10.11. 2.

10.12. а)  $y^2 = -8x$ ; б)  $y = x^2$ .

10.13. а)  $\frac{(x+0,5)^2}{2,5} + \frac{(y-0,2)^2}{0,4} = 1$ ; б)  $x + y + 2 = 0$ ;  $x - y = 0$ ;

в)  $(x-3)^2 = -2(y+1)$ .

10.14. а)  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ ; б)  $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(z+3)^2}{3} = 1$ ;

в)  $z = \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{10}$ .

## З а н я т и е 11

### Функция. Предел последовательности и предел функции

#### Аудиторная работа

11.1. Найти области определения функций:

$$11.1.1. y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}.$$

$$11.1.2. y = \arccos \frac{2x}{1+x}.$$

$$11.1.3. y = \sqrt{25 - x^2} + \lg \sin x.$$

$$11.1.4. y = 2^{x^2 - 2}.$$

11.2. Проверить функции на четность или нечетность:

$$11.2.1. f(x) = x^4 + 5x^2.$$

$$11.2.2. f(x) = x^2 + x.$$

$$11.2.3. f(x) = \frac{x}{2^x - 1}.$$

$$11.2.4. f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}.$$

11.3. Построить графики функций:

$$11.3.1. y = \frac{2x + 3}{x - 1}.$$

$$11.3.2. y = |3x + 4 - x^2|.$$

$$11.3.3. y = -2 \sin(2x + 2).$$

$$11.3.4. y = x \sin x.$$

11.4. Вычислить пределы:

$$11.4.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 2n^2 + 3}{8n^3 + 2n^2 - 1}.$$

$$11.4.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}.$$

$$11.4.3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}.$$

$$11.4.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}.$$

$$11.4.5. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$11.4.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{5^n} \right).$$

$$11.4.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right). \quad 11.4.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 4}{3 - 2x - 5x^3}.$$

$$11.4.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{16 + x^2} - 4}.$$

$$11.4.10. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}.$$

$$11.4.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$11.4.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}.$$

$$11.4.13. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 9x + 10}.$$

$$11.4.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

11.5. Используя замечательные пределы, найти:

$$11.5.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}.$$

$$11.5.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}.$$

$$11.5.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x}.$$

$$11.5.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

$$11.5.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$11.5.6. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\pi - 4x}.$$

$$11.5.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{2x - 1} \right)^x.$$

$$11.5.8. \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{3/x}.$$

$$11.5.9. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{7x + 3}{9x + 3} \right)^{1/x}.$$

$$11.5.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6-x}{7-x} \right)^{\frac{1-x^3}{x^2}}.$$

$$11.5.11. \lim_{x \rightarrow \infty} ((2x+1)(\ln(3x+1) - \ln(3x-2))).$$

$$11.5.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}.$$

$$11.5.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^x - 1}.$$

$$11.5.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x} - 1}{x}.$$

### Домашнее задание

11.6. Найти пределы указанных функций:

$$11.6.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 4x^2 + 3x^3}{x^3 - 7x - 10}.$$

$$11.6.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 10x + 20}{x^3 - 10x^2 - 1}.$$

$$11.6.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$11.6.4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x} - 1 - 2}.$$

$$11.6.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \left( \sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 + 1} \right) \right).$$

$$11.6.6. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right).$$

$$11.6.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{2+x} \right)^{3x}.$$

$$11.6.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x \sin 2x}.$$

$$11.6.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{1 - \sqrt{1 - x^2}}.$$

$$11.6.10. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}.$$

$$11.6.11. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

$$11.6.12. \lim_{x \rightarrow \infty} ((x-4)(\ln(2-3x) - \ln(5-3x))).$$

**Ответы.**

$$11.6.1. 3. \quad 11.6.2. 0. \quad 11.6.3. -1. \quad 11.6.4. 40.$$

$$11.6.5. 2. \quad 11.6.6. -\frac{1}{2}. \quad 11.6.7. e^{-6}. \quad 11.6.8. 8/3.$$

$$11.6.9. -8. \quad 11.6.10. e^{-4}. \quad 11.6.11. e^{-1/2}. \quad 11.6.12. 1.$$

## З а н я т и е 1 2

### *Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функций. Точки разрыва*

#### Аудиторная работа

12.1. Вычислить пределы, используя теорему об отношении двух бесконечно малых функций:

$$12.1.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}.$$

$$12.1.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{2 \operatorname{tg} 3x}.$$

$$12.1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}.$$

$$12.1.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 10x}.$$

$$12.1.5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 3(x-2)}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$12.1.6. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2 - 25}.$$

12.2. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва:

$$12.2.1. f(x) = \frac{x}{x-1}.$$

$$12.2.2. f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x-2}.$$

$$12.2.3. f(x) = 3^{\frac{x}{4-x^2}}.$$

$$12.2.4. f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$12.2.5. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}.$$

$$12.2.6. f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}.$$

$$12.2.7. f(x) = \begin{cases} 2^x, & -\infty < x \leq 1, \\ x^2 + 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$12.2.8. f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\infty < x \leq 1, \\ x^2 - 3, & 1 < x < 2, \\ x - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$12.2.9. f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-2}} - 1}{5^{\frac{1}{x-2}} + 1}.$$

$$12.2.10. f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}.$$

**Домашнее задание**

12.3. Вычислить пределы:

$$12.3.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\sin 2x}.$$

$$12.3.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 7x} - 1}{x^2 + 3x}.$$

$$12.3.3. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{\arcsin(1-2x)}.$$

$$12.3.4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\operatorname{tg}(x^2 - 3x + 2)}$$

12.4. Исследовать на непрерывность функции; установить характер точек разрыва:

$$12.4.1. f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 + 2x}.$$

$$12.4.2. f(x) = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x}}}.$$

$$12.4.3. f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2, \\ x-2, & 2 < x \leq 4, \\ -2\sqrt{x}, & x > 4 \end{cases}$$

(Построить график функции.)

$$12.4.4. f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

**Ответы.**

12.3.1.  $7/2$ . 12.3.2.  $7/3$ . 12.3.3.  $-2$ . 12.3.4.  $4$ . 12.4.1.  $x = 0$  — точка устранимого разрыва,  $f(0) = \frac{1}{2}$ ;  $x = -2$  — точка разрыв 2-го рода. 12.4.2.  $x = 0$  — точка разрыва 1-го рода. 12.4.3.  $x = 4$  — точка разрыва 1-го рода. 12.4.4.  $x = 0$  — точка устранимого разрыва,  $f(0) = 2$ .



### Заятие 13

#### *Дифференцирование функций. Логарифмическая производная*

#### Аудиторная работа

13.1. Исходя из определения, найти производные функций:

13.1.1.  $y(x) = 7x^2$ .    13.1.2.  $y(x) = \sqrt{x}$ .

13.1.3.  $y(x) = 5(\operatorname{tg} x - x)$ .

13.2. Найти производные функций:

13.2.1.  $y = 5x^4 - 3\sqrt[7]{x^3} + 7/x^5 + 4$ .    13.2.2.  $y = x^3 \sin x$ .

13.2.3.  $y = (x^4 + 1)/(x^4 - 1)$ .    13.2.4.  $y = (x^5 + 3x - 1)^4$ .

13.2.5.  $y = \sqrt[3]{((x^3 + 1)/(x^3 - 1))^2}$ .    13.2.6.  $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$ .

13.2.7.  $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ .    13.2.8.  $y = (x^2 - 2x + 2)e^{-x^2}$ .

13.2.9.  $y = x \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$ .

13.2.10.  $y = -\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 2 \ln \sin \frac{x}{2}$ .

13.2.11.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$ .    13.2.12.  $y = \frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x}$ .

13.2.13.  $y = \cos^2 \left( \sin \frac{x}{3} \right) + \sin \left( \cos \frac{x}{3} \right)$ .    13.2.14.  $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$ .

13.2.15.  $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1 + x^2}$ .    13.2.16.  $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x$ .

13.2.17.  $y = \cos^3 2x + \operatorname{Intg} \frac{x}{2}$ .    13.2.18.  $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ .

13.3. Используя предварительное логарифмирование, найти производные функций:

$$13.3.1. y = (x+1)^2(x-1)^3 \sqrt[5]{(x+2)^4} \sqrt[3]{(5x+3)^2}.$$

$$13.3.2. y = \frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}.$$

$$13.3.3. y = \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}.$$

$$13.3.4. y = x^3 \sqrt{\frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}.$$

$$13.3.5. y = x^{\sin x}.$$

$$13.3.6. y = x^{x^2}.$$

$$13.3.7. y = (\sin x)^{\arcsin x}.$$

$$13.3.8. y = (\ln x)^{1/x}.$$

$$13.3.9. y = (\operatorname{tg} 3x)^{x^4}.$$

$$13.3.10. y = (1+x^3)^{\operatorname{arctg} 7x}.$$

13.4. Составить уравнения касательной и нормали к параболе  $f(x) = x^2 + 4$  в точке  $M(1;5)$ .

#### Домашнее задание

13.5. Найти производные функций:

$$13.5.1. y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x.$$

$$13.5.2. y = x^3 \ln^2(\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x).$$

$$13.5.3. y = \sqrt{\frac{\cos^2 x + 1}{\sin 2x + 1}}.$$

$$13.5.4. y = (\sin^3 x + e^{x^2})^3 + \lg^2(x^4 - \sin^2 x).$$

$$13.5.5. y = \sqrt{x} \cdot 3^{x^2} - \operatorname{arctg} \sqrt{1 + e^{-x^3}}.$$

$$13.5.6. y = (x^3 + 1)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$13.5.7. y = \frac{(x+1)^3 \cdot \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2} \cdot x^{4/3}}.$$

$$13.5.8. y = (\arccos x)^2 \cdot \ln(\arccos x).$$

13.6. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = e^{1-x^2}$  в точке  $x_0 = -1$ .

**Ответ.**

13.6.  $2x - y + 3 = 0$ ,  $x + 2y - 1 = 0$ .

### З а н я т и е 1 4

*Дифференцирование функций,  
заданных параметрически и неявно.  
Дифференциал функции*

#### Аудиторная работа

14.1. Найти производные функций, заданных параметрически:

14.1.1.  $x = t^2 + 2$ ,  $y = \frac{1}{3}t^3 - 1$ .    14.1.2.  $x = \frac{1}{t+1}$ ,  $y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2$ .

14.1.3.  $x = a(\varphi - \sin \varphi)$ ,  $y = a(1 - \cos \varphi)$ .

14.1.4.  $x = \ln t$ ,  $y = t^2 - 1$ .

14.1.5.  $x = \arccos \sqrt{t}$ ,  $y = \sqrt{t - t^2}$ .

14.1.6.  $x = \operatorname{arctg} t$ ,  $y = \ln(1 + t^2)$ .

14.1.7.  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .

14.1.8.  $x = \operatorname{tg} t$ ,  $y = \sin 2t + 2 \cos 2t$ .

14.2. Найти  $y'_x$  в указанных точках:

14.2.1.  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$ ;  $t = \frac{\pi}{6}$ .

14.2.2.  $x = \frac{3at}{1+t^2}$ ,  $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$ ;  $t = 2$ .

14.3. Найти производные функций, заданных неявно:

14.3.1.  $e^x + 2x^2y^2 - e^y = 0$ .

14.3.2.  $2y \ln y = x$ .

$$14.3.3. x - y = \arcsin x - \arcsin y. \quad 14.3.4. 2^x + 2^y = 2^{x+y}.$$

$$14.3.5. \operatorname{arctg} y = y - x^2. \quad 14.3.6. \sin(xy) + \cos(xy) = 0.$$

$$14.3.7. x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}. \quad 14.3.8. e^x \sin y - e^y \cos x = 0.$$

$$14.4. \text{Найти } y'_x \text{ в точке } x = 1, \text{ если } x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0, y(1) = 1.$$

$$14.5. \text{Найти } y'_x \text{ в точке } (0; 1), \text{ если } e^y + xy = e.$$

14.6. Найти дифференциалы функций:

$$14.6.1. y = x \operatorname{tg}^3 x. \quad 14.6.2. y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} + (\arcsin x)^2.$$

$$14.6.3. y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2}). \quad 14.6.4. y^5 + y - x^2 = 1.$$

14.7. Найти приближенное значение функции  $y(x) = e^{x^2 - x}$  при  $x = 1,2$ .

14.8. Вычислить приближенно:

$$14.8.1. \arcsin 0,05. \quad 14.8.2. \ln 1,2. \quad 14.8.3. \sqrt[4]{17}.$$

$$14.8.4. \operatorname{tg} 44^\circ 56'.$$

### Домашнее задание

14.9. Найти  $y'_x$ :

$$14.9.1. x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{t-1}{t}. \quad 14.9.2. x = e^t \sin t, y = e^t \cos t.$$

14.10. Убедиться в том, что функция, заданная параметрически уравнениями  $x = \frac{1 + \ln t}{t^2}, y = \frac{3 + 2 \ln t}{t}$ , удовлетворяет соотношению

$$yy' = 2x(y')^2 + 1.$$

14.11. Найти производные от функций, заданных неявно:

$$14.11.1. x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

$$14.11.2. \sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x + y).$$

14.12. Убедиться в том, что функция  $y$ , определенная уравнением  $xy - \ln y = 1$ , удовлетворяет соотношению  $y^2 + (xy - 1) \cdot y' = 0$ .

14.13. Найти дифференциалы функций:

14.13.1.  $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} - 3$ .      14.13.2.  $e^y = x + y$ .

14.14. Вычислить приближенно:

14.14.1.  $\sin 29^\circ$ .      14.14.2.  $\sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}$ .

**Ответы.**

14.9.1.  $-1$ .      14.9.2.  $\frac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$ .      14.11.1.  $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$ .

14.11.2.  $-\frac{y \cos^2(x + y)(\cos(xy) - \sin(xy)) - 1}{x \cos^2(x + y)(\cos(xy) - \sin(xy)) - 1}$ .

14.13.1.  $\arcsin x dx$ .

14.13.2.  $\frac{dx}{e^y - 1}$ .      14.14.1.  $0,485$ .      14.14.2.  $0,355$ .

## З а н я т и е 15

### *Производные и дифференциалы высших порядков*

#### **Аудиторная работа**

15.1. Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

15.1.1.  $y = \cos^2 x$ .      15.1.2.  $y = \operatorname{arctg} x^2$ .

15.1.3.  $y = \log_2 \sqrt[3]{1 - x^2}$ .

15.1.4.  $y = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1 - x^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1 - x^2} + x \arcsin x$ .

15.2. Показать, что функция  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$  при любых постоянных  $C_1$  и  $C_2$  удовлетворяет уравнению  $y'' - 5y' + 6y = 0$ .

15.3. Найти производные 2-го порядка от функций, заданных неявно:

15.3.1.  $y = 1 + xe^y$ .

15.3.2.  $x^3 + y^3 = 3xy$ .

15.3.3.  $\arctg y = y - x$ .

15.3.4.  $y = x + \ln y$ .

15.4. Найти производные 2-го порядка от функций, заданных параметрически:

15.4.1.  $x = t^2 + 2$ ,  $y = \frac{1}{3}t^3 - 1$ . 15.4.2.  $x = \arcsin t$ ,  $y = \sqrt{1 - t^2}$ .

15.4.3.  $x = a \cos^2 t$ ,  $y = a \sin^2 t$ . 15.4.4.  $x = \ln t$ ,  $y = t^2 - 1$ .

15.5. Найти дифференциалы 1-го, 2-го и 3-го порядков функции  $y = (2x - 3)^3$ .

15.6. Найти дифференциалы 2-го порядка функций:

15.6.1.  $y = e^{-x^2}$ .

15.6.2.  $xy + y^2 = 1$ .

15.7. Найти дифференциал 3-го порядка функции  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

15.8. Найти приближенное значение  $\sqrt[5]{31}$  с точностью до двух знаков после запятой.

### Домашнее задание

15.9. Найти производные второго порядка следующих функций:

15.9.1.  $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$ . 15.9.2.  $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ .

15.10. Найти  $y^{(n)}(x)$ , если  $y = e^{-x}$ .

15.11. Найти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ , если:

$$15.11.1. e^{x+y} = xy.$$

$$15.11.2. x = \frac{1}{\cos t}, y = \operatorname{tg} t.$$

15.12. Вычислить значение производной второго порядка функции  $y$ , заданной уравнением  $x^2 + 2y^2 - xy + x + y = 4$ , в точке  $M(1;1)$ .

15.13. Доказать, что функция  $y = e^{4x} + 2e^{-x}$  удовлетворяет уравнению  $y''' - 13y' - 12y = 0$ . Записать для этой функции  $d^3 y$ .

15.14. Вычислить приближенное значение функции  $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 12}$  при  $x = 1,3$  с точностью до двух знаков после запятой.

**Ответы.**

$$15.9.1. - \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}. \quad 15.9.2. - \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$15.10. (-1)^n e^{-x}. \quad 15.11.1. - \frac{y((x-1)^2 + (y-1)^2)}{x^2(y-1)^3}.$$

$$15.11.2. - \operatorname{ctg}^3 t. \quad 15.12. -1.$$

$$15.13. (64e^{4x} - 2e^{-x})dx^3. \quad 15.14. 2,08.$$

## З а н я т и е 1 6

### *Правило Лопиталья-Бернулли. Формула Тейлора*

#### Аудиторная работа

16.1. Применяя правило Лопиталья-Бернулли, найти пределы:

$$16.1.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$$

$$16.1.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2 \cos x - 2}.$$

$$16.1.3. \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$$

$$16.1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$16.1.5. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2} \quad 16.1.6. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$$

$$16.1.7. \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 10^x)^{1/x}$$

$$16.1.8. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$$

$$16.1.9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$$

$$16.1.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$$

16.2. Разложить многочлен  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 13x + 9$  по степеням двучлена  $x + 2$ .

16.3. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции  $f(x) = 10^x$  в точке  $x_0 = 0$ .

16.4. Вывести приближенную формулу  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$  и оценить ее точность при  $|x| < 0,05$ .

16.5. Вычислить  $\cos 10^\circ$  с точностью до  $10^{-4}$ .

16.6. Найти пределы, используя разложение по формуле Тейлора:

$$16.6.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$16.6.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x^3}$$

$$16.6.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}$$

### Домашнее задание

16.7. Найти пределы функций, применяя правило Лопиталья—Бернулли:

$$16.7.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2 \ln x}{x}$$

$$16.7.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$



$$16.7.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right).$$

$$16.7.4. \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1).$$

$$16.7.5. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}.$$

16.8. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  при  $x_0 = 1$ .

16.9. Вычислить приближенно  $\sin 1^\circ$  с точностью до  $10^{-4}$ .

16.10. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x}$ , используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

**Ответы.**

16.7.1. 1.    16.7.2. 1/6.    16.7.3. 0.    16.7.4. 0.    16.7.5.  $e^{-6}$ .  
16.8.

$$1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}(x-1)^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}(x-1)^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 4!} \frac{(x-1)^4}{(1+\theta(x-1))^{9/2}}, 0 < \theta < 1.$$

16.9. 0,0175.    16.10.  $-\frac{1}{6}$ .

## З а н я т и е 17

*Монотонность функций. Экстремум.  
Наибольшее и наименьшее значения функции*

### Аудиторная работа

17.1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума следующих функций:

$$17.1.1. y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{4}. \quad 17.1.2. y = \frac{\ln x}{x}.$$

17.1.3.  $y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$ .

17.1.4.  $y = x - 2 \sin x$ .

17.1.5.  $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ .

17.1.6.  $y = x^2 e^{-x}$ .

17.2. Найти экстремумы функций, пользуясь производной 2-го порядка:

17.2.1.  $y = \sqrt{1-x} + x$ .

17.2.2.  $y = x^2(a-x)^2$ .

17.2.3.  $y = x^{1/x}$ .

17.2.4.  $y = \frac{x}{\ln x}$ .

17.3. Определить наибольшее и наименьшее значения данных функций в указанных интервалах:

17.3.1.  $y = x^4 - 2x^2 + 5$ ;  $[-2, 2]$ .

17.3.2.  $y = x + 2\sqrt{x}$ ;  $[0, 4]$ .

17.3.3.  $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ ;  $[0, 1]$ .

17.3.4.  $\arctg \frac{1-x}{1+x}$ ;  $[0, 1]$ .

17.3.5.  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ;  $[-2, 1]$ .

17.4. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен  $72 \text{ см}^3$ , причем стороны основания относились бы, как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

17.5. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса  $R$ .

### Домашнее задание

17.6. Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума следующих функций:

17.6.1.  $y = x\sqrt{1-x^2}$ .

17.6.2.  $y = \ln x - \arctg x$ .

17.7. Найти экстремум функции  $y = x + \frac{a^2}{x}$  ( $a > 0$ ), используя

вторую производную.

17.8. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах (или во всей области определения):

17.8.1.  $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ ;  $[0, 1]$ .

17.8.2.  $y = xe^{-x^2/2}$ .

17.9. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. При каком угле  $\alpha$  наклона боковых стенок к днищу желоба площадь поперечного сечения будет наибольшей?

**Ответы.**

17.6.1. На  $(-1; -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}; 1)$  – убывает, на  $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$  – возрастает;  $y_{\min} = y(-1/\sqrt{2}) = -1/2$ ;  $y_{\max} = y(1/\sqrt{2}) = 1/2$ .

17.6.2. Возрастает на всей области определения.

17.7.  $y_{\max} = y(-a) = -2a$ ;  $y_{\min} = y(a) = 2a$ .

17.8.1. 1 и  $3/5$ .      17.8.2.  $1/\sqrt{e}$  и  $-1/\sqrt{e}$ .      17.9.  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ .

## З а н я т и е 1 8

*Выпуклость и вогнутость графиков функций. Асимптоты.  
Построение графиков функций*

### Аудиторная работа

18.1. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графиков функций:

18.1.1.  $y = \ln(x^2 + 1)$ .

18.1.2.  $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$ .

18.1.3.  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

18.1.4.  $y = xe^{-x}$ .

18.2. Найти асимптоты графиков функций:

$$18.2.1. y = \frac{x^4}{x^3 + 1}.$$

$$18.2.2. y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$18.2.3. y = x + \sin x.$$

$$18.2.4. y = (x - 2)e^{-1/x}.$$

18.3. Провести полное исследование и построить графики функций:

$$18.3.1. y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}.$$

$$18.3.2. y = x^2 e^{-x}.$$

$$18.3.3. y = x\sqrt{1 - x^2}.$$

$$18.3.4. y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}.$$

$$18.3.5. y = x^2 \ln x.$$

### Домашнее задание

18.4. Найти точки перегиба графиков функций:

$$18.4.1. y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

$$18.4.2. y = x \operatorname{arctg} x.$$

18.5. Найти асимптоты графика функции  $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ .

18.6. Исследовать функции и построить их графики:

$$18.6.1. y = \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

$$18.6.2. y = xe^{1/x}.$$

**Ответы.**

$$18.4.1. \left(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9}\right). \quad 18.4.2. \text{ Точек перегиба нет.}$$

$$18.5. x = -\frac{1}{e}; y = x + \frac{1}{e}.$$

## Типовой расчет № 1

### ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

**Задача 1.** Исследовать систему уравнений и в случае совместности решить ее:

$$1.1. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_4 = 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.2. \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.3. \text{ а) } \begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = -1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.4. \text{ а) } \begin{cases} 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.5. \text{ а) } \begin{cases} 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

$$1.12. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$1.13. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.14. \text{ a) } \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.15. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 13x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.16. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_4 = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.17. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.18. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

$$1.6. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.7. \text{ a) } \begin{cases} 4x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_3 + 6x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -5, \\ 4x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.8. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.9. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases}$$

$$1.10. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - 4x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

$$1.11. \text{ a) } \begin{cases} 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -2. \end{cases}$$

$$1.19. \text{ a) } \begin{cases} 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.20. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.21. \text{ a) } \begin{cases} x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.22. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - 4x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

$$1.23. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 - x_3 - 5x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.24. \text{ a) } \begin{cases} x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 7x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.25. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$



## Задача 2

- 2.1. Вычислить  $(\vec{a}, \vec{b})$ , где  $\vec{a} = 3\vec{m}_1 - 2\vec{m}_2$ ;  $\vec{b} = \vec{m}_1 + 4\vec{m}_2$ ;  $\vec{m}_1, \vec{m}_2$  — единичные векторы, угол между которыми равен  $\frac{\pi}{4}$ .
- 2.2. Найти проекцию вектора  $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$  на направление вектора  $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ .
- 2.3. Найти  $(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ , если  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ .
- 2.4. Вектор  $\vec{c}$ , коллинеарный вектору  $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{k}$ , образует острый угол с осью Oz. Найти координаты вектора  $\vec{c}$ , если  $|\vec{c}| = 3\sqrt{29}$ .
- 2.5. Найти  $(2\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$ , если  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ .
- 2.6. Найти  $(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ , если  $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p}$ ;  $\vec{b} = \vec{m} - 4\vec{p}$ ,  $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$  — ортогональный базис и  $|\vec{m}| = 2$ ,  $|\vec{n}| = 3$ ,  $|\vec{p}| = 4$ .
- 2.7. Найти длину вектора  $\vec{a} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$ , если  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ ,  $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ .
- 2.8. Найти вектор  $|\vec{b}|$ , коллинеарный вектору  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  и удовлетворяющий условию  $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$ .
- 2.9. Найти  $(2\vec{a} - 5\vec{b}, \vec{a} + 3\vec{b})$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$ .
- 2.10. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, сторонами которого служат векторы  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ .
- 2.11. Найти вектор  $\vec{d}$ , удовлетворяющий условиям  $(\vec{d}, \vec{a}) = 5$ ,  $(\vec{d}, \vec{b}) = 2$ ,  $(\vec{d}, \vec{c}) = 3$ , если  $\vec{a}(-1, 2, 0)$ ,  $\vec{b}(-1, 0, 5)$ ,  $\vec{c}(1, 0, 0)$ .

2.12. Даны векторы  $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$ .  
Найти проекцию вектора  $\vec{a} + \vec{b}$  на направление вектора  $\vec{c}$ .

2.13. Вектор  $\vec{b}$ , коллинеарный вектору  $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 7,5\vec{k}$ , образует острый угол с осью Oz. Найти координаты вектора  $\vec{b}$ , если  $|\vec{b}| = 50$ .

2.14. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{AB} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$  и  $\vec{AC} = 6\vec{a} + 3\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ .

2.15. Найти  $|\vec{a}, \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 8$ ,  $|\vec{b}| = 15$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 96$ .

2.16. Какой угол образуют векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$  и  $\vec{n} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  ортогональны,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ?

2.17. Вычислить  $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$ , если  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ ,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ .

2.18. Даны точки  $A(-5, 7, -6)$  и  $B(7, -9, 9)$ . Найти проекцию вектора  $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  на направление вектора  $\vec{AB}$ .

2.19. Найти координаты вектора  $\vec{a}$ , если  $(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{\pi}{3}$ ,  $(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{\pi}{4}$ ,  $|\vec{a}| = 6$ .

2.20. Найти вектор  $\vec{x}$ , ортогональный вектору  $\vec{a}(12, -3, 4)$ , имеющий с ним одинаковую длину и лежащий в плоскости Oyz.

2.21. Найти угол между векторами  $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$  и  $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$ , если  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ ,  $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}$ .

2.22. Найти проекцию вектора  $\vec{a}(4, -3, 4)$  на направление вектора  $\vec{b}(2, 2, 1)$ .

2.23. Какой угол образуют единичные векторы  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , если векторы  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$  и  $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$  ортогональны?

2.24. Доказать, что скалярное произведение двух векторов не изменится, если к одному из них прибавить вектор, ортогональный другому сомножителю.

2.25. При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  векторы  $\vec{a} = \alpha\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = 5\vec{i} + \beta\vec{j} - \vec{k}$  коллинеарны?

### Задача 3

3.1. Найти  $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$ , где  $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ ;  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ .

3.2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$  и  $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$ , если  $|\vec{m}| = 5$ ;  $|\vec{n}| = 3$ ,  $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$ .

3.3. Вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $\frac{\pi}{6}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{c}| = 3$ , вычислить  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

3.4. Найти  $[2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]$ , где  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ;  $\vec{b} = 3\vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j}$ .

3.5. Найти вектор  $\vec{x}$ , если известно, что он ортогонален векторам  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  и  $(\vec{x}, 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 51$ .

3.6. Найти координаты вектора  $\vec{x}$ , если он ортогонален векторам  $\vec{a}(2, 3, -1)$ ,  $\vec{b}(1, -1, 3)$  и  $|\vec{x}| = 1$ .

3.7. Найти единичный вектор  $\vec{d}$ , компланарный векторам  $\vec{a}(2, -1, 3)$  и  $\vec{b}(4, 2, 0)$  и ортогональный вектору  $\vec{c}(1, 1, 1)$ .

3.8. Вычислить площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$  и  $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$ , если  $|\vec{m}| = 5$ ,  $|\vec{n}| = 3$ ,  $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$ .

3.9. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, сторонами которого служат векторы

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}.$$

3.10. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ , если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

3.11. Вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярный к векторам  $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$ , образует с осью  $Oy$  тупой угол. Найти координаты вектора  $\vec{x}$ , если  $|\vec{x}| = 26$ .

3.12. Вычислить площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ , если  $A(1, -1)$ ,  $B(2, -3)$ ,  $C(1, 4)$ .

3.13. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(3, 4, -1)$ ,  $C(2, 3, 5)$ ,  $D(6, 0, -3)$ . Найти длину высоты, проведенной из вершины  $A$ .

3.14. Проверить, лежат ли точки  $A(2, -1, 2)$ ,  $B(3, 0, 5)$ ,  $C(-1, 2, 3)$ ,  $D(0, 2, -1)$  в одной плоскости.

3.15. Проверить, компланарны ли векторы  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 7\vec{i} + 14\vec{j} - 13\vec{k}$ .

3.16. Дана треугольная пирамида с вершинами  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(2, 3, 4)$ ,  $C(6, 2, 3)$ ,  $D(3, 7, 2)$ . Найти длину высоты пирамиды, проведенной на грань  $BCD$ .

3.17. Найти площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы  $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .

3.18. Найти  $[3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a}]$ , если  $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ .

3.19. Найти  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , если векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют правую тройку и взаимно перпендикулярны,  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{c}| = 4$ .

3.20. Показать, что точки  $A(3, 1, -1)$ ,  $B(5, 7, -2)$ ,  $C(1, 5, 0)$  и  $D(9, 4, -4)$  лежат в одной плоскости.

3.21. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j}$ .

3.22. Найти единичный вектор, ортогональный векторам  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

3.23. Вершинами треугольной пирамиды являются точки  $A(-5, 4, 8)$ ,  $B(2, 3, 1)$ ,  $C(4, 1, -2)$  и  $D(6, 3, 7)$ . Найти длину высоты, проведенной на грань  $BCD$ .

3.24. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ .

3.25. Проверить, лежат ли точки  $A(-1, 2, 3)$ ,  $B(0, 4, -1)$ ,  $C(2, 3, 1)$  и  $D(-2, 1, 0)$  в одной плоскости.

#### Задача 4

4.1. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно к прямой  $2x - 6y + 13 = 0$ .

4.2. Найти угол между прямой  $2x + 3y - 1 = 0$  и прямой, проходящей через точки  $M_1(-1; 2)$ ,  $M_2(0; 3)$ .

4.3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-1; 4)$  параллельно прямой  $2x + 3y - 4 = 0$ .

4.4. Дан треугольник с вершинами в точках  $A(-1, 2)$ ,  $B(0, 1)$  и  $C(1, 4)$ . Написать уравнение прямой, проходящей через вершину  $A$  параллельно противоположной стороне.

4.5. При каком значении параметра  $\alpha$  прямые  $(3\alpha + 2)x + (1 - 4\alpha)y + 8 = 0$  и  $(5\alpha - 2)x + (\alpha + 4)y - 7 = 0$  взаимно перпендикулярны?

4.6. Даны вершины треугольника:  $A(3, 5)$ ,  $B(-3, 3)$  и  $C(5, -8)$ . Определить длину медианы, проведенной из вершины  $C$ .

4.7. При каких значениях  $\alpha$  прямые  $\alpha x - 2y - 1 = 0$  и  $6x - 4y - 3 = 0$ :

а) параллельны; б) имеют одну общую точку?

4.8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(4; 3)$  перпендикулярно к вектору  $\overline{M_1M_2}$ , если  $M_1(0, -2)$ ,  $M_2(3, 5)$ .

4.9. Дан треугольник с вершинами в точках  $M_1(2, 5)$ ,  $M_2(-1, 3)$  и  $M_3(0, 0)$ . Составить уравнение медианы, проведенной из вершины  $M_3$ .

4.10. Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(-1, 2)$  перпендикулярно к прямой, соединяющей точки  $M_2(2, 3)$  и  $M_3(0, -1)$ .

4.11. На прямой  $2x + y + 11 = 0$  найти точку, равноудаленную от двух данных точек  $A(1, 1)$  и  $B(3, 0)$ .

4.12. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-1; 1)$  параллельно прямой  $4x + y - 5 = 0$ .

4.13. Найти расстояние между прямыми  $3x - 4y + 25 = 0$  и  $6x - 8y - 50 = 0$ .

4.14. Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $M(1, 2, 3)$  параллельно вектору  $\overline{AB}$ , если  $A(-1, 2, 4)$ ,  $B(3, 5, 8)$ .

4.15. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

4.16. Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-1, 3)$  и точку пересечения прямых  $2x - y - 1 = 0$ ,  $3x + y - 4 = 0$ .

4.17. Найти значения параметров  $a$  и  $d$ , при которых прямая

$$\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = 1 + 4t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$$

принадлежит плоскости  $ax + 2y - 4z + d = 0$ .

4.18. Дан треугольник с вершинами в точках  $A(1, 5)$ ,  $B(-4, 3)$ ,  $C(2, 9)$ . Найти уравнение высоты, проведенной из вершины  $A$ .

4.19. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $3x - 5y + 2 = 0$ ,  $5x - 2y + 4 = 0$  и точку  $A(1, 3)$ .

4.20. Дан треугольник с вершинами в точках  $A(1, 1)$ ,  $B(-2, 3)$ ,  $C(4, 7)$ . Написать уравнение медианы, проведенной из вершины  $A$ .

4.21. Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $A(1, -1)$  параллельно прямой, соединяющей точки  $M_1(2, -3)$  и  $M_2(5, 1)$ .

4.22. Даны уравнения сторон треугольника  $x + 2y - 1 = 0$ ,  $5x + 4y - 17 = 0$ ,  $x - 4y + 11 = 0$ . Составить уравнение прямой, проходящей через одну из вершин треугольника параллельно противоположной стороне.

4.23. Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(2, 3)$  ортогонально вектору  $M_1M_2$ , если  $M_2(4, 5)$ .

4.24. Выяснить, принадлежат ли точки  $A(-1, 2)$ ,  $B(3, 4)$  и  $C(1, 2)$  одной прямой.

4.25. Даны точки  $A(-1, 2, 3)$ ,  $B(3, 1, 2)$  и  $C(1, 3, 1)$ . Найти точку пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

### Задача 5

Даны координаты вершин пирамиды  $A_1 A_2 A_3 A_4$ . Требуется найти: 1) длину ребра  $A_1 A_2$ ; 2) угол между ребрами  $A_1 A_2$  и  $A_1 A_4$ ; 3) площадь грани  $A_1 A_2 A_3$ ; 4) объем пирамиды; 5) уравнение прямой  $A_1 A_4$ ; 6) уравнение плоскости  $A_1 A_2 A_3$ ; 7) угол между ребром  $A_1 A_4$  и гранью  $A_1 A_2 A_3$ ; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на грань  $A_1 A_2 A_3$ . Сделать чертеж.

$$5.1. A_1(3,3,9), \quad A_2(6,9,1), \quad A_3(1,7,3), \quad A_4(8,5,8).$$

$$5.2. A_1(3,5,4), \quad A_2(5,8,3), \quad A_3(1,9,9), \quad A_4(6,4,8).$$

$$5.3. A_1(2,4,3), \quad A_2(7,6,3), \quad A_3(4,9,3), \quad A_4(3,6,7).$$

$$5.4. A_1(9,5,5), \quad A_2(-3,7,1), \quad A_3(5,7,8), \quad A_4(6,9,2).$$

- 5.5.  $A_1(0,7,1)$ ,  $A_2(4,1,5)$ ,  $A_3(4,6,3)$ ,  $A_4(3,9,8)$ .  
 5.6.  $A_1(5,5,4)$ ,  $A_2(3,8,4)$ ,  $A_3(3,5,10)$ ,  $A_4(5,8,2)$ .  
 5.7.  $A_1(6,1,1)$ ,  $A_2(4,6,6)$ ,  $A_3(4,2,0)$ ,  $A_4(1,2,6)$ .  
 5.8.  $A_1(7,5,3)$ ,  $A_2(9,4,4)$ ,  $A_3(4,5,7)$ ,  $A_4(7,9,6)$ .  
 5.9.  $A_1(6,6,2)$ ,  $A_2(5,4,7)$ ,  $A_3(2,4,7)$ ,  $A_4(7,3,0)$ .  
 5.10.  $A_1(1,-3,1)$ ,  $A_2(-3,2,-3)$ ,  $A_3(-3,-3,3)$ ,  $A_4(-2,0,-4)$ .  
 5.11.  $A_1(1,-1,6)$ ,  $A_2(4,5,-2)$ ,  $A_3(-1,3,0)$ ,  $A_4(6,1,5)$ .  
 5.12.  $A_1(1,1,1)$ ,  $A_2(3,4,0)$ ,  $A_3(-1,5,6)$ ,  $A_4(4,0,5)$ .  
 5.13.  $A_1(0,0,0)$ ,  $A_2(5,2,0)$ ,  $A_3(2,5,0)$ ,  $A_4(1,2,4)$ .  
 5.14.  $A_1(7,1,2)$ ,  $A_2(-5,3,-2)$ ,  $A_3(3,3,5)$ ,  $A_4(4,5,-1)$ .  
 5.15.  $A_1(-2,3,-2)$ ,  $A_2(2,-3,2)$ ,  $A_3(2,2,0)$ ,  $A_4(1,5,5)$ .  
 5.16.  $A_1(3,1,1)$ ,  $A_2(1,4,1)$ ,  $A_3(1,1,7)$ ,  $A_4(3,4,-1)$ .  
 5.17.  $A_1(4,-3,-2)$ ,  $A_2(2,2,3)$ ,  $A_3(2,-2,-3)$ ,  $A_4(-1,-2,3)$ .  
 5.18.  $A_1(5,1,0)$ ,  $A_2(7,0,1)$ ,  $A_3(2,1,4)$ ,  $A_4(5,5,3)$ .  
 5.19.  $A_1(4,2,-1)$ ,  $A_2(3,0,4)$ ,  $A_3(0,0,4)$ ,  $A_4(5,-1,-3)$ .  
 5.20.  $A_1(0,0,2)$ ,  $A_2(3,0,5)$ ,  $A_3(1,1,0)$ ,  $A_4(4,1,2)$ .  
 5.21.  $A_1(3,0,5)$ ,  $A_2(0,0,2)$ ,  $A_3(4,1,2)$ ,  $A_4(1,1,0)$ .  
 5.22.  $A_1(1,1,0)$ ,  $A_2(4,1,2)$ ,  $A_3(0,0,2)$ ,  $A_4(3,0,5)$ .  
 5.23.  $A_1(4,1,2)$ ,  $A_2(1,1,0)$ ,  $A_3(3,0,5)$ ,  $A_4(0,0,2)$ .  
 5.24.  $A_1(0,0,0)$ ,  $A_2(3,-2,1)$ ,  $A_3(1,4,0)$ ,  $A_4(5,2,3)$ .  
 5.25.  $A_1(3,1,0)$ ,  $A_2(0,7,2)$ ,  $A_3(-1,0,-5)$ ,  $A_4(4,1,5)$ .

### Задача 6

Построить на плоскости кривую, приведя ее уравнение к каноническому виду.

6.1.  $x^2 + 8x + 2y + 20 = 0$ .      6.2.  $3x^2 - 4y^2 + 18x + 15 = 0$ .

6.3.  $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 7 = 0$ .      6.4.  $x^2 + 8x + y + 15 = 0$ .



- 6.5.  $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$ .  
 6.6.  $5x^2 + 9y - 30x + 18y + 9 = 0$ .  
 6.7.  $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$ .  
 6.8.  $9x^2 - 16y^2 - 5x - 64y - 127 = 0$ .  
 6.9.  $2x^2 + 8x - y + 12 = 0$ .      6.10.  $x^2 + 4y^2 - 6y + 3 = 0$ .  
 6.11.  $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$ .  
 6.12.  $x^2 - 5x - y + 7 = 0$ .  
 6.13.  $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$ .    6.14.  $4x^2 + 8x - y + 7 = 0$ .  
 6.15.  $9x^2 + 4y^2 - 18x = 0$ .      6.16.  $x + 2y^2 - 8y + 3 = 0$ .  
 6.17.  $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3$ .      6.18.  $x - 5y^2 + 10y - 6 = 0$ .  
 6.19.  $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24$ .    6.20.  $x^2 + 6x + 5 = 2y$ .  
 6.21.  $9x^2 + 10y^2 + 40y - 50 = 0$ .  
 6.22.  $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$ .  
 6.23.  $x - 2y^2 + 12y - 14 = 0$ .      6.24.  $y^2 + 2y + 4x - 11 = 0$ .  
 6.25.  $x^2 + 2y^2 + 2x = 0$ .

### Задача 7

Построить поверхность, приведя ее уравнение к каноническому виду.

- 7.1. а)  $z = 1 - x^2 - y^2$ ;      б)  $z = 4 - x^2$ .  
 7.2. а)  $x^2 + 2x + 2y^2 + 4z^2 = 0$ ;      б)  $y^2 + 5y + z = 4$ .  
 7.3. а)  $x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x = 0$ ;      б)  $x^2 + z^2 = 2z$ .  
 7.4. а)  $2y^2 + z^2 = 1 - x$ ;      б)  $xy = 4$ .  
 7.5. а)  $9x^2 + 4y^2 - 8y - z^2 = 32$ ;      б)  $x^2 - y^2 - 6x = 0$ .

- 7.6. a)  $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2z = 0$ ;      б)  $z^2 + 4z - 6y - 20 = 0$ .
- 7.7. a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$ ;      б)  $y^2 = 4x + 1$ .
- 7.8. a)  $z = 2 + x^2 + y^2$ ;      б)  $z = 1 - x^2$ .
- 7.9. a)  $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z = 9$ ;      б)  $z^2 - 2z - 8x - 7 = 0$ .
- 7.10. a)  $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ;      б)  $y^2 = 4x - 2$ .
- 7.11. a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ;      б)  $y = x^2$ .
- 7.12. a)  $x^2 + 3y^2 - z^2 + 2z = 2$ ;      б)  $x = 1 - z^2$ .
- 7.13. a)  $2x^2 - 4y^2 + z^2 = 2z$ ;      б)  $x^2 + 5z = 2x$ .
- 7.14. a)  $z = 4 - x^2 - y^2$ ;      б)  $x^2 + y^2 = 2y$ .
- 7.15. a)  $2y^2 + x^2 - 4x - 4z^2 + 4 = 0$ ;      б)  $z = (x - 1)^2$ .
- 7.16. a)  $y^2 - 2y - z^2 - x^2 = 0$ ;      б)  $x = y^2$ .
- 7.17. a)  $x^2 + y^2 - 2y = 2z - 1$ ;      б)  $z^2 + y^2 = 2z$ .
- 7.18. a)  $x^2 + y^2 = 2z + 6$ ;      б)  $x^2 + z^2 - 6z = 0$ .
- 7.19. a)  $9x^2 + 4y^2 + 8y - 36z^2 = 32$ ;      б)  $2x^2 + 5y = 10$ .
- 7.20. a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ ;      б)  $z^2 = 7x$ .
- 7.21. a)  $5x^2 + 15y^2 - 4z^2 + 8z - 24 = 0$ ;      б)  $4x^2 - y^2 = 8$ .
- 7.22. a)  $4z^2 = x^2 + 2y^2 + 2x + 3$ ;      б)  $xy = 4$ .
- 7.23. a)  $x^2 - 4y^2 + z^2 - 8y = 4$ ;      б)  $x^2 + y^2 - 3 = 0$ .
- 7.24. a)  $x^2 + y^2 + 2z = 0$ ;      б)  $x^2 - y^2 + 4 = 0$ .
- 7.25. a)  $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ ;      б)  $x = 2 - y^2$ .

## Типовой расчет № 2

### ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ

**Задача 1.** Найти пределы функции, не пользуясь правилом Лопиталя.

1.1. а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 7x + 12};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{3x^3 + 3x^2 - 2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x};$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x-3} \right)^{x+2}.$

1.2. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 3x + 2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 2x^3 + 1}{5x^3 + 4x + 3};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}.$

1.3. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + x - 4}{3x^2 + 5x + 2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 4x - 12}{3x^6 - 4x^2 + 1};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2};$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x+2} \right)^{x+2}.$

1.4. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 - 6}{2x^4 - x - 12};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \operatorname{tg} x};$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-2} \right)^x.$

1.5. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 + 4x + 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 8x + 1}{7x^5 + 4x^2 + 5};$

$$\begin{array}{ll} \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x; \\ 1.6. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 - x - 2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 6x - 5}{5x^2 - x - 1}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}; \\ 1.7. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\frac{x}{2} - 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{(x+1)^2 + (x+2)^2}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 4x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{3x+2} \right)^{2x}; \\ 1.8. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{4x^6 + 6x^3 - 3}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 2x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + 2x \right)^{\frac{1}{x}}; \\ 1.9. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 9x + 10}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x^2 - 3}{4x^6 + 6x^3 - 3}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^x; \\ 1.10. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 5x^2 - 4x^5}{8 - 6x - x^5}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 \frac{x}{3}}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
1.11. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^3 - x - 6}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 2x^4 + 3}{2x^6 + 3x^2 - 1}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{1 - \sqrt{1 - x^2}}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x} - 1}{x}. \\
1.12. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{20 + x - x^2}{3x^2 - 11x - 20}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^3 + x - 5}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x \operatorname{tg} 4x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}. \\
1.13. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 5x - 21}{2x^2 - 3x - 9}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^5 - 5x^2 - 1}{24x^4 - 4x + 7}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin x \operatorname{ctg} 3x; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}. \\
1.14. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 7x + 2}{2x^2 + 5x + 2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6 + 5x^5 - x^3 + 5}{3x^4 - 4x^3 + 1}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x \sin 2x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}. \\
1.15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 + 7x - 15}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x - 5x^2}{1 + 4x + 2x^2}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^3}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2)(\ln(2x + 1) - \ln(2x - 1)). \\
1.16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x - 3x^2}{1 - 3x + 6x^3}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 3)(\ln(x - 2) - \ln(x - 1)). \\
1.17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - 2x - 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x - 2};
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\ln(x+a) - \ln x). \\ \\ 1.18. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x - 5}{2x^2 - x - 1}; \\ \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos x - 1} & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x-4)(\ln(2-3x) - \ln(5-3x)). \\ \\ 1.19. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 9x - 5}{x^2 - 4x - 5}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}; \\ \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin 2x}{x \sin^2 2x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x-5)(\ln(2x+4) - \ln(2x+1)); \\ \\ 1.20. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x^2 + 9x - 44}{2x^2 + 5x - 12}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{5x^2 - x + 2}; \\ \\ & \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)(\ln(2x+3) - \ln(2x-4)). \\ \\ 1.21. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 + 3x^2}{2x^3 - 100x + 1}; \\ \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - 1}{1 - \cos 4x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}. \\ \\ 1.22. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 3x + 2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 4x^2 + 5}{3x^2 + x + 3}; \\ \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}}. \\ \\ 1.23. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{9x^4 + 3x + 5}; \end{array}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x}.$$

$$1.24. а) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 4}{5x^2 - 2x - 3};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \arcsin x - \operatorname{arctg} 2x}{x};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x^2-x}}.$$

$$1.25. а) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 2x - 12}{x^2 - 3x + 2};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^3 + 8}{100 - x^3};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos 3x}{x^2};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+5) - \ln x).$$

**Задача 2.** Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии «б» дополнительно построить график функции.

$$2.1. а) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}; \quad б) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{при } -\infty < x \leq 1; \\ \frac{2}{x} & \text{при } 1 < x < 4; \\ x - 3 & \text{при } x \geq 4. \end{cases}$$

$$2.2. а) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}; \quad б) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ \sin x & \text{при } 1 < x < \frac{\pi}{6}; \\ \frac{1}{2} & \text{при } x \geq \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

$$2.3. а) f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}; \quad б) f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x - 1 & \text{при } 1 < x \leq 3; \\ x^2 - 3 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$2.4. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{1 - e^{1-x}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ \frac{2\pi}{x} & \text{при } \frac{\pi}{4} < x < \pi; \\ \sin x + 2 & \text{при } x \geq \pi. \end{cases}$$

$$2.5. \text{ a) } f(x) = \frac{\frac{1}{2^x} - 1}{\frac{1}{2^x} + 1}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при } -\infty < x \leq 1; \\ 3^x & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 6 - x & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$2.6. \text{ a) } f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x^2 + 2 & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ \frac{2}{x} + 4 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$2.7. \text{ a) } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - x^3}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } -\infty < x \leq 1; \\ \frac{2}{x} & \text{при } 1 < x \leq 4; \\ \frac{x}{x-2} & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

$$2.8. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } -\infty < x \leq 3; \\ 3x-7 & \text{при } 3 < x \leq 4; \\ 3+\sqrt{x} & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

$$2.9. \text{ a) } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leq 0; \\ 1-x & \text{при } 0 < x \leq 3; \\ x^2 - 5 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$



$$2.10. \text{a) } f(x) = \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \\ \frac{4}{\pi}x & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$2.11. \text{a) } f(x) = \frac{2}{4-x^2}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{при } x \leq 0; \\ x & \text{при } 0 < x \leq \pi; \\ \sin x & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

$$2.12. \text{a) } f(x) = e^{\frac{1}{4x-2}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x \leq 1; \\ x & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ x-2 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$2.13. \text{a) } f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \leq 0; \\ 1+x & \text{при } 0 < x < 1; \\ x & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

$$2.14. \text{a) } f(x) = \frac{x+2}{x+4}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 1 & \text{при } 0 < x < 1; \\ 2-x & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

$$2.15. \text{a) } f(x) = 2^{\frac{1}{x+3}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq 0; \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x^2 + 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$2.16. \text{a) } f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$2.17. \text{ a) } f(x) = \frac{3}{x^2 - 9}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } x \leq 0; \\ x^2 & \text{при } 0 < x < 1; \\ x - 1 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

$$2.18. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{4^{4-x}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1 - x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$2.19. \text{ a) } f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4x + 3}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ -2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x - 2 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$2.20. \text{ a) } f(x) = \frac{\sin(2-x)}{2-x}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 1; \\ x & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 1 - x^2 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$2.21. \text{ a) } f(x) = \frac{\operatorname{tg} x \cdot (x^2 - 9)}{x^2 - 3x}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{при } -\infty < x \leq 2; \\ x - 1 & \text{при } 2 < x \leq 4; \\ \sqrt{x} + 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

$$2.22. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{5^{x-2}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ -x^2 + 9 & \text{при } 0 < x \leq 3; \\ x - 3 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$2.23. \text{ a) } f(x) = \frac{1 - \cos x}{2x^2 - x^3}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ -\sqrt{x} & \text{при } 0 < x \leq 4; \\ (x-4)^2 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

$$2.24. \text{ а) } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x}; \quad \text{ б) } f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$2.25. \text{ а) } f(x) = \frac{1}{3^{1-x}}. \quad \text{ б) } f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ 1 - x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ \ln x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

**Задача 3.** Найти производные функций.

$$3.1. \text{ а) } y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}; \quad \text{ б) } y = x^{\arcsin x};$$

$$\text{ в) } x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0.$$

$$3.2. \text{ а) } y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}; \quad \text{ б) } y = x^{\frac{1}{\ln x}}; \quad \text{ в) } x^y - y^x = 0.$$

$$3.3. \text{ а) } y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}; \quad \text{ б) } y = x^x; \quad \text{ в) } e^x + e^y - 2^{xy} - 3 = 0.$$

$$3.4. \text{ а) } y = \ln(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1}); \quad \text{ б) } y = x^{\ln x};$$

$$\text{ в) } \sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0.$$

$$3.5. \text{ а) } y = \arcsin \frac{2x^3}{1+x^6}; \quad \text{ б) } y = x^{\sin x}; \quad \text{ в) } \frac{y}{x} + e^x - 3\sqrt{\frac{y}{x}} = 0.$$

$$3.6. \text{ а) } y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad \text{ б) } y = (\sin x)^{\cos x};$$

$$\text{ в) } x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0.$$

$$3.15. \text{ a) } y = \operatorname{arctg} \frac{3x - x^2}{1 - 3x^2};$$

$$\text{b) } 2x + 2^y = 2^{x+y}.$$

$$\text{б) } y = \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}};$$

$$3.16. \text{ a) } y = \ln \operatorname{tg} \frac{e^{2 \sin x}}{4};$$

$$\text{b) } x - y = \arcsin x - \arcsin y.$$

$$\text{б) } y = x^{\frac{1}{x}};$$

$$3.17. \text{ a) } y = \frac{\operatorname{arctg} x}{2} - \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\text{b) } x^2 + y^2 = r^2.$$

$$\text{б) } y = \left( \frac{x}{1+x} \right)^x;$$

$$3.18. \text{ a) } y = \sqrt{2x+1} (\ln(2x+1) - 2); \quad \text{б) } y = 2x\sqrt{x};$$

$$\text{b) } \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$3.19. \text{ a) } y = \frac{1 + \ln \cos x}{\cos x};$$

$$\text{b) } y^3 - 3y + 3ax = 0.$$

$$\text{б) } y = (x^2 + 1)^{\sin x};$$

$$3.20. \text{ a) } y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x;$$

$$\text{b) } \cos(xy) = x.$$

$$\text{б) } y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}};$$

$$3.21. \text{ a) } y = \arccos \sqrt{1 - e^x};$$

$$\text{b) } y^2 \cos x = a^2 \sin 3x;$$

$$\text{б) } y = (\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}};$$

$$3.22. \text{ a) } y = \log_2 (\sin^2 x);$$

$$\text{b) } y^2 - 3y + 2x^3 = 0.$$

$$\text{б) } y = (\ln x)^{\frac{1}{x}};$$

$$3.23. \text{ a) } y = \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^4;$$

$$\text{б) } y = (\sin x)^{\arcsin x};$$

$$3.7. \text{ a) } y = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}; \text{ б) } y = (x+1)^{\frac{2}{x}}; \text{ в) } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$3.8. \text{ a) } y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}; \quad \text{б) } y = x^2 e^{x^2} \sin 2x;$$

$$\text{в) } x^4 + y^4 = x^2 y^2.$$

$$3.9. \text{ a) } y = e^x - \sin e^x \cos^3 e^x - \sin^3 e^x \cos e^x;$$

$$\text{б) } y = x^2 e^{x^2} \ln x; \quad \text{в) } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$$

$$3.10. \text{ a) } y = \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}; \quad \text{б) } y = (x+1)^{\frac{2}{x}};$$

$$\text{в) } 2y \ln y = x.$$

$$3.11. \text{ a) } y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x + \frac{1}{3} \cos^2 x; \quad \text{б) } y = (\ln x)^x;$$

$$\text{в) } e^x \sin y - e^y \cos x = 0.$$

$$3.12. \text{ a) } y = \ln \left( 1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x}; \quad \text{б) } y = \frac{(x-2)^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3};$$

$$\text{в) } xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$3.13. \text{ a) } y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1}; \quad \text{б) } y = \frac{(x+1)^3 \cdot \sqrt[4]{4-2x}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}};$$

$$\text{в) } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$3.14. \text{ a) } y = \arccos(2e^{2x} - 1); \quad \text{б) } y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}};$$

$$\text{в) } \sin(xy) + \cos(xy) = 0.$$

$$\text{в) } e^y + xy = 1.$$

$$3.24. \text{ а) } y = \ln(2x^3 + 3x^2);$$

$$\text{б) } y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{в) } x \sin y + y \sin x = 0.$$

$$3.25. \text{ а) } y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x};$$

$$\text{б) } y = (\sqrt{x})^{\cos \sqrt{x}};$$

$$\text{в) } \frac{y}{x} + e^x - 3\sqrt{\frac{y}{x}} = 0.$$

**Задача 4.** Найти производные второго порядка от функций:

$$4.1. y = \cos^2 x;$$

$$4.2. y = \operatorname{arctg} x^3;$$

$$4.3. y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^4};$$

$$4.4. y = e^{-x^2};$$

$$4.5. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$4.6. y = -\frac{22x}{x+5};$$

$$4.7. y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3);$$

$$4.8. y = \frac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x;$$

$$4.9. y = -\frac{1}{9}x \cdot \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x; \quad 4.10. y = \sin^2 x;$$

$$4.11. y = \operatorname{tg} x;$$

$$4.12. y = \sqrt{1+x^2};$$

$$4.13. y = (x^2 - 3x + 2)^3;$$

$$4.14. y = x \cdot e^{x^2};$$

$$4.15. y = \frac{1}{1+x^3};$$

$$4.16. y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x;$$

$$4.17. y = \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$4.18. y = \ln(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$4.19. y = e^{\sqrt{x}};$$

$$4.20. y = \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x;$$

4.21.  $y = \arcsin(a \cdot \sin x)$ ;

4.22.  $y = x \cdot \sqrt{1+x^2}$ ;

4.23.  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

4.24.  $y = \ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right)$ ;

4.25.  $y = x \ln x$ ;

4.26.  $y = \frac{11}{x-3}$ .

**Задача 5.** Найти производные первого и второго порядков от функций, заданных параметрически:

5.1.  $x = t^2 + 2$ ;  $y = \frac{1}{3}t^3 - 1$ .      5.2.  $x = \arcsin t$ ;  $y = \sqrt{1-t^2}$ .

5.3.  $x = at^2$ ;  $y = bt^3$ .      5.4.  $x = \cos t$ ;  $y = \sin t$ .

5.5.  $x = a(t - \sin t)$ ;  $y = a(1 - \cos t)$ .

5.6.  $x = a \cos^2 t$ ;  $y = a \sin^2 t$ .

5.7.  $x = \ln t$ ;  $y = t^2 - 1$ .      5.8.  $x = \arcsin t$ ;  $y = \ln(1-t^2)$ .

5.9.  $x = at \cdot \cos t$ ;  $y = at \cdot \sin t$ .

5.10.  $x = \arccos \sqrt{t}$ ;  $y = \sqrt{t-t^2}$ .

5.11.  $x = \frac{1}{\cos t}$ ;  $y = \operatorname{tg} t$ .      5.12.  $x = \operatorname{arctg} t$ ;  $y = \ln(1+t^2)$ .

5.13.  $x = a \cos^3 t$ ;  $y = a \sin^3 t$ .

5.14.  $x = R \sin t + \sin Rt$ ;  $y = R \cos t + \cos Rt$ .

5.15.  $x = t^2 + 2t$ ;  $y = \ln(t+1)$ .

5.16.  $x = 1 + e^{\alpha t}$ ;  $y = \alpha t + e^{-\alpha t}$ .

5.17.  $x = \cos t + t \sin t$ ;  $y = \sin t - t \cos t$ .

5.18.  $x = 2 \cos t$ ;  $y = \sin t$ .      5.19.  $x = t^2$ ;  $y = t + t^3$ .

5.20.  $x = e^{2t}$ ;  $y = e^{3t}$ .      5.21.  $x = 2 \cos^2 t$ ;  $y = 2 \sin^2 t$ .

5.22.  $x = 1 + e^t$ ;  $y = t + e^{-t}$ .

$$5.23. x = 2 \sin t + \sin 2t; y = 2 \cos t + \cos 2t.$$

$$5.24. x = e^t \cos t; y = e^t \sin t. \quad 5.25. x = e^{2t} + 4; y = e^{3t} - 5.$$

**Задача 6.** Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

$$6.1. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x+1} + 1}{\sqrt{x+2} + x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$6.2. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha x}{1 - \cos \beta x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right).$$

$$6.3. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x.$$

$$6.4. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x^3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1+x)}.$$

$$6.5. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$6.6. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$6.7. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \quad (\alpha > 0).$$

$$6.8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{\sin x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{e^x}.$$

$$6.9. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)}{\sin \frac{1}{x}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$



$$6.10. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\operatorname{tg} x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -1} (1+x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$6.11. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^3}}.$$

$$6.12. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3^x} - 1 \right) x.$$

$$6.13. a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}.$$

$$6.14. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - 1}{\ln x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1000}}{2x^{100} + 1}.$$

$$6.15. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{5x}}{\sin x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{1+x}}.$$

$$6.16. a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$6.17. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3^x}.$$

$$6.18. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3 \sin \frac{1}{x}}{2}}.$$

$$6.19. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^{10}}}.$$

$$6.20. a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$6.21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^9}{3^x}.$$

$$6.22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\cos x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{a}{x}.$$

$$6.23. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} + x - 1}{\sin 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arctg} x}.$$

$$6.24. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

$$6.25. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{x^{\frac{3}{2}}}.$$

**Задача 7.** Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ .

$$7.1. xe^{2x}, x_0 = -1.$$

$$7.2. \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), x_0 = 0.$$

$$7.3. e^x, x_0 = -1.$$

$$7.4. 4^x, x_0 = 0.$$

$$7.5. \sqrt{x}, x_0 = 4.$$

$$7.6. x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2, x_0 = 1.$$

$$7.7. \frac{1}{x+8}, x_0 = 0.$$

$$7.8. x \cos x, x_0 = 0.$$

$$7.9. \frac{x}{x-1}, x_0 = 2.$$

$$7.10. e^{\sin x}, x_0 = 0.$$

$$7.11. \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), x_0 = 0.$$

$$7.12. \ln(1 + \sin x), x_0 = 0.$$

$$7.13. \ln(5 - 4x), x_0 = 0.$$

$$7.14. 3^x, x_0 = 0.$$

$$7.15. \frac{1}{x}, x_0 = 1.$$

$$7.16. e^{5x-1}, x_0 = 0.$$

7.17.  $\frac{1}{x+2}$ ,  $x_0 = -3$ .

7.18.  $\arcsin x$ ,  $x_0 = 0$ .

7.19.  $x^3 \ln x$ ,  $x_0 = 1$ .

7.20.  $\ln x$ ,  $x_0 = 1$ .

7.21.  $x^5 - 5x^3 + x$ ,  $x_0 = 2$ .

7.22.  $\ln(x+5)$ ,  $x_0 = 0$ .

7.23.  $\sin \frac{x}{3}$ ,  $x_0 = 0$ .

7.24.  $xe^x$ ,  $x_0 = 0$ .

7.25.  $\frac{1}{3-2x}$ ,  $x_0 = 0$ .

**Задача 8.** Исследовать функцию и построить ее график.

8.1.  $y = \frac{1-x^2}{x^2}$ .

8.2.  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

8.3.  $y = \frac{4x^2+1}{x}$ .

8.4.  $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ .

8.5.  $y = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$ .

8.6.  $y = \frac{x^3+2}{2x}$ .

8.7.  $y = \frac{4x}{4+x^2}$ .

8.8.  $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ .

8.9.  $y = \frac{x^2}{x-1}$ .

8.10.  $y = \frac{4x^3+5}{x}$ .

8.11.  $y = \frac{x^4}{x^3-1}$ .

8.12.  $y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$ .

8.13.  $y = \frac{2+x^3}{x^2}$ .

8.14.  $y = \frac{x^4+1}{x^2}$ .

8.15.  $y = \frac{x^3}{1-x^2}$ .

8.16.  $y = \frac{4x^3}{1-x^3}$ .

8.17.  $y = \frac{x^2}{1-x}$ .

8.18.  $y = \frac{x^4}{1-x^2}$ .

8.19.  $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ .

8.20.  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ .

8.21.  $y = \frac{x^3-1}{x^2}$ .

8.22.  $y = \frac{4x^3}{x^3-1}$ .

8.23.  $y = \frac{x^2-5}{x-3}$ .

8.24.  $y = x^2 e^{-x}$ .

8.25.  $y = x\sqrt{1-x^2}$ .

**II. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ  
ПЕРЕМЕННОЙ.  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ  
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.  
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

**З а н я т и е 1**

*Комплексные числа и действия над ними.  
Простейшие приемы интегрирования*

**Аудиторная работа**

1. Выполнить действия:

1.1.  $(2 + 3i)(4 - i) + 5 + 4i$ ;      1.3.  $(2 + 5i)^2 + (3 - i)^2 + \frac{3 + 4i}{2 - 3i}$ ;

1.2.  $\frac{1 - 3i}{1 + 2i} + 4i - 1$ ;      1.4.  $\frac{(8 - i)^2}{3 + 5i} + 3i - 4$ .

2. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме записи:

2.1.  $1 + i$ ;      2.2.  $-i$ ;      2.3.  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;      2.4.  $5 - 4i$ .

3. Выполнить действия:

3.1.  $(1 - i)^5$ ;      3.2.  $(2 + 2i)^4$ ;      3.3.  $(-i)^{10}$ ;  
3.4.  $\sqrt[3]{3 + 3i}$ ;      3.5.  $\sqrt{i}$ ;      3.6.  $\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}i}$ .

4. Пользуясь таблицей интегралов, свойствами неопределенного интеграла и основными правилами интегрирования, найти неопределенные интегралы:

4.1.  $\int(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1) dx$ ;      4.2.  $\int \frac{(1 + 4\sqrt[3]{x})^2}{x} dx$ ;

4.3.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ ;      4.4.  $\int \frac{1 + 3x^2}{x^2(1 + 2x^2)} dx$ ;

4.5.  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx;$

4.6.  $\int \frac{4x^2 + 2x - 3}{x^2} dx;$

4.7.  $\int \sin 3x \cos x dx;$

4.8.  $\int (2x + 3)^5 dx;$

4.9.  $\int \cos 4x \cos 8x dx;$

4.10.  $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 - \cos 2x} dx.$

5. Найти неопределенные интегралы поднесением под знак дифференциала:

5.1.  $\int \cos x 2^{\sin x} dx;$

5.2.  $\int \frac{dx}{x(1 + 2 \ln x)^4};$

5.3.  $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2} dx;$

5.4.  $\int \frac{4x + 4}{x^2 + 2x} dx;$

5.5.  $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x};$

5.6.  $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x};$

5.7.  $\int x e^{-x^2} dx;$

5.8.  $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^4 2x} dx;$

5.9.  $\int \frac{dx}{x \ln 4x};$

5.10.  $\int \frac{5x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx.$

6. Найти неопределенные интегралы и сделать проверку дифференцированием:

6.1.  $\int \cos^2(3x + \pi/6) dx;$

6.2.  $\int \frac{3^x dx}{1 + 9^x};$

6.3.  $\int x^2 \cos(3x^3 + 1) dx;$

6.4.  $\int x(5 + x)^4 dx;$

6.5.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}};$

6.6.  $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}.$

### Домашнее задание

7. Найти неопределенные интегралы:

7.1.  $\int e^{4x-3} dx;$

7.2.  $\int x \sqrt{x^2 - 4} dx;$

7.3.  $\int (x^2 - 4)(x + 2) dx$ ;

7.4.  $\int \frac{\cos 2x dx}{1 + \sin^2 2x}$ ;

7.5.  $\int x^2 e^{-x^3} dx$ ;

7.6.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln 2x}}$ ;

7.7.  $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 20}$ ;

7.8.  $\int \frac{4x - 5}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} dx$ ;

7.9.  $\int \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$ ;

7.10.  $\int \cos^2 3x dx$ .

**Ответы.**

7.1.  $\frac{1}{4}e^{4x-3} + C$ ; 7.2.  $\frac{1}{3}(x^2 - 4)^{3/2} + C$ ;

7.3.  $\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 8x + C$ ; 7.4.  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sin 2x + C$ ;

7.5.  $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$ ; 7.6.  $2\sqrt{\ln 2x} + C$ ; 7.7.  $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{4} + C$ ;

7.8.  $-4\sqrt{3 + 2x - x^2} - \arcsin \frac{x-1}{2} + C$ ;

7.9.  $3\sqrt{x^2 - 4x + 8} - 5 \ln \left| x - 2 + \sqrt{(x-2)^2 + 4} \right| + C$ ;

7.10.  $\frac{1}{2}x + \frac{\cos 6x}{12} + C$ .

**З а н я т и е 2***Интегрирование с помощью замены переменной  
в неопределенном интеграле***Аудиторная работа**

1. Найти неопределенные интегралы.

1.1.  $\int x(3x + 4)^5 dx$ ;

1.2.  $\int x\sqrt{2x + 3} dx$ ;

$$1.3. \int \frac{\ln x \sqrt{2 + \ln^2 x} dx}{x};$$

$$1.5. \int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}};$$

$$1.7. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}};$$

$$1.9. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}};$$

$$1.11. \int \frac{2^{1/x}}{x^2} dx;$$

$$1.13. \int \frac{\cos \frac{x}{\sqrt{2}} dx}{2 - \sin \frac{x}{\sqrt{2}}};$$

$$1.15. \int \frac{(2x+1) dx}{\sqrt{x+1}};$$

$$1.17. \int \frac{\sin x + x \cos x}{x^2 \sin^2 x} dx;$$

$$1.19. \int 4^{x \ln x} (1 + \ln x) dx;$$

$$1.4. \int \frac{\sin 2x}{4 + \sin^2 x} dx;$$

$$1.6. \int \frac{x dx}{\sqrt{x-1}};$$

$$1.8. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}};$$

$$1.10. \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$1.12. \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$$

$$1.14. \int \frac{dx}{3^x + 1};$$

$$1.16. \int \frac{\ln x + 1}{x \ln x} dx;$$

$$1.18. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$$

$$1.20. \int \frac{2x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

2. Найти неопределенные интегралы и сделать проверку дифференцированием.

$$2.1. \int \frac{\cos x - x \sin x}{x \cos x} dx;$$

$$2.2. \int \sqrt{4-x^2} dx;$$

$$2.3. \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx;$$

$$2.4. \int \frac{2x(1+x^2) \operatorname{arctg} x + x^2}{x^2(1+x^2) \operatorname{arctg} x} dx.$$

### Домашнее задание

3. Найти неопределенные интегралы.

$$3.1. \int \frac{4 \sin 2x dx}{4 + \sin^2 x};$$

$$3.2. \int \frac{\ln x + 1}{1 + x \ln x} dx;$$

$$3.3. \int \frac{dx}{1 + e^x};$$

$$3.4. \int \frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}} dx;$$

$$3.5. \int \frac{x(2 \ln x + 1)}{4 + x^2 \ln x} dx;$$

$$3.6. \int \frac{2^{1/x^2} dx}{x^3};$$

$$3.7. \int x(4x + 5)^3 dx;$$

$$3.8. \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - 4 \ln^2 x}}.$$

### Ответы

$$3.1. \ln|4 + \sin^2 x| + C; \quad 3.2. \ln|1 + x \ln x| + C; \quad 3.3. \ln \frac{e^x - 1}{e^x} + C;$$

$$3.4. 2\left(\frac{1}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x + 2\sqrt{x}\right) - 4 \ln(\sqrt{x} + 1) + C;$$

$$3.5. \frac{1}{2} \ln|4 + x^2 \ln x| + C; \quad 3.6. -\frac{1}{2} 2^{1/x^2} \ln 2 + C;$$

$$3.7. \frac{1}{16} \left( \frac{(4x + 5)^5}{5} - \frac{5(4x + 5)^4}{4} \right) + C;$$

$$3.8. \frac{1}{2} \arcsin(2 \ln x) + C.$$

### З а н я т и е 3

#### *Интегрирование по частям в неопределённом интеграле*

#### Аудиторная работа

1. Найти неопределенные интегралы.

$$1.1. \int (2x + 3)e^{4x} dx;$$

$$1.2. \int \sqrt{x} \ln 4x dx;$$



1.3.  $\int x \operatorname{arctg} 2x \, dx;$

1.4.  $\int (x^2 + 1) \cos(3x + 1) \, dx;$

1.5.  $\int e^{-x} \cos 2x \, dx;$

1.6.  $\int \ln^2 x \, dx;$

1.7.  $\int \sin(\ln x) \, dx;$

1.8.  $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx;$

1.9.  $\int \frac{\arcsin x \, dx}{\sqrt{1+x}};$

1.10.  $\int x^2 3^x \, dx;$

1.11.  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{1-x}} \, dx;$

1.12.  $\int (3x + 1) \cos^2 4x \, dx;$

1.13.  $\int x^2 \ln(1+x) \, dx;$

1.14.  $\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx .$

### Домашнее задание

2. Найти неопределенные интегралы.

2.1.  $\int (x^2 + 2x) \cos 2x \, dx;$

2.2.  $\int e^{2x} \sin x \, dx;$

2.3.  $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} \, dx;$

2.4.  $\int \arccos x \, dx;$

2.5.  $\int e^{\sqrt{x}} \, dx;$

2.6.  $\int x \sin x \cos x \, dx .$

**Ответы.**

2.1.  $\frac{1}{2}(x^2 + 2x) \sin 2x + \frac{1}{2}(x + 1) \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C;$

2.2.  $\frac{2}{3} e^{2x} \sin x - \frac{1}{3} e^{2x} \cos x + C;$  2.3.  $-\frac{x}{\sin x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$

2.4.  $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$  2.5.  $2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C;$

2.6.  $\frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x + C .$

## З а н я т и е 4

### Интегрирование рациональных функций

#### Аудиторная работа

1. Записать разложение рациональной дроби на простейшие:

1.1.  $\frac{3x-2}{x^3-2x^2}$ ;

1.2.  $\frac{4x+5}{(x^2+1)^2(x-3)^2}$ ;

1.3.  $\frac{x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x-2)^2}$ .

2. Найти неопределенные интегралы:

2.1.  $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$ ;

2.2.  $\int \frac{2x^2+3}{x^4-5x^2+6} dx$ ;

2.3.  $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x} dx$ ;

2.4.  $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x}$ ;

2.5.  $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx$ ;

2.6.  $\int \frac{x^3+3}{x^3-8} dx$ ;

2.7.  $\int \frac{dx}{x(x^2+1)(x^2+4)}$ ;

2.8.  $\int \frac{x^4+3x+1}{x^4-1} dx$ ;

2.9.  $\int \frac{6x^4-30x^2+30}{(x^2-1)(x+2)} dx$ ;

2.10.  $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$ .

#### Домашнее задание

3. Найти неопределенные интегралы:

3.1.  $\int \frac{6x^4-21x^2+3x+24}{(x^2+x-2)(x+1)} dx$ ;

3.2.  $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$ ;

$$3.3. \int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx;$$

$$3.4. \int \frac{9x - 9}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx;$$

$$3.5. \int \frac{5x dx}{x^4 + 3x^2 - 4};$$

$$3.6. \int \frac{2x^4 - 3x^3 - 21x^2 - 26}{(x+3)(x^2 - 5x + 4)} dx.$$

**Ответы.**

$$3.1. 3x^2 - 12x + \ln|x-1| - 3\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C;$$

$$3.2. \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} + C;$$

$$3.3. 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x^2 - 2x + 4| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

$$3.4. \frac{1}{2}\ln|x^2 - 4x + 13| - \ln|x+1| + 2 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C;$$

$$3.5. \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 4| + C;$$

$$3.6. x^2 + x + 4\ln|x-1| + \ln|x+3| - 2\ln|x-4| + C.$$

### З а н я т и е 5

#### *Интегрирование тригонометрических выражений и простейших иррациональных функций*

#### **Аудиторная работа**

1. Найти неопределенные интегралы от тригонометрических функций:

$$1.1. \int \sin 5x \sin 3x dx;$$

$$1.2. \int \cos 8x \cos 3x dx;$$

$$1.3. \int \sin^4 2x dx;$$

$$1.4. \int \cos^5 3x dx;$$

$$1.5. \int \sin^3 2x \cos^5 2x dx;$$

$$1.6. \int \sin^3 3x \cos^3 3x dx;$$

1.7.  $\int \cos^2 x \sin^4 x dx;$

1.8.  $\int \operatorname{tg}^3 2x dx;$

1.9.  $\int \operatorname{ctg}^4 x dx;$

1.10.  $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x};$

1.11.  $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x};$

1.12.  $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x};$

1.13.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 8 \sin x \cos x + 12 \cos^2 x};$

1.14.  $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}.$

2. Найти неопределенные интегралы от иррациональных функций:

2.1.  $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{3+x}};$

2.2.  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx;$

2.3.  $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}};$

2.4.  $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})};$

2.5.  $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx;$

2.6.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}};$

2.7.  $\int \sqrt{x(1-x^2)} dx;$

2.8.  $\int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1+x^4}};$

2.9.  $\int \frac{\sqrt[3]{1+4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$

2.10.  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x} dx.$

### Домашнее задание

3. Найти неопределенные интегралы:

3.1.  $\int \sin^3 x \cos^8 x dx;$

3.2.  $\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx;$

3.3.  $\int \cos^5 x \sin x dx;$

3.4.  $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x} \cos^3 2x dx;$

3.5.  $\int \frac{dx}{3 \cos x - 4 \sin x};$

3.6.  $\int \frac{dx}{16 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x};$

$$3.7. \int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}} dx;$$

$$3.8. \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx;$$

$$3.9. \int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx;$$

$$3.10. \int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx.$$

**Ответы.**

$$3.1. \frac{1}{11} \cos^{11} x - \frac{1}{9} \cos^9 x + C;$$

$$3.2. \frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \sin 12x - \frac{1}{144} \sin^3 6x + C; \quad 3.3. -\frac{\cos^6 x}{6} + C;$$

$$3.4. \frac{5}{16} \sqrt[5]{\sin^8 2x} - \frac{5}{36} \sqrt[5]{\sin^{18} 2x} + C;$$

$$3.5. -\frac{1}{5} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - \frac{1}{3}}{\operatorname{tg} x / 2 + 3} \right| + C;$$

$$3.6. \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{2 \operatorname{tg} x} \right| + C;$$

$$3.7. 2\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} \right| + C;$$

$$3.8. 3\sqrt[3]{x+1} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} + 6\sqrt[6]{x+1} - 3 \ln |1 + \sqrt[3]{x+1}| - \\ - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x+1} + C;$$

$$3.9. \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C;$$

$$3.10. \frac{3}{2} x^{2/3} + 6x^{1/6} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$$

## Занятие 6

### Вычисление определенных интегралов

#### Аудиторная работа

1. Вычислить определенные интегралы:

$$1.1. \int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx;$$

$$1.3. \int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{1/x^2} dx;$$

$$1.5. \int_1^e \frac{\cos \ln x}{x} dx;$$

$$1.7. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx;$$

$$1.9. \int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}};$$

$$1.11. \int_0^9 \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}};$$

$$1.13. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5};$$

$$1.15. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x};$$

$$1.17. \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx;$$

$$1.19. \int_2^3 \frac{7x-15}{x^3 - 2x^2 + 5x} dx;$$

$$1.2. \int_0^3 \frac{x^2 dx}{4+x^3};$$

$$1.4. \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)};$$

$$1.6. \int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1} dx$$

$$1.8. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx;$$

$$1.10. \int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y+2}} dy;$$

$$1.12. \int_1^e \ln x dx;$$

$$1.14. \int_0^{\pi} (2x+1) \cos x dx;$$

$$1.16. \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx;$$

$$1.18. \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx;$$

$$1.20. \int_0^1 \frac{t^5 + 1}{16-t^4} dt.$$

## Домашнее задание

2. Вычислить определенные интегралы:

$$2.1. \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx;$$

$$2.2. \int_1^e x \ln^2 x \, dx;$$

$$2.3. \int_3^8 \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}};$$

$$2.4. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$$

$$2.5. \int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}};$$

$$2.6. \int_1^e \ln^3 x \, dx;$$

$$2.7. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x \, dx}{\sin^2 x};$$

$$2.8. \int_{-2}^2 \frac{3x^7 - 2x^5 + x^3 - x}{x^4 + 3x^2 + 1} dx;$$

$$2.9. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2 \cos x};$$

$$2.10. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}.$$

**Ответы.**

$$2.1. \frac{\pi}{2} - 1; \quad 2.2. \frac{1}{4}(e^2 - 1); \quad 2.3. \frac{32}{3}; \quad 2.4. 2; \quad 2.5. \frac{1}{5} \ln 112;$$

$$2.6. 6 - 2e;$$

$$2.7. \frac{\pi(9 - 4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}; \quad 2.8. 0; \quad 2.9. \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$2.10. \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

## З а н я т и е 7

### Приложения определенных интегралов

#### Аудиторная работа

1. Найти площади криволинейных фигур, ограниченных линиями:

$$1.1. y = \ln x, \quad x = e; \quad x = e^3; \quad y = 0;$$

1.2.  $y = x^2 + 2x, \quad y = x + 2;$

1.3.  $y^2 = 2px; \quad y^2 = \frac{4}{p}(x - p)^3, \quad p > 0;$

1.4.  $x^2 + y^2 = a^2; \quad x^2 + y^2 - 2ay = a^2, \quad y = a;$

1.5.  $x^2 - y^2 = a^2; \quad y^2 = \frac{3}{2}ax;$

1.6.  $x = a \cos^3 t; \quad y = a \sin^3 t;$

1.7.  $x = 2(t - \sin t); \quad y = 2(1 - \cos t), \quad \text{осью } Ox;$

1.8.  $r = a(1 + \sin \varphi);$

1.9.  $r = \sqrt{3} \sin \varphi; \quad r = 1 - \cos \varphi \quad (\text{вне кардиоиды});$

1.10.  $r = a \cos 3\varphi .$

2. Найти длину дуги кривой:

2.1.  $y^2 = 4x, \quad 0 \leq x \leq 1;$

2.2.  $y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8};$

2.3.  $y = \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4;$

2.4.  $x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$

2.5.  $x = R \cos t; \quad y = R \sin t;$

2.6.  $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t;$

2.7.  $r = a(1 + \cos \varphi);$

2.8.  $r = a\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi .$

3. Найти объем тела, полученного вращением около указанной оси криволинейной трапеции, ограниченной кривыми:

3.1.  $y^2 = 4x, \quad x = 1, \quad Ox;$

3.2.  $y = xe^{-x}, \quad x = 1, \quad y = 0; \quad Ox;$

3.3.  $y = x^2, \quad y^2 = x; \quad Oy;$

3.4.  $y = 2x - x^2, \quad y = 0, \quad Oy;$

3.5.  $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad Ox .$



### Домашнее задание

4. Найти площади криволинейных фигур, ограниченных линиями:

4.1.  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ ;

4.2.  $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ ,  $y = 0$ ;

4.3.  $x = 3t^2$ ,  $y = 3t - t^2$ ;

4.4.  $x = t^2 - 1$ ;  $y = t^3 - t$ ;

4.5.  $r = a \cos 5\varphi$ ;

4.6.  $r = a \sin 2\varphi$ .

Найти длину дуги кривой:

4.7.  $y = \ln(1 - x^2)$ ,  $0 \leq x \leq 1/2$ ;

4.8.  $x = R(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = R(\sin t - t \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ ;

4.9.  $\rho = 1/\varphi$ ;  $3/4 \leq \varphi \leq 4/3$ .

Найти объем тела вращения:

4.10.  $x^2 - y^2 = a^2$ ;  $x = a + h$  ( $h > 0$ ),  $Ox$ ;

4.11.  $y = \arcsin x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $Ox$ ;

4.12.  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin 2t$ ,  $Ox$ .

**Ответы.**

4.1.  $2 - \sqrt{2}$ ; 4.2. 4; 4.3.  $\frac{72\sqrt{3}}{5}$ ; 4.4.  $8/15$ ; 4.5.  $\frac{\pi a^2}{4}$ ;

4.6.  $\frac{\pi a^2}{4}$ ; 4.7.  $\ln 3 - \frac{1}{2}$ ; 4.8.  $\frac{\pi^2 R}{2}$ ; 4.9.  $\ln \frac{3}{2} + \frac{5}{12}$ ;

4.10.  $\frac{\pi h^2}{3}(3a + h)$ ; 4.11.  $\pi(\frac{\pi^2}{4} - 2)$ ; 4.12.  $\frac{8}{15}\pi a^3$ .

## З а н я т и е 8

### Несобственные интегралы

#### Аудиторная работа

1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1.1. \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx;$$

$$1.3. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x};$$

$$1.5. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x}};$$

$$1.7. \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2};$$

$$1.9. \int_0^{\pi/2} \frac{2x+1}{\sin^2 x} dx;$$

$$1.11. \int_0^{2/\pi} \frac{\cos 1/x}{x^2} dx;$$

$$1.2. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x};$$

$$1.4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11};$$

$$1.6. \int_0^{+\infty} x \cos x dx;$$

$$1.8. \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$1.10. \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}};$$

$$1.12. \int_{-2}^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

2. Исследовать на сходимость интегралы:

$$2.1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{5x^2 + 4x + 3};$$

$$2.3. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sin^2 x};$$

$$2.5. \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x};$$

$$2.2. \int_1^{+\infty} \frac{4 + \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$2.4. \int_0^3 \frac{\cos 1/x}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$2.6. \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

### Домашнее задание

3. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$3.1. \int_1^{+\infty} \frac{x \, dx}{x^2 + 1};$$

$$3.2. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx;$$

$$3.3. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \, dx}{(1+x)^2};$$

$$3.4. \int_1^2 \frac{x \, dx}{\sqrt{x-1}};$$

$$3.5. \int_0^1 x \ln x \, dx;$$

$$3.6. \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3};$$

$$3.7. \int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^2} \, dx.$$

**Ответы.**

$$3.1. \text{Расходится}; \quad 3.2. \frac{3\pi^2}{32}; \quad 3.3. \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}; \quad 3.4. \frac{8}{3}; \quad 3.5. -\frac{1}{4};$$

$$3.6. \text{Расходится}; \quad 3.7. -\frac{2}{e}.$$

### З а н я т и е 9

*Частные производные и полный дифференциал функций  
нескольких переменных.*

*Производные и дифференциалы высших порядков*

#### Аудиторная работа

I. Найти частные производные от заданных функций:

$$1.1. z = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x+y};$$

$$1.2. z = \sqrt{x/(y+2xy+x)};$$

1.3.  $z = (x - 1)^{\cos y}$ ;

1.4.  $z = (x + 2y) \cos^2 \frac{x}{y^2}$ ;

1.5.  $u = \frac{xy}{z} \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ ;

1.6.  $u = (x - 2y + 3z)^2 e^{\frac{xy^2}{z^2}}$ .

2. Найти полный дифференциал:

2.1.  $z = \frac{x + y}{x - y}$ ;

2.2.  $z = \arcsin(x^2 y)$ ;

2.3.  $z = \sqrt{\frac{y - x^2}{x - y^2}}$ ;

2.4.  $z = x y^2$ ;

2.5.  $u = \ln\left(\frac{x + y}{z} + 1\right)$ ;

2.6.  $u = (xy)^z$ .

3. Найти частные производные второго порядка:

3.1.  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ;

3.2.  $z = \frac{1}{xy}$ ;

3.3.  $z = e^{xy}$ ;

3.4.  $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ ;

3.5.  $z = \frac{\cos xy}{y}$ ;

3.6.  $z = \frac{1}{2x - 3y}$ .

4. Найти дифференциалы второго порядка:

4.1.  $z = 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 3$ ;

4.2.  $z = \frac{x}{y}$ ;

4.3.  $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ ;

4.4.  $z = e^{x \sin y}$ ;

4.5.  $z = \ln(x^2 - y^2)$ ;

4.6.  $z = \frac{1}{(x - y)^2}$ .

**Домашнее задание**

5.1.  $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ . Найти  $dz$ .

5.2.  $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

5.3.  $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ . Найти  $dz$ .

5.4.  $u = \sqrt{x^2 + 2y^2 + z^2}$ . Найти  $du$ .

5.5.  $z = y^{\ln x}$ . Найти  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

5.6.  $z = \sin(xy)$ . Найти  $d^2 z$ .

**Ответы .**

5.1.  $dz = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} ((x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3)dx + (y^4 + 3x^2 y^2 - 2x^3 y)dy)$ ;

5.2.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ;

5.3.  $dz = \frac{2(dx - \frac{x}{y} dy)}{y \sin \frac{2x}{y}}$ ;      5.4.  $du = \frac{xdx + 2ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + z^2}}$ ;

5.5.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\ln y (\ln y + 1)}{x^2} e^{\ln x \ln y}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\ln x \ln y + 1}{xy} e^{\ln x \ln y}$ ;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\ln x (\ln x - 1)}{y^2} e^{\ln x \ln y}$ ;

5.6.  $d^2 z = -y^2 \sin xy dx^2 + 2(\cos xy - xy \sin xy) dx dy - x^2 \sin xy dy^2$ .

## З а н я т и е 10

### Производные сложной функции нескольких переменных. Производная функции, заданной неявно

#### Аудиторная работа

1. Найти указанные производные:

1.1.  $z = \arcsin \frac{x}{y}, x = u^2 + v^2, y = uv.$  Найти  $\frac{\partial z}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial v}.$

1.2.  $z = e^{x-2y}, x = \sin 2t, y = \cos t.$  Найти  $\frac{dz}{dt}.$

1.3.  $z = \sqrt{2x^2 - xy + y^2}, x = 2t^2, y = 3t^3.$  Найти  $\frac{dz}{dt}.$

1.4.  $z = tx^2 - y^2x + 1, x = \arctg t, y = \ln(1 + t^2).$  Найти  $\frac{dz}{dt}.$

1.5.  $z = x^2 \ln y, x = \sqrt{t^2 + 1}, y = \arcsin t.$  Найти  $\frac{dz}{dt}.$

1.6.  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2); x = t^3, y = t^2, z = e^t.$  Найти  $\frac{du}{dt}.$

1.7.  $z = x^{\cos y}; x = \frac{u}{v}; y = uv.$  Найти  $\frac{\partial z}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial v}.$

2. Найти частные производные от неявно заданных функций:

2.1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$  Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}.$

2.2.  $\frac{xy}{z} + zxy + \frac{z}{y^2} = 1.$  Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}.$

2.3.  $z + e^{xyz} = x \cos z.$  Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}.$

2.4.  $\ln(x + xyz + y) = e^{z^2}.$  Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}.$

2.5.  $z \operatorname{arctg} xy + \frac{z^2}{1+x^2y^2} = 1$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

2.6.  $y \sin(x+2z) + z \cos(x+2y) = e^z$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

2.7.  $z^{xy} + \cos z = 0$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

### Домашнее задание

3. Найти указанные производные:

3.1.  $z = u^2v^2$ ,  $u = x - y$ ;  $v = x + y$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

3.2.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x = \sin 2t$ ,  $y = \ln t$ . Найти  $\frac{dz}{dt}$ .

3.3.  $z = x \sin y + y \cos x$ ;  $x = t^2$ ,  $y = t^3$ . Найти  $\frac{dz}{dt}$ .

3.4.  $x^2y + y^2z + z^2x = 1$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

3.5.  $ze^{xy} + zxy^2 = a^2$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

3.6.  $xy \ln z + xz \ln y + yz \ln x = 1$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

**Ответы.**

3.1.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2uv^2 + 2vu^2$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = -2uv^2 + 2vu^2$ ;

3.2.  $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (2x \cos 2t + y/t)$ ;

3.3.  $\frac{dz}{dt} = (\sin y - y \sin x)2t + 3(x \cos y + \cos x)t^2$ ;

$$3.4. \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2 + 2yz}{y^2 + 2zx}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy + z^2}{y^2 + 2zx};$$

$$3.5. \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yze^{-xy} + zy^2}{e^{-xy} + xy^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xze^{-xy} + 2xyz}{e^{-xy} + xy^2};$$

$$3.6. \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y \ln z + z \ln y + yz/x}{x \ln y + y \ln x + xy/z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x \ln z + z \ln x + xz/y}{x \ln y + y \ln x + xy/z}.$$

## З а н я т и е 11

*Касательная плоскость и нормаль к поверхности.  
Производная по направлению, градиент*

### Аудиторная работа

1. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке  $M(x_0, y_0, z_0)$ :

1.1.  $z = \arctg \frac{x+1}{y}; \quad M(0; 1; \frac{\pi}{4}).$

1.2.  $2x^2 + 3y^2 + 2xz^2 - zx = 15; \quad M(1; 2; 1).$

1.3.  $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy; \quad M(3; 4; -7).$

1.4.  $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0; \quad M(1; 2; -1).$

1.5. Найти производную функции  $z = x^3 + 3x^2y + xy^2 + 3$  в точке  $M(1; 2)$  в направлении, идущем от этой точки к точке  $N(4; 5)$ .

1.6. Найти производную функции  $z = xy\sqrt{x^2 + y^2}$  в точке  $M(3; 4)$  в направлении, составляющем с осью  $Ox$  угол  $60^\circ$ .

1.7. Найти производную  $z = \arctg \frac{y}{x}$  в точке  $M(1/2; \sqrt{3}/2)$ , принадлежащей окружности  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ , по направлению этой окружности.



1.8. Доказать, что производная функции  $z = \frac{y^2}{x}$  в любой точке эллипса  $2x^2 + y^2 = 1$  по направлению нормали к эллипсу равна нулю.

1.9. Найти градиент функции в указанной точке:

а)  $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ ;  $M(2; 1)$ ;

б)  $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 5$ ;  $M(1; 0; 2)$ .

1.10. Каково направление наибольшего изменения функции  $u = x \sin z - y \cos z$  в начале координат?

1.11. Даны две функции:  $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$  и  $z = x^2 + y^2 - 2xy$ . Найти угол между градиентами этих функций в точке  $M(1; 1)$ .

### Домашнее задание

2.1. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке  $M(x_0, y_0, z_0)$ :

а)  $z = 4 + x^2 + 2y^2$ ;  $M(1; 0; 5)$ ;

б)  $z = x \ln y + y \ln x$ ;  $M(e; e; 2e)$ ;

в)  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ ;  $M(1; 1; 1)$ .

2.2. Дана функция  $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$ . Найти угол между градиентами этой функции в точках  $M_1(1; 1)$  и  $M_2(3; 4)$ .

2.3. Найти точки, в которых модуль градиента функции  $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$  равен 2.

2.4. Найти производную функции  $z = \ln(x + y)$  в точке  $(1; 2)$ , принадлежащей параболе  $y^2 = 4x$ , по направлению этой параболы.

Ответы,

$$2.1. \text{ а) } z - 2x - 3 = 0; \quad \begin{cases} 2z + x - 9 = 0; \\ y = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } z - 2x - 2y + 2e = 0; \quad \frac{x - e}{2} = \frac{y - e}{2} = \frac{z - 2e}{-1};$$

$$\text{в) } x + 2y + 3z - 6 = 0; \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3};$$

$$2.2. \cos \alpha \approx 0,99; \alpha \approx 8^\circ;$$

$$2.3. \text{ Точки на окружности } x^2 + y^2 = 2/3; \quad 2.4. \sqrt{2}/3.$$

### З а н я т и е 12

*Экстремум функции нескольких переменных.  
Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких  
переменных в замкнутой области. Условный экстремум*

#### Аудиторная работа

1. Исследовать на экстремум следующие функции:

$$1.1. z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y;$$

$$1.2. z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y;$$

$$1.3. z = x^3 + y^2 - 3x + 2y;$$

$$1.4. z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = f(x, y)$  в замкнутой области, ограниченной линиями:

$$2.1. z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad x + y = 3;$$

$$2.2. z = x^2 + 2xy - 4x + 8y; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad x = 1; \quad y = 2;$$

$$2.3. z = e^{-x^2 - y^2} (2x^2 + 3y^2); \quad x^2 + y^2 = 4;$$

$$2.4. z = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 4.$$

3. Исследовать функции на экстремум при заданном условии:

3.1.  $z = x + 2y$  при условии  $x^2 + y^2 = 5$ ;

3.2.  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  при условии  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ ;

3.3.  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  при условии  $x + y = 2$ ;

3.4.  $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$  при условии  $x^2 + y^2 = 1$ .

### Домашнее задание

4.1. Исследовать на экстремум:

а)  $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ ;

б)  $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ .

4.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области:

а)  $z = x^2y(4 - x - y)$ ;  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 6$ ;

б)  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ ;  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2$ .

4.3. Исследовать функцию на условный экстремум:

а)  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$  при  $x + y + 3 = 0$ ;

б)  $z = xy^2$  при  $x + 2y = 1$ .

**Ответы .**

4.1. а)  $z_{\min} = z(0; 0) = 0$ ; б)  $z_{\min} = z(0; 3) = -9$ ;

4.2. а)  $z_{\text{наим}} = z(4; 2) = -64$ ;  $z_{\text{наиб}} = z(2; 1) = 4$ ;

б)  $z_{\text{наим}} = z(1; 0) = -3$ ;  $z_{\text{наиб}} = z(1; 2) = 17$ ;

4.3. а)  $z_{\min} = z(-3/2; -3/2) = -19/4$ ;

б)  $z_{\min} = z(1; 1) = 0$ ,  $z_{\max} = z(1/3; 1/3) = 1/27$ .

## Занятие 13

### *Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными и однородных дифференциальных уравнений первого порядка*

#### Аудиторная работа

1. Решить уравнения:

- 1.1.  $(1-x)dy - ydx = 0$ ;                                      1.2.  $xyy' = 1 - x^2$ ;
- 1.3.  $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$ ;                      1.4.  $y' = e^{x+y}$ ;
- 1.5.  $x dy - y dx = 0, y(1) = 0$ ;                              1.6.  $y' = y \cos x, y(0) = 1$ ;
- 1.7.  $y' \sin x = y \ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ ;                      1.8.  $y' = (x^2 - x)(1 + y^2)$ ;
- 1.9.  $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ ;    1.10.  $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ ;
- 1.11.  $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0, y(1) = 0$ ;
- 1.12.  $xy' = x + \frac{1}{2}y, y(0) = 0$ ;
- 1.13.  $(y - x)dx - (y + x)dy = 0$ ;
- 1.14.  $xy' = y(\ln y - \ln x)$ ;
- 1.15.  $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, y(1) = -1$ .

#### Домашнее задание

2. Решить уравнения:

- 2.1.  $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$ ;                                      2.2.  $ye^{2x}dx - (1 + e^{2x})dy = 0$ ;
- 2.3.  $y' = \cos(x + y)$ ;

$$2.4. (xy^2 + x)dy + (x^2y - y)dx = 0, y(1) = 1;$$

$$2.5. y' \operatorname{tg} x = y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \quad 2.6. y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y};$$

$$2.7. (\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0, y(1) = 1;$$

$$2.8. y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}, y(1) = 0.$$

**Ответы.**

$$2.1. \operatorname{arctg} y - \arcsin x = C;$$

$$2.2. y = C\sqrt{1 + e^{2x}};$$

$$2.3. \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} - x = C; \quad 2.4. \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = 1;$$

$$2.5. y = \sin x;$$

$$2.6. y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + C};$$

$$2.7. \ln|y| + 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 2; \quad 2.8. y = x \ln(1 + \ln x).$$

## З а н я т и е 14

*Интегрирование линейных дифференциальных уравнений и уравнений Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах*

### Аудиторная работа

1. Решить дифференциальные уравнения:

$$1.1. y' + 2xy = xe^{-x^2};$$

$$1.2. y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1;$$

$$1.3. y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 0;$$

$$1.4. y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1;$$

$$1.5. y' = 2y + e^x - x, y(0) = \frac{1}{4}; \quad 1.6. y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1;$$

- 1.7.  $y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}$ ;      1.8.  $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \sqrt{y}$ ;
- 1.9.  $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$ ;      1.10.  $y' + 2xy = 2x^3 y^3$ ;
- 1.11.  $y' - y = xy^2$ ,  $y(0) = 0$ ;      1.12.  $xy' - y = y^2$ ,  $y(0) = 0$ ;
- 1.13.  $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ ;
- 1.14.  $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ ;
- 1.15.  $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$ ;
- 1.16.  $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$ ;
- 1.17.  $\frac{xdy}{x^2 + y^2} = \left( \frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx$ ;
- 1.18.  $(x^2 + y^2 + 1)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0$ ;  $y(0) = 0$ .

### Домашнее задание

2. Решить дифференциальные уравнения:

- 2.1.  $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$ ;      2.2.  $y' - \frac{2y}{x} = x^3$ ;
- 2.3.  $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$ ,  $y(e) = \frac{1}{2}e^2$ ;      2.4.  $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$ ;
- 2.5.  $y' + y = \frac{1}{2}e^x \sqrt{y}$ ;  $y(0) = \frac{9}{4}$ ;      2.6.  $y' - \frac{y}{\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x}} y^2$ ;
- 2.7.  $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$ ;
- 2.8.  $e^{-y} dx - (xe^{-y} + 2y)dy = 0$ ,  $y(5) = 0$ .

**Ответы.**

- 2.1.  $(1 + x^2)(x + C) = y$ ; 2.2.  $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$ ; 2.3.  $y = \frac{1}{2}x^2 \ln x$ ;

$$2.4. y^{-4} = (e^x + C)x^3; \quad 2.5. y = e^{-x} \left( \frac{1}{2} e^x + 1 \right)^2;$$

$$2.6. y = e^{2\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2} e^{\sqrt{2x}} \sqrt{x} - \frac{1}{8} e^{2\sqrt{x}} + C \right); \quad 2.7. ye^x + \frac{1}{2} y^2 = C;$$

$$2.8. xe^{-y} + y^2 = 5.$$

### З а н я т и е 1 5

*Дифференциальные уравнения высших порядков,  
допускающие понижение порядка*

#### Аудиторная работа

1. Решить дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка:

|   |                                    |
|---|------------------------------------|
| 1.1. $y'' = \ln x + x;$                   | 1.2. $y''' = x\sqrt{x};$           |
| 1.3. $y'' = \arctg x;$                    | 1.4. $xy'' = y';$                  |
| 1.5. $2xy'y'' = (y')^2 + 1;$              | 1.6. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x};$ |
| 1.7. $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2;$ | 1.8. $yy'' = (y')^2;$              |
| 1.9. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2;$            | 1.10. $yy'' - yy' \ln y = (y')^2;$ |

#### Домашнее задание

2. Проинтегрировать уравнения:

|  |                            |
|--|----------------------------|
| 2.1. $y''' = xe^{-x};$                   | 2.2. $y''' = \sqrt{x-2};$  |
| 2.3. $xy'' + \operatorname{ctg} y' = 0;$ | 2.4. $xy'' + y' = -x + 2;$ |
| 2.5. $y^3 y'' = 1;$                      | 2.6. $yy'' = y'(y' + 1).$  |

**Ответы.**

2.1.  $y = -(x+3)e^{-x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$

$$2.2. y = \frac{8}{125}(x-2)^{7/2} + C_1x^2 + C_2x + C_3;$$

$$2.3. y = x \arccos C_1x + \frac{1}{C_1} \sqrt{1 - C_1^2x^2} + C_2;$$

$$2.4. y = 2x - \frac{x^2}{4} + C_1 \ln x + C_2; \quad 2.5. C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2;$$

$$2.6. C_1y - 1 = C_2e^{C_1x}, y = C_1 - x.$$

### З а н я т и е 1 6

*Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа*

#### Аудиторная работа

1. Решить дифференциальные уравнения:

$$1.1. y'' + 4y' - 5y = 0;$$

$$1.2. y'' + 4y' = 0;$$

$$1.3. 4y'' - 4y' + 1 = 0;$$

$$1.4. y'' - 6y' + 9y = 0;$$

$$1.5. y^{(5)} + 3y^{(4)} + 3y''' + y'' = 0;$$

$$1.6. y^{(5)} - y''' = 0;$$

$$1.7. y^{IV} + 5y'' + 4y = 0;$$

$$1.8. y^{IV} + 2y^2 + y = 0;$$

$$1.9. y'' + 6y' + 9 = 0, \quad y'(0) = y(0) = 1;$$

$$1.10. y' - 2y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

2. Решить дифференциальные уравнения методом Лагранжа:

$$2.1. y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1};$$

$$2.2. y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x};$$

$$2.3. y'' - y' = \frac{2-x}{x^2} e^x;$$

$$2.4. y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x};$$



$$2.5. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

### Домашнее задание

3. Решить уравнения:

$$3.1. y'' + 3y' - 4y = 0;$$

$$3.2. y'' - 2y' + y = 0;$$

$$3.3. y'' + 4y' + 5y = 0;$$

$$3.4. y^{IV} - 3y'' - 4y = 0;$$

$$3.5. y'' + 4y' = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$3.6. y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

**Ответы.**

$$3.1. y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}; \quad 3.2. y = e^x (C_1 + C_2 x);$$

$$3.3. y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x);$$

$$3.4. y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x;$$

$$3.5. y = (C_1 - \ln |\sin x|) \cos 2x + (C_2 - x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x) \sin 2x;$$

$$3.6. y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + x e^{-x} \ln |x|.$$

### З а н я т и е 17

*Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида*

#### Аудиторная работа

1. Решить дифференциальные уравнения:

$$1.1. y'' + 4y = 2x^2 + 3x + 1; \quad 1.2. y'' + 2y' + y = 8e^{-x};$$

$$1.3. y'' - 4y' + 3y = (2x + 3)e^{2x}; \quad 1.4. y'' + 3y' - 4y = 5 \sin x;$$

- 1.5.  $y'' + 6y' + 10y = x^2 + 4e^x$ ; 1.6.  $y'' + y = 2 + \cos 2x$ ;  
 1.7.  $y'' + 3y' = 1 + \sin 3x + 4e^{2x}$ ; 1.8.  $y'' - 4y = 2 \sin x + \cos 2x$ ;  
 1.9.  $y'' - 4y' = 3x + 1$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ;  
 1.10.  $y'' + 9y' = 3 \cos 3x$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

### Домашнее задание

2. Решить дифференциальные уравнения:

- 2.1.  $y''' + y' = 2x - 1$ ;  
 2.2.  $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$ ;  
 2.3.  $y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x$ ;  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 0$ ;  
 2.4.  $y'' + 16y = 32e^{4x}$ ;  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$ ;  
 2.5.  $y'' - 4y = 8^{2x}$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -8$ .

**Ответы.**

- 2.1.  $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 3x$ ;  
 2.2.  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (4 - 2x)e^{-x}$ ;  
 2.3.  $y = -2e^{-x} - 4xe^{-x} + 3 \sin 2x$ ;  
 2.4.  $y = \cos 4x - \sin 4x + e^{4x}$ ; 2.5.  $y = 3e^{-2x} - 2e^{2x} + 2xe^{2x}$ .

### З а н я т и е 1 8

*Решение систем дифференциальных уравнений.*

*Метод исключения*

**Аудиторная работа**

1. Решить системы дифференциальных уравнений:

- 1.1. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{t}; \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y(x + 2y - 1)}{t(x - 1)}; \end{cases}$$
- 1.2. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t; \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}; \end{cases}$$

$$1.3. \begin{cases} xy' = y; \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} x' = y, & x(0) = 0; \\ y' = -x + 1, & y(0) = 1,5; \end{cases}$$

$$1.5. \begin{cases} x' = x + y; \\ y' = x - y; \end{cases}$$

$$1.6. \begin{cases} x' = 2x + y + \cos t; \\ y' = -x + 2 \sin t; \end{cases}$$

$$1.7. \begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 3x + 4y; \end{cases}$$

$$1.8. \begin{cases} x' = \frac{1}{y}; \\ y' = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

### Домашнее задание

2. Решить системы дифференциальных уравнений:

$$2.1. \begin{cases} y' = \frac{z-1}{z}; \\ z' = \frac{1}{y-x}; \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} x' = \frac{y^2}{x}; \\ y' = \frac{x^2}{y}; \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, & x(0) = 1; \\ \dot{y} = 4x + 7y, & y(0) = 0; \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} \dot{x} = x - 4y; \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$$

**Ответы.**

$$2.1. y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}, z = C_2 e^{C_1 x};$$

$$2.2. x^2 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, y^2 = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t};$$

$$2.3. x = e^{5t} (\cos 2t - \sin 2t), y = 2e^{5t} \sin 2t;$$

$$2.4. x = (2C_1 t + 2C_2 + 1)e^{-t}, y = (C_1 t + C_2)e^{-t}.$$

### Типовой расчет № 3

#### НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

В заданиях:

№1–№6 найти неопределенные интегралы;

№7 – вычислить определенный интеграл;

№8 – вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

### Вариант 1

1.  $\int \frac{x dx}{2x+1}$ ;      2.  $\int (2x-1) \sin^2 x dx$ ;      3.  $\int \frac{x dx}{2+\sqrt{x+4}}$ ;

4.  $\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx$ ;    5.  $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{x^3 - 8} dx$ ;    6.  $\int \frac{\arctg 2x}{1+4x^2} dx$ ;

7.  $\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x+1}}$ ;      8.  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{4+x^2}$ .

9. Вычислить площадь трапеции, ограниченной линиями  $\rho = a \cos \varphi$ ,  $\rho = 2a \cos \varphi$ .

10. Найти длину полукубической параболы  $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^2$ , заключенной внутри параболы  $y^2 = \frac{x}{3}$ .

### Вариант 2

1.  $\int x^2 e^{x^3} dx$ ;      2.  $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$ ;    3.  $\int \frac{\sin^2 x + x \sin 2x}{x \sin^2 x} dx$ ;

4.  $\int \sin^4 \frac{3}{2} x dx$ ;      5.  $\int \frac{2x+3}{x(x^2+2x-3)} dx$ ;    6.  $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx$ ;

7.  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4+\ln x}}$ ;    8.  $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3}$ .

9. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$ .

10. Найти длину кардиоиды  $\rho = 2(1 - \sin \varphi)$ .

### Вариант 3

- $\int \frac{\sin x dx}{4 + \cos^2 x}$ ;
- $\int e^x \cos 2x dx$ ;
- $\int \sin^2 x \cos x dx$ ;
- $\int \frac{dx}{\cos x + 3 \sin x}$ ;
- $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^3 + 4x^2}$ ;
- $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x + 1}}$ ;
- $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{y}}{y^2} dy$ ;
- $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ .

9. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией  $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$ ,  $y = 0$ , вокруг оси  $Ox$ .

### Вариант 4

- $\int \frac{x^2 dx}{9 - x^3}$ ;
- $\int \arctg 2x dx$ ;
- $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ ;
- $\int \frac{2\sqrt{\ln x} dx}{x}$ ;
- $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$ ;
- $\int \frac{x dx}{\sqrt{x + 4}}$ ;
- $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ ;
- $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x}$ .

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy = 6$ ,  $x + y = 7$ .

10. Найти периметр фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ .

### Вариант 5

- $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{1 - \operatorname{ctg} x}}$
- $\int \ln 4x dx$ ;
- $\int \frac{dx}{\arccos x \sqrt{1 - x^2}}$ ;

$$4. \int \frac{6 \sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx; \quad 5. \int \frac{x^4 dx}{x^3 + 1}; \quad 6. \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2 + 2}} dx;$$

$$7. \int_1^e \frac{\ln x + 4x^2}{x} dx; \quad 8. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2}.$$

9. Найти длину дуги кривой  $y = e^x - 1$  от точки  $(0; 0)$  до точки  $(1; e - 1)$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ , вокруг оси  $Oy$ .

### Вариант 6

$$1. \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}; \quad 2. \int x \arccos 2x dx; \quad 3. \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx;$$

$$4. \int x \sin(1 - 3x^2) dx; \quad 5. \int \frac{x^5 + 2x - 1}{x^4 - 1} dx; \quad 6. \int \frac{\sqrt{2x+1} dx}{4 + \sqrt{2x+1}};$$

$$7. \int_0^{\pi/3} \sin^2 x dx; \quad 8. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 + \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $xy = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 3$ .

### Вариант № 7

$$1. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx; \quad 2. \int \frac{2x-1}{\cos^2 x} dx; \quad 3. \int x^2 \sqrt{1-3x^3} dx;$$

$$4. \int \frac{dx}{\cos x - 3 \sin x}; \quad 5. \int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx; \quad 6. \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}} dx;$$

$$7. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx; \quad 8. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 2 \cos 3\varphi$ .

10. Вычислить длину кривой  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ .

### Вариант 8

$$1. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}; \quad 2. \int \ln(1+x^2) dx; \quad 3. \int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$4. \int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}; \quad 5. \int \frac{x^3+2x^2}{(x-1)(x^2+1)} dx;$$

$$6. \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}(\sqrt[3]{x+1}+1)} dx; \quad 7. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx; \quad 8. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

9. Вычислить длину кривой  $y = \ln x$  от точки  $(1; 0)$  до точки  $(e; 1)$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линией  $x = \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

### Вариант 9

$$1. \int \frac{(1+\sqrt{x})^5 dx}{\sqrt{x}}; \quad 2. \int (2x-1)e^{4x} dx; \quad 3. \int \frac{x^6 dx}{10+x^7};$$

$$4. \int \sin^4 2x \cos^2 2x dx; \quad 5. \int \frac{4-3x}{x^3+8x^2} dx; \quad 6. \int \frac{dx}{x\sqrt{x+2}};$$

$$7. \int_4^9 \frac{y+1}{\sqrt{y}-1} dy; \quad 8. \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 2a \sin \varphi$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = x$ ,  $x = 4$ .

### Вариант 10

1.  $\int x^2 \sin x^3 dx$ ;    2.  $\int x^2 \sin 3x dx$ ;    3.  $\int (x^2 + 1)e^{x^3+3x} dx$ ;  
4.  $\int \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\cos^5 x}}$ ;    5.  $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 + 3x} dx$ ;    6.  $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} dx$ ;  
7.  $\int_0^{\ln 4} \frac{dx}{e^x + 1}$ ;    8.  $\int_0^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

9. Найти длину кривой  $\rho = 4 \sin \varphi$ .

10. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $x = 4 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ .

### Вариант 11

1.  $\int (1 + \operatorname{ctg}^3 x) \frac{dx}{\sin^2 x}$ ;    2.  $\int (x^2 + 1) \ln x dx$ ;    3.  $\int \sqrt{9-x^2} dx$ ;  
4.  $\int \frac{dx}{2 \cos x + 3}$ ;    5.  $\int \frac{x^2 + 4}{x^3 + x} dx$ ;    6.  $\int \frac{\sqrt{2x-1} dx}{\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[6]{2x-1}}$ ;  
7.  $\int_0^{\pi/2} \cos x 2^{\sin x} dx$ ;    8.  $\int_1^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{16-x^4}}$ .

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $x^2 = 16x - 4y$ ,  $x = 4 + y$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $x^2 - y^2 = a^2$ ,  $x = 2a$ .

### Вариант 12

1.  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ ;    2.  $\int \frac{\ln x}{x^4} dx$ ;    3.  $\int x^3 e^{4x^4} dx$ ;  
4.  $\int \operatorname{tg}^4 3x dx$ ;    5.  $\int \frac{2x+9}{x^4 - x^2 - 12} dx$ ;    6.  $\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ ;



$$7. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x} dx; \quad 8. \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^3 + 1)^4}.$$

9. Найти длину кривой  $y = \ln \cos x$  от точки  $(0; 0)$  до точки  $(\frac{\pi}{4}; \ln \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

10. Найти площадь фигуры, ограниченной одним витком  $\rho = 2\varphi$ .

### Вариант 13

$$1. \int \operatorname{tg} 3x dx; \quad 2. \int (4x - 1) \cos^2 2x dx; \quad 3. \int \frac{\sqrt{1 - \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$4. \int \frac{dx}{5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}; \quad 5. \int \frac{3x + 4}{x^3 + 5x^2 - 6x} dx; \quad 6. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 - 4\sqrt{x}};$$

$$7. \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + x^2} dx; \quad 8. \int_1^2 \frac{x dx}{(x - 1)^2}.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = x + 5$ ,  $y^2 = 4 - x$ .

10. Найти длину кривой  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ).

### Вариант 14

$$1. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}; \quad 2. \int \ln^2 2x dx; \quad 3. \int e^x \operatorname{cose}^x dx;$$

$$4. \int \operatorname{ctg}^3 3x dx; \quad 5. \int \frac{3x + 8}{x^3 - x} dx; \quad 6. \int \frac{\sqrt[6]{x + 1}}{\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt{x + 1}} dx;$$

$$7. \int_1^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}; \quad 8. \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 4 \sin 2\varphi$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 9 - x$ ,  $x = 0$ .

### Вариант 15

1.  $\int \cos x \sqrt{1 - \sin x} dx$ ;      2.  $\int \frac{x dx}{\sin^2 2x}$ ;      3.  $\int x 4^{x^2} dx$ ;

4.  $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$ ;      5.  $\int \frac{2x - 1}{x^4 + 5x^2 + 6} dx$ ;      6.  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$ ;

7.  $\int_0^{\pi/3} \sin x \cos^2 x dx$ ;      8.  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x^3} dx$ .

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{1}{1 + x^2}$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$ .

10. Найти длину кривой  $x = 2(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = 2(\sin t - t \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

### Вариант 16

1.  $\int \frac{\sqrt{1 - 2 \ln x}}{x} dx$ ;      2.  $\int e^{2x} \sin^2 x dx$ ;      3.  $\int \frac{2x + 3}{x^2 + x + 2} dx$ ;

4.  $\int \sin^4 2x \cos^4 2x dx$ ;      5.  $\int \frac{3x^2 + 4x - 1}{x^4 + x^2} dx$ ;      6.  $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} dx$ ;

7.  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx$ ;      8.  $\int_{+1}^4 \frac{x dx}{x^2 - 1}$ .

9. Найти длину кривой  $y^2 = (x - 1)^3$  от точки  $(1; 0)$  до точки  $(6; \sqrt{125})$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - x$ ,  $y = 0$ .

### Вариант 17

1.  $\int 2^x \sqrt{1+2^x} dx$ ;    2.  $\int \frac{3x+5}{\cos^2 3x} dx$ ;    3.  $\int \frac{4x-3}{\sqrt{2-2x-x^2}} dx$ ;

4.  $\int \frac{\sin 2x dx}{4\sin^2 x + \cos^2 x}$ ;    5.  $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 - 8x^2 - 9} dx$ ;    6.  $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} - 1} dx$ ;

7.  $\int_0^{\pi/6} \sin^3 2x dx$ ;    8.  $\int \frac{x^2 dx}{1-x^3-1}$ .

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 9x$ ,  $y = 3x$ .

10. Вычислить длину кривой  $x = 5\cos^2 t$ ,  $y = 5\sin^2 t$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ).

### Вариант 18

1.  $\int \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x+3}} dx$ ;    2.  $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$ ;    3.  $\int \sin 2x \cos^2 x dx$ ;

4.  $\int \operatorname{tg}^5 2x dx$ ;    5.  $\int \frac{x^2+4x-3}{x^4+4x^2} dx$ ;    6.  $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)} dx$ ;

7.  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+5\cos x}$ ;    8.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$ .

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy = 4$ ,  $y = 1$ ,  $y = 4$ ,  $x = 0$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x$ ,  $y = x$ ,  $x = 3$ .

### Вариант 19

1.  $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx$ ;    2.  $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ ;    3.  $\int \frac{x^2 dx}{2x^2+1}$ ;

4.  $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x}$ ;    5.  $\int \frac{x^4+2x-1}{8-x^3} dx$ ;    6.  $\int \frac{x+2}{1+\sqrt{x+1}} dx$ ;

$$7. \int_0^{\pi/4} \sin^5 x dx;$$

$$8. \int_1^{+\infty} e^{-x^2} x dx.$$

9. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = \sin x$ ,  $y = 0$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ).

10. Найти длину кривой  $x = 8 \sin t + 6 \cos t$ ,  $y = 6 \sin t - 8 \cos t$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ).

### Вариант 20

$$1. \int 3^{\operatorname{tg} 3x} \frac{dx}{\cos^2 3x};$$

$$2. \int x^2 e^{3x} dx;$$

$$3. \int \frac{4x+1}{x+2} dx;$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x};$$

$$5. \int \frac{x^3 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx;$$

$$6. \int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}} dx;$$

$$7. \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin 2x}{4 + \cos^2 x} dx;$$

$$8. \int_0^{\pi/4} 4^{\operatorname{ctg} x} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 3 \cos \varphi$ .

10. Найти длину кривой  $y = e^{-x}$  от точки  $(0; 1)$  до точки  $(5; e^{-5})$ .

### Вариант 21

$$1. \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}} dx;$$

$$2. \int \arccos 2x dx;$$

$$3. \int 2^x \operatorname{tg} 2^x dx;$$

$$4. \int \frac{2 - \sin x + 3 \cos x}{1 + \cos x} dx;$$

$$5. \int \frac{4x^2 + 38}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx;$$

$$6. \int \frac{\sqrt{x} dx}{3x + \sqrt[3]{x^2}};$$

$$7. \int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\cos^2 3x};$$

$$8. \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 4 \cos 3\varphi$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$ ,  $x = 0$  ( $x > 0$ ).

### Вариант 22

$$1. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x} dx; \quad 2. \int (2x + 3)2^x dx; \quad 3. \int \frac{4x - 1}{x^2 + 2x + 2} dx;$$

$$4. \int \operatorname{ctg}^6 3x dx; \quad 5. \int \frac{6x dx}{x^3 - 1}; \quad 6. \int \frac{\sqrt{x + 3} dx}{1 + \sqrt[3]{x + 3}};$$

$$7. \int_{\pi/12}^{\pi/9} \operatorname{ctg} 3x dx; \quad 8. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $x = 4 \cos t$ ,  $y = 9 \sin t$ .

10. Найти длину кривой  $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$ .

### Вариант 23

$$1. \int \sin 2x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx; \quad 2. \int \log_2 (3x - 1) dx;$$

$$3. \int \frac{x - 1}{\sqrt{13 - 6x + x^2}} dx; \quad 4. \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 3};$$

$$5. \int \frac{3x - 1}{x^4 + 13x^2 + 36} dx; \quad 6. \int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx;$$

$$7. \int_{\pi/16}^{\pi/12} \cos^2 4x dx; \quad 8. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt[4]{(x^2 - 1)^3}}.$$

9. Найти длину кривой  $y = \ln \sin x$  ( $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ).

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $xy = 4$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$ .

### Вариант 24

$$1. \int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx; \quad 2. \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx; \quad 3. \int \frac{3x-4}{x^2+6x+13} dx;$$

$$4. \int \frac{dx}{4\sin^2 x + 8\sin x \cos x}; \quad 5. \int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}; \quad 6. \int \frac{\sqrt{x} dx}{2 + \sqrt[4]{x}};$$

$$7. \int_1^{e/2} \ln 2x dx; \quad 8. \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy=9$ ,  $y=x$ ,  $x=5$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2=x$ ,  $x=4$ .

### Вариант 25

$$1. \int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx; \quad 2. \int (x^2 - 2x + 1)e^{3x} dx; \quad 3. \int \frac{8x-5}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx;$$

$$4. \int \operatorname{ctg}^5 4x dx; \quad 5. \int \frac{x^3 + 2x + 3}{x^4 - 16} dx; \quad 6. \int \frac{\sqrt{x} dx}{4x + \sqrt[3]{x^2}};$$

$$7. \int_1^{\sqrt{3}} x \sqrt{4-x^2} dx; \quad 8. \int_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=x^2$ ,  $y=4-3x^2$ .

10. Найти длину кривой  $\rho = 5(1 + \cos \varphi)$ .

## Типовой расчет № 4

### ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В заданиях:

№1–№8, №10, №11 – найти общее решение дифференциальных уравнений. Если даны начальные условия, то решить задачу Коши;

№9 – решить методом Лагранжа;

№12 – решить систему дифференциальных уравнений.

#### Вариант 1

1.  $y' \sin x = y \ln y$ ;

2.  $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$ ;

3.  $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$ ;

4.  $y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$ ;

5.  $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dx = 0$ ;

6.  $2yy'' = 3(y')^2 + 4y^2$ ;

7.  $y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right)$ ,  $\begin{cases} y(1) = 1/2, \\ y'(1) = 1; \end{cases}$

8.  $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$ ;

9.  $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$ ;

10.  $y'' - 2y' = (2x + 3)e^{2x}$ ;

11.  $y'' + 2y' + 2y = 1 + 4 \sin x$ ;

12.  $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

#### Вариант 2

1.  $y' = (2y + 1) \operatorname{tg} x$ ;

2.  $xy' = y(\ln y - \ln x)$ ;

3.  $x^2 y' + xy + 1 = 0$ ;

4.  $2xy' + 2y = xy^2$ ;

5.  $(5x + e^{x/y}) dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{x/y} dy = 0$ ;

6.  $e^y (y'' + (y')^2) = 2$ ;

11.  $y'' - 4y' = 2x + 1 + 4e^{2x}$ ;

12. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - 36t, \\ \dot{y} = y - 2x - 2e^t. \end{cases}$$

**Вариант 5**

1.  $3y^{2-x^2} = \frac{yy'}{x}$ ;

2.  $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ ;

3.  $y' \operatorname{ctg} x - y = 2 \cos^2 x \operatorname{ctg} x$ ;

4.  $xy' + y = y^2 \ln x$ ;

5.  $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ ;

6.  $y''y + (y')^2 = y'$ ;

7.  $x(y'' - x) = y'$ ,  $y(1) = y'(1) = 1$ ;

8.  $y^{IV} - y''' = 0$ ;

9.  $y'' + y = \operatorname{tg} x$ ;

10.  $y'' + 6y' + 13y = 3e^{2x} \sin x$ ;

11.  $y'' - 2y' + y = 2e^x + x - 1$ ;

12. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 5t, \\ \dot{y} = 3x + 2y + 8e^t. \end{cases}$$

**Вариант 6**

1.  $y' \sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$ ;

2.  $4xy dy = (x^2 - y^2) dx$ ;

3.  $y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0$ ;

4.  $y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2) y^{2/3}$ ;

5.  $\frac{x dy}{x^2 + y^2} = \left( \frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx$ ;

6.  $y'' = y' + x$ ;

7.  $y'' y^3 = 1$ ,  $y(0,5) = y'(0,5) = 1$ ;

8.  $y^{IV} + 8y'' - 9y = 0$ ;

9.  $y'' - y = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$ ;

10.  $y'' - 4y = 5e^{2x}$ ;

11.  $y'' - 4y' = 2x - 3 + \cos 3x$ ;

12. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y + 2 \cos t. \end{cases}$$

**Вариант 7**

1.  $(1 + e^{3y}) x dx = e^{3y} dy$ ;

2.  $xy' = y + y \ln \frac{y}{x}$ ;

3.  $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$ ;

4.  $xy' + y = xy^2$ ;



$$7. e^x (y'' e^x) = 1, \begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 0; \end{cases} \quad 8. y^{IV} - 3y'' - 4y = 0;$$

$$9. y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}; \quad 10. y'' + y' = x^2 + 1;$$

$$11. y'' + 2y' - 3y = e^{2x} + 9 \cos x; \quad 12. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$

### Вариант 3

$$1. y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}; \quad 2. y dy = (2y - x) dx; \quad 3. xy' + y + xe^{-x^2} = 0;$$

$$4. 2y' + 2xy = x e^{-x^2} y^2; \quad 5. y'y^2 + yy'' = (y')^2;$$

$$6. (10xy - 8y + 1) dx + (5x^2 - 8x + 3) dy = 0;$$

$$7. y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}, \begin{cases} y(1) = e, \\ y'(1) = e; \end{cases} \quad 8. y''' + 2y'' - 3y' = 0;$$

$$9. y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}; \quad 10. 4y'' + 4y' + y = 3 \cos 2x;$$

$$11. y'' + 4y' + 5y = 2x + 3 + xe^x; \quad 12. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$$

### Вариант 4

$$1. 3e^x (\sin y) dx + (1 + e^x) \cos y dy = 0;$$

$$2. \frac{dx}{xy - x^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy};$$

$$3. y' = 2x(x^2 + y); \quad 4. y' + 2xy = 2x^3 y^3;$$

$$5. (2x^3 - xy^2) dx + (2y^3 - x^2 y) dy = 0; \quad 6. y y'' = (y') e^3;$$

$$7. y'' = \frac{y'}{x} + x \cos x, \begin{cases} y(\pi) = \pi + 1, \\ y'(\pi) = 2\pi; \end{cases} \quad 8. y^{IV} - y'' = 0;$$

$$9. y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}; \quad 10. y'' + 9y = 4 \cos 3x;$$

$$7. y'' = -\frac{x}{y'}, y(2) = 0, y'(2) = 1; \quad 8. y^{IV} + y'' = 0;$$

$$9. y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x; \quad 10. y'' + y' = 3 \cos x;$$

$$11. 4y'' - 4y' + y = x^2 + 4e^{2x}; \quad 12. \begin{cases} y' = -5y + 2z + 40e^x, \\ x' = y - 6z + 9e^{-x}. \end{cases}$$

### Вариант 10

$$1. (2xy^2 + x)dx + (3y - x^2y)dy = 0;$$

$$2. (x - y)dx + (x + y)dy = 0;$$

$$3. y' + \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2; \quad 4. y' - \frac{xy}{x^2-1} = x\sqrt{y};$$

$$5. xy'' - y'' + \frac{1}{x} = 0; \quad 6. 2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0;$$

$$7. y'' = 2yy', y(0) = y'(0) = 1; \quad 8. y''' - 8y = 0;$$

$$9. y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}; \quad 10. y'' + 4y' + 29y + 26e^{-x};$$

$$11. y'' + 4y' = 2x + 5 + xe^{3x}; \quad 12. \begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

### Вариант 11

$$1. (\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy + ydx = 0; \quad 2. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x};$$

$$3. xy' + y = e^x; \quad 4. y' - y + y^2 \cos x = 0;$$

$$5. 2xy dy + (x^2 + y^2 + 2x)dx = 0; \quad 6. y'' + \frac{(y')^2}{1-y} = 0;$$

$$7. y'' - 2 \operatorname{ctg} xy' = \sin^3 x, y(\pi/4) = 0, y'(\pi/4) = 1;$$

$$8. 4y^{IV} + 4y''' + y'' = 0; \quad 9. y'' + y = \frac{1}{\sin x};$$

$$10. y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x;$$

$$\begin{array}{ll}
5. x dx + y dy = 0; & 6. y'' + y'(y-1) = (y')^2; \\
7. xy'' = y', y(1) = y'(1) = 2; & 8. y^{IV} + 2y''' + 2y'' = 0; \\
9. y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x; & 10. y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}; \\
11. y'' - 6y' + 13y = 4 \sin 2x - \cos x; & 12. \begin{cases} y' = \frac{y^2}{z}, \\ z' = \frac{1}{2}y. \end{cases}
\end{array}$$

### Вариант 8

$$\begin{array}{ll}
1. (x + 2xy) dx + (1 + x^2) dy = 0; & 2. y dx = (2\sqrt{xy} - x) dy; \\
3. y' + 2y = e^{3x}; & 4. xy' - y = y^2; \\
5. \frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2} dy = 0; & 6. 2yy'' + y^2 = (y')^2; \\
7. x(y'' + 1) + y' = 2, y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = \frac{5}{2}; & \\
8. y^{IV} + 8y'' + 16y = 0; & \\
9. y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}; & 10. y'' + 10y' + 26y = (3x - 1)e^x; \\
11. y'' + 4y' = 1 + 4 \cos^4 x; & 12. \begin{cases} \dot{x} = y - \cos t, \\ \dot{y} = -x + \sin t. \end{cases}
\end{array}$$

### Вариант 9

$$\begin{array}{ll}
1. (1 + y^2) dx - (2y + \sqrt{1 + y^2})(1 + x)^{3/2} dy = 0; & \\
2. y^2 - 3xy + 3x^2 y' = 0; & 3. y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1; \\
4. y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}; & 5. yy'' = y'(y' + 1); \\
6. (e^x + y + \sin y) dx + (e^y + x + \cos y \cdot x) dy = 0; &
\end{array}$$

### Вариант 14

1.  $2e^y(1+x^2)dy - x(e^y+1)dx = 0;$

2.  $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx;$

3.  $y' - \frac{y}{x} = x;$

4.  $y' + 2y = y^2 e^x;$

5.  $(y + x \ln y) dx + (\frac{x^2}{2y} + x + 1) dy = 0;$  6.  $2xy'y'' = (y')^2 + 1;$

7.  $y'' = y'e^y, y(0) = 0, y'(0) = 1;$  8.  $y^{IV} + 4y''' - 5y'' = 0;$

9.  $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x;$

10.  $4y'' + 9y = 5 \cos 3x;$

11.  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}; \end{cases}$

12.  $y'' + 8y' + 17y = 2x^2 + 3x + 1 + 3e^{2x}.$

### Вариант 15

1.  $x \ln xy' = y;$  2.  $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy};$  3.  $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x;$

4.  $xy' - 4y - 2x^2 \sqrt{y} = 0;$

5.  $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1);$

6.  $(3x^2 y + \sin x) dx + (x^3 - \cos y) dy = 0;$

7.  $y'' + 2y(y')^3 = 0, y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3};$

8.  $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0;$

9.  $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x + 2}{e^x + 1};$

10.  $y'' + 4y' + 5y = 4e^x \cos 3x;$

11.  $y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x} + 3 \cos 4x;$  12.  $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$

$$11. y'' - 2y' + 2y = 3x + (4x - 1)e^{2x}; \quad 12. \begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x + t. \end{cases}$$

### Вариант 12

$$1. (x^2 + 2x)y' = y + 4; \quad 2. xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x};$$

$$3. xy' - \frac{y}{x+1} = x; \quad 4. y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x};$$

$$5. 2yy' = y''; \quad 6. (x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0;$$

$$7. y^{IV} - 5y'' + 4y = 0;$$

$$8. y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3;$$

$$9. y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}; \quad 10. y'' + y' = xe^{-x};$$

$$11. y'' + 3y' + 10y = \sin 3x - \cos x; \quad 12. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 18t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$$

### Вариант 13

$$1. y^2 + y'x^2 = 0; \quad 2. xy' = y \cos \ln \frac{y}{x};$$

$$3. y' + y = \cos x; \quad 4. y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y};$$

$$5. 2(y')^2 = y''(y - 1);$$

$$6. (x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0;$$

$$7. y''x + y' = \ln x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2;$$

$$8. y''' + 3y'' + 3y' + y = 0;$$

$$9. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}; \quad 10. y'' + 6y' + 9y = 2x^2 - 1;$$

$$11. y'' + 4y' + 5y = 4xe^{2x} + \cos x; \quad 12. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + e^{3t}. \end{cases}$$

$$5. (\ln y - x) dx + \left(\frac{x}{y} - y\right) dy = 0; \quad 6. y''(2y + 3) = 2(y')^2;$$

$$7. x^3 y'' + x^2 y' = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2;$$

$$8. y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 0;$$

$$9. y'' + y = \operatorname{ctg} x;$$

$$10. y'' - 16y = 3xe^{4x};$$

$$11. y'' + 5y' = 4x + 3 + \cos 2x;$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - x + \cos 3t. \end{cases}$$

### Вариант 19

$$1. y' = \frac{y-1}{x+1}; \quad 2. (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x; \quad 3. xy' + y = e^x;$$

$$4. y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{4 \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} \sqrt{y}; \quad 5. xy'' + y' = \ln x;$$

$$6. \left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0;$$

$$7. y'' + y(y')^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$$

$$8. y^{IV} + 18y'' + 81y = 0;$$

$$9. y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$10. y'' + 5y' - 6y = (2x + 3)e^x;$$

$$11. y'' - 4y' = (3x + 1)^2 + 5xe^x;$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = -y + t - 1, \\ \dot{y} = x + 2t. \end{cases}$$

### Вариант 20

$$1. \sin x \sin y dx + \cos x \cos y dy = 0; \quad 2. y^2 + x^2 y' = xy'y';$$

$$3. x^2 y' + 2xy - 1 = 0;$$

$$4. y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4;$$

$$5. \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - \frac{2y}{x} dy = 0;$$

$$6. y'' = 2(y' - 1) \operatorname{ctg} x;$$

### Вариант 16

1.  $(4 + x^2)dy - \sqrt{1 - 16y^2} dx = 0$ ;      2.  $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$ ;  
3.  $y' - \frac{2y}{x} = x^3$ ;      4.  $xy^2 y' = x^2 + y^3$ ;  
5.  $x^2 \sin y dx + (1 + \frac{x^3}{3} \cos y) dy = 0$ ;      6.  $y'' + 4y' = 2x^2$ ;  
7.  $y'' = 2 - y$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 2$ ;      8.  $y^{IV} + y'' = 0$ ;  
9.  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$ ;      10.  $y'' + 9y = 3 \cos 3x$ ;  
11.  $y'' - y' = 4x + 3 + 4e^{2x}$ ;      12.  $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5 \sin t. \end{cases}$

### Вариант 17

1.  $yy' = e^{2x-y}$ ;      2.  $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$ ;  
3.  $y' \operatorname{tg} x - y = 1$ ;      4.  $xy' + y = \sqrt{x}$ ;  
5.  $e^x dy + (ye^x - 2x) dx = 0$ ;      6.  $x^2 y'' = (y')^2$ ;  
7.  $y'' = \frac{1}{y^3}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ;      8.  $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$ ;  
9.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ ;      10.  $y'' + 2y' + 5y = 3xe^{2x}$ ;  
11.  $y'' + 4y' + 4y = 3x + 1 + 5 \cos 3x$ ;      12.  $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

### Вариант 18

1.  $xy' + y = y^2$ ;      2.  $4y' = \frac{y^2 + 4x^2}{x^2}$ ;  
3.  $y' - \frac{y}{x} = x \cos 2x$ ;      4.  $y' - \frac{y}{\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x}} y^2$ ;

### Вариант 23

1.  $(1+x)y' = xy$ ;

2.  $x^2 y' = y(x+y)$ ;

3.  $(1-x)(y'+y) = e^{-x}$ ;

4.  $\frac{x}{y^2} = y' + y$ ;

5.  $\frac{y}{x^2} dx - \frac{xy+1}{x} dy = 0$ ;

6.  $(x+1)y'' + x(y')^2 = y'$ ;

7.  $y^{IV} + 13y'' + 36y = 0$ ;

8.  $y'(1+(y')^2) = 3y''$ ;  $y(2) = 1$ ,  $y'(2) = 2$ ;

9.  $y'' + 6y' + 9y = 4e^x(\cos x - \sin x)$ ;

10.  $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$ ;

11.  $y'' + 4y' = x^2 + 2x - 3 + 5e^{3x}$ ;

12.  $\begin{cases} y' = \frac{y}{x}, \\ z' = y + z. \end{cases}$

### Вариант 24

1.  $y' - 2\sqrt{y} \ln x = 0$ ;

2.  $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$ ;

3.  $y' + y \cos x = \sin x \cos x$ ;

4.  $y' - 3y = x\sqrt[3]{y}$ ;

5.  $\left(1 + \frac{2x}{y^3}\right)dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$ ;

6.  $y''(1 + \ln x) + \frac{y'}{x} = 2 + \ln x$ ;

7.  $2y'' = 3y^2$ ,  $y(-2) = 1$ ,  $y'(-2) = 1$ ;

8.  $y^{IV} + 4y''' + 5y'' = 0$ ;

9.  $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$ ;

10.  $2y'' + 9y' = 4 \sin 3x + \cos 3x$ ;

11.  $y'' + 6y' + 9y = 4x + 3 - 5e^{-3x}$ ;

12.  $\begin{cases} \dot{x} = x + y + t, \\ \dot{y} = -4x - 3y + 2t. \end{cases}$



$$7. y^{IV} + 2y''' = 0; \quad 8. y'y'' + yy'' = (y')^2, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$9. y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x;$$

$$10. y'' - y' - 2y = x \cos x - \sin x;$$

$$11. y'' + 9y = x^2 + 5 - 9e^{4x};$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y - e^{-2t}, \\ \dot{y} = x - 2y - 3e^{-2t}. \end{cases}$$

### Вариант 21

$$1. (y - 2)dx + x^2 dy = 0;$$

$$2. y' = \frac{3x}{y} + \frac{y}{x};$$

$$3. xy' - y = x^2 e^x;$$

$$4. xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0;$$

$$5. (5x + xy^2)dx + (4y + x^2 y)dy = 0; \quad 6. 3y'y'' = 2y;$$

$$7. x(y'' + y') = y', y(0) = -1, y'(0) = 0;$$

$$8. y^{VI} - 2y^{IV} + y''' = 0;$$

$$9. y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}; \quad 10. y'' + 2y' - 3y = (x + 3)e^x;$$

$$11. y'' + 4y = 1 + 6 \cos 3x;$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = y - 5 \cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

### Вариант 22

$$1. \sqrt{3 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy;$$

$$2. y dy = (2y - x) dx;$$

$$3. xy' - \frac{y}{x+1} = x;$$

$$4. 2y' - \frac{xy}{x^2 - 1} = \frac{x}{y};$$

$$5. x(y'' - x) = y'; \quad 6. (3x \sin y + 1)dx + \left(\frac{3}{2}x^2 \cos y + 1\right)dy = 0;$$

$$7. y^{IV} - 5y''' = 0; \quad 8. 3y'y'' = y + (y')^3 + 1, y(0) = -2, y'(0) = 0;$$

$$9. y'' + 9y = 3 \operatorname{tg} 3x;$$

$$10. y'' + 4y' = (x + 1)^2;$$

$$11. y'' - 3y' + 4y = \cos 3x + 12e^{2x}; \quad 12. \begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$$

Вариант 25

1.  $(4x + xy^2)dx + (3y - x^2y)dy = 0$ ; 2.  $y = \left( y' - e^{\frac{y}{x}} \right) x$ ;

3.  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ ; 4.  $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$ ;

5.  $(3x^2y - \frac{4}{x^2})dx + (\cos y + x^3)dy = 0$ ; 6.  $y(y'' + 1) = (y')^2$ ;

7.  $y''x \ln x = 2y'$ ,  $y(e) = 1$ ,  $y'(e) = 2$ ; 8.  $y^{IV} - 15y'' - 16y = 0$ ;

9.  $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{4 + x^2}$ ; 10.  $4y'' - 4y' + y = 4x^2 + 5x$ ;

11.  $y'' - 8y' + 20y = 4 \sin 2x + xe^{2x}$ ; 12.  $\begin{cases} \dot{x} = -y + e^{3t}, \\ \dot{y} = -x + 2e^{3t}. \end{cases}$

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Сборник заданий  
для аудиторной и самостоятельной работы студентов  
инженерно-технических специальностей втузов

В 2 частях

Часть 1

Составители: АНДРИЯШЧИК Анатолий Николаевич  
МИКУЛИК Николай Александрович  
РАЕВСКАЯ Лариса Алексеевна и др.

Редактор Т.Н. Микулик  
Компьютерная верстка А.А. Бусько

---

Подписано в печать 15. 12.2004.

Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2.

Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 7,6. Уч.-изд. л. 5,9. Тираж 1000. Заказ 330.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский национальный технический университет.  
Лицензия № 02330/0056957 от 01.04.2004.  
220013, Минск, проспект Ф.Скорины, 65.