

3094



Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Строительная механика»

В.М. Трепачко
Т.П. Зданович

ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Учебно-методическое пособие

Минск 2007

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Строительная механика»

В.М. Трепачко

Т.П. Зданович

ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Республики Беларусь
по образованию в области строительства и архитектуры
в качестве учебно-методического пособия*

Минск 2007

624

УДК ~~621.01:531.8~~(075.8)

ББК ~~30.12~~ я 7

T66

Рецензенты:

Ю.В.Василевич, И.С.Куликов

Трепачко, В.М.

T66

Основы строительной механики: учебно-методическое пособие для студентов экономических специальностей в области строительства / В.М. Трепачко, Т.П. Зданович. – Мн.: БНТУ, 2006. – 79 с.

ISBN ~~978~~-985-479-605-5.

В настоящем пособии приводятся методики расчета строительных конструкций на прочность и жесткость, излагается теория, необходимая для решения основных типов задач, освещаются вопросы подбора экономичных поперечных сечений конструкций и определения их геометрических характеристик. Пособие ориентировано на использование при изучении курса "Строительная механика", но может быть полезно при освоении смежных курсов ("Сопrotивление материалов", "Техническая механика"), а также конструкторских дисциплин.

УДК 621.01:531.8(075.8)
ББК 30.12 я 7

ISBN ~~978~~-985-479-605-5

© Трепачко В.М.,
Зданович Т.П., 2007
© БНТУ, 2007

ВВЕДЕНИЕ

Современный инженер-экономист строительной отрасли должен не только обладать качественными знаниями в экономических науках, но иметь четкое представление обо всех этапах расчета и проектирования сооружений. Это позволит ему избежать ошибок и недоразумений при принятии решений в сфере экономики строительства.

В настоящем пособии излагаются теоретические основы и практические методы расчета стержней и стержневых систем на прочность и жесткость, что является основой для экономичного проектирования зданий и сооружений.

Авторами сознательно опущен углубленный анализ теории и некоторые ее темы в предположении того, что в курсе лекций студенты более подробно ознакомятся с ними и сами смогут использовать их в практических расчетах. В пособии не излагается кинематический анализ расчетных схем сооружений, с которого начинается расчет любого сооружения, т.к. рассматриваемые в нем задачи довольно просты и не требуют детального предварительного анализа. Авторы полагают, что этот материал будет изучен в ходе занятий.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ И СИЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ

Неподвижность систем относительно земли обеспечивается опорными связями (или опорами). Реакции, возникающие в опорах, совместно с действующими нагрузками, образуют уравновешенную систему внешних сил.

С технической точки зрения опорные закрепления конструкций весьма разнообразны. При формировании расчетной схемы все многообразие существующих опорных устройств схематизируется в виде ряда основных типов опор, из которых наиболее часто встречаются: шарнирно-подвижная опора (возможные обозначения для нее представлены на рис. 1.1,а), шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.1,б) и жесткое защемление, или заделка (рис. 1.1,в).

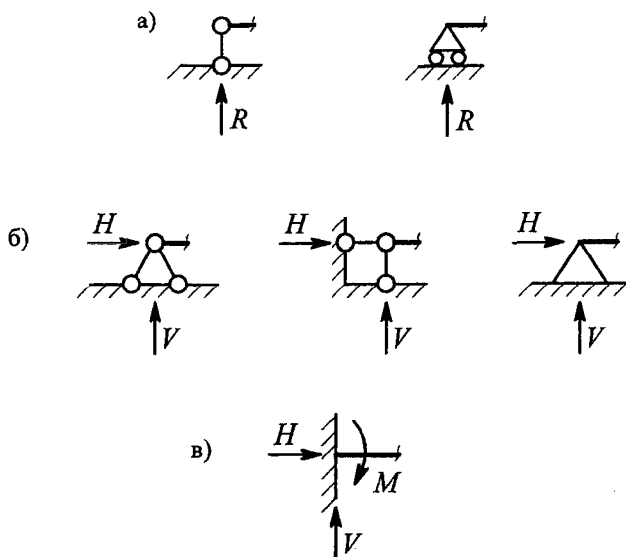


Рис. 1.1. Виды опор

В шарнирно-подвижной опоре возникает опорная реакция, равнодействующая R которой перпендикулярна опорной плоскости. Такая опора препятствует смещению в направлении перпендикулярном опорной плоскости, но допускает перемещение вдоль опорной плоскости и поворот опорного сечения.

В шарнирно-неподвижной опоре возникает опорная реакция, равнодействующая которой, в общем случае, направлена произвольно. Поэтому для удобства расчетов равнодействующую представляют в виде двух проекций (см. рис. 1.1,б): вертикальной (V) и горизонтальной (H). Такая опора делает невозможным линейные смещения опорного сечения, но допускается его поворот.

В жесткой заделке возникают опорные реакции, которые можно представить (см. рис. 1.1,в) в виде вертикальной (V) и горизонтальной (H) составляющих, а также опорного (реактивного) момента (M). При этом опорное сечение не может смещаться и поворачиваться.

Любая система произвольно расположенных сил может быть приведена в общем случае к главному вектору и главному моменту. Для равновесия систе-

мы необходимо, чтобы главные вектор и момент всех сил равнялись нулю. Таким образом, для равновесия плоской системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат равнялись нулю, и алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки системы равнялась нулю, т.е.

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0, \\ \sum M_o = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Уравнения равновесия (1.1) являются основными уравнениями при определении опорных реакций и сил взаимодействия элементов статически определимых систем. Однако часто прибегают к разновидностям этих уравнений. Одна из них:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0, \\ \sum X = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Два первых уравнения систем (1.2) показывают, что главный момент равен нулю, а главный вектор проходит по линии AB . Третье уравнение показывает существование главного вектора, причем оси Y и X соответственно не должны быть перпендикулярны к линии AB .

Другая разновидность системы (1.1):

$$\begin{cases} \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0, \\ \sum M_c = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Первые два уравнения имеют тот же смысл, что и в (1.2), а третье уравнение исключает существование главного вектора.

После определения опорных реакций выполняют их проверку. Для этого составляют какое-либо из уравнений равновесия (1.1), которое не было задействовано в определении реакций или уравнение моментов относительно любой точки системы.

Пример 1. Определить опорные реакции в балке, изображенной на рис. 1.2, при $\cos \alpha = 0,6$, $\sin \alpha = 0,8$.

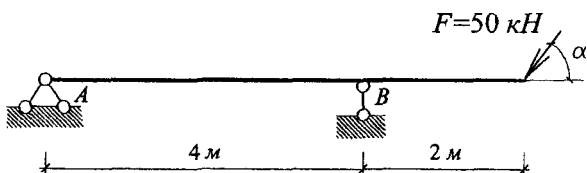


Рис. 1.2. Расчетная схема балки

Решение.

1. Опора A является шарнирно-неподвижной (см. рис. 1.1, б). Равнодействующую опорной реакции представим в виде двух проекций – вертикальной V_A и горизонтальной H_A (рис. 1.3).

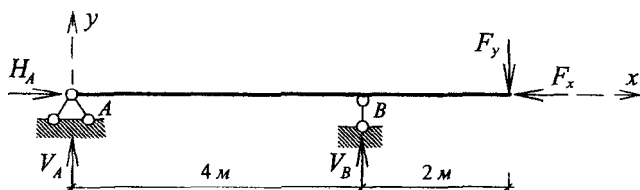


Рис. 1.3. Опорные реакции балки

2. Опора B является шарнирно-подвижной (см. рис. 1.1, а). Равнодействующая опорной реакции перпендикулярна опорной поверхности, т.е. вертикальна. Обозначим ее V_B (см. рис. 1.3).

3. Представим наклонную силу F в виде двух составляющих – вертикаль-

ной F_y и горизонтальной F_x (см. рис. 1.3). Определим их величины:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 50 \cdot 0,6 = 30 \text{ кН},$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha = 50 \cdot 0,8 = 40 \text{ кН}.$$

4. Определим значения опорных реакций. Составляем систему уравнений равновесия вида (1.2):

$$\begin{cases} \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0, \\ \sum X = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \cdot V_B + 6 \cdot F_y = 0, \\ 4 \cdot V_A + 2 \cdot F_y = 0, \\ H_A - F_x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B = 60 \text{ кН}, \\ V_A = -20 \text{ кН}, \\ H_A = 30 \text{ кН}. \end{cases}$$

Т.к. значение опорной реакции V_A отрицательно, то ее истинное направление противоположно выбранному, т.е. она направлена вниз. На рисунках ее можно перенаправить, при этом ее значение сменится на положительное.

5. Проверим правильность вычисления опорных реакций. Составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum y = 0: V_A + V_B - F_y = 60 - 20 - 40 = 60 - 60 = 0.$$

Т.к. это уравнение равновесия удовлетворяется, то реакции определены верно.

Пример 2. Определить опорные реакции в раме, изображенной на рис. 1.4.

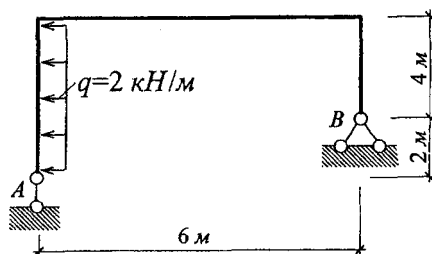


Рис. 1.4. Расчетная схема рамы

Решение.

1. Опора A является шарнирно-подвижной (см. рис. 1.1, а). Ее опорная реакция перпендикулярна опорной поверхности и вертикальна. Обозначим ее V_A (рис. 1.5).

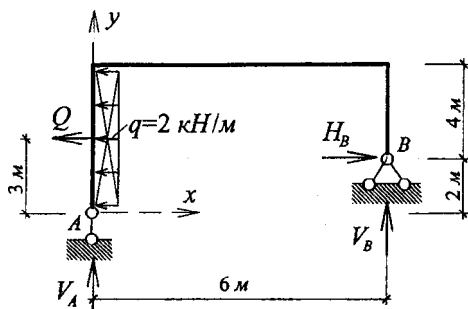


Рис. 1.5. Опорные реакции рамы

2. Опора B является шарнирно-неподвижной (см. рис. 1.1, б). Составляющие опорных реакций V_B и H_B направим, как показано на рис. 1.5.

3. Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей, которая прикладывается посередине участка, а ее величина равна $Q = q \cdot \ell = 2 \cdot 6 = 12 \text{ кН}$.

4. Определим значения опорных реакций. Составляем систему уравнений равновесия вида (1.1):

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum M_B = 0, \\ \sum Y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_B - Q = 0, \\ -6 \cdot V_A + 1 \cdot Q = 0, \\ V_B + V_A = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_B = 12 \text{ кН}, \\ V_A = 2 \text{ кН}, \\ V_B = -2 \text{ кН}. \end{cases}$$

5. Проверим правильность вычисления опорных реакций. Составим уравнение моментов всех сил относительно опоры A :

$$\sum M_A = 0: 2 \cdot H_B - 6 \cdot V_B - 3 \cdot Q = 2 \cdot 12 - 6 \cdot (-2) - 3 \cdot 12 = 36 - 36 = 0.$$

Т.к. это уравнение равновесия удовлетворяется, то реакции определены верно.

2. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Внутри любого материала имеются внутренние межатомные силы, наличие которых определяет способность тела воспринимать действующие на него нагрузки, сопротивляться разрушению, изменению формы и размеров. Внутренние силы можно привести к главному вектору, который раскладывается на две составляющие (продольную и поперечную), и главному моменту.

В общем случае для плоских систем внутри конструкции возникают следующие внутренние силы: продольная сила N , поперечная сила Q и изгибающий момент M (рис. 2.1).

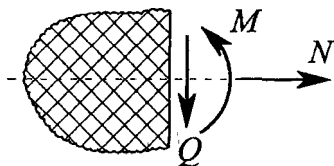


Рис. 2.1. Виды внутренних сил

Рассмотрим общий прием определения внутренних сил (усилий), называемый методом сечений. Этот метод лежит в основе расчета любой конструкции.

Приведем последовательность расчета методом сечений.

Этап 1. Проводится сечение k мысленно рассекающее заданную конструкцию на две части (рис. 2.2).

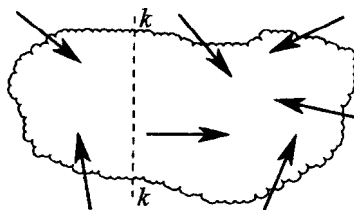


Рис. 2.2. К этапу 1

Этап 2. Отбрасывается одна из частей (левая или правая, верхняя или нижняя). Целесообразно отбросить ту часть конструкции, для которой труднее составить уравнения равновесия или на которую действует больше сил. Например, для конструкции на рис. 2.2 разумно отбросить правую часть, т.к. к ней приложены пять сил, а к левой – только две.

Этап 3. Действие отброшенной правой части на оставшуюся левую заменяется соответствующими внутренними силами (рис. 2.3).

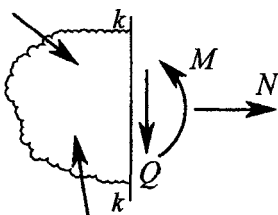


Рис. 2.3. К этапу 3

Этап 4. Рассматривается равновесие оставшейся части от действия внешних и внутренних сил (рис. 2.3), т.е. составляются уравнения равновесия типа (1.1).

Правила знаков для внутренних сил:

✓ продольная сила N считается положительной, если она вызывает растяжение отсеченной части и отрицательной, если вызывает ее сжатие;

✓ поперечная сила Q считается положительной, если она вращает отсеченную часть по ходу часовой стрелки и отрицательной, если вращение происходит против хода часовой стрелки;

✓ изгибающий момент M положительный, если он растягивает нижние волокна отсеченной части и отрицательный, если растягивает верхние волокна.

При рассмотрении равновесия левой отсеченной части положительные направления внутренних сил показаны на рис. 2.3, для правой части – на рис. 2.4.

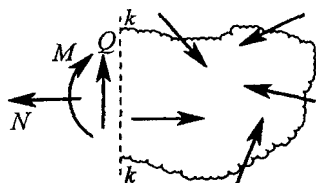


Рис. 2.4. Положительные направления внутренних сил при рассмотрении равновесия правой отсеченной части

3. ЭПОРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛ И ИХ ОСОБЕННОСТИ

Эпюра – это график, показывающий закон изменения внутреннего силового фактора (усилия, напряжения) по длине конструкции.

Для построения эпюры проводится ось параллельная оси конструкции и перпендикулярно к ней откладываются ординаты, показывающие в некотором масштабе значения (ординаты) усилий в поперечных сечениях.

Построение эпюр осуществляется методом сечений. При этом для каждой конструкции выбираются характерные сечения, в каждом из которых определяются усилия. Полученные значения усилий откладываются на эпюре для соответствующего сечения. Примеры построения эпюр будут приведены ниже.

К характерным сечениям относятся:

- ✓ сечения, расположенные в местах изменения геометрических и механических характеристик поперечных сечений;
- ✓ сечения, расположенные бесконечно близко по обе стороны от точек приложения сосредоточенных сил и моментов;
- ✓ сечения, расположенные в начале и в конце каждого участка с распределенной нагрузкой (дополнительно можно рассматривать сечения на участке с распределенной нагрузкой);
- ✓ сечения, расположенные бесконечно близко к опорам, а также на свободных концах.

Приведем характерные особенности эпюр:

1. На прямолинейном ненагруженном внешней нагрузкой участке стержня эпюра моментов M прямолинейна, а эпюра поперечных сил Q постоянна.
2. В точке приложения сосредоточенного изгибающего момента эпюра моментов M имеет скачек на величину этого момента (т.е. слева одно значение, справа – другое), а эпюра поперечных сил Q остается неизменной.
3. В точке приложения сосредоточенной поперечной силы эпюра изгибающих моментов M имеет излом, острие которого совпадает с направлением силы, а эпюра поперечных сил Q – скачек на величину этой силы.
4. В точке приложения сосредоточенной продольной силы эпюра продольных сил N имеет скачек на величину этой силы.
5. На участке с распределенной нагрузкой эпюра изгибающих моментов M очерчена по квадратной параболе с выпуклостью по направлению действия распределенной нагрузки, а эпюра поперечных сил Q имеет вид наклонной прямой.

4. РАСЧЕТ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СОСТАВНОГО БРУСА НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

При центральном растяжении и сжатии внутри бруса (конструкции) возникает только продольная сила N .

Для определения величин N в характерных сечениях бруса используется метод сечений. При этом для каждого сечения составляется уравнение проекций всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на продольную ось стержня.

При растяжении-сжатии в поперечных сечениях бруса возникают нормальные напряжения, величина которых определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (4.1)$$

где N – продольная сила в рассматриваемом сечении бруса; A – площадь поперечного сечения.

При построении эпюры нормальных напряжений σ следует учитывать, что на участках, где значения продольной силы и площади поперечного сечения неизменны, нормальные напряжения постоянны. При этом на участках со сжимающей силой (ее значение отрицательно) возникают сжимающие напряжения.

Абсолютное перемещение концевых поперечных сечений участка бруса при центральном растяжении-сжатии определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A}, \quad (4.2)$$

или

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} \ell, \quad (4.3)$$

где ℓ – длина рассматриваемого участка бруса (расстояние между смежными характерными сечениями); E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга), зависящий от материала бруса.

Перед построением эпюры перемещений w определяют характерные участки (где нормальные напряжения постоянны), для которых определяют абсолютные перемещения. Следует учитывать, что на участках со сжимающими напряжениями брус укорачивается (Δl отрицательно), а при растягивающих напряжениях – удлиняется (Δl положительно). Построение эпюры перемещений начинают от заделки, где перемещение равно нулю. Для каждого последующего сечения значение перемещения определяют как сумму (со своим знаком) известного перемещения предшествующего сечения и абсолютного перемещения характерного участка, т.е.

$$w_{i+1} = w_i + \Delta l_i. \quad (4.4)$$

Порядок построения эпюр в составном брус:

1. Намечаем характерные сечения, нумеруя их.
2. Определяем продольную силу N в каждом характерном сечении, используя метод сечений. По найденным значениям строим эпюру N .
3. Определяем нормальные напряжения в каждом характерном сечении по формуле (4.1). По найденным значениям строим эпюру σ .
4. Определяем абсолютные перемещения Δl участков бруса по формуле (4.3). Вычисляем значения перемещений w для характерных сечений бруса по формуле (4.4), начиная от заделки (где $w = 0$). По найденным значениям строим эпюру w .

Основной задачей расчета конструкций является обеспечение ее прочности в условиях эксплуатации. Для этого необходимо, чтобы наибольшие напряжения σ_{max} , полученные в результате расчета конструкции (расчетные напряжения), не превосходили некоторой величины (предела прочности), называемой допускаемым напряжением $[\sigma]$, т.е. выполнялось неравенство:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma], \quad (4.5)$$

Значения σ_{max} при растяжении (сжатии) определяются по формуле (4.1), а $[\sigma]$ определяется по нормативным документам в зависимости от материала бруса.

При расчете конструкций на прочность при растяжении-сжатии встречаются три вида задач:

1. Проектный расчет (подбор сечения) – определяется требуемая площадь поперечного сечения

$$A_{mp} \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]}, \quad (4.6)$$

затем по сортаменту подбирается соответствующий профиль.

2. Проверочный расчет – по формуле (4.1) определяется наибольшее напряжение, затем проверяется выполнение неравенства (4.5) и дается заключение о прочности конструкции. Если неравенство удовлетворяется, то прочность конструкции обеспечена, в противном случае – не обеспечена.

3. Определение допускаемой нагрузки – величина внешней нагрузки, которую может выдержать конструкция определяется по формуле:

$$[N] = [\sigma] \cdot A. \quad (4.7)$$

Пример 3. На двухступенчатый стержень (рис. 4.1) со следующими характеристиками: $A_1 = 200 \text{ см}^2$, $A_2 = 250 \text{ см}^2$, $l_1 = 4 \text{ м}$, $l_2 = 5 \text{ м}$, $E = 10000 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 5 \text{ МПа}$, действуют внешние силы: $F_1 = 200 \text{ кН}$, $F_2 = 150 \text{ кН}$.

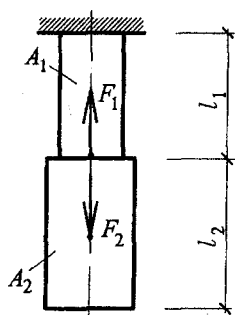


Рис. 4.1.

Расчетная схема
двухступенчатого
стержня

Требуется:

1. Вычислить опорную реакцию.
2. Определить продольные силы в характерных сечениях стержня и построить эпюру продольных сил.
3. Вычислить нормальные напряжения в характерных сечениях стержня и построить эпюру нормальных напряжений. Определить в каких сечениях стержня имеется перенапряжение.
4. Вычислить перемещения характерных сечений стержня, перемещение свободного конца стержня и построить эпюру перемещений.
5. Определить размеры сечений верхней и нижней ступеней, если известно, что сечение – прямоугольное и отношение ширины сечения к его высоте равно 1:4. При подборе размеры сечения округлять до сантиметров.

Решение.

1. Определяем опорную реакцию. Для этого выбираем направление опорной реакции вверх (рис. 4.2) и составляем уравнение равновесия (проекции всех сил на вертикальную ось):

$$\sum y = 0: \quad R + F_1 - F_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad R = -F_1 + F_2 = -50 \text{ кН}.$$

Знак «-» означает, что истинное направление опорной реакции – противоположно. Поэтому на рисунке 4.2 покажем истинное направление опорной реакции.

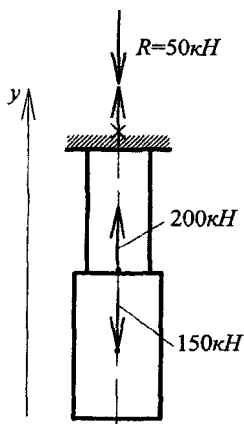


Рис. 4.2. К определению опорной реакции

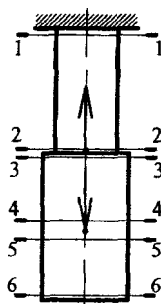


Рис. 4.3. Выбор характерных сечений

2. Выбираем характерные сечения (рис. 4.3), как указано в п. 3:

- сечение, расположенное бесконечно близко к опоре (сечение 1);
- сечение на свободном конце (сечение 6);
- сечения, расположенные в местах изменения геометрических характеристик поперечных сечений (сечения 2 и 3);
- сечения, расположенные бесконечно близко по обе стороны от точек приложения сосредоточенных сил (сечения 2, 3, 5, 6).

Для определения продольных сил в характерных сечениях стержня используем метод сечений:

- последовательно рассекаем стержень в характерных сечениях;
- рассматриваем равновесие одной из частей стержня относительно сечения, а действие отброшенной части стержня заменяем продольной силой, возникающей в рассматриваемом сечении (рис. 4.4);
- для определения усилия, возникающего в каждом сечении, составляем для рассматриваемой части уравнение проекций всех сил на вертикальную ось.

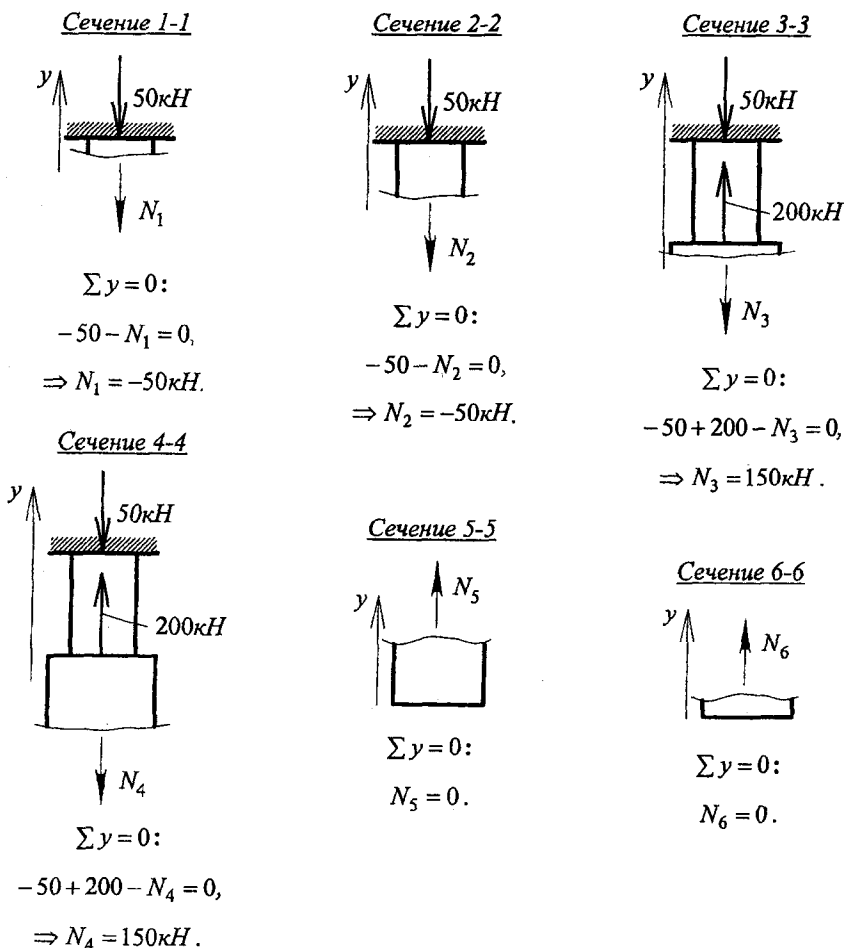


Рис. 4.4. К определению продольных сил в характерных сечениях стержня

По полученным значениям усилий строим эпюру продольных сил (рис. 4.5).

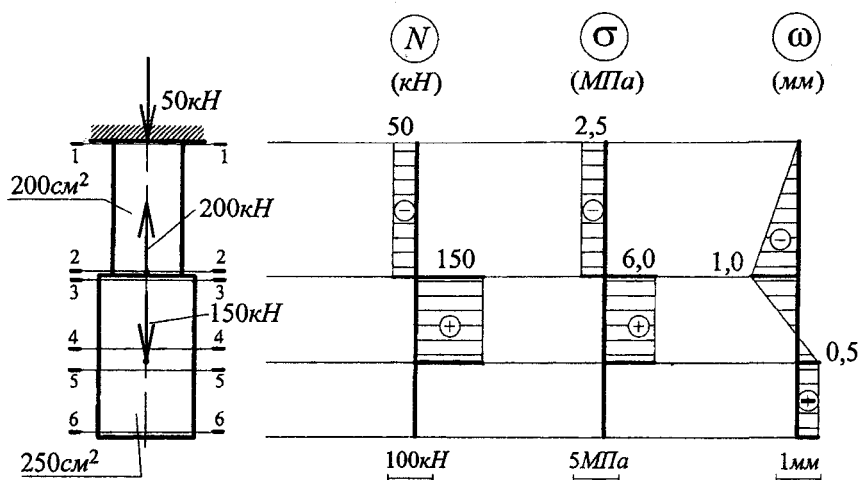


Рис. 4.5. Эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений ω

3. Для построения эпюры нормальных напряжений на каждом из характерных участков бруса определяем напряжение по формуле (4.1):

$$\sigma_{1-2} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-50 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^{-4}} = -2,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{3-4} = \frac{N_3}{A_2} = \frac{150 \cdot 10^3}{250 \cdot 10^{-4}} = 6,0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{5-6} = \frac{N_5}{A_2} = 0.$$

По полученным значениям σ строим эпюру нормальных напряжений (см. рис. 4.5).

По эпюре σ определяем, что $\sigma_{\max} = \sigma_{3-4} = 6,0 \text{ МПа} > [\sigma] = 5,0 \text{ МПа}$, следовательно, на участке 3-4 имеется перенапряжение.

4. Для построения эпюры перемещений вычисляем абсолютное удлинение или укорочение участков бруса по формуле (4.2) и определяем перемещение каждого сечения по формуле (4.4):

$$\omega_1 = 0,$$

(т.к. сечение 1 проходит в непосредственной близости к опоре);

$$\Delta l_{1-2} = \frac{N_{1-2} \cdot l_{1-2}}{EA_1} = \frac{-50 \cdot 10^3 \cdot 4}{10000 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-4}} = -0,001 \text{ м} = -1,0 \text{ мм};$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta l_{1-2} = -1 \text{ мм};$$

$$\omega_3 = \omega_2 = -1 \text{ мм},$$

(т.к. сечения 2 и 3 расположены в бесконечной близости друг к другу);

$$\Delta l_{3-4} = \frac{N_{3-4} \cdot l_{3-4}}{EA_2} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 4}{10000 \cdot 10^6 \cdot 250 \cdot 10^{-4}} = 0,015 \text{ м} = 1,5 \text{ мм};$$

$$\omega_4 = \omega_3 + \Delta l_{3-4} = -1 + 1,5 = 0,5 \text{ мм};$$

$$\omega_5 = \omega_4 = 0,5 \text{ мм},$$

(т.к. сечения 4 и 5 расположены в бесконечной близости друг к другу);

$$\Delta l_{5-6} = \frac{N_{5-6} \cdot l_{5-6}}{EA_2} = 0,$$

$$\omega_6 = \omega_5 + \Delta l_{5-6} = 0,5 \text{ мм}.$$

По полученным значениям строим эпюру перемещений ω (см. рис. 4.5).

По эпюре определяем: перемещение свободного конца бруса равно 0,5 мм.

5. Определим размеры сечений верхней и нижней ступеней.

Для 1-й ступени ($N_{max}^1 = |-50| = 50 \text{ кН}$, см. рис. 4.5) вычислим требуемую площадь поперечного сечения по формуле (4.6):

$$A_{np}^1 \geq \frac{N_{max}^1}{[\sigma]} = \frac{50 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6} = 0,01 \text{ м}^2 = 100 \text{ см}^2.$$

Т.к. $\frac{b}{h} = \frac{1}{4}$, то $h = 4 \cdot b$ и, следовательно, $A = b \cdot h = 4 \cdot b^2 \geq 100 \text{ см}^2$.

Вычислим ширину поперечного сечения 1-й ступени:

$$b = \sqrt{100/4} = \sqrt{25} = 5 \text{ см}.$$

Тогда высота поперечного сечения 1-й ступени

$$h = 4 \cdot b = 4 \cdot 5 = 20 \text{ см}.$$

Таким образом, поперечное сечение 1-й ступени – прямоугольник $5 \text{ см} \times 20 \text{ см}$.

Требуемая площадь поперечного сечения 2-й ступени ($N_{max}^2 = 150 \text{ кН}$):

$$A_{np}^2 \geq \frac{N_{max}^2}{[\sigma]} = \frac{150 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6} = 0,03 \text{ м}^2 = 300 \text{ см}^2.$$

Ширина поперечного сечения 2-й ступени (с округлением в большую сторону до сантиметров):

$$b = \sqrt{300/4} = \sqrt{75} = 8,66 \text{ см} \approx 9 \text{ см}.$$

Тогда высота сечения 2-й ступени

$$h = 4 \cdot b = 4 \cdot 9 = 36 \text{ см}.$$

Следовательно, поперечное сечение 2-й ступени – прямоугольник $9 \text{ см} \times 36 \text{ см}$.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТАВНЫХ СЕЧЕНИЙ

Разберем основные геометрические характеристики составных сечений.

Площадь поперечного сечения (A) является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения. Если представить, что сечение состоит из n площадок площадью A_i (рис. 5.1), то площадь всего сечения

$$A = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (5.1)$$

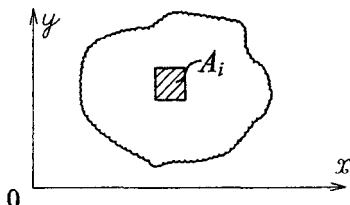


Рис. 5.1. К определению площади поперечного сечения

Единица измерения площади — m^2 , но иногда используют более мелкие единицы — cm^2 , mm^2 .

Статический момент сечения (S) относительно некоторой оси есть взятая по всей его площади A сумма произведений площадок A_i на расстояние от их центра тяжести до этой оси, т.е.

$$S_x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i, \quad (5.2)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i, \quad (5.3)$$

где x_i , y_i — расстояния от центра тяжести площади A_i до оси Oy и Ox соответственно (рис. 5.2).

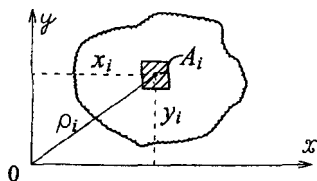


Рис. 5.2. К определению статических моментов сечения

Единица измерения статического момента – м^3 или см^3 .

Координаты центра тяжести сечения (x_c, y_c) определяются по формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \quad (5.4)$$

$$y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (5.5)$$

Осевой момент инерции сечения (I) относительно некоторой оси есть взятая по всей его площади A сумма произведений площадок A_i на квадраты расстояний от их центра тяжести до этой оси, т.е.

$$I_x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i^2, \quad (5.6)$$

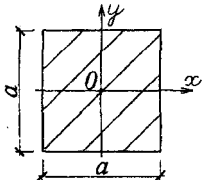
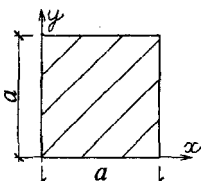
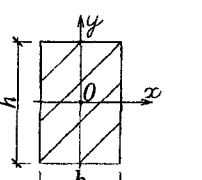
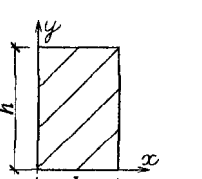
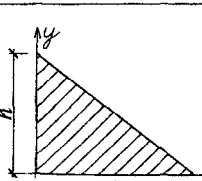
$$I_y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i^2, \quad (5.7)$$

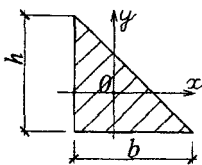
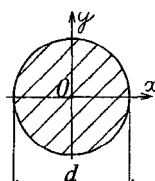
где x_i, y_i – то же, что и в (5.2) и в (5.3).

Единица измерения осевого момента инерции – м^4 или см^4 .

Для вычисления указанных геометрических характеристик составное сечение разбивается на ряд простых фигур, для которых достаточно просто определить эти величины. В таблице 1 приведены моменты инерции наиболее распространенных простейших сечений.

Таблица 1 – Моменты инерции простейших сечений

Сечение	Площадь	Моменты инерции	
		I_x	I_y
1	2	3	4
	a^2	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$
	a^2	$\frac{a^4}{3}$	$\frac{a^4}{3}$
	$a \cdot b$	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{b^3 \cdot h}{12}$
	$a \cdot b$	$\frac{b \cdot h^3}{3}$	$\frac{b^3 \cdot h}{3}$
	$\frac{1}{2} a \cdot b$	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{b^3 \cdot h}{12}$

1	2	3	4
	$\frac{1}{2} a \cdot b$	$\frac{b \cdot h^3}{36}$	$\frac{b^3 \cdot h}{36}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными осями, а моменты инерции относительно этих осей – центральными моментами инерции.

После определения центра тяжести составного сечения возникает необходимость определить момент инерции сечения относительно осей, проходящих через этот центр. Для этого используется формула моментов инерции при параллельном переносе осей (рис. 5.3):

$$I_x = I_{x_0} + a^2 \cdot A, \quad (5.8)$$

$$I_y = I_{y_0} + b^2 \cdot A, \quad (5.9)$$

где a, b – координаты центра тяжести сечения относительно осей Ox и Oy (a и b подставляются в формулы с учетом знаков);

I_{x_0}, I_{y_0} – моменты инерции сечения относительно осей Ox_0 и Oy_0 , вычисляемые по формулам (5.6) и (5.7).

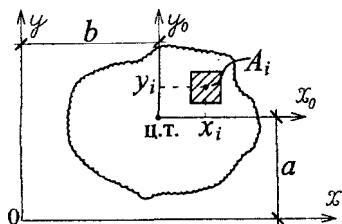


Рис. 5.3. К определению моментов инерции сечения

Полярный момент инерции сечения (I_ρ) относительно некоторой точки (полюса) есть взятая по всей его площади A сумма произведений площадок A_i на квадраты расстояний до этой точки, т.е.

$$I_\rho = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \rho_i^2. \quad (5.10)$$

Т.к. $\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2$, то легко получить, что

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (5.11)$$

Осей момент сопротивления сечения (W) относительно некоторой оси равен отношению осевого момента инерции сечения, вычисленного относительно той же оси, к расстоянию от этой оси до наиболее удаленного волокна (наиболее удаленной точки сечения), т.е.

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}, \quad (5.12)$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{max}}. \quad (5.13)$$

Единица измерения осевого момента сопротивления — м^3 или см^3 .

Пример 4. Для заданного сечения, состоящего из швеллера №16 и листа 200×20 мм (рис. 5.3), требуется:

1. Определить положение центра тяжести сечения.
2. Определить центральные моменты инерции и моменты сопротивления сечения.

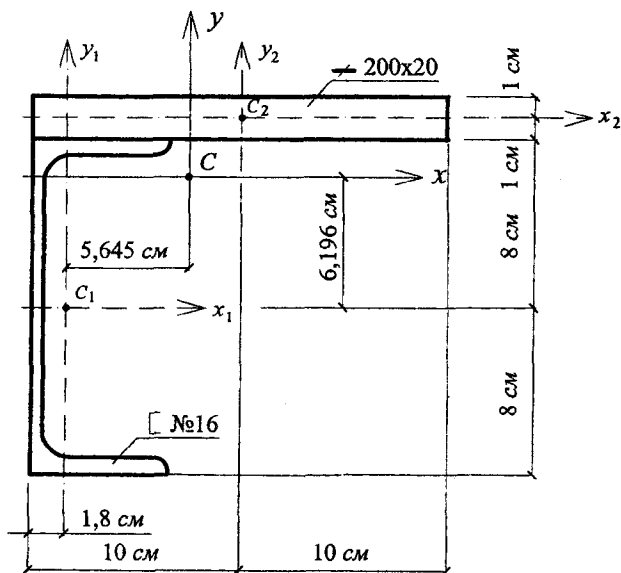


Рис. 5.3. Составное сечение

Решение.

1. Разбиваем составное сечение на две фигуры: 1 – швеллер №16 и 2 – лист 200×20 мм.

Определяем геометрические характеристики простых фигур:

✓ швеллера (принимаем согласно ГОСТ 8240-89, см. приложение 2):

$$A_1 = 18,1 \text{ см}^2, J_{x_1} = 747 \text{ см}^4, J_{y_1} = 63,3 \text{ см}^4, z_0 = 1,8 \text{ см}.$$

✓ листа (определяем по формулам таблицы 1):

$$A_2 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ см}^2, J_{x_2} = \frac{20 \cdot 2^3}{12} = 13,333 \text{ см}^4, J_{y_2} = \frac{2 \cdot 20^3}{12} = 1333,333 \text{ см}^4.$$

3. Выбираем в качестве вспомогательных осей центральные оси швеллера. Для определения положения центра тяжести сечения воспользуемся формулами (5.4) и (5.5):

$$y_C = \frac{40 \cdot (8+1)}{40+18,1} = 6,196 \text{ см},$$

$$x_C = \frac{40 \cdot (10-1,8)}{40+18,1} = 5,645 \text{ см}.$$

Отложив полученные значения ординат вдоль осей x_1 и y_1 (см. рис. 5.3), получим положение центра тяжести сечения (точка C). Через эту точку проводим оси x и y .

3. Вычисляем центральные моменты инерции относительно осей x и y по формулам (5.8) и (5.9):

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_1} + A_1 \cdot a_1^2 + J_{x_2} + A_2 \cdot a_2^2 = \\ &= 747 + 18,1 \cdot 6,196^2 + 13,333 + 40 \cdot (9 - 6,196)^2 = 1769,696 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y_1} + A_1 \cdot b_1^2 + J_{y_2} + A_2 \cdot b_2^2 = \\ &= 63,3 + 18,1 \cdot 5,645^2 + 1333,333 + 40 \cdot 2,555^2 = 2234,529 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

4. Вычисляем осевые моменты сопротивления по формулам (5.12) и (5.13):

$$W_x = \frac{J_x}{8 + 6,196} = \frac{1769,696}{14,196} = 124,662 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{J_y}{20 - 1,8 - 5,645} = \frac{2234,529}{12,555} = 177,979 \text{ см}^3.$$

6. РАСЧЕТ ПРОСТЫХ ФЕРМ

Фермой называется система, состоящая из стержней, соединенных между собой шарнирами (рис. 6.1).

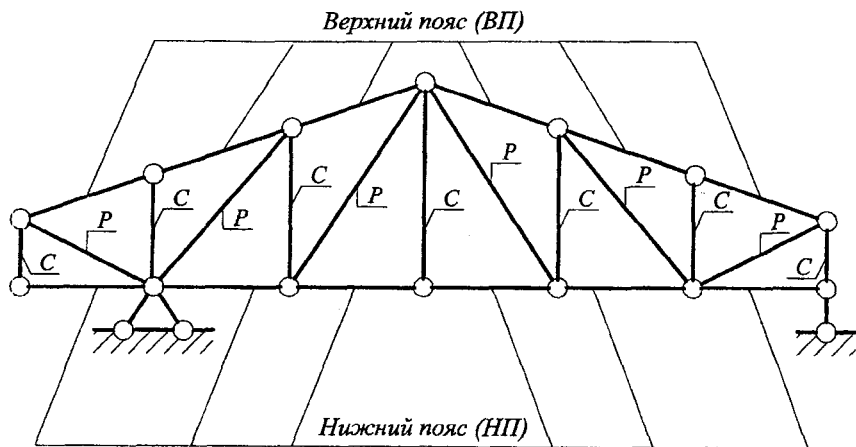


Рис. 6.1. Ферма

Расстояние между осями опор фермы называется *пролетом*.

Совокупность стержней, ограничивающих контур фермы сверху, образует *верхний пояс*, а снизу – *нижний пояс*.

Внутренние стержни образуют *решетку*. Вертикальные элементы решетки называют *стойками (C)*, а наклонные – *раскосами (P)*.

Совокупность элементов фермы между соседними (смежными) узлами поясов фермы называется *панелью*.

Узлы фермы для удобства расчета принято нумеровать.

Как правило, нагрузка, действующая на фермы, представляет собой сосредоточенные силы, приложенные в узлах. В этом случае в элементах фермы (стержнях) возникают только продольные силы (усилия).

Усилия в стержнях обычно обозначают N_{i-j} , где i и j – номера соединяемых узлов.

Определение внутренних усилий можно выполнять следующими способами:

I. Аналитическими:

– способ вырезания узлов;

– способы, основанные на методе сечений (способ сквозных сечений (Риттера), способ замкнутых сечений, способ 2 сечений).

II. Графическим (веревочный многоугольник или диаграмма Максвелла-Кремоны).

Примечание: следует помнить, что прежде, чем определять усилия в стержнях ферм в некоторых случаях необходимо предварительно определить опорные реакции.

Способ вырезания узлов

Этот способ является самым простым из указанных выше. Последовательность расчета этим способом заключается в следующем:

1. Вырезается узел, в котором сходятся стержни, в 2 из которых усилия неизвестны. Усилия, которые определяются, направляются от узла (положительное направление);

2. Составляются уравнения равновесия (проекции на оси, причем оси выбираются произвольно)

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{cases}$$

3. Из решения системы уравнений определяются величины неизвестных усилий. Если в результате значение усилия отрицательно, значит стержень сжат, если положительно – растянут;

4. Переход к следующему узлу.

Пример 5. Определить усилия в стержнях 1-2 и 2-3 фермы, изображенной на рис. 6.2.

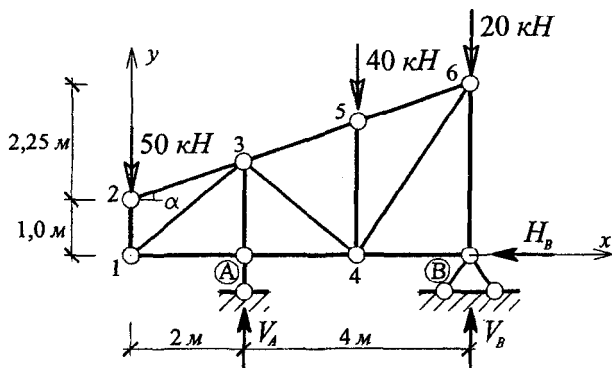


Рис. 6.2. Расчетная схема фермы

Решение.

1. Определяем реакции опор.

Т.к. опора A представляет собой шарнирно-подвижную опору, то в ней возникает только одна вертикальная реакция V_A , а в шарнирно неподвижной опоре B – две: V_B и H_B .

Определим их величины из уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum X = 0: & H_B = 0, \\ \sum M_A = 0: & 4 \cdot V_B + 2 \cdot 50 - 2 \cdot 40 - 4 \cdot 20 = 0, \\ \sum M_B = 0: & -4 \cdot V_A + 2 \cdot 40 + 6 \cdot 50 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_B = 0, \\ V_B = 15 \text{ кН}, \\ V_A = 95 \text{ кН}. \end{cases}$$

2. Находим усилия в стержнях 1-2 и 2-3 способом вырезания узлов:

2.1. Вырезаем узел 2, в котором сходятся два неизвестных усилия, которые нам нужно определить.

Неизвестные усилия направляем от узла (рис. 6.3), обозначая их как N_{1-2} (усилие в стержне 1-2) и N_{2-3} (усилие в стержне 2-3).

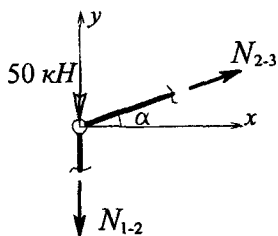


Рис. 6.3. Узел 2

2.2. Проведем через узел оси координат как показано на рис. 6.3 и составим уравнения проекций на ось Ox и Oy :

$$\begin{cases} \sum X = 0: & N_{2-3} \cdot \cos \alpha = 0, \\ \sum Y = 0: & N_{2-3} \cdot \sin \alpha - N_{1-2} - 50 = 0. \end{cases}$$

2.3. Решая эту систему уравнений, находим:

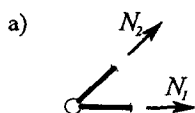
$$\begin{cases} N_{2-3} = 0, \\ N_{1-2} = 50 \text{ кН}. \end{cases}$$

Таким образом, усилие в стержне 1-2 равно 50 кН, причем стержень сжат, а в стержне 2-3 усилие равно 0.

Примечание: В приведенном примере не определялись значения тригонометрических функций, т.к. при решении системы они не задействованы. Их значения могут быть легко определены графически из рис. 6.2.

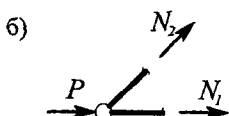
В практических расчетах, зачастую, усилия в элементах фермы можно определить без применения способа вырезания узлов или других способов. Для этого используются частные случаи равновесия узлов (рис. 6.4).

Частные случаи равновесия узлов



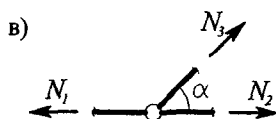
а) узел из 2 стержней без внешней нагрузки (рис. 6.4 а)

$$N_1 = N_2 = 0.$$



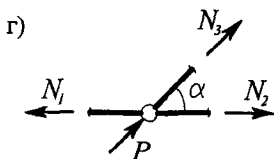
б) узел из 2 стержней, нагруженный внешней нагрузкой по направлению одного из стержней (рис. 6.4 б)

$$N_1 = \pm P, N_2 = 0.$$



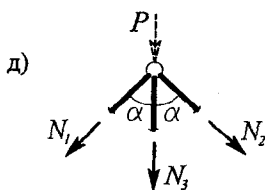
в) узел из 3 стержней, 2 из которых лежат на одной прямой, без внешней нагрузки (рис. 6.4 в)

$$N_1 = N_2, N_3 = 0.$$



г) узел из 3 стержней, 2 из которых лежат на одной прямой, нагруженный внешней нагрузкой по направлению третьего стержня (рис. 6.4 г)

$$N_1 = N_2, N_3 = \pm P.$$



д) узел из 3 стержней, 2 из которых расположены под одинаковым углом к третьему (рис. 6.4 д)

$$N_1 = N_2.$$

Рис. 6.4. Частные случаи равновесия узлов

Способ сквозных сечений

Приведем последовательность расчета этим способом:

1. Проводится сквозное сечение; пересекающее три стержня с неизвестными усилиями;

2. Отбрасывается одна из частей (левая или правая). Неизвестные усилия направляются от сечения;

3. Составляется одно из следующих уравнений:

– моментов относительно характерных точек, которые выбираются в местах пересечения линий действия двух неизвестных усилий,

– проекций на ось перпендикулярную общему направлению усилий (если они параллельны).

Таким образом, в каждое уравнение входит по одной неизвестной.

4. Из решения уравнения определяются величины неизвестных усилий.

Расчет на прочность элементов фермы производится по формулам (4.5)...(4.7).

Пример 6. Для фермы, изображенной на рис. 6.5, требуется:

– определить «нулевые» стержни (усилия в которых равны нулю);

– вычислить усилия в отмеченных стержнях;

– для стержня 6-9 подобрать квадратное поперечное сечение, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Размер стороны сечения округлить до миллиметров.

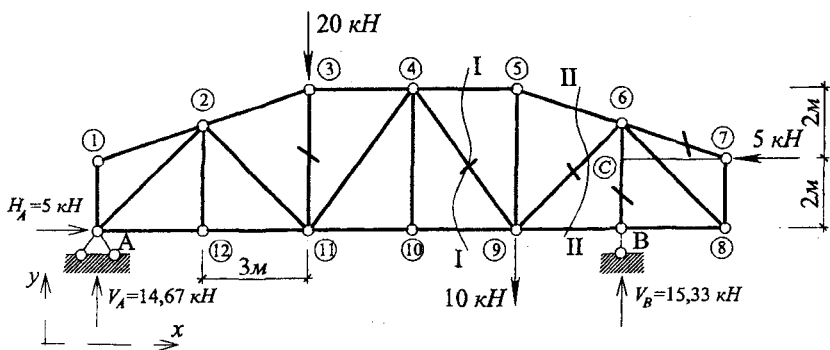


Рис. 6.5. Расчетная схема фермы

Решение.

1. Определяем опорные реакции. Для этого составляем уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A - 5 = 0, \\ 20 \cdot 6 + 10 \cdot 12 - 5 \cdot 2 - V_B \cdot 15 = 0, \\ -5 \cdot 2 - 10 \cdot 3 - 20 \cdot 9 + V_A \cdot 15 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 5 \text{ кН}, \\ V_B = 15,33 \text{ кН}, \\ V_A = 14,67 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проверим правильности вычисления опорных реакций:

$$\sum Y = 0: \quad 14,67 - 20 - 10 + 15,33 = 30 - 30 = 0.$$

2. Определяем «нулевые» стержни с использованием частных случаев равновесия узлов фермы (см. рис. 6.4).

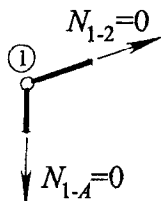


Рис. 6.6. Узел 1

Рассмотрим равновесие узла 1, в котором сходятся два стержня. Так как в этом узле отсутствует внешняя нагрузка (частный случай, см. рис. 6.4, а), следовательно, усилия в этих двух стержнях равны нулю:

$$N_{1-2} = 0, \quad N_{1-A} = 0.$$

Рассмотрим равновесие узлов 10 и 12 (рис. 6.7, 6.8).

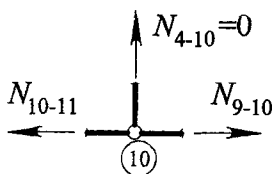


Рис. 6.7. Узел 10

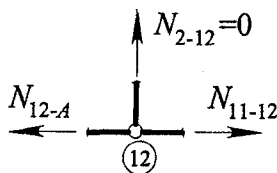
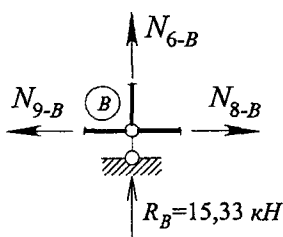


Рис. 6.8. Узел 12

В каждом из этих узлов сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, и отсутствует внешняя нагрузка (частный случай, см. рис. 6.4, в). Следовательно, $N_{4-10} = 0$, $N_{2-12} = 0$.

3. Вычислим усилия в отмеченных стержнях.

3.1. Для определения усилия, возникающего в стержне 6-В, вырезаем узел В и рассматриваем его равновесие.



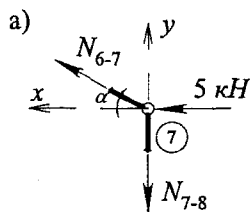
Внешней нагрузкой, действующей на узел, является опорная реакция R_B . Рассматриваемый узел относится к частному случаю (см. рис. 6.4, г):

$$N_{6-B} = -15,33 \text{ кН (стержень сжат).}$$

Рис. 6.8. Узел В

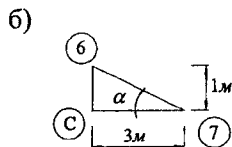
3.2. Определяем усилие в стержне 6-7, для чего вырезаем узел 7 (рис. 6.8, а).

Составляем уравнение проекций всех сил на горизонтальную ось:



$$\sum X = 0, \quad N_{6-7} \cdot \cos \alpha + 5 = 0 \rightarrow N_{6-7} = -\frac{5}{\cos \alpha}.$$

Определим $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ из треугольника 6-7-С (см. рис. 6.8, б):



$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 0,949, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 0,316.$$

Рис. 6.8. Узел 7

$$\text{Тогда } N_{6-7} = -\frac{5}{0,949} = -5,27 \text{ кН (сжатие).}$$

3.3. Для определения усилия, возникающего в стержне 4-9, используем способ сквозных сечений. Для этого проводим сечение I-I и рассматриваем равновесие правой части фермы (рис. 6.9), действие левой части фермы заменим усилиями, возникающими в рассеченных стержнях N_{4-5} , N_{4-9} , N_{9-10} . Усилия в этих стержнях направляем в сторону отброшенной части, предполагая, что стержни работают на растяжение.

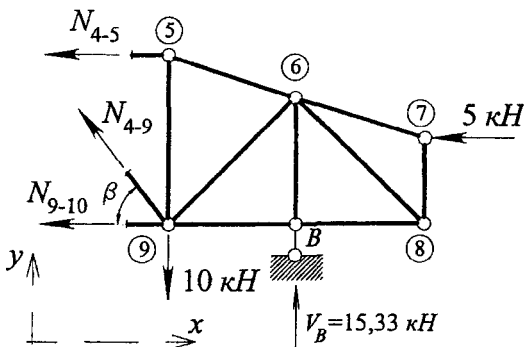
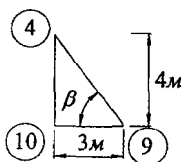


Рис. 6.9. Сечение I-I (правая часть)

Так как стержни 4-5 и 9-10 параллельны между собой, то линии действия усилий N_{4-5} и N_{9-10} не пересекаются. Следовательно, для определения N_{4-9} составляем уравнение проекций на вертикальную ось:

$$\sum Y = 0: \quad -10 + 15,33 + N_{4-9} \sin \beta = 0. \quad (6.1)$$



Значение $\sin \beta$ найдем из треугольника 4-9-10 (рис. 6.10):

$$\sin \beta = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8.$$

Подставив полученное значение $\sin \beta$ в (6.1), получим

Рис. 6.10. К определению $\sin \beta$

$$N_{4-9} = -6,66 \text{ кН (стержень сжат).}$$

3.4. Чтобы определить усилие в стержне 6-9, необходимо провести сечение II-II и рассмотреть равновесие правой части (рис. 6.11). Т.к. стержни 5-6 и 9-В не параллельны между собой, т.е. линии действия усилий в этих стержнях пересекаются в точке K . Следовательно, чтобы определить продольную силу, возникающую в стержне 6-9, необходимо составить уравнение моментов относительно точки K :

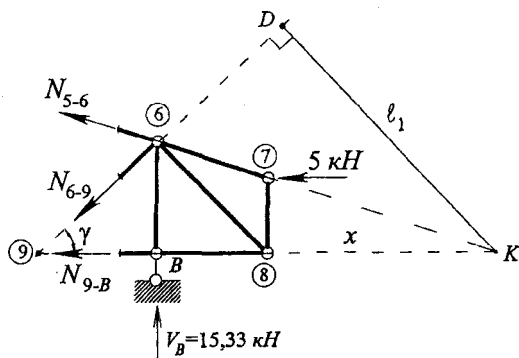


Рис. 6.11. Сечение II-II (правая часть)

$$\sum M_K = 0: -5 \cdot 2 + 15,33 \cdot (x+3) - N_{6-9} \cdot l_1 = 0. \quad (6.2)$$

Расстояние x находим из подобия треугольников 7-8-К и 6-В-К (см. рис. 6.11), для чего составляем пропорцию: $\frac{x}{2} = \frac{x+3}{3}$, из которой находим $x = 6$ м.

Плечо силы N_{6-9} , равное l_1 , найдем из треугольника 9-Д-К (см. рис. 6.11). Т.к. треугольник 6-В-9 – прямоугольный и $l_{6-B} = l_{9-B}$, то $\gamma = 45^\circ$. Отсюда $l_1 = l_{9-K} \cdot \sin 45^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8,49$ м. Тогда из (6.2) вычисляем $N_{6-9} = 15,08$ кН (стержень растянут).

3.5. Чтобы определить усилие N_{3-11} , вырежем узел 3 (рис. 6.12).

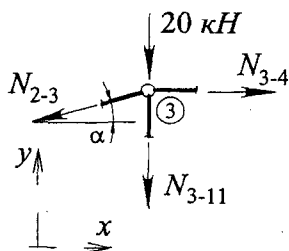


Рис. 6.12. Узел 3

Составим уравнение проекций на вертикальную ось:

$$\sum Y = 0: -20 - N_{3-11} - N_{2-3} \cdot \sin \alpha = 0. \quad (6.3)$$

Согласно пп. 3.2 (рис. 6.8) $\sin \varphi = 0,316$.

Из (6.3) находим $N_{3-11} = -20 - N_{2-3} \cdot 0,316$.

Из последнего равенства следует: чтобы найти усилие в стержне 3-11, нужно найти усилие N_{2-3} . Для этого в заданной ферме проводим сечение III-III и относительно этого сечения рассматриваем равновесие левой части фермы (рис. 6.13).

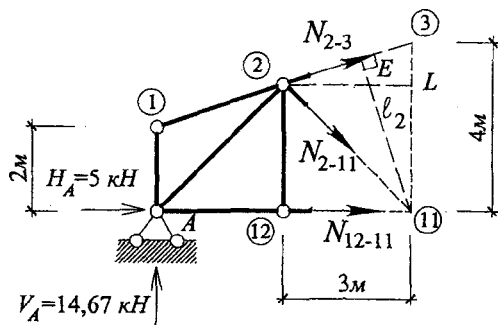


Рис. 6.13. Сечение III-III (левая часть)

Для определения N_{2-3} составляем уравнение моментов относительно узла 11, т.к. линии действия усилий N_{2-11} и N_{12-11} пересекаются в этом узле:

$$\sum M_{11} = 0: 14,67 \cdot 6 + N_{2-3} \cdot l_2 = 0. \quad (6.4)$$

Расстояние l_2 находим из подобия треугольников $E-3-11$ и $L-2-3$:

$$\frac{l_2 - L}{l_{2-3}} = \frac{l_2}{l_{3-11}}.$$

Т.к. $l_{2-3} = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3,162$ м, то $l_2 = \frac{3 \cdot 4}{3,162} = 3,795$ м.

Из (6.4) находим

$$N_{2-3} = -\frac{14,67 \cdot 6}{3,795} = -23,19 \text{ кН}.$$

Подставляя полученное значение N_{2-3} в (6.3), получаем:

$$N_{3-11} = -12,67 \text{ кН (стержень сжат)}.$$

4. Подберем для стержня 6-9 квадратное поперечное сечение. По формуле (4.6) определяем требуемую площадь:

$$A_{mp} \geq \frac{N_{5-9}}{[\sigma]} = \frac{15,08 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,943 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 94,3 \text{ мм}^2.$$

Пусть сторона квадрата равна a , тогда площадь поперечного сечения равна a^2 , следовательно $a^2 \geq 94,3 \text{ мм}^2$.

Из последнего неравенства вычисляем сторону квадрата:

$$a \geq \sqrt{94,3} \approx 9,71 \text{ мм}.$$

Округляя до миллиметров, получаем $a = 10 \text{ мм}$. Следовательно, поперечное сечение – квадрат $10 \text{ мм} \times 10 \text{ мм}$.

7. РАСЧЕТ ПРОСТЫХ БАЛОК И РАМ

Стержень, работающий главным образом на изгиб, называется балкой. Стержневая система, элементы которой жестко соединены между собой во всех или некоторых узлах называется рамой.

В сечениях балок и рам, нагруженных произвольными нагрузками, возникают три внутренних силовых фактора – поперечная сила Q , изгибающий момент M , продольная сила N .

Приведем последовательность расчета балок на прочность.

Этап 1. Определение опорных реакций.

Этап 2. Построение эпюр усилий и их проверка.

Этот этап выполняется с помощью метода сечений. Положительные направления внутренних силовых факторов показаны на рис. 7.1.

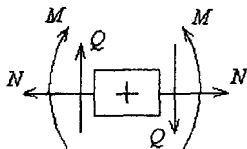


Рис. 7.1. Положительные направления внутренних сил

При построении эпюр Q и N положительные значения ординат откладываются вверх от оси эпюры, а отрицательные – вниз. При построении эпюры M положительные значения ординат откладываются вниз от оси эпюры, в результате ординаты оказываются расположенными со стороны растянутых волокон балки.

При проверке правильности построения эпюр учитываются их особенности, перечисленные в п. 3.

Этап 3. Выбор опасных сечений.

По эпюрам усилий определяются опасные сечения, в которых эти усилия достигают наибольших значений. В большинстве случаев основным внутренним усилием при расчетах балок на прочность является изгибающий момент и связанные с ним нормальные напряжения.

Этап 4. Вычисление наибольших нормальных напряжений и проверка выполнения условия прочности.

Нормальные напряжения при изгибе вычисляются по формуле:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I} y_{max}, \quad (7.1)$$

или

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}, \quad (7.2)$$

где M_{max} – наибольшее значение изгибающего момента в сечениях балки; I – момент инерции поперечного сечения балки; W – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки; y_{max} – расстояние от нейтральной оси поперечного сечения балки до наиболее удаленного волокна.

После определения наибольших расчетных напряжений в балке их значение сравнивают с допустимыми напряжениями по формуле (4.5).

Касательные напряжения при изгибе вычисляются по формуле:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S}{I \cdot b_{min}}, \quad (7.3)$$

где Q_{max} – наибольшее значение поперечной силы в сечениях балки; S – статический момент полусечения балки; b – наименьшая ширина поперечного сечения балки.

Если необходимо подобрать поперечное сечение балки, то на этапе 4 выполняются следующие действия:

- ✓ определяется требуемый осевой момент сопротивления;

$$W_{mp} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}, \quad (7.4)$$

- ✓ подбирается соответствующий профиль (подбор профиля осуществляется по сортаменту или при заданном профиле сечения определяется требуемый параметр);

- ✓ выбранное сечение проверяется на прочность по касательным напряжениям согласно формуле (7.3).

Пример 7. Для балки, изображенной на рис. 7.2, определить опорные реакции и построить эпюры внутренних сил.

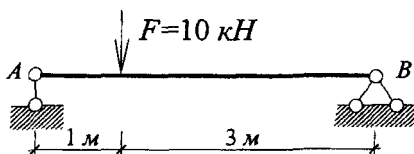


Рис. 7.2. Расчетная схема балки

Решение.

1. Определяем значения опорных реакций, возникающих в опорах A и B . Для этого воспользуемся уравнениями равновесия (1.2), предварительно задавая произвольным направлением этих усилий, полагая, что вертикальные направлены снизу вверх, а горизонтальные – справа налево (рис. 7.3).

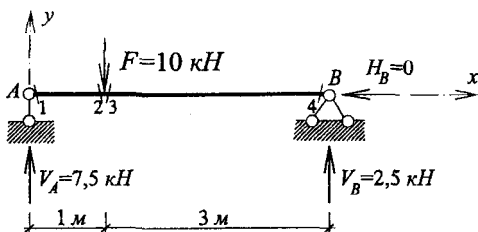


Рис. 7.3. К определению опорных реакций

$$\begin{cases} \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0, \\ \sum x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 \cdot 1 - V_B \cdot 4 = 0, \\ -10 \cdot 3 + V_A \cdot 4 = 0, \\ -H_B = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = 7,5 \text{ кН}, \\ V_B = 2,5 \text{ кН}, \\ H_B = 0. \end{cases}$$

Так как в результате решения системы уравнений, значения вертикальных опорных реакций положительны, то их направления выбраны верно.

Выполним проверку правильности вычисления опорных реакций. Для этого составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum y = 0: 7,5 - 10 + 2,5 = 10 - 10 = 0.$$

2. Назначаем характерные сечения балки (их будет 4, см. рис. 7.3). Для вычисления усилий в характерных сечениях воспользуемся методом сечений: по каждому из сечений расчленим заданную конструкцию на две части; мысленно отбрасывая одну часть, а ее действие на оставшуюся часть заменяем внутренними силами, возникающими в сечениях, предварительно задавая их положительными направлениями.

Проводим сечение 1, отбрасываем правую часть и рассматриваем равновесие левой части (рис. 7.4):

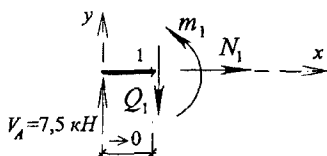


Рис. 7.4. Сечение 1

$$\begin{cases} \sum M_1 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_1 + 7,5 \cdot 0 = 0, \\ N_1 = 0, \\ 7,5 - Q_1 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0, \\ N_1 = 0, \\ Q_1 = 7,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проводим сечение 2, отбрасываем правую часть и рассматриваем равновесие левой части (рис 7.5):

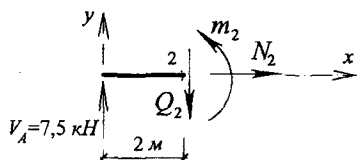


Рис. 7.5. Сечение 2

$$\begin{cases} \sum M_2 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_2 + 7,5 \cdot 2 = 0, \\ N_2 = 0, \\ 7,5 - Q_2 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_2 = 15 \text{ кН}, \\ N_2 = 0, \\ Q_2 = 7,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

Чтобы определить усилия, возникающие в сечении 3, удобнее рассмотреть равновесие правой части балки относительно сечения 3 (рис. 7.6).

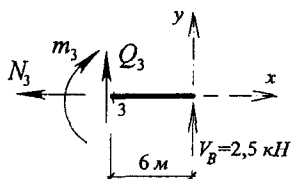


Рис. 7.6. Сечение 3

$$\begin{cases} \sum M_3 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_3 - 2,5 \cdot 6 = 0, \\ N_3 = 0, \\ 2,5 + Q_3 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_3 = 15 \text{ кН}, \\ N_3 = 0, \\ Q_3 = -2,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

Для определения усилий, возникающих в сечении 4, рассматриваем равновесие правой части балки относительно этого же сечения (рис. 7.7).

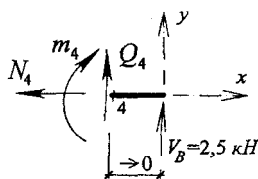


Рис. 7.7. Сечение 4

$$\begin{cases} \sum M_4 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_4 - 2,5 \cdot 0 = 0, \\ N_4 = 0, \\ 2,5 + Q_4 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_4 = 0, \\ N_4 = 0, \\ Q_4 = -2,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

3. Строим эпюры усилий. Для этого по полученным значениям усилий на оси балки под каждым сечением откладываем ординаты, соответствующие этим усилиям. На эпюре Q положительные ординаты откладываем сверху, а отрицательные – снизу. На эпюре изгибающих моментов M отрицательные ординаты откладываем сверху, а положительные – снизу (рис. 7.8).

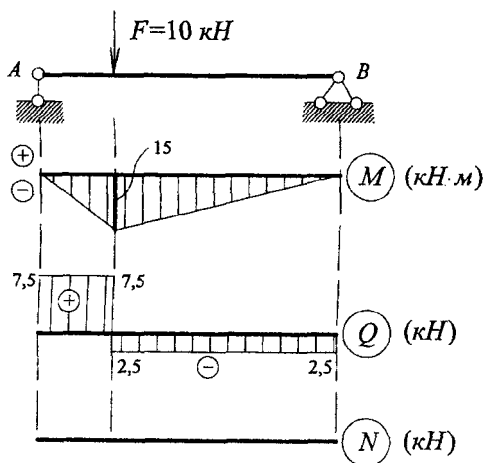


Рис. 7.8. Эпюры изгибающих моментов (M), поперечных (Q) и продольных (N) сил

Пример 8. Для балки, изображенной на рис. 7.9, требуется:

- определить опорные реакции;
- построить эпюры внутренних сил;
- подобрать поперечное сечение (швеллер) из условия прочности по нормальным напряжениям ($[\sigma] = 200 \text{ МПа}$) и проверить его на прочность по касательным напряжениям ($[\tau] = 120 \text{ МПа}$).

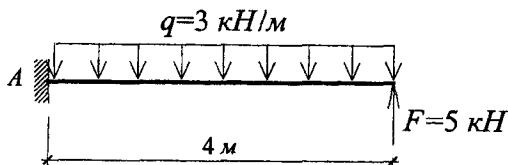


Рис. 7.9. Расчетная схема балки

Решение.

1. Определяем опорные реакции. Так как на балку действуют только вертикальные нагрузки, в жестком защемлении возникают только изгибающий момент и вертикальная реакция (рис. 7.10).

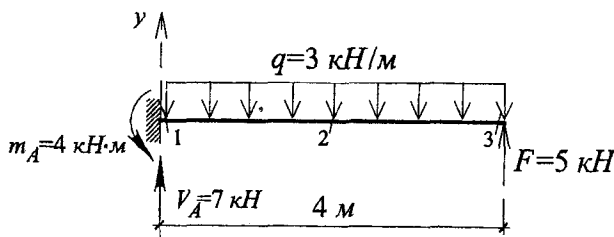


Рис. 7.10. К определению опорных реакций

Для определения опорных реакций составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0, \\ \sum y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_A + 3 \cdot 4 \cdot 2 - 5 \cdot 4 = 0, \\ V_A + 5 - 3 \cdot 4 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_A = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ V_A = 7 \text{ кН}. \end{cases}$$

2. Выбираем характерные сечения (их будет 3, см. рис. 7.10). Для вычисления усилий в характерных сечениях воспользуемся методом сечений. По каж-

дому характерному сечению рассечем конструкцию на две части и рассмотрим равновесие той части, для которой уравнения равновесия проще.

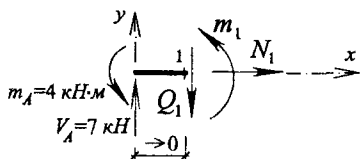


Рис. 7.11. Сечение 1

$$\begin{cases} \sum M_1 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_1 - 4 + 7 \cdot 0 = 0, \\ N_1 = 0, \\ 7 - Q_1 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ N_1 = 0, \\ Q_1 = 7 \text{ кН}. \end{cases}$$

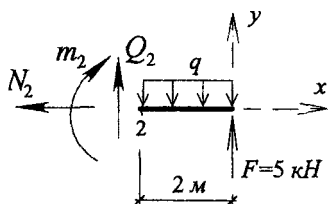


Рис. 7.12. Сечение 2

$$\begin{cases} \sum M_2 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_2 - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 0, \\ N_2 = 0, \\ -3 \cdot 2 + 5 + Q_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_2 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ N_2 = 0, \\ Q_2 = 1 \text{ кН}. \end{cases}$$

Аналогично получим значения усилий в третьем сечении:

$$\begin{cases} m_3 = 0, \\ N_3 = 0, \\ Q_3 = 1 \text{ кН}. \end{cases}$$

3. Строим эпюры усилий по соответствующим значениям в характерных сечениях (рис. 7.13). Т.к. продольные силы во всех сечениях балки равны нулю, то эпюру продольных сил можно не изображать.

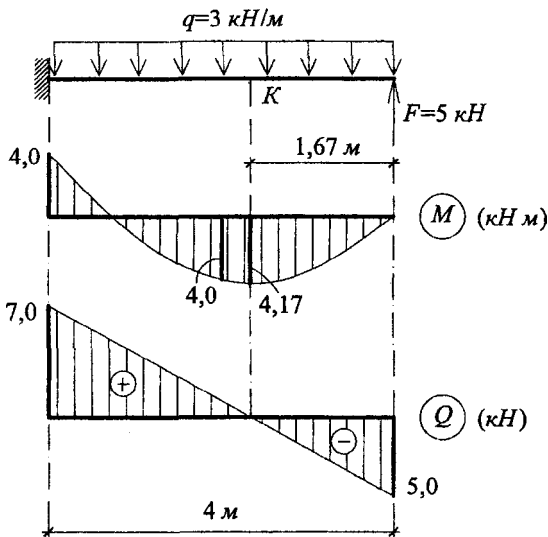


Рис. 7.13. Эпюры изгибающих моментов (M) и поперечных сил (Q)

В точке K значение изгибающего момента примет максимальное значение, т.к. в этом сечении поперечная сила равна нулю. Вычислим расстояние от правого конца балки до сечения K :

$$x = \frac{5}{3} = 1,67 \text{ м.}$$

Значение изгибающего момента в сечении K определим из условия равновесия правой части балки:

$$M_{\max} = 5 \cdot 1,67 - \frac{3 \cdot 1,67^2}{2} = 4,17 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

4. Подберем поперечное сечение (швеллер) из условия прочности по нормальным напряжениям. Для этого воспользуемся формулой (7.4):

$$W_{mp} = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{4,17 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,0199 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 19,9 \text{ см}^3.$$

Принимаем по ГОСТ 8240-89 (приложение 2) швеллер №10, $W_x = 34,8 \text{ см}^3$.

4. Проверим выбранное поперечное сечение на прочность по касательным напряжениям по формуле (7.3)

$$\tau = \frac{7 \cdot 10^3 \cdot 20,4 \cdot 10^{-6}}{0,45 \cdot 10^{-2} \cdot 174 \cdot 10^{-8}} = 18,24 \text{ МПа} < [\tau] = 120 \text{ МПа}.$$

Т.к. условие выполняется, то прочность сечения обеспечена.

Пример 9. Для балки, изображенной на рис. 7.14, требуется:

- определить опорные реакции;
- построить эпюры внутренних сил;
- подобрать поперечное сечение (двутавр) из условия прочности по нормальным напряжениям ($[\sigma] = 210 \text{ МПа}$) и проверить его на прочность по касательным напряжениям ($[\tau] = 120 \text{ МПа}$).

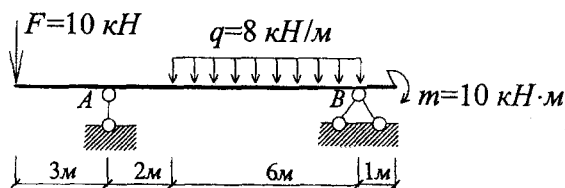


Рис. 7.14. Расчетная схема балки

Решение.

1. Определяем опорные реакции. Так как на балку действуют только вертикальные нагрузки, в шарнирно неподвижной опоре возникает только вертикальная реакция (рис. 7.15).

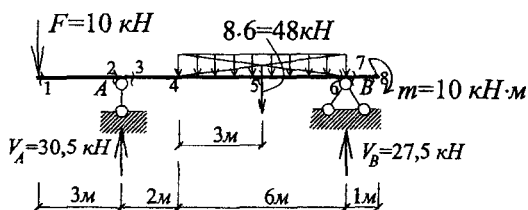


Рис. 7.15. К определению опорных реакций

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10 \cdot 3 + 8 \cdot 6 \cdot 5 - V_B \cdot 8 + 10 = 0, \\ -10 \cdot 11 + V_A \cdot 8 - 8 \cdot 6 \cdot 3 + 10 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B = 27,5 \text{ кН}, \\ V_A = 30,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

Выполним проверку правильности вычисления опорных реакций. Для этого должно удовлетворяться следующее уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0: \quad -10 + 30,5 - 8 \cdot 6 + 27,5 = 58,0 - 58,0 = 0.$$

2. Выбираем характерные сечения (их будет 8, см. рис. 7.15). Для вычисления усилий в характерных сечениях воспользуемся методом сечений.

Для сечений 1-4 удобнее рассмотреть равновесие левой отсеченной части балки, для сечений 5-8 – правой части.

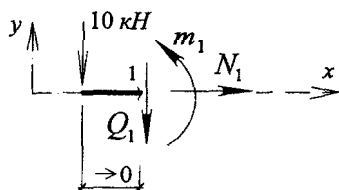


Рис. 7.16. Сечение 1

$$\begin{cases} \sum M_1 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_1 - 10 \cdot 0 = 0, \\ N_1 = 0, \\ -10 - Q_1 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0, \\ N_1 = 0, \\ Q_1 = -10 \text{ кН}. \end{cases}$$

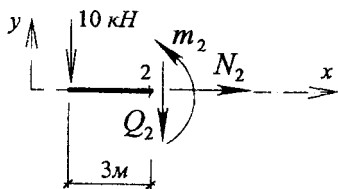


Рис. 7.17. Сечение 2

$$\begin{cases} \sum M_2 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_2 - 10 \cdot 3 = 0, \\ N_2 = 0, \\ -10 - Q_2 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_2 = -30 \text{кН} \cdot \text{м}, \\ N_2 = 0, \\ Q_2 = -10 \text{кН}. \end{cases}$$

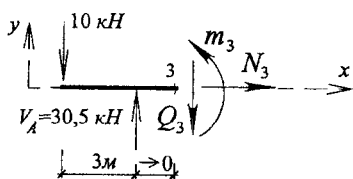


Рис. 7.18. Сечение 3

$$\begin{cases} \sum M_3 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -m_3 - 10 \cdot 3 + 30,5 \cdot 0 = 0, \\ N_3 = 0, \\ -10 + 30,5 - Q_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_3 = -30 \text{кН} \cdot \text{м}, \\ N_3 = 0, \\ Q_3 = 20,5 \text{кН}. \end{cases}$$

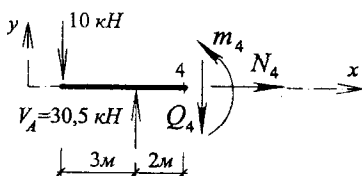


Рис. 7.19. Сечение 4

$$\begin{cases} \sum M_4 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -m_4 - 10 \cdot 3 + 30,5 \cdot 2 = 0, \\ N_4 = 0, \\ -10 + 30,5 - Q_4 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_4 = 11 \text{кН} \cdot \text{м}, \\ N_4 = 0, \\ Q_4 = 20,5 \text{кН}. \end{cases}$$

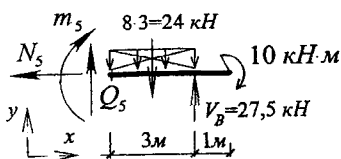


Рис. 7.20. Сечение 5

$$\begin{cases} \sum M_5 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_5 + 24 \cdot 1,5 - 27,5 \cdot 3 + 10 = 0, \\ N_5 = 0, \\ 27,5 - 24 + Q_5 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_5 = 36,5 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ N_5 = 0, \\ Q_5 = -3,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

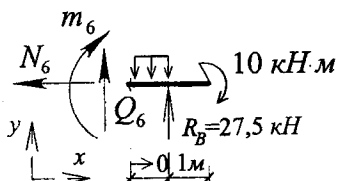


Рис. 7.21. Сечение 6

$$\begin{cases} \sum M_6 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_6 - 27,5 \cdot 0 + 10 = 0, \\ N_6 = 0, \\ 27,5 + Q_6 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_6 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ N_6 = 0, \\ Q_6 = -27,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

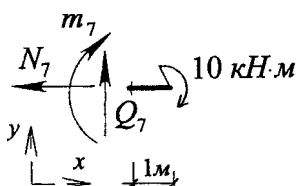


Рис. 7.22. Сечение 7

$$\begin{cases} \sum M_7 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_7 + 10 = 0, \\ N_7 = 0, \\ Q_7 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_7 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ N_7 = 0, \\ Q_7 = 0. \end{cases}$$

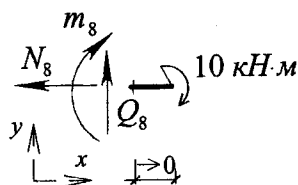


Рис. 7.23. Сечение 8

$$\begin{cases} \sum M_8 = 0, \\ \sum X = 0, \\ \sum Y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_8 + 10 = 0, \\ N_8 = 0, \\ Q_8 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_8 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ N_8 = 0, \\ Q_8 = 0. \end{cases}$$

3. Строим эпюры усилий по соответствующим значениям в характерных сечениях (рис. 7.24). Т.к. продольные силы во всех сечениях балки равны нулю, то эпюру продольных сил можно не изображать.

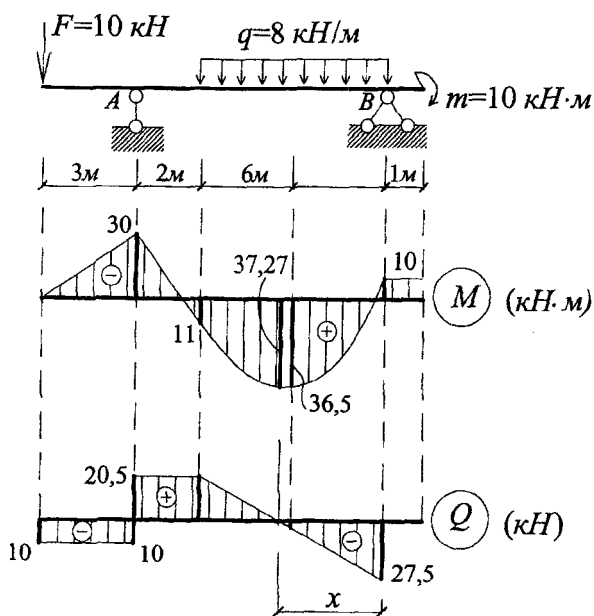


Рис. 7.24. Эпюры изгибающих моментов (M) и поперечных сил (Q)

В точке C значение изгибающего момента примет максимальное значение, т.к. в этом сечении поперечная сила равна нулю. Вычислим расстояние от правого конца балки до сечения C :

$$x = \frac{27,5}{8} = 3,4375 \text{ м.}$$

Значение изгибающего момента в сечении C определим из рассмотрения правой части балки:

$$M_{\max} = -10 + 27,5 \cdot 3,4375 - 8 \cdot 3,4375 \cdot \frac{3,4375}{2} = 37,27 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

4. Подберем поперечное сечение (двутавр) из условия прочности по нормальным напряжениям. Для этого воспользуемся формулой (7.4):

$$W_{тр} = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{37,27 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,1775 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 177,5 \text{ см}^3.$$

Принимаем по ГОСТ 8239-89 (приложение 3) двутавр №20, $W_x = 184,0 \text{ см}^3$.

5. Проверим выбранное поперечное сечение на прочность по касательным напряжениям по формуле (7.3)

$$\tau = \frac{27,5 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 29,89 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена.

Пример 10. Для рамы, изображенной на рис. 7.25, требуется:

- вычислить опорные реакции;
- определить усилия в характерных сечениях стержней и построить эпюры продольных и поперечных сил, изгибающих моментов;
- проверить равновесие узлов.

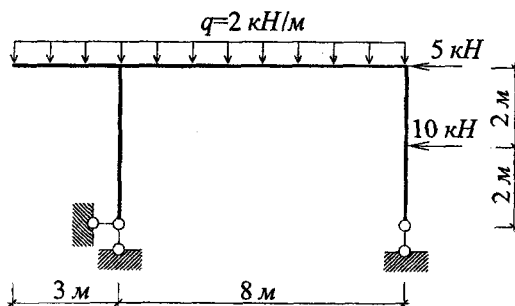


Рис. 7.25. Расчетная схема рамы

Решение.

1. Определяем опорные реакции. Для этого принимаем направления неизвестных опорных реакций как показано на рис. 7.26, и составляем уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum x = 0, \\ \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A - 5 - 10 = 0, \\ 22 \cdot 2,5 - 5 \cdot 4 - 10 \cdot 2 - V_B \cdot 8 = 0, \\ 22 \cdot 5,5 - 5 \cdot 4 - 10 \cdot 2 + V_A \cdot 8 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 15 \text{ кН}, \\ V_B = 1,875 \text{ кН}, \\ V_A = 20,125 \text{ кН}. \end{cases}$$

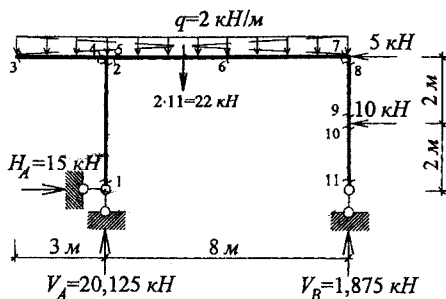


Рис. 7.26. К определению опорных реакций

Выполним проверку правильности вычисления опорных реакций. Для этого должно удовлетворяться следующее уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0: \quad 20,125 + 1,875 - 2 \cdot 11 = 22,0 - 22,0 = 0.$$

2. Выбираем характерные сечения (их будет 10, см. рис. 7.26). Для вычисления усилий в характерных сечениях воспользуемся методом сечений (правила знаков усилий см. п. 7).

$$M_1 = 0, \quad Q_1 = -15 \text{ кН}, \quad N_1 = -20,125 \text{ кН}.$$

$$M_2 = -15 \cdot 4 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (слева)}, \quad Q_2 = -15 \text{ кН}, \quad N_2 = -20,125 \text{ кН}.$$

$$M_3 = 0, \quad Q_3 = 0, \quad N_3 = 0.$$

$$M_4 = -2 \cdot 3 \cdot 1,5 = -9 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (сверху)}, \quad Q_4 = -2 \cdot 3 = -6 \text{ кН}, \quad N_4 = 0.$$

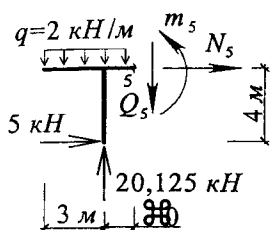


Рис. 7.27. Сечение 5

$$M_5 = -2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 15 \cdot 4 = -69 \text{ кН} \cdot \text{м (сверху)},$$

$$Q_5 = -2 \cdot 3 + 20,125 = 14,125 \text{ кН},$$

$$N_5 = -15 \text{ кН}.$$

$$M_6 = -2 \cdot 7 \cdot 3,5 - 15 \cdot 4 + 20,125 \cdot 4 =$$

$$= -28,25 \text{ кН} \cdot \text{м (сверху)},$$

$$Q_6 = -2 \cdot 7 + 20,125 = 6,125 \text{ кН},$$

$$N_6 = -15 \text{ кН}.$$

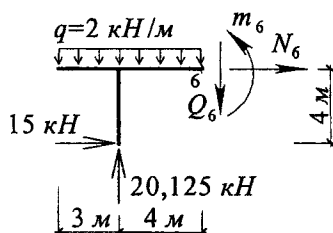


Рис. 7.28. Сечение 6

$$M_7 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м (справа)}, \quad Q_7 = -1,875 \text{ кН}, \quad N_7 = -5 - 10 = -15 \text{ кН}.$$

$$M_8 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м (справа)}, \quad Q_8 = 10 \text{ кН}, \quad N_8 = -1,875 \text{ кН}.$$

$$M_9 = 0, \quad Q_9 = 10 \text{ кН}, \quad N_9 = -1,875 \text{ кН}.$$

$$M_{10} = 0, \quad Q_{10} = 0, \quad N_{10} = -1,875 \text{ кН}.$$

$$M_{11} = 0, \quad Q_{11} = 0, \quad N_{11} = -1,875 \text{ кН}.$$

3. Строим эпюры усилий по соответствующим значениям в характерных сечениях (рис. 7.29).

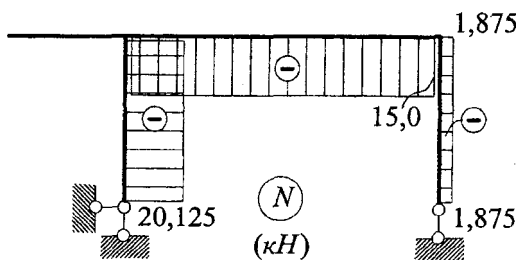
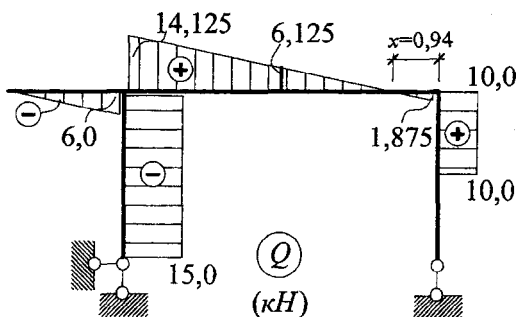
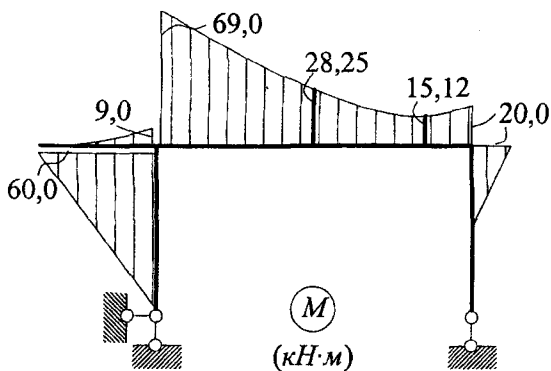


Рис. 7.29. Эпюры изгибающих моментов (M), поперечных (Q) и продольных (N) сил

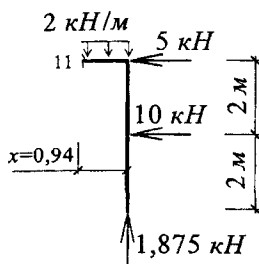


Рис. 7.30. К вычислению изгибающего момента в сечении 11

Так как в сечении 11 эпюра Q пересекает ось стержня, на эпюре изгибающих моментов в этом сечении будет локальный экстремум.

Из эпюры Q (см. рис. 7.29) определяем

$$x = \frac{1,875}{q} = \frac{1,875}{2} = 0,94 \text{ м.}$$

Определяем значение изгибающего момента в сечении 11 (рис. 7.30) и откладываем это значение на эпюре:

$$M_{11} = -2 \cdot 0,94 \cdot 0,47 + 10 \cdot 2 - 1,875 \cdot 0,94 = 15,12 \text{ кН} \cdot \text{м (сверху)}.$$

4. Проверим равновесие узлов рамы. Для этого вырежем два узла рамы (рис. 7.31, 7.32) и составим для каждого из них три уравнения равновесия.

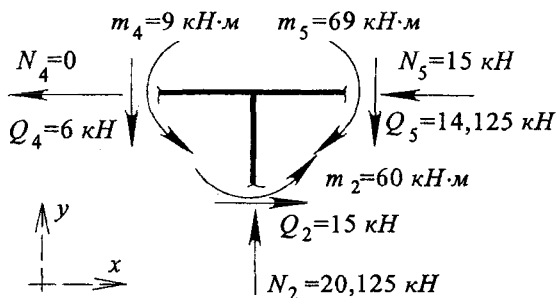


Рис. 7.31. Проверка равновесия трехстержневого узла

$$\begin{cases} \sum X = 0: Q_2 - N_5 = 15 - 15 = 0, \\ \sum Y = 0: N_2 - Q_4 - Q_5 = 20,125 - 6 - 14,125 = 0, \\ \sum M = 0: -m_2 + m_5 - m_4 = -60 + 69 - 9 = 0. \end{cases}$$

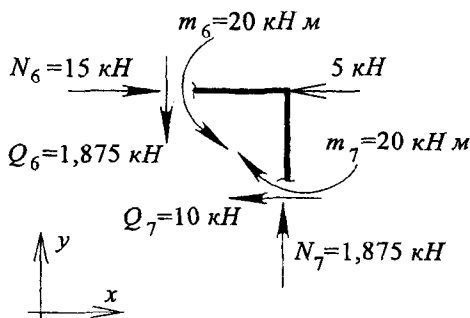


Рис. 7.31. Проверка равновесия двухстержневого узла

$$\begin{cases} \sum X = 0: & -Q_7 + N_6 - 5 = -10 + 15 - 5 = 0, \\ \sum Y = 0: & -Q_6 + N_7 = -1,875 + 1,875 = 0, \\ \sum M = 0: & -m_6 + m_7 = -20 + 20 = 0. \end{cases}$$

Т.к. уравнения равновесия удовлетворяются, то узлы находятся в равновесии.

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПРОСТЫХ БАЛКАХ И РАМАХ

При расчете конструкций возникает необходимость их проверки на жесткость. Для этого необходимо, чтобы наибольшие перемещения Δ_{max} , полученные в результате расчета конструкции (расчетные перемещения), не превосходили некоторой величины (предельных перемещений), называемой допускаемым перемещением $[\Delta]$ (определяются по нормативным документам), т.е. выполнялось неравенство:

$$\Delta_{max} \leq [\Delta]. \quad (8.1)$$

Наиболее удобной и универсальной для определения перемещений в упругих системах является формула Максвелла-Мора. Для упругих балок и рам, нагруженных внешними силами, она имеет следующий вид:

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_k \cdot M_p}{EI_i} \cdot dx, \quad (8.2)$$

где Δ_{kp} – перемещение k -той точки (или сечения) от действия внешней нагрузки;

i – номер участка интегрирования;

n – количество участков интегрирования;

ℓ – длина участка интегрирования вдоль оси стержня;

\overline{M}_k – аналитические выражения изгибающих моментов, продольных и поперечных сил от действия обобщённой единичной силы, приложенной в точке K , перемещение которой необходимо найти, по направлению искомого перемещения;

M_p – аналитическое выражение изгибающих моментов на i -м участке от заданной внешней нагрузки;

EI_i – жёсткость поперечного сечения стержня при изгибе на i -м участке.

Приведем последовательность вычисления перемещений по формуле (8.2):

1. Строится эпюра изгибающих моментов M_p от действия заданной внешней нагрузки (сосредоточенных сил, распределенных нагрузок).

2. Строится эпюра изгибающих моментов \overline{M}_k от действия единичной силы, приложенной в точке (сечении), перемещение которой определяется. Если определяется линейное перемещение (горизонтальное или вертикальное), то единичная сила представляет собой безразмерную сосредоточенную силу $P_k = 1$ (горизонтальную или вертикальную соответственно). Если определяется угол поворота сечения, то единичная сила представляет собой безразмерный сосредоточенный момент $M_k = 1$.

3. Определяются участки интегрирования, в пределах каждого из которых обе эпюры не имеют точек перегиба (перелома) и жесткость на участке постоянная.

4. Вычисляется интеграл (8.2). В формуле (8.2) выражения M_p и \bar{M}_k являются ординатами эпюр, поэтому способ вычисления интеграла часто называют перемножением эпюр. Для вычисления интеграла можно использовать метод непосредственного интегрирования, правило Верещагина, формулу Симпсона. Наиболее удобны для вычисления интегралов последние два метода, поэтому ниже будут приведены особенности вычисления этими способами.

Правило Верещагина

Согласно правилу Верещагина, результат перемножения двух эпюр равен произведению площади ω одной из эпюр на ординату y_c другой эпюры, взятую под центром тяжести площади первой эпюры (рис. 8.1), т.е.

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_k \cdot M_p}{EI} \cdot dx = \frac{1}{EI} \cdot \omega \cdot y_c \quad (8.3)$$

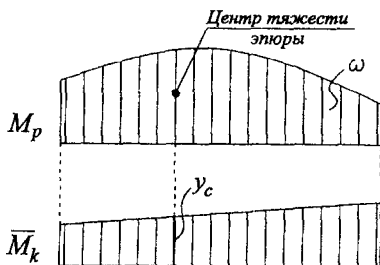
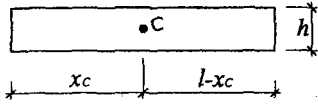
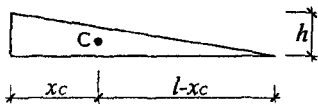
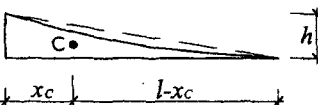
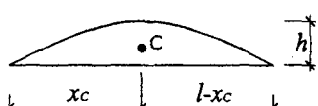
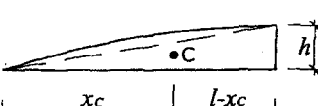


Рис. 8.1. К правилу Верещагина

Правило знаков: если центр тяжести площади одной эпюры и ордината y_c расположены с одной стороны от оси стержня, то принимается знак плюс.

При использовании правила Верещагина приходится вычислять площади различных геометрических фигур и определять положение их центра тяжести. Для упрощения использования этой формулы созданы таблицы, позволяющие быстро определять указанные геометрические параметры (табл. 8.1).

Таблица 8.1 – Площади некоторых фигур и расстояния до их центра тяжести

Фигура	Площадь фигуры	Положение центра тяжести	
		x_c	$l-x_c$
	$h \cdot l$	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}h \cdot l$	$\frac{1}{3}l$	$\frac{2}{3}l$
	$\frac{1}{3}h \cdot l$	$\frac{1}{4}l$	$\frac{3}{4}l$
	$\frac{2}{3}h \cdot l$	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{2}{3}h \cdot l$	$\frac{5}{8}l$	$\frac{3}{8}l$

Формула Симпсона

В случае более сложных эпюр для вычисления интеграла в формуле Максвелла-Мора целесообразно применять формулу Симпсона:

$$\int_0^{\ell} \frac{\bar{M}_k \cdot M_P}{EI} \cdot dx = \frac{\ell}{6EI} \cdot (a \cdot \bar{a} + 4 \cdot b \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{c}), \quad (8.4)$$

где a, \bar{a}, c, \bar{c} – значения изгибающих моментов в крайних точках интервала интегрирования (рис. 8.2);

b, \bar{b} – значения в средних точках интервала интегрирования.

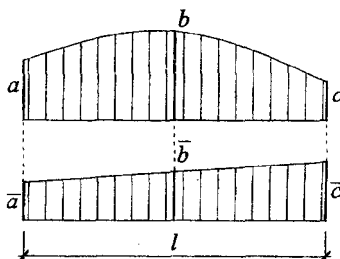


Рис. 8.2. К методу Симпсона

Для увеличения точности результатов интегрирования нужно уменьшить длину участка интегрирования.

Если обе эпюры прямолинейные, ось стержня на участке – прямая линия, а жёсткость $EI = const$, то формула (8.4) с помощью подстановок

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \text{и} \quad \bar{b} = \frac{\bar{a} + \bar{c}}{2},$$

преобразуется в формулу

$$\int_0^{\ell} \frac{\bar{M}_k \cdot M_P}{EI} \cdot dx = \frac{\ell}{6EI} \cdot (2 \cdot a \cdot \bar{a} + a \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot c + 2 \cdot c \cdot \bar{c}), \quad (8.5)$$

которую часто называют формулой трапеций (рис. 8.3).

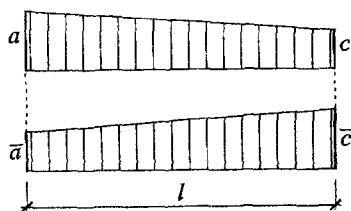


Рис. 8.3. К формуле трапеций (8.5)

Правило знаков: если перемножаемые ординаты эпюр M_p и \bar{M}_k лежат с одной стороны, то принимаем знак плюс (+), в противном случае – знак минус (-).

Согласно этому правилу для эпюр, показанных на рис. 8.4,

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_k \cdot M_p}{EI} \cdot dx = \frac{\ell}{6EI} \cdot (2 \cdot a \cdot \bar{a} - a \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot c - 2 \cdot c \cdot \bar{c}). \quad (8.6)$$

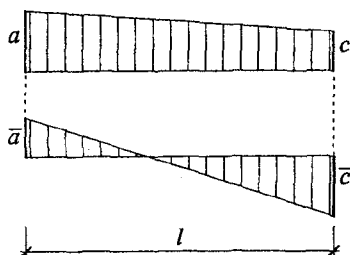


Рис. 8.4. К формуле трапеций (8.6)

Пример 11. Для рамы, изображенной на рис. 8.5, от действующей нагрузки требуется определить:

- горизонтальное перемещение шарнирно подвижной опоры B ;
- угол поворота сечения K .

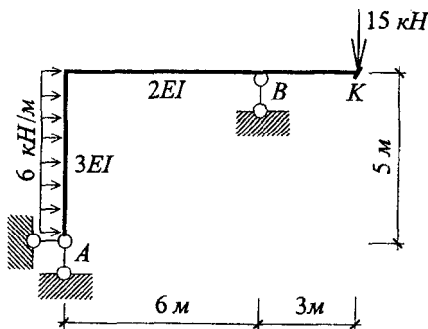


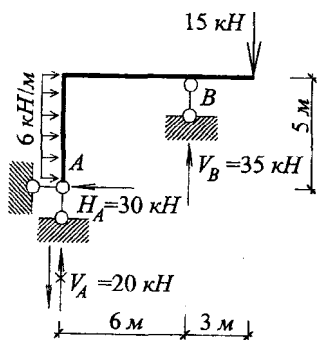
Рис. 8.5. Расчетная схема рамы

Решение.

1. Строим грузовую эпюру M_p (эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки).

1.1. Определяем опорные реакции (рис. 8.6).

Составляем уравнения равновесия:



$$\begin{cases} \sum X = 0: & 5 \cdot 6 + H_A = 0, \\ \sum M_A = 0: & 6 \cdot 5 \cdot 2,5 + 15 \cdot 9 - V_B \cdot 6 = 0, \\ \sum M_B = 0: & 30 \cdot 5 - 6 \cdot 5 \cdot 2,5 + 15 \cdot 3 + V_A \cdot 6 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_A = 30 \text{ кН}, \\ V_B = 35 \text{ кН}, \\ V_A = -20 \text{ кН}. \end{cases}$$

Рис. 8.6. К расчету рамы от заданной нагрузки

1.2. Проверяем правильность вычисления опорных реакций:

$$\sum Y = 0: \quad -20 + 35 - 15 = 35 - 35 = 0.$$

1.3. Выбираем характерные сечения и строим грузовую эпюру (рис. 8.7).

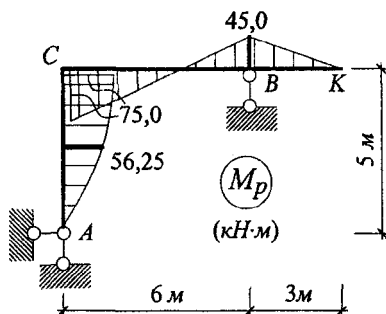


Рис. 8.7. Грузовая эпюра изгибающих моментов от действия заданной нагрузки

2. Определяем горизонтальное перемещение опоры B .

2.1. Строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (эпюру от горизонтальной силы $P = 1$, приложенной в точке B , т.к. определяется горизонтальное перемещение).

Определяем опорные реакции (рис. 8.8):

$$\begin{cases} \sum X = 0: & -1 + H_A = 0, \\ \sum M_A = 0: & -1 \cdot 5 + V_B \cdot 6 = 0, \\ \sum M_B = 0: & -1 \cdot 5 + V_A \cdot 6 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 1, \\ V_B = 5/6, \\ V_A = 5/6. \end{cases}$$

Проверка правильности определения опорных реакций:

$$\sum Y = 0: \quad 5/6 - 5/6 = 0.$$

Выбираем характерные сечения и строим единичную эпюру (см. рис. 8.8).

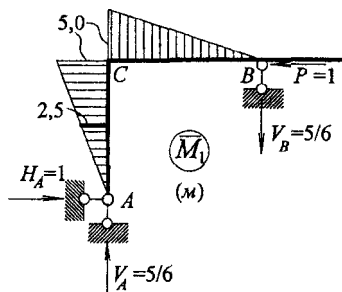


Рис. 8.8. Единичная эпюра изгибающих моментов от действия горизонтальной силы

2.2. Вычисляем горизонтальное перемещение по формуле (8.2). Для перемножения эпюр M_p и M_1 на участке AC будем использовать формулу Симпсона (8.4), а на участке CB – формулу трапеции (8.5):

$$\begin{aligned} \Delta_B^{zop} &= \sum \int \frac{M_p \bar{M}_1 dx}{EI} = \frac{1}{3EI} \frac{5}{6} (0 \cdot 0 - 4 \cdot 56,25 \cdot 2,5 - 75 \cdot 5) + \\ &+ \frac{1}{2EI} \frac{6}{6} (-2 \cdot 75 \cdot 5 + 5 \cdot 45 \cdot 0 + 45 \cdot 5 + 75 \cdot 0) = \\ &= \frac{1}{EI} (-260,417 - 262,5) = -\frac{522,917}{EI} \text{ м.} \end{aligned}$$

Знак «-» показывает, опора B переместится в сторону, противоположную направлению силы P , т.е. вправо.

3. Определяем угла поворота сечения K .

3.1. Строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_2 (эпюру от единичного безразмерного момента, приложенного в точке K , и направленного по часовой стрелке).

Определяем опорные реакции (рис. 8.9):

$$\begin{cases} \sum X = 0: & H_A = 0, \\ \sum M_A = 0: & 1 - V_B \cdot 6 = 0, \\ \sum M_B = 0: & 1 - V_A \cdot 6 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0, \\ V_B = 1/6, \\ V_A = 1/6. \end{cases}$$

Проверка правильности определения опорных реакций:

$$\sum Y = 0: \quad 1/6 - 1/6 = 0.$$

Выбираем характерные сечения и строим единичную эпюру (см. рис. 8.9).

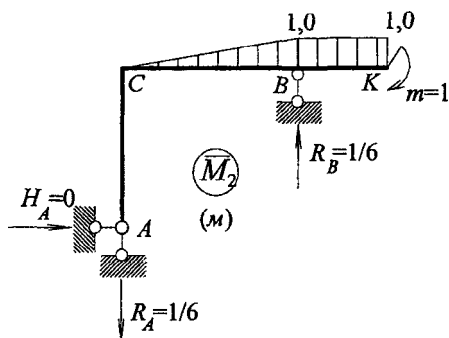


Рис. 8.9. Единичная эпюра изгибающих моментов от действия единичного безразмерного момента

2.2. Вычисляем угловое перемещение по формуле (8.2). Для перемножения эпюр M_p и \bar{M}_2 на участке CB будем использовать формулу трапеции (8.5), а на участке BK – формулу Верещагина (8.3).

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \sum \int \frac{M_p \bar{M}_2 dx}{EI} = \frac{1}{2EI} \frac{6}{6} (-75 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 45) + \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 3 \cdot 1 = \\ &= \frac{1}{EI} (7,5 + 33,75) = \frac{41,25}{EI} \text{ рад.} \end{aligned}$$

Так как φ_B положительно, то сечение K повернется по направлению единичного момента, т.е. по часовой стрелке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по сопротивлению материалов / Афанасьев, А.М. [и др.]. – М.: Высшая школа, 1975. – 290 с.
2. Дарков, А.В., Шпиро, Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1975. – 654 с.
3. Довнар, Е.П., Коршун, Л.И. Строительная механика. – Мн.: Вышэйшая школа, 1986. – 310 с.
4. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механике. Статика стержневых систем / Клейн, Г.К. [и др.]. – М.: Высшая школа, 1980. – 384 с.
5. Мухин, Н.В. Статика сооружений в примерах. – М.: Высшая школа, 1979. – 304 с.
6. Селоков, В.М. Расчетно-проектировочные работы по строительной механике. – Мн.: Вышэйшая школа, 1989. – 205 с.
7. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2002. – 416 с.
8. Беляев, Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1966. – 302 с.
9. Степин, П.А. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1988. – 367 с.

b – ширина полки;

d – толщина полки;

R – радиус внутреннего закругления;

r – радиус закругления полки;

$x-x$ – ось, проходящая через центр тяжести сечения;

z_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.

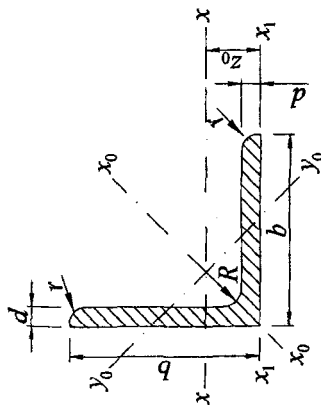


Таблица – Соргамент (сокращенный) уголков равнобоких по ГОСТ 8509-93

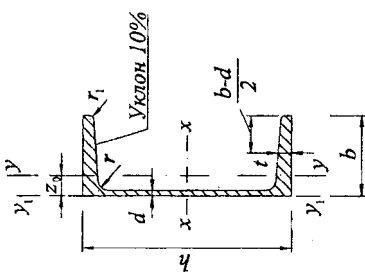
№ профиля	Размеры			Площадь профиля см ²	Справочные величины для осей						Вес 1 пог.м кг		
	b	d	R		$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0			x_1-x_1	z_0
					I_x см ⁴	i_x см	$I_{x_0} \max$ см ⁴	$i_{x_0} \max$ см	$I_{y_0} \min$ см ⁴	$i_{y_0} \min$ см			
1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	40	3	5.0	1.7	3.55	1.23	5.63	1.55	1.47	0.79	6.35	1.09	1.85
					4.58	1.22	7.26	1.53	1.90	0.78	8.53	1.13	2.42
4.5	45	4	5	1.7	5.13	1.39	8.13	1.75	2.12	0.89	9.04	1.21	2.08
					6.63	1.38	10.5	1.74	2.74	0.89	12.1	1.26	2.73
					8.03	1.37	12.7	1.72	3.33	0.88	15.3	1.30	3.37

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	50	3		1.8	2.96	7.11	1.55	11.3	1.95	2.95	1.00	12.4	1.33	2.32
		4	5.5		3.89	9.21	1.54	14.6	1.94	3.80	0.99	16.6	1.38	3.05
		5			4.80	11.2	1.53	17.8	1.92	4.63	0.98	20.9	1.42	3.77
5.6	56	3.5			3.86	11.6	1.73	18.4	2.18	4.80	1.12	20.3	1.50	3.03
		4	6	4.38	13.1	1.73	20.8	2.18	5.41	1.11	23.3	1.52	3.44	
		5		5.41	16.0	1.72	25.4	2.16	6.59	1.10	29.2	1.57	4.25	
6.3	63	4			4.96	18.9	1.95	29.9	2.45	7.81	1.25	33.1	1.69	3.90
		5	7	6.13	23.1	1.94	36.6	2.44	9.52	1.25	41.5	1.74	4.81	
		6		7.28	27.1	1.93	42.9	2.43	11.2	1.24	50.0	1.78	5.72	
7	70	4.5			6.20	29.0	2.16	46.0	2.72	12.0	1.39	51.0	1.88	4.87
		5	8	6.86	31.9	2.16	50.7	2.72	13.2	1.39	56.7	1.90	5.38	
		6		8.15	37.6	2.15	59.6	2.71	15.5	1.38	68.4	1.94	6.39	
7.5	75	7			9.42	43.0	2.14	68.2	2.69	17.8	1.37	80.1	1.99	7.39
		8		10.7	48.2	2.13	76.4	2.68	20.0	1.37	91.9	2.02	8.37	
		9		7.39	39.5	2.31	62.6	2.91	16.4	1.49	69.6	2.02	5.80	
7.5	75	6			8.78	46.6	2.30	73.9	2.90	19.3	1.48	83.9	2.06	6.89
		7	9	10.1	53.3	2.29	84.6	2.89	22.1	1.48	98.3	2.10	7.96	
		8		11.5	59.8	2.28	94.9	2.87	24.8	1.47	113	2.15	9.02	
		9		12.8	66.1	2.27	105	2.86	27.5	1.46	127	2.18	10.1	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	80	5.5			8.63	52.7	2.47	83.6	3.11	21.8	1.59	93.2	2.17	6.78
		6	9	3	9.38	57.0	2.47	90.4	3.11	23.5	1.58	102	2.19	7.36
		7			10.8	65.3	2.45	104	3.09	27.0	1.58	119	2.23	8.51
		8			12.3	73.4	2.44	116	3.08	30.3	1.57	137	2.27	9.65
9	90	6			10.6	82.1	2.78	130	3.50	34.0	1.79	145	2.43	8.33
		7	10	3.3	12.3	94.3	2.77	150	3.49	38.9	1.78	169	2.47	9.64
		8			13.9	106	2.76	168	3.48	43.8	1.77	194	2.51	10.9
		9			15.6	118	2.75	186	3.46	48.6	1.77	219	2.55	12.2
10	100	6.5			12.8	122	3.09	193	3.88	50.7	1.99	214	2.68	10.1
		7			13.8	131	3.08	207	3.88	54.2	1.98	231	2.71	10.8
		8			15.6	147	3.07	233	3.87	60.9	1.98	265	2.75	12.2
		10	12	4	19.2	179	3.05	284	3.84	74.1	1.96	333	2.83	15.1
11	110	12			22.8	209	3.03	331	3.81	86.9	1.95	402	2.91	17.9
		14			26.3	237	3.00	375	3.78	99.3	1.94	472	2.99	20.6
		16			29.7	264	2.98	416	3.74	112	1.94	542	3.06	23.3
		7	12	4	15.2	176	3.40	279	4.29	72.7	2.19	308	2.96	11.9
		8			17.2	198	3.39	315	4.28	81.8	2.18	3.00	13.5	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		8												
12.5	125	9	14	4.6	22.0	327	3.86	520	4.86	135	2.48	582	3.40	17.3
		10				360	3.85	571	4.84	149	2.47	649	3.45	19.1
		12				422	3.82	670	4.82	174	2.46	782	3.53	22.7
		14				482	3.80	764	4.78	200	2.45	916	3.61	26.2
		16				539	3.78	853	4.75	224	2.44	1051	3.68	29.6
		9				466	4.34	739	5.47	192	2.79	818	3.78	19.4
14	140	10	14	4.6	27.3	512	4.33	814	5.46	211	2.78	911	3.82	21.5
		12			32.5	602	4.31	957	5.43	248	2.76	1097	3.90	25.5
		10			31.4	774	4.96	1229	6.25	319	3.19	1356	4.30	24.7
16	160	11	16	5.3	34.4	844	4.95	1341	6.24	348	3.18	1494	4.35	27.0
		12			37.4	913	4.94	1450	6.23	376	3.17	1633	4.39	29.4
		14			43.3	1046	4.92	1662	6.20	431	3.16	1911	4.47	34.0
		16			49.1	1175	4.89	1866	6.17	485	3.14	2191	4.55	38.5
		18			54.8	1299	4.87	2061	6.13	537	3.13	2472	4.63	43.0
		20			60.4	1419	4.85	2248	6.10	589	3.12	2756	4.60	47.4
18.0	180	11	16	5.3	38.8	1216	5.60	1933	7.06	500	3.59	2128	4.85	30.5
		12			42.2	1317	5.59	2093	7.04	540	3.58	2324	4.89	33.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
20	200	12			47.1	1823	6.22	2896	7.84	749	3.99	3182	5.37	37.0
		13			50.9	1961	6.21	3116	7.83	805	3.98	3452	5.42	39.9
		14			54.6	2097	6.20	3333	7.81	861	3.97	3722	5.46	42.8
		16	18	6	62.0	2363	6.17	3755	7.78	970	3.96	4264	5.54	48.7
		20			76.5	2871	6.12	4560	7.72	1182	3.93	5355	5.70	60.1
		25			94.3	3466	6.06	5494	7.63	1438	3.91	6733	5.89	74.0
22	220	30			111.5	4020	6.00	6351	7.55	1688	3.89	8130	6.07	87.6
		14	21	7	60.4	2814	6.83	4470	8.60	1159	4.38	4941	5.93	47.4
		16			68.6	3175	6.81	5045	8.58	1306	4.36	5661	6.02	53.8
		16			78.4	4717	7.76	7492	9.78	1942	4.98	8286	6.75	61.5
		18			87.7	5247	7.73	8337	9.75	2158	4.96	9342	6.83	68.9
		20			97.0	5765	7.71	9160	9.72	2370	4.94	10401	6.91	76.1
25	250	22	24	8	106.1	6270	7.69	9961	9.69	2579	4.93	11464	7.00	83.3
		25			119.7	7006	7.65	11125	9.64	2887	4.91	13064	7.11	94.0
		28			133.1	7717	7.61	12244	9.59	3190	4.89	14674	7.23	104.5
		30			142.0	8117	7.59	12965	9.56	3389	4.89	15753	7.31	111.4



- h — высота;
- b — ширина полки;
- t — толщина полки;
- d — толщина стенки;
- r — радиус внутреннего закругления;
- r_1 — радиус закругления полки;
- Z_0 — расстояние от оси $y-y$ до наружной грани стенки

Таблица — Соргамент швеллеров с параллельными гранями полок по ГОСТ 8240-89

№ Профиля	Размеры						Площадь сечения	Справочные величины для осей						Вес		
	h	b	d	t	r	r_1		$x-x$			$y-y$				Z_0	
								I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y			i_y
							см ²	см ⁴	см ³	см	см ³	см ⁴	см ³	см	кг	
							мм									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
10	100	46	4.5	7.6	7.0	3.0	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44	8.59
12	120	52	4.8	7.8	7.5	3.0	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54	10.4
14	140	58	4.9	8.1	8.0	3.0	15.6	491	70.2	5.60	40.8	45.4	11.0	1.70	1.67	12.3
14a	140	62	4.9	8.7	8.0	3.0	17.0	545	77.8	5.66	45.1	57.5	13.3	1.84	1.87	13.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
16	160	64	5.0	8.4	8.5	3.5	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.3	13.8	1.87	1.80	14.2
16a	160	68	5.0	9.0	8.5	3.5	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2.00	15.3
18	180	70	5.1	8.7	9.0	3.5	20.7	1090	121	7.24	69.8	86.0	17.0	2.04	1.94	16.3
18a	180	74	5.1	9.3	9.0	3.5	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20.0	2.18	2.13	17.4
20	200	76	5.2	9.0	9.5	4.0	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20	2.07	18.4
20a	200	80	5.2	9.7	9.5	4.0	25.2	1670	167	8.15	95.9	139	24.2	2.35	2.28	19.8
22	220	82	5.4	9.5	10.0	4.0	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37	2.21	21.0
22a	220	87	5.4	10.2	10.0	4.0	28.8	2330	212	8.99	121	187	30.0	2.55	2.46	22.6
24	240	90	5.6	10.0	10.5	4.0	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60	2.42	24.0
24a	240	95	5.6	10.7	10.5	4.0	32.9	3180	265	9.84	151	254	37.2	2.78	2.67	25.8
27	270	95	6.0	10.5	11.0	4.5	35.2	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73	2.47	27.7
30	300	100	6.5	11.0	12.0	5.0	40.5	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84	2.52	31.8
33	330	105	7.0	11.7	13.0	5.0	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.59	36.5
36	360	110	7.5	12.6	14.0	6.0	53.4	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10	2.68	41.9
40	400	115	8.0	13.5	15.0	6.0	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.75	48.3

- h — высота;
 b — ширина полки;
 d — толщина стенки;
 t — толщина полки;
 R — радиус внутреннего закругления;
 r — радиус закругления полки

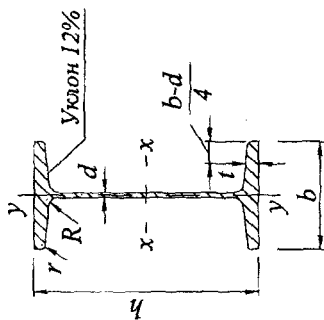


Таблица — Сортамент балок двутавровых по ГОСТ 8239-89

№ профиля	Размеры					Площадь сечения	Справочные величины для осей								Вес I пог. м	
	h	b	d	t	r		x-x				y-y					
							I_x	W_x	i_x	S^*_x	I_y	W_y	i_y			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
	100	55	4.5	7.2	7.0	2.5	12.0	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22	9.46	
	120	64	4.8	7.3	7.5	3.0	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	11.5	
	140	73	4.9	7.5	8.0	3.0	17.4	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.5	1.55	13.7	
	160	81	5.0	7.8	8.5	3.5	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.70	15.9	
	180	90	5.1	8.1	9.0	3.5	23.4	1290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88	18.4	

окончание таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20	200	100	5.2	8.4	9.5	4.0	26.8	1840	184	8.28	104	115	23.1	2.07	21.0
22	220	110	5.4	8.7	10.0	4.0	30.6	2550	232	9.13	131	157	28.6	2.27	24.0
24	240	115	5.6	9.5	10.5	4.0	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37	27.3
27	270	125	6.0	9.8	11.0	4.5	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54	31.5
30	300	135	6.5	10.2	12.0	5.0	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	36.5
33	330	140	7.0	11.2	13.0	5.0	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	42.2
36	360	145	7.5	12.3	14.0	6.0	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	48.6
40	400	155	8.0	13.0	15.0	6.0	71.4	18930	947	16.3	540	666	85.9	3.05	56.1
45	450	160	8.6	14.2	16.0	7.0	83.0	27450	1220	18.2	699	807	101	3.12	65.2
50	500	170	9.5	15.2	17.0	7.0	97.8	39290	1570	20.0	905	1040	122	3.26	76.8
55	550	180	10.3	16.5	18.0	7.0	114	55150	2000	22.0	1150	1350	150	3.44	89.8
60	600	190	11.1	17.8	20.0	8.0	132	75450	2510	23.9	1450	1720	181	3.60	104

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Определение опорных реакций и сил взаимодействия элементов системы	3
2. Метод сечений.....	9
3. Эпюры внутренних сил и их особенности.....	11
4. Расчет прямолинейного составного бруса на прочность при центральном растяжении-сжатии.....	12
5. Вычисление геометрических характеристик составных сечений	21
6. Расчет простых ферм.....	28
7. Расчет простых балок и рам	39
8. Определение перемещений в простых балках и рамах	58
Литература	68
Приложение 1.	69
Приложение 2.	74
Приложение 3.	76

Учебное издание

ТРЕПАЧКО Виктор Михайлович
ЗДАНОВИЧ Татьяна Петровна

ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Учебно-методическое пособие

Технический редактор М.И. Гриневич

Подписано в печать 08.02.2007.

Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 3,63. Тираж 150. Заказ 19.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0131627 от 01.04.2004.

220013, Минск, проспект Независимости, 65.