ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ В ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Немцов В.Б.

Some probability problems in an applied mechanics of the random vibration are discussed.

В Белорусском государственном технологическом университете разработан и читается односеместровый курс по прикладной теории случайных колебаний. Слушателями курса являются успевающие на хорошо и отлично студенты четвертого курса, обучающиеся по специальности «Машины и механизмы лесного комплекса». Рассмотрим структуру и основные особенности указанного курса.

Прежде всего отметим, что при изложении современной теоретической механики мы сталкиваемся с необходимостью привлекать методы теории вероятностей в силу того, что вероятностное описание содержится в исходных принципах механики, определяющих движение и равновесие тел, оно присуще природе механического движения.

Уже при изложении статики приходится указывать, что фактически задашные силы не могут быть определены с абсолютной точностью и не могут рассматриваться как достоверные величины, они всегда находятся с неизбежной погрешностью, их значения имеют некоторый разброс и описываются некоторыми распределениями вероятностей, определяемыми опытным путем.

Особенно часто приходится сталкиваться с вероятностной природой сил в динамике механических систем. Например, зачастую возмущающие силы представляют собой случайный процесс. Хорошо известным примером служит воздействие случайных неровностей дороги на колеса транспортных средств. Под действием возмущающих случайных сил возникают вынужденные случайные колебания.

При введении понятия о начальных условиях мы также встречаемся с неопределенностью значений начальных положений материальных точек и их скоростей в силу невозможности их точного определения. Фактически начальные условия задаются с некоторой погрешностью, имеют неизбежный разброс и могут быть строго описаны в терминах теории вероятностей с помощью некоторых функций распределения.

Если это распределение (для наглядности рассматриваем дисперсию начальных состояний материальных точек) не испытывает существенных изменений (дисперсия неограниченно не возрастает) при последующем движении материальных точек, то возможно однозначно предсказать их движение в том смысле, что можно определить трансформацию начального распределения, обусловленную движением системы. Трансформированная функция распределения позволяет рассчитать средние положения и скорости материальных точек системы и их дисперсии не только при конечном времени движения, но и при $t \to \infty$.

Наглядным примером служит эллипс рассеивания попаданий пуль или снарядов в мишень при конечном времени их движения. Само существование указанного эллипса говорит о разбросе начальных условий для этих тел.

Но если движение неустойчиво, то при $t \to \infty$ дисперсия состояния системы резко увеличивается и мы сталкиваемся в ряде случаев с возникновением детерминированного хаоса. В общем случае можно сказать, что при потере устойчивости происходит качественное изменение функции распределения состояния системы.

Подобные представления фактически содержатся в определении устойчивости движения механических систем, предложенном А.М. Ляпуновым. Но А.М. Ляпунов не вводил вероятностные характеристики начального и последующего состояний движущихся механических систем. Это было сделано М. Борном в 1958 году. Таким образом, следует различать внешний и внутренний характер случайностей, возникающих при движении системы.

В курсе прикладной теории колебаний используются сведения не только из теории вероятностей, но и по теории рядов Фурье и интегралов Фурье. Учитывая, что слушателями являются студенты четвертого курса и что изложение упомянутых разделов математики было, как правило, формальным (оно не насыщалось конкретными примерами), приходится повторить изложение элементов теории рядов и интегралов Фурье, а также теории вероятностей.

При этом экскурсия в математику сопровождается рядом примеров, связанных с механикой лесных машин. При повторении теории вероятностей решаются ряд задач из Сборника задач И.В. Мещерского (в последних изданиях содержатся вероятностные задачи механики).

Например, большой интерес у слушателей вызывает вероятностная задача о торможении автомобиля, о преодолении препятствия дорожным катком и другие задачи. При анализе динамики торможения рассматривается задача о расчете плотности вероятности тормозного пути по известной плотности вероятности для начальной скорости автомобиля при неизменном его замедлении. Небезынтересно, что при нормальном законе распределения начальной скорости распределение вероятности для тормозного пути перестает быть нормальным.

При изложении интегралов Фурье рассматривается задача о вынужденном движении осциллятора при наличии линейных сил сопротивления под действием произвольно изменяющейся со временем возмущающей силы. В результате находится частотная передаточная функция. В физике она называется функцией реакции.

Этот пример позволяет обсудить актуальную задачу о линейном отклике (реакции) не только механической системы но и термодинамической системы на действие возмущающей силы. В итоге студенты получают начальные представления о так называемой теории реакции, играющей важную роль в современной статистической механике неравновесных процессов.

Анализ этого примера приводит к необходимости рассмотреть теорему о свертке двух функций и ее преобразование Фурье. Кроме того вводится понятие о δ-функции и показывается, что функция реакции описывает смещение осциллятора при действии δ-образной возмущающей силы..

Большое внимание уделяется корреляционной теории случайных функций и, в частности, подробно рассматриваются стационарные случайные функции. Здесь анализируются наиболее часто встречающиеся модели корреляционных функций: чисто экспоненциальная функция и функции гармонического типа, модулируемые экспонентой.

Изучается также спектральная теория корреляционных функций, причем изложение сопровождается подробным расчетом спектральных плотностей для введенных ранее моделей корреляционных функций. Рассматривается понятие о белом шуме и с помощью δ-функции определяется вид соответствующей корреляционной функции.

В заключении курса рассматривается определение корреляционных функций по результатам опытов в случае стационарного случайного процесса.

Можно надеяться, что предложенный курс будет иметь важное значение не только при подготовке инженеров-механиков лесного комплекса, но и при обучении специалистов других направлений. Кроме того, рассматриваемый курс усиливает фундаментальную подготовку инженеров и демонстрирует большое прикладное значение фундаментальных наук.

РАСЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ

Локтионов А.В.

Analytical dependencies for calculating speed and acceleration of the point are obtained by matrix method. The given methodology is used for robots—manipulators working in spherical system of coordinates.

В работах [1, 2] скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ в сферической системе координат определяются как частный случай их расчета в ортогональных криволинейных координатах. Для расчета скорости определяются частные производные от декартовых координат x, y, z точки по соответствующим криволинейным q_1, q_2, q_3 и находятся коэффициенты Ляме H_1, H_2, H_3. Модуль скорости v точки определяется из выражения $v^2 = \dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2 H_2^2 + \dot{q}_3 H_3^2$.

Для расчета ускорения также используются коэффициенты Ляме, определяются соответственно частные производные от квадрата скорости по обобщенным криволинейным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ и координатам q_1, q_2, q_3 и полные производные по времени от полученных соответствующих разностей частных производных по $\dot{q}$ и q.

Такая методика расчета кинематических параметров достаточно трудоемка. Искомые $\vec{v}$ и $\vec{a}$ определяются только в проекциях на подвижные сферические оси координат R, φ, Θ связанные с движущейся точкой М.

В работах [3, 4] скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ получены с использованием векторного анализа. Матричное исчисление использовано в работе [3] для преобразования от прямоугольных и цилиндрических к сферическим системам координат.

Рассмотрим матричный метод расчета кинематических параметров в сферических координатах и применим изложенную методику к роботу-манипулятору с тремя степенями подвижности [5, 6].

Аналитические исследования по расчету кинематических параметров точки М (рис. 1, а) матричным методом выполнены для случая, когда она совпадает с началом координат $X_R\, Y_\varphi\, Z_\Theta$. В общем случае, который здесь не рассматривается, координаты X_R, Y_φ, $Z_\Theta \neq 0$.

В прямоугольной неподвижной системе координат xyz положение вектора $\vec{R}$ (рис. 1) определяется текущими координатами x, y, z точки М. В сферической подвижной системе координат положение точки М определяется расстоянием R, углом φ и углом Θ. Введем также подвижные системы координат x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, начало которых находится в точке О. Указанные на рисунке 1, *а, б, в* системы координат составляют между собой углы, косинусы которых образуют матрицы A_φ, A_Θ. Проекции абсолютной скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ точки М определены как на неподвижные оси координат xyz, так и на подвижные сферические оси координат X_R, Y_φ, Z_Θ (R, φ, Θ).