

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЖЕНИЯ ТРЁХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ, СКРЕПЛЕННОГО С УПРУГИМ БЕЗЫНЕРЦИОННЫМ ОСНОВАНИЕМ

*Плескачевский Ю. М., **Кубенко В. Д., ***Старовойтов Э. И., ***Леоненко Д. В.

Рассмотрены собственные и вынужденные колебания упругого трёхслойного стержня, лежащего на упругом основании под действием поверхностной прямоугольной нагрузки. Для описания кинематики несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли. Заполнитель жёсткий, сжимаемый. Основание описывается моделью Винклера. Получены аналитические решения и проведен их численный анализ.

1. Постановка задачи. Широкое применение трёхслойных элементов конструкций в современных отраслях промышленности обуславливает необходимость разработки методов их расчета [1, 2]. Деформирование несимметричного по толщине упругого трёхслойного стержня, не связанного с упругим основанием, исследовано в работе [3]. Статьи [4, 5] посвящены изгибу круговой трёхслойной пластины лежащей на упругом основании. Здесь рассматриваются собственные и вынужденные колебания трёхслойного стержня на упругом основании.

Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта слоёв используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Система координат x, y, z связывается со средней плоскостью заполнителя. Распределенная поверхностная нагрузка $q(x)$ приложена перпендикулярно внешней плоскости первого слоя (рис. 1). На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция основания $q_r(x, t)$. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв; h_k и ρ_k – толщина и плотность k -го слоя ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), $h_3 = 2c$; b_0 – ширина стержня. Все перемещения и линейные размеры стержня отнесены к его длине l .

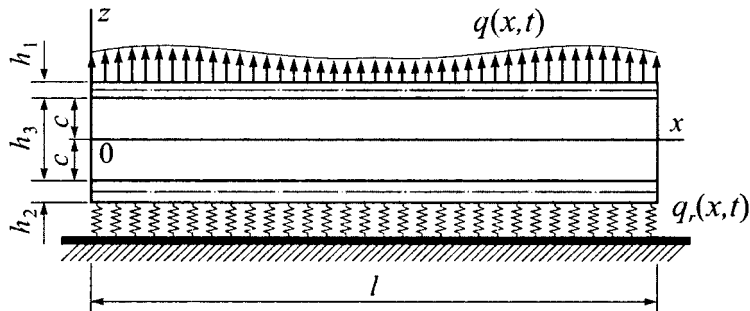


Рис. 1. Расчетная схема трёхслойного стержня

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w_1(x, t)$, $u_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ и $u_2(x, t)$ следующими соотношениями:

▪ в несущих слоях

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}; \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1);$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}; \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

▪ в заполнителе

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{h_1}{4}w_{1,x}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{h_2}{4}w_{2,x}\right);$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c}\right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c}\right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c),$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, например $w_{1,x} \equiv \partial w_1 / \partial x$.

Введем внутренние продольные и поперечные усилия, а также моменты в слоях (интегралы берутся по толщине k -го слоя):

$$N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz; \quad N_z^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} dz; \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz;$$

$$M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz; \quad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz,$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_{zz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений (верхний индекс – номер слоя).

Уравнения движения трехслойного стержня следуют из принципа Лагранжа с учетом работы сил инерции:

$$\delta A - \delta W = \delta A_I. \quad (1)$$

где δA – вариация работы внешних сил; δW – вариация работы внутренних сил упругости; δA_I – вариация работы сил инерции.

При определении работы внешних сил считаем, что к внешней поверхности первого несущего слоя приложена произвольная поперечная нагрузка $q(x, t)$ (см. рис. 1), а к торцам стержня – некоторые усилия и моменты. Тогда

$$\delta A = b_0 \int_0^l \left[p \left(\delta u_1 - \frac{h_1}{2} \delta w_{1,x} \right) + q \delta w_1 - q_r \delta w_2 \right] dx. \quad (2)$$

Вариация работы сил упругости

$$\delta W = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \delta \epsilon_{xx}^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \epsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} \delta \epsilon_{zz}^{(3)} dz \right] dx. \quad (3)$$

Вариация работы сил инерции

$$\delta A_I = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_0^l \int_{h_k} \left[\rho_k (\ddot{w}^{(k)} \delta w^{(k)} + \dot{u}^{(k)} \delta u^{(k)}) \right] dz dx. \quad (4)$$

Здесь две точки над перемещениями обозначают вторую производную по времени, т. е. $\ddot{w} \equiv \partial^2 w / \partial t^2$.

В зависимости от свойств деформируемого основания связь между реакцией и прогибом может быть различной. Рассмотрим случай безынерционного основания – модель Винклера (Winkler E.), согласно которой в нашем случае, т. к. стержень прикреплен к основанию вторым слоем, выполняется следующее соотношение

$$q_r = \kappa_0 w_2. \quad (5)$$

Подстановка вариации работы внешней нагрузки (2), работы внутренних усилий (3) и работы сил инерции (4) в (1) приводит к уравнению, которое должно тождественно выполняться при произвольных значениях варьируемых величин. Это возможно, если коэффици-

енты при независимых вариациях приравнять нулю. В результате приходим к следующей системе уравнений движения рассматриваемого трехслойного стержня в усилиях:

$$\begin{cases} F_1 + \frac{1}{b_0}(H_1 - P_{1,x}) = 0; & F_3 + \frac{1}{b_0}(S_{1,xx} + H_2 - T_{1,x}) = q; \\ F_2 - \frac{1}{b_0}(H_1 + P_{2,x}) = 0; & F_4 + \frac{1}{b_0}(S_{2,xx} - H_2 - T_{2,x}) = -q. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь введены обозначения

$$H_1 = \frac{Q^{(3)}}{2c}; \quad H_2 = \frac{N_x^{(3)}}{2c}; \quad P_1 = \frac{N_x^{(3)}}{2} + \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(1)}; \quad P_2 = \frac{N_x^{(3)}}{2} - \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(2)};$$

$$T_1 = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q^{(3)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}; \quad S_1 = \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_x^{(1)} - M_x^{(1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)};$$

$$T_2 = \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q^{(3)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}; \quad S_2 = -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_x^{(2)} - M_x^{(2)} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)};$$

$$F_1 = m_1 \ddot{u}_1 + m_8 \ddot{u}_2 + 2m_5 \ddot{w}_{1,x} - m_7 \ddot{w}_{2,x}; \quad F_2 = m_8 \ddot{u}_1 + m_2 \ddot{u}_2 + m_5 \ddot{w}_{1,x} - 2m_7 \ddot{w}_{2,x};$$

$$F_3 = -2m_5 \ddot{u}_{1,x} - m_5 \ddot{u}_{2,x} + m_1 \ddot{w}_1 + m_8 \ddot{w}_2 - m_3 \ddot{w}_{1,xx} + m_6 \ddot{w}_{2,xx};$$

$$F_4 = m_7 \ddot{u}_{1,x} + 2m_7 \ddot{u}_{2,x} + m_8 \ddot{w}_1 + m_2 \ddot{w}_2 + m_6 \ddot{w}_{1,xx} - m_4 \ddot{w}_{2,xx},$$

где

$$m_1 = \rho_1 h_1 + \frac{2}{3} \rho_3 c; \quad m_2 = \rho_2 h_2 + \frac{2}{3} \rho_3 c; \quad m_3 = \frac{\rho_1 h_1^3}{12} + \frac{\rho_3 c h_1^2}{6}; \quad m_4 = \frac{\rho_2 h_2^3}{12} + \frac{\rho_3 c h_2^2}{6};$$

$$m_5 = \frac{\rho_3 c h_1}{6}; \quad m_6 = \frac{\rho_3 c h_1 h_2}{12}; \quad m_7 = \frac{\rho_3 c h_2}{6}; \quad m_8 = \frac{\rho_3 c}{3}.$$

В слоях рассматриваемого стержня для связи напряжений и деформаций используются соотношения закона Гука в девiatorно-шаровой форме ($i, j = x, y, z$; $k = 1, 2, 3$ – номер слоя):

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)},$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девiatorная и шаровая части тензора напряжений; $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девiatorная и шаровая части тензора деформаций; G_k , K_k – модули сдвиговой и объемной деформации.

Компоненты тензора напряжений в слоях стержня будут

$$\sigma_{xx}^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)}; \quad \sigma_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}; \quad \sigma_{xx}^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)}; \quad \sigma_{zz}^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)}, \quad (7)$$

где $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k$; $K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k$.

Применяя закон Гука (7), соотношения Коши и выражение (5), получим из (6) систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно четырех неизвестных функций $w_1(x, t)$, $u_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Оставляя в ней из инерционных только те члены, которые учитывают инерцию движения вдоль координатных осей и инерцию вращения нормалей в несущих слоях, выпишем уравнения движения рассматриваемого трехслойного стержня в следующем виде:

$$a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 = 0;$$

$$-a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 \ddot{u}_2 = 0;$$

$$-a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} +$$

$$+ a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 + m_1 \ddot{w}_1 - m_3 \ddot{w}_{1,xx} = q;$$

$$\begin{aligned}
& -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\
& -a_{16} w_{1,xxxx} + a_{13} w_{2,xxxx} - a_8 w_1 + (a_8 + \kappa_0) w_2 + m_2 \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_{2,xx} = 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

где K_k, G_k – объемный и сдвиговой модули упругости материалов слоев;

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{G_3}{2c}; \quad a_2 = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) - \frac{K_3^-}{2}; \quad a_3 = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2}; \quad a_4 = K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \\
a_5 &= \frac{K_3^+ c}{3}; \quad a_6 = \frac{K_3^+ c h_1}{6}; \quad a_7 = \frac{K_3^+ c h_2}{6}; \quad a_8 = \frac{K_3^+}{2c}; \quad a_9 = K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \\
a_{10} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2}; \quad a_{11} = \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; \quad a_{13} = \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6}; \\
a_{12} &= \frac{K_3^- (h_1 + h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) - \frac{G_3 c}{6}; \quad a_{14} = \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; \\
a_{15} &= \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6}; \quad a_{16} = \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12}; \quad a_{17} = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) - \frac{K_3^-}{2}.
\end{aligned}$$

В качестве граничных принимаются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие ограничения для перемещений в сечениях $x = 0; l$ имеют вид:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \tag{9}$$

Начальные условия движения будут ($t = 0$)

$$u_k(x, 0) = u_{k0}(x); \quad \dot{u}_k(x, 0) = \dot{u}_{k0}(x); \quad w_k(x, 0) = w_{k0}(x); \quad \dot{w}_k(x, 0) = \dot{w}_{k0}(x) \quad (k = 1, 2), \tag{10}$$

где $u_0^k(x), \dot{u}_0^k(x), w_0^k(x), \dot{w}_0^k(x)$ – заданные начальные перемещения и скорости точек срединных поверхностей несущих слоев.

Решение начально-краевой задачи (8)–(10) проводится методом Бубнова–Галеркина. Для этого искомые перемещения $u_1(x), u_2(x), w_1(x), w_2(x)$ и нагрузка $q(x, t)$ представляются в виде разложения в ряды по системам базисных функций, удовлетворяющего принятым граничным условиям (9):

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m1}(t); \quad u_2(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m2}(t); \quad q(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} q_m(t); \\
w_1(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m3}(t); \quad w_2(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m4}(t),
\end{aligned} \tag{11}$$

где $q_m(t)$ – коэффициенты разложения нагрузки в ряд

$$q_m(t) = \frac{2}{l} \int_0^l q(x, t) \sin \frac{\pi m x}{l} dx.$$

Подстановка выражений (11) в (8) приводит к системе уравнений для определения функций времени $T_{mi}(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), которая в матричном виде будет:

$$[B]\{T\} + [M]\{\ddot{T}\} = \{Q\} \tag{12}$$

Здесь $[B]$ – квадратная матрица четвертого порядка, составленная из коэффициентов B_{mij} ; $[M]$ – диагональная матрица четвертого порядка с элементами M_{mij} ; $\{T\}$ и $\{\ddot{T}\}$ – векторы, сформированные из искомых функций времени T_{mi} и их вторых производных; $\{Q\}$ – вектор, элементы которого Q_{mk} составлены из коэффициентов разложения нагрузки в ряд:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ b_3 & b_6 & b_8 & b_9 \\ b_4 & -b_7 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix}; \quad \{T\} = \begin{bmatrix} T_{m1} \\ T_{m2} \\ T_{m3} \\ T_{m4} \end{bmatrix}; \quad \{Q\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_m \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 + m_3 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 + m_4 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 \end{bmatrix}; \quad \{\ddot{T}\} = \begin{bmatrix} \ddot{T}_{m1} \\ \ddot{T}_{m2} \\ \ddot{T}_{m3} \\ \ddot{T}_{m4} \end{bmatrix}.$$

Здесь коэффициенты b_i зависят от параметра m и вычисляются через коэффициенты a_i следующим образом:

$$b_1 = a_1 + a_4 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2; \quad b_2 = -a_1 + a_5 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2; \quad b_3 = a_2 \frac{\pi m}{l} + 2a_6 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^3;$$

$$b_4 = a_3 \frac{\pi m}{l} - a_7 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^3; \quad b_5 = a_1 + a_9 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2; \quad b_6 = -a_{10} \frac{\pi m}{l} + a_6 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^3;$$

$$b_7 = a_{17} \frac{\pi m}{l} + 2a_7 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^3; \quad b_8 = -a_{11} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + a_{15} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 + a_8;$$

$$b_9 = a_{12} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 - a_{16} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 - a_8; \quad b_{10} = -a_{14} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + a_{13} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 + a_8 + \kappa_0.$$

Систему (12) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^4 B_{mkj} T_{mj} + M_{mkk} \ddot{T}_{mk} = Q_{mk} \quad (k = 1, \dots, 4). \quad (13)$$

Т. к. матрица $[M]$ диагональная, то от второй суммы осталось только одно k -е слагаемое. Для замыкания задачи к системе (13) необходимо добавить начальные условия (10).

2. Собственные колебания. Предполагается, что внешняя нагрузка отсутствует $q(x, t) = 0$. При этом условии начально-краевая задача (8) – (10) будет описывать собственные колебания трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем, находящимся на упругом основании. Система уравнений движения (13) принимает вид ($Q_{mk} = 0$)

$$\sum_{j=1}^4 B_{mkj} T_{mj} + M_{mkk} \ddot{T}_{mk} = 0 \quad (k = 1, \dots, 4). \quad (14)$$

Ее решение

$$T_{mk}(t) = A_{mk} \sin(\omega_m t + \alpha_{mk}), \quad (15)$$

где A_{mk} – амплитуда; ω_m – частота и α_{mk} – начальная фаза колебаний.

Подстановка выражения (15) в систему (14) приводит к обобщенной задаче на собственные значения:

$$[B]\{A\} = \omega^2 [M]\{A\}, \quad (16)$$

где $\{A\}$ – вектор, сформированный амплитудами A_{mk} .

Обращение в уравнении (16) матрицы $[M]$, так как она не является вырожденной, осуществляет переход к стандартной задаче на собственные значения:

$$[R]\{A\} = \omega^2 \{A\}, \quad [R] = [M]^{-1}[B]; \quad ([R] - \omega^2 E)\{A\} = 0. \quad (17)$$

Система уравнений (17) однородна относительно амплитуд A_{mk} . Нулевое решение в рассматриваемом случае означает отсутствие колебаний. Для нахождения нетривиального решения необходимо потребовать равенство нулю определителя системы. Это приводит к алгебраическому уравнению 4-го порядка относительно ω_m^2 . Решив его, получим четыре вещественных неотрицательных корня. Таким образом, колебательный процесс для каждого значения параметра m оказывается четырехчастотным. Следовательно, вместо решения (15) нужно принять:

$$T_{mk}(t) = \sum_{i=1}^4 A_{mki} \sin(\omega_{mi} t + \alpha_{mi}). \quad (18)$$

Искомые перемещения теперь определяются выражениями (11) с учетом (18). Определение 20 констант интегрирования A_{mki} , α_{mi} для каждого m проводится следующим образом. Если подставить найденные ω_{mi}^2 в систему (14), то для каждого $k = 1, 2, 3, 4$ следует четыре уравнения, из которых три – независимые. К этим двенадцати независимым однородным уравнениям нужно добавить еще восемь неоднородных уравнений, которые определяются из начальных условий (10). Заметим, если все начальные условия нулевые, то и все A_{mki} , α_{mi} будут равны нулю в силу единственности решения однородной алгебраической системы уравнений.

Здесь и далее численное исследование проводилось для трехслойного стержня, набранного из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т.

Зависимость частот ω_{m1} собственных колебаний трехслойного стержня от коэффициента постели κ_0 упругого основания показана на рис. 2 ($c = 0,09$, $h_2 = 0,05$, $h_1 = 0,01$).

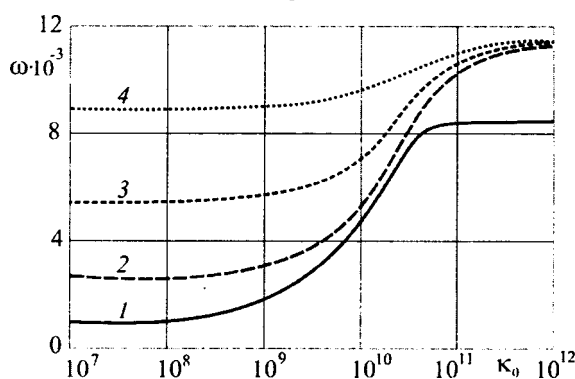


Рис. 2. Зависимость собственных частот колебаний трехслойного стержня от коэффициента жесткости основания κ_0 (Па / м)

Номера кривых совпадает с параметром m , шкала – полулогарифмическая. При основаниях малой и высокой жесткости (до $\kappa_0 = 10^8$ Па / м и после $\kappa_0 = 10^{11}$ Па / м) эта зависимость слабая и частоты изменяются мало. В диапазоне $10^8 < \kappa_0 < 10^{11}$ Па / м рост жесткости основания вызывает существенное увеличение исследуемых частот. Здесь также следует отметить, что при колебаниях рассматриваемого стержня не связанного с упругим основанием,

собственные частоты мало отличаются от соответствующих частот при основании малой жесткости.

3. Вынужденные колебания. Функции времени $T_{mk}(t)$ представляются в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^4 \delta_{mki} \zeta_{mi} \quad \left(\sum_{i=1}^4 \delta_{mik}^2 = 1 \right), \quad (19)$$

где δ_{mki} – амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Функции $\zeta_{mi}(t)$ определяются из системы уравнений

$$\ddot{\zeta}_{mi} + \omega_{mi}^2 \zeta_{mi} = \tilde{q}_{mi}(t), \quad (20)$$

$$\tilde{q}_{mi} = \sum_{k=1}^4 Q_{mk} \delta_{mki} / \sum_{k=1}^4 M_{mkk} \delta_{mki}^2.$$

Общее решение уравнения (20) будет

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi} \cos(\omega_{mi} t) + B_{mi} \sin(\omega_{mi} t) + \frac{1}{\omega_{mi}} \int_0^t \sin(\omega_{mi}(t-\tau)) \tilde{q}_{mi}(\tau) d\tau.$$

В случае действия на стержень динамической поверхностной равномерно распределенной нагрузки q_0 коэффициенты разложения ее в ряд

$$q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q_0 \sin \frac{\pi m x}{l} dx = \frac{2q_0}{\pi m} (\cos \pi m - 1). \quad (21)$$

Соответствующие параметрам (21) функции времени

$$\zeta_{mi}(t) = \frac{2q_0 \delta_{m3i} (1 - \cos(\omega_{mi} t))}{\pi m \omega_{mi}^2 \sum_{k=1}^4 M_{mkk} \delta_{mki}^2} (\cos \pi m - 1). \quad (22)$$

Искомые перемещения $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ описываются формулами (11), с учетом выражений для функций времени (19) и (22).

На рис 3 а, б показано изменение во времени прогибов несущих слоев в середине пролета трехслойного стержня ($h_1 = 0,01$, $h_2 = 0,05$, $h_3 = 0,18$) при различных жесткостях упругого основания (МПа / м): 1 – $\kappa_0 = 1$, 2 – $\kappa_0 = 500$, 3 – $\kappa_0 = 10^4$ (увеличен в 10 раз).

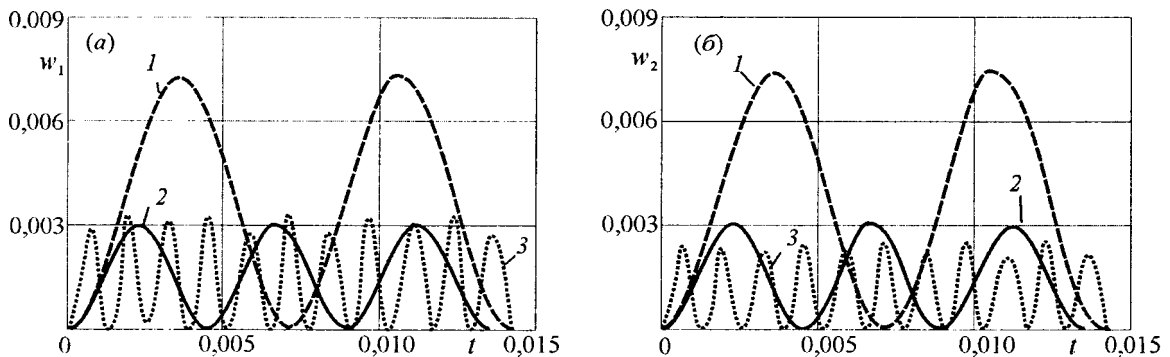


Рис. 3. Изменение прогибов несущих слоев во времени: а – внешнего слоя 1, б – слоя 2, связанного с упругим основанием ($x = 0,5$)

Интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q_0 = 1$ МПа. Увеличение жесткости основания от слабого до среднего вызывает уменьшение амплитуд прогибов в 2,5 раза.

Дальнейшее усиление жесткости до высокой, дополнительно уменьшает прогибы примерно в 10 раз.

При слабых и средних основаниях (1, 2) прогибы несущих слоев мало отличаются друг от друга. В случае основания высокой жесткости (3) амплитуда колебаний слоя, связанного с основанием, меньше на 25 % амплитуды внешнего несущего слоя.

Рис. 4 иллюстрирует изменение амплитуд прогиба (а) и горизонтального перемещения (б) первого несущего слоя вдоль оси стержня при основаниях различной жесткости (МПа/м): 1 – $\kappa_0 = 0$, $t_1 = 3,55 \cdot 10^{-3}$ с, 2 – $\kappa_0 = 1$, $t_2 = 3,544 \cdot 10^{-3}$ с, 3 – $\kappa_0 = 500$, $t_3 = 2,229 \cdot 10^{-3}$ с, 4 – $\kappa_0 = 10^4$, $t_4 = 2,179 \cdot 10^{-4}$ (увеличен в 15 раз). Моменты времени здесь подбирались так, чтобы попасть в амплитудное значение исследуемых величин.

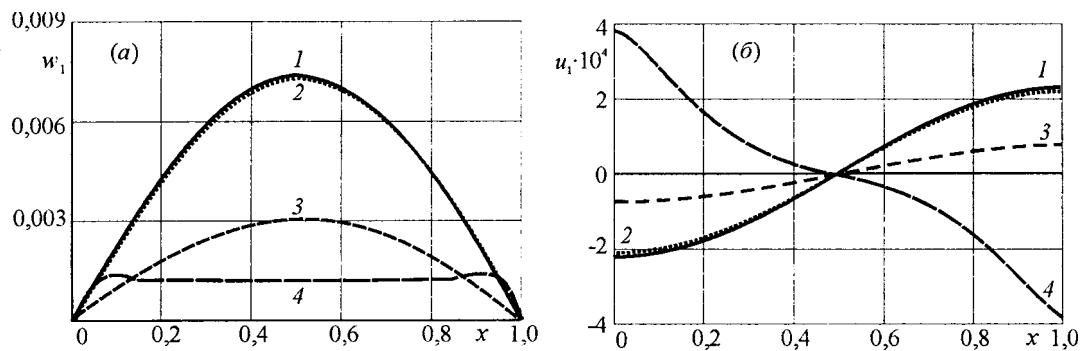


Рис. 4. Изменение прогиба (а) и горизонтального перемещения (б) первого несущего слоя вдоль оси стержня

Амплитуды прогибов стержня на упругом основании малой жесткости (2) и без него (1) различаются по величине не более чем на 3 %. Увеличение жесткости основания до среднего (3) приводит к уменьшению амплитуды в 2,5 раза. При основании высокой жесткости (4) в слое 1 наблюдается характерный обратный отпор – прогиб перестает быть максимальным в середине стержня, максимумы смещаются к опорам.

Поведение амплитуд продольных перемещений срединных поверхностей несущих слоев стержня на упругом основании подобно прогибам. Здесь также с ростом жесткости основания амплитуды перемещений уменьшаются. При этом они мало отличаются в случаях основания малой жесткости и без него.

4. Выводы. Приведенные в работе аналитические и численные результаты, позволяют сделать вывод о существенном влиянии упругого основания средней и высокой жесткости на частоты и перемещения. При колебаниях элементов конструкций на основаниях малой жесткости его влиянием в ряде случаев можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
3. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.
4. Плещачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Металлополимерная пластина на упругом основании. Часть 1. Равномерная нагрузка // Весці НАНБ. Сер. фізіка-тэхнічных навук. – 2005. – № 3. – С. 48–52.
5. Плещачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Металлополимерная пластина на упругом основании. Часть 2. Локальная нагрузка // Весці НАНБ. Сер. фізіка-тэхнічных навук. – 2005. – № 4. – С. 41–45.