

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО СЖИМАЕМОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Яровая А.В.

*Bending of elastic sandwich beam on deformed foundation under the action surface loads is considered. For the kinematics description of carryings layers accepted the hypotheses Bernoulli. filler is hard, compressible. The foundation is described by model Winkler. Received analytical deciding a problem and conducted their numeric analysis.*

**Введение.** В монографиях [1–3] рассмотрено деформирование трехслойных элементов конструкций, не связанных с основанием. Изгиб трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем исследован в статье [4]. Работы [5, 6] посвящены деформированию трёхслойных пластин на упругом основании. Контактное взаимодействие тел с круговыми границами исследовано в [7]. Здесь рассматривается изгиб несимметричного по толщине упругого трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем, покоящегося на деформируемом основании.

**Постановка задачи.** Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли. В жестком сжимаемом по толщине заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты  $z$ . На склейках слоёв используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, деформации малые.

Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1). На стержень действует вертикальная поверхностная нагрузка  $q(x)$ . Через  $w_k(x)$  и  $u_k(x)$  обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв,  $h_k$  – толщина  $k$ -го слоя,  $h_3 = 2c$  ( $k = 1, 2, 3$  – номер слоя),  $b_0$  – ширина стержня. Все перемещения и линейные размеры отнесены к длине стержня  $l$ .

Перемещения в слоях  $u^{(k)}(x, z)$  и  $w^{(k)}(x, z)$  выражаются через четыре искомые функции  $w_1(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $w_2(x)$  и  $u_2(x)$ :

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u_1 - \left( z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}; & w^{(1)} &= w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ u^{(2)} &= u_2 - \left( z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}; & w^{(2)} &= w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \\ u^{(3)} &= \left( 1 + \frac{z}{c} \right) \left( \frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left( 1 - \frac{z}{c} \right) \left( \frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right); \\ w^{(3)} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

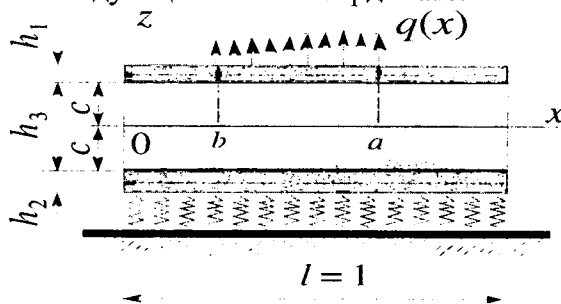


Рис. 1. Расчетная схема стержня на упругом основании

Компоненты тензора деформаций в слоях следуют из (1) с помощью соотношений Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(1)} &= u_{1,x} - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_{1,xx}, \quad \varepsilon_{xz}^{(1)} = 0 \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ \varepsilon_x^{(3)} &= \left(1 + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2} u_{1,x} + \frac{h_1}{4} w_{1,xx}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2} u_{2,x} - \frac{h_2}{4} w_{2,xx}\right), \\ \varepsilon_{xz}^{(3)} &= \left(\frac{2z + h_1}{8c} + \frac{1}{4}\right) w_{1,xx} + \left(\frac{-2z + h_2}{8c} + \frac{1}{4}\right) w_{2,xx} + \frac{u_1 - u_2}{4c}, \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{1}{2c} (w_1 - w_2) \quad (-c \leq z \leq c), \\ \varepsilon_x^{(2)} &= u_{2,x} - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_{2,xx}, \quad \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c).\end{aligned}\quad (2)$$

Введем внутренние силы и моменты:

$$\begin{aligned}N_x^{(k)} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, \\ N_z^{(3)} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} dz, \quad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz,\end{aligned}\quad (3)$$

где  $\sigma_x^{(k)}$ ,  $\sigma_{xz}^{(3)}$ ,  $\sigma_z^{(3)}$  – компоненты тензора напряжений.

Напряжения  $\sigma_{ij}$  после этого определяются из закона Гука. Уравнения равновесия следуют из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A - \delta A_i = 0, \quad (4)$$

где  $\delta A$  – вариация работы внешних сил;  $\delta A_i$  – вариация работы внутренних сил упругости;

$$\delta A = b_0 \int_0^l (q \delta w_1 - q_R \delta w_2) dx;$$

$$\delta A_i = b \int_0^l \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} \delta \varepsilon_z^{(3)} dz \right] dx. \quad (5)$$

В зависимости от свойств деформируемого основания связь между реакцией и прогибом может быть различной. В практике часто используют известную модель Винклера, согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w, \quad (6)$$

где  $\kappa_0$  – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели), причем реакция основания всегда направлена в сторону, противоположную прогибу.

Подставив реакцию (6) и выражения вариаций работ (5) в (4), используя закон Гука, получим систему дифференциальных уравнений в усилиях для рассматриваемого упругого трехслойного стержня, связанного с упругим основанием:

$$\begin{cases} H_1 - P_{1,x} = b_0 p, \\ H_1 + P_{2,x} = 0, \\ S_{1,xx} + H_2 - T_{1,x} = b_0 \left(q + \frac{p_x h_1}{2}\right), \\ S_{2,xx} - H_2 - T_{2,x} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

и силовые граничные условия при  $x = 0, l$ :

$$P_1 = N_p^{(1)}, \quad P_2 = N_p^{(2)}, \quad T_1 - S_{1,x} = Q_p^{(1)}, \quad T_2 - S_{2,x} = Q_p^{(2)}, \quad S_1 = M_p^{(1)}, \quad S_2 = M_p^{(2)}.$$

Здесь  $N_p^{(1)}$ ,  $Q_p^{(1)}$ ,  $M_p^{(1)}$ ,  $N_p^{(2)}$ ,  $Q_p^{(2)}$ ,  $M_p^{(2)}$  – заданные усилия на торцах стержня в несущих слоях; индекс  $p = 0, l$  указывает, на каком конце стержня они приложены; обобщенные усилия, входящие в (7), выражаются через внутренние силы и моменты

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{Q^{(3)}}{2c}, \quad H_2 = \frac{N_z^{(3)}}{2c}, \quad P_1 = \frac{N_x^{(3)}}{2} + \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(1)}, \quad P_2 = \frac{N_x^{(3)}}{2} - \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(2)}, \\
T_1 &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q^{(3)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, \quad S_1 = \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_x^{(1)} - M_x^{(1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)}, \\
T_2 &= \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q^{(3)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, \quad S_2 = -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_x^{(2)} - M_x^{(2)} + \frac{h_2}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)}.
\end{aligned}$$

Для связи напряжений и деформаций в слоях используются соотношения закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (i, j = x, y, z). \quad (8)$$

где  $s_{ij}^{(k)}$ ,  $\sigma^{(k)}$  и  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций,  $G_k$ ,  $K_k$  – модули сдвиговой и объемной деформации.

Используя соотношения (8), (2) и (3), выразим внутренние усилия и моменты через искомые функции  $u_1, w_1, u_2, w_2$ :

$$\begin{aligned}
N_x^{(1)0} &= b_0 \int_c^{c+h_1} \sigma_x^{(1)} dz = b_0 h_1 K_1^+ u_{1,x}, \quad N_x^{(2)0} = b_0 \int_{-c-h_1}^{-c} \sigma_x^{(2)} dz = b_0 h_2 K_2^+ u_{2,x}, \\
N_x^{(3)0} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)} dz = b_0 K_3^- (w_1 - w_2) + b_0 c K_3^+ \left( u_{1,x} + u_{2,x} + \frac{h_1}{2} w_{1,xx} - \frac{h_2}{2} w_{2,xx} \right), \\
N_z^{(3)0} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)} dz = b_0 K_3^+ (w_1 - w_2) + b_0 c K_3^- \left( u_{1,x} + u_{2,x} + \frac{h_1}{2} w_{1,xx} - \frac{h_2}{2} w_{2,xx} \right), \\
M_x^{(1)0} &= b_0 \int_c^{c+h_1} \sigma_x^{(1)} z dz = b_0 K_1^+ \left[ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) u_{1,x} - \frac{h_1^3}{12} w_{1,xx} \right], \\
M_x^{(2)0} &= b_0 \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_x^{(2)} z dz = b_0 K_2^+ \left[ -h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) u_{2,x} - \frac{h_2^3}{12} w_{2,xx} \right], \\
M_x^{(3)0} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)} z dz = b_0 c^2 K_3^+ \left[ \frac{1}{3} u_{1,x} - \frac{1}{3} u_{2,x} - \frac{h_1}{6} w_{1,xx} + \frac{h_2}{6} w_{2,xx} \right], \\
M_{xz}^{(3)0} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)} z dz = \frac{b_0 c G_3}{3} [w_{1,x} - w_{2,x}], \\
Q^{(3)0} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)} dz = b_0 G_3 \left[ u_1 - u_2 + \left( c + \frac{h_1}{2} \right) w_{1,xx} + \left( c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,xx} \right]. \quad (9)
\end{aligned}$$

Подставив реакцию (6) и выражения внутренних усилий через перемещения (9) в (7), получим систему дифференциальных уравнений, описывающую перемещения в рассматриваемом упругом трехслойном стержне, находящемся на упругом основании:

$$\begin{aligned}
a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} &= 0, \\
-a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} &= 0, \\
-a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\
+a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 &= q, \\
-a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xx} - 2a_7 u_{2,xx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\
-a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + (a_8 + \kappa_0) w_2 &= 0. \quad (10)
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $a_n$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{G_3}{2c}; & a_2 &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}; & a_3 &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2}; & a_4 &= K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \\
a_5 &= \frac{K_3^+ c}{3}; & a_6 &= \frac{K_3^+ c h_1}{6}; & a_7 &= \frac{K_3^+ c h_2}{6}; & a_8 &= \frac{K_3^+}{2c}; & a_9 &= K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \\
a_{10} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2}; & a_{11} &= \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; \\
a_{12} &= \frac{K_3^- (h_1 + h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{G_3 c}{6}; & a_{13} &= \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6}; \\
a_{14} &= \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; & a_{15} &= \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6}; & a_{16} &= \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12}; \\
a_{17} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}, & K_k^+ &= K_k + \frac{4}{3} G_k, & K_k^- &= K_k - \frac{2}{3} G_k,
\end{aligned}$$

где  $K_k$  и  $G_k$  – объемный и сдвиговой модули упругости материалов.

Отметим, что коэффициент жесткости упругого основания добавился к коэффициенту  $a_8$  только в четвертом уравнении системы (10).

Примем условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Граничные условия в сечениях  $x = 0, l$  в перемещениях принимают следующий вид:

$$w^k = u^k,_{,x} = w^k,_{,xx} = 0 \quad (k=1, 2). \quad (11)$$

Для решение системы дифференциальных уравнений (10) искомые функции представим в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (11):

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & u_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \\
w_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & w_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right).
\end{aligned} \quad (12)$$

где  $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$  – искомые амплитуды перемещений.

Нагрузку  $q(x)$  также разложим в ряд по синусам:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\frac{\pi m x}{l} dx. \quad (13)$$

Если интенсивность поверхностной нагрузки постоянна, то из (13) следуют коэффициенты

$$q_m = \frac{2q}{\pi m} (1 - \cos(\pi m)).$$

После подстановки выражений для перемещений (12) и нагрузки (13) в уравнения равновесия (10) и соответствующих преобразований, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений  $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ :

$$\begin{cases}
b_1 U_{1m} + b_2 U_{2m} + b_3 W_{1m} + b_4 W_{2m} = 0, \\
b_2 U_{1m} + b_5 U_{2m} + b_6 W_{1m} - b_7 W_{2m} = 0, \\
b_3 U_{1m} + b_6 U_{2m} + b_8 W_{1m} + b_9 W_{2m} = q_m, \\
b_4 U_{1m} - b_7 U_{2m} + b_9 W_{1m} + b_{10} W_{2m} = 0,
\end{cases} \quad (14)$$

где коэффициенты  $b_i$  зависят от параметров  $m, \kappa_0$  и вычисляются через величины  $a_n$ .

Решение системы (14) можно выписать в определителях

$$U_{1m} = \frac{\Delta_{1m}}{\Delta}, \quad U_{2m} = \frac{\Delta_{2m}}{\Delta}, \quad W_{1m} = \frac{\Delta_{3m}}{\Delta}, \quad W_{2m} = \frac{\Delta_{4m}}{\Delta}, \quad (15)$$

где определители

$$\Delta = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ b_3 & b_6 & b_8 & b_9 \\ b_4 & -b_7 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix}; \quad \Delta_{1m} = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ q_m & b_6 & b_8 & b_9 \\ 0 & -b_7 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix};$$

$$\Delta_{2m} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_3 & b_4 \\ b_2 & 0 & b_6 & -b_7 \\ b_3 & q_m & b_8 & b_9 \\ b_4 & 0 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix}; \quad \Delta_{3m} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & 0 & b_4 \\ b_2 & b_5 & 0 & -b_7 \\ b_3 & b_6 & q_m & b_9 \\ b_4 & -b_7 & 0 & b_{10} \end{bmatrix}; \quad \Delta_{4m} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_2 & b_5 & b_6 & 0 \\ b_3 & b_6 & b_8 & q_m \\ b_4 & -b_7 & b_9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисляя определители (15), получим амплитуды перемещений  $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ . Далее по формулам (12) находим искомые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (1), напряжения – из закона Гука (8).

**Численное исследование.** Принимается, что пакет трехслойного стержня составлен из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Нагрузка равномерно распределена по всей длине стержня и прижимает его к упругому основанию. Расчетные коэффициенты жесткости соответствуют слабым ( $\kappa_0 = 1$ ), средним ( $\kappa_0 = 100$ ) и весьма жестким ( $\kappa_0 = 10^5$  МПа/м) упругим основаниям. Интенсивность распределенной нагрузки  $q = -10$  МПа. Относительные толщины слоев  $h_1 = 0,04, h_2 = 0,02, h_3 = 0,18$ .

Соответствующие основанию средней жесткости изменения прогибов  $w_i$  и продольных перемещений  $u_i$  в несущих слоях вдоль оси рассматриваемого стержня приведены на рис. 2, а, б. Номер кривой совпадает с номером слоя. Продольные перемещения по середине стержня равны нулю и меняют свой знак, а у торцов – принимают экстремальные значения. Разность прогибов дает величину полной деформации заполнителя. Здесь везде выполняется условие  $|w_1| > |w_2|$ , что соответствует обжатию заполнителя по всей длине стержня.

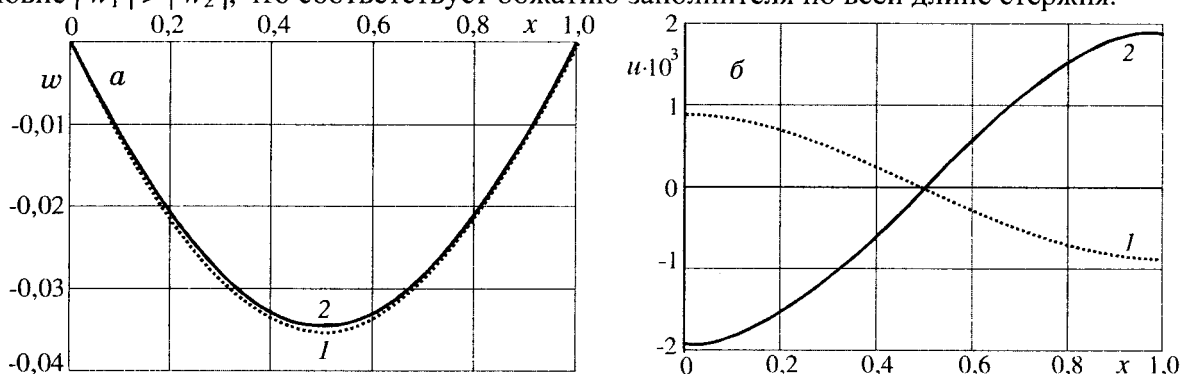


Рис. 2. Изменения прогибов – а и продольных перемещений в несущих слоях – б вдоль оси стержня при основании средней жесткости (номер кривой совпадает с номером слоя)

При коэффициенте постели  $\kappa_0 = 10^5$  МПа / м, что соответствует весьма жестким упругим основаниям, перемещения показаны на рис. 3, а, б. Прогибы здесь резко уменьшаются по величине и перестают быть максимальными в центре стержня, где возникает обратное выпучивание, характерное при деформировании и однородных элементов конструкций на упругом основании высокой жесткости. Экстремумы сдвигаются к сечениям с координатами  $x = 0,22$  и  $x = 0,78$ . Продольные перемещения в несущих слоях уменьшаются на порядок. Номер кривой совпадает с номером слоя.

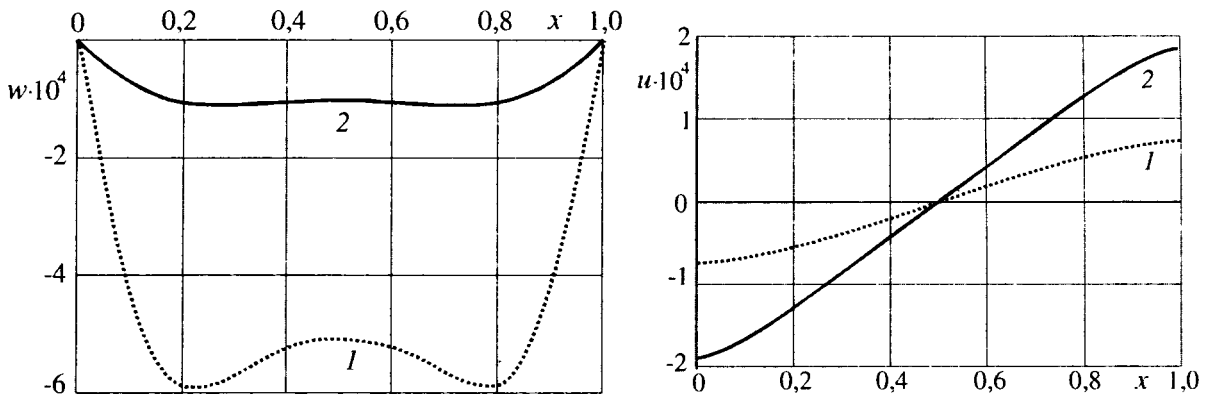


Рис. 3. Прогибы – а и продольные перемещения – б в слоях стержня при основании высокой жесткости (номер кривой совпадает с номером слоя)

Зависимость деформации обжатия заполнителя  $\epsilon_{zz}$  от коэффициента постели (МПа / м) иллюстрирует рис. 4: 1 –  $\kappa_0 = 0$ , 2 –  $\kappa_0 = 1$ , 3 –  $\kappa_0 = 100$ , 4 –  $\kappa_0 = 10^5$ . С увеличением жесткости основания обжатие заполнителя уменьшается по величине. При основании большой жесткости экстремум из центра стержня сдвигается к опорам, как и прогибы несущих слоев. Малое отличие деформаций обжатия заполнителя стержней, не скрепленного с упругим основанием (1) и покоящегося на основании слабой жесткости (2), указывает на возможность отдельных инженерных расчетов без учета влияния основания.

Зависимость величины относительной деформации обжатия заполнителя  $\epsilon_{zz}$  от толщины заполнителя  $h_3$  при различных коэффициентах жесткости упругого основания иллюстрирует рис. 2: 1 –  $\kappa_0 = 1$ , 2 –  $\kappa_0 = 100$ , 3 –  $\kappa_0 = 10^5$  МПа / м. При слабых и жестких основаниях с ростом толщины заполнителя величина относительной деформации уменьшается, если основание средней жесткости – растет. Здесь  $h_1 = h_2 = 0,03$ .

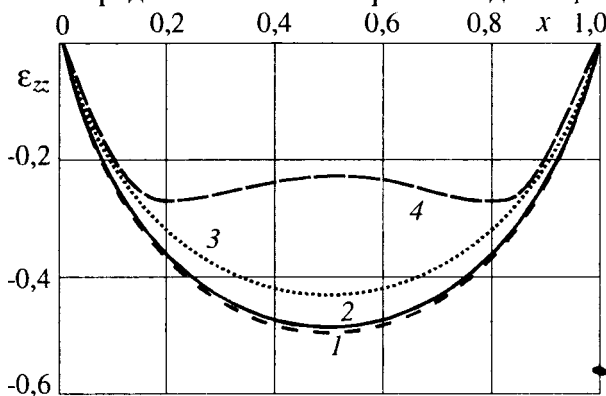


Рис. 4. Деформация обжатия заполнителя  $\epsilon_{zz}$  при различных коэффициентах постели

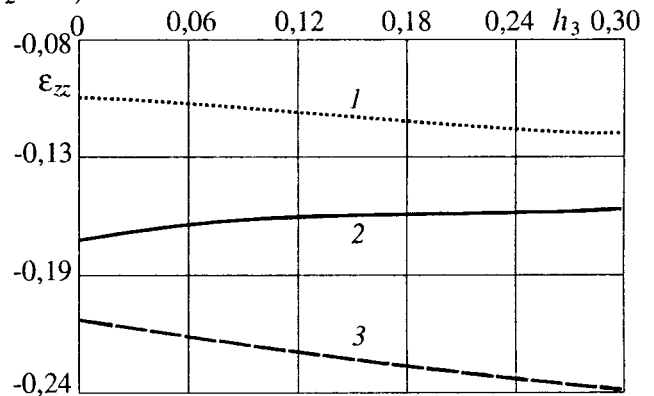


Рис. 5. Зависимость величины деформации обжатия заполнителя  $\epsilon_{zz}$  от толщины заполнителя

На рис. 6 показано изменение нормальных продольных напряжений по толщине стержня при различных коэффициентах постели (МПа / м): 1 –  $\kappa_0 = 0$ , 2 –  $\kappa_0 = 1$ , 3 –  $\kappa_0 = 100$ , 4 –  $\kappa_0 = 10^5$ . Значения напряжений во внешних слоях отнесены к  $q_1 = 10^9$  МПа, в заполнителе – к  $q_3 = 10^7$  МПа. Увеличение жесткости основания приводит к уменьшению величины напряжений в несущих слоях. В заполнителе они также уменьшаются, и при основании большой жесткости меняют знак.

Рис. 7 иллюстрируют изменение поперечных напряжений  $\sigma_{zz}^{(3)}$  в заполнителе вдоль его оси при различных коэффициентах постели (МПа / м): 1 –  $\kappa_0 = 1$  (пунктир), 2 –  $\kappa_0 = 100$  (сплошная), 3 –  $\kappa_0 = 10^5$  (штриховая). Кривые без штриха соответствуют напряжениям в склейке со вторым слоем  $z = -c$ , со штрихом – напряжения в склейке с первым слоем  $z = c$ .

Увеличение жесткости основания до средней величины приводит к существенному уменьшению продольных и поперечных напряжений в заполнителе на склейке с первым слоем. При основании высокой жесткости эти напряжения меняют знак, экстремумы остаются сдвинутыми к опорам. Во второй склейке увеличение жесткости основания приводит к незначительному росту продольных и поперечных напряжений.

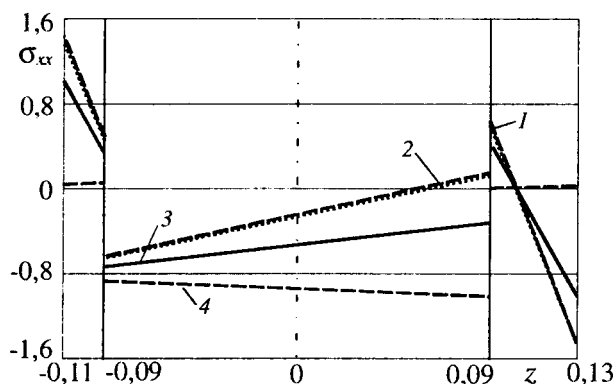


Рис. 6. Изменение нормальных продольных напряжений по толщине стержня

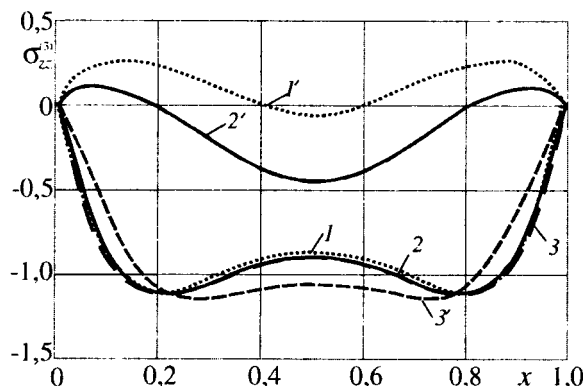


Рис. 7. Изменение нормальных продольных напряжений по толщине стержня

**Выводы.** Сжимаемость заполнителя, структура трехслойного пакета и жесткость упругого основания приводят к существенному изменению напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом стержне.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
2. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Деформирование металлополимерных систем. – Мн.: Бел. наука, 2004. – 342 с.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
4. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Гу Юй. Деформирование трехслойного упругопластического стержня со сжимаемым заполнителем // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – № 19. – С. 67–75.
5. Яровая А.В. Изгиб трехслойной круговой пластины на упругом основании // Проблемы прочности. – 2005. – № 6. – С. 68–78.
6. Яровая А.В. Термоупругий изгиб трехслойной пластины на деформируемом основании // Прикл. механика. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 96–103.
7. Кравчук А.С, Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия. – Мн.: Технопринт, 2000. – 196 с.