Белорусский государственный технологический университет, Минск

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБЩИХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ ВОЗДУХА НА КРОНЫ ДЕРЕВЬЕВ

Немцов В.Б., Борисевич С.А.

The expression for the air resistance force for the flow through the tree crown is obtained. Particular calculations are performed for the ellipsoid crown of a tree.

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди сил, действующих на дерево, важную роль играет сила сопротивления воздуха. Подобная сила возникает при действии на стоящее дерево сил давления ветра либо при движении кроны дерева при падении дерева. Упомянутые выше силы будем называть ветровой нагрузкой. Обычно в инженерных расчетах используют упрощенное представление о форме кроны дерева в виде конуса с треугольной площадью миделевого сечения и с центром тяжести, расположенным на $1/2$ высоты кроны от ее основания. Ветровая нагрузка на крону рассчитывается по формуле:

$$F_K = П_K \cdot P \tag{1}$$

где $П_K$ - лобовая поверхность кроны, воспринимающая давление ветра, м^2;

P – давление ветра, Па.

Лобовую поверхность кроны выражают через площадь миделевого (продольного осевого) сечения кроны A_K и коэффициент ее заполнения сучьями, ветвями, листьями, хвойными лапками и хвоей $K_З$:

$$П_K = A_K \cdot K_З \tag{2}$$

Коэффициент заполнения $K_З$ различен для различных пород дерева, определяется опытным путем и очевидно связан с фрактальной размерностью кроны. В данной работе для расчета ветровой нагрузки используется общий подход, основанный на общих уравнениях механики сплошных сред.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения динамики сплошных сред можно установить на основе фундаментальных общих теорем динамики: теоремы об изменении импульса (количества движения) и теоремы об изменении кинетического момента [1]. Запишем первую теорему:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^e, \tag{3}$$

где $\mathbf{Q}$ – импульс сплошной среды, заключенной в движущемся объеме V, представляется в виде интеграла по этому объему $\mathbf{Q} = \int\limits_V \rho\, \mathbf{v} dV$.

где ρ – плотность среды, $\mathbf{v}$ – вектор скорости среды.

Внешние силы, действующие на движущийся материальный объем V, принято подразделять на массовые и поверхностные.

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{R}_{мас} + \mathbf{R}_{пов} \tag{4}$$

Главный вектор массовых сил $\mathbf{R}_{мас}$ представляется в виде интеграла по объему :

$$\mathbf{R}_{мас} = \int_V \rho \mathbf{f}\, dV, \tag{5}$$

где $\mathbf{f}$ – массовая сила, отнесенная к единице массы.

Главный вектор поверхностных сил $\mathbf{R}_{пов}$ представляется в виде интеграла по поверхности

$$\mathbf{R}_{пов} = \int_S \mathbf{p}\, dS, \tag{6}$$

где $\mathbf{p}$ – вектор напряжения, действующий на поверхность S рассматриваемого объема.

Уравнение (3) применимо не только для движущегося объема среды, но и для неподвижного объема пространства, сквозь который протекает среда [1, 2]. С помощью теоремы об изменении импульса для установившегося движения среды находим силу давления воздуха на крону дерева.

$$\mathbf{R} = -\int_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dS, \tag{7}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности S, по которой выполняется интегрирование.

В нашем случае рассматриваемой средой является воздух. Проходя сквозь крону дерева скорость воздуха уменьшается при этом меняется его импульс и на крону дерева действует сила, что вытекает из уравнения (3). Эту силу сопротивления можно определять не только в случае движения кроны дерева (например, при падении дерева) но и определять ветровую нагрузку на крону неподвижного дерева.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Для определения силы сопротивления кроны дерева воспользуемся уравнением (7). Разложим вектор полной скорости по ортогональному базису, связанному с кроной:

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}_x\mathbf{i} + \mathrm{v}_y\mathbf{j} + \mathrm{v}_z\mathbf{k}. \tag{8}$$

При этом направим ось z параллельно скорости воздушного потока протекающего сквозь крону. В этом случае вектор скорости будет иметь вид:

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}_z\mathbf{k}$$

Тогда уравнение (7) примет вид:

$$\mathbf{R} = -\int_S \rho \mathrm{v}_z\mathbf{k}(\mathrm{v}_z\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\, ds, \tag{9}$$

или

$$\mathbf{R} = -\int_S \rho \mathrm{v}_z^2\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\, ds \tag{10}$$

Скалярное произведение единичных векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{n}$ есть по определению:

$$(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}) = \cos(\mathbf{nk}). \tag{11}$$

Подставляя выражение (11) в (10) получаем:

$$\mathbf{R} = -\int\limits_S \rho v_z^2 \mathbf{k} \cos(\mathbf{nk}) ds . \qquad (12)$$

В дальнейшем будем пользоваться проекцией силы на ось z .

Перейдем от поверхностного интеграла в правой части выражения (12) к двойному ($\cos(\mathbf{nk})ds = dxdy$). Так как поверхность кроны двухсторонняя (рис. 1) необходимо зафиксировать какую либо из ее сторон и принимать площадь проекции со знаком плюс, это равносильно выбору на поверхности определенной ориентации [4]. Поверхность, из которой выходит поток воздуха будем считать положительно ориентированной, поверхность, в которую входит поток будем считать отрицательно ориентированной. В каждой точке поверхности можно определить некоторую функцию скорости. Учитывая вышеперечисленное можем переписать уравнение (12) в следующем виде:

$$\mathbf{R}_e = \int\limits_{D2} \rho v_{z0}^2 dxdy - \int\limits_{D1} \rho v_z^2 dxdy . \qquad (13)$$

где D1 и D2 – плоские фигуры – проекции поверхности кроны на плоскость xy , по которой выполняется интегрирование, v_{z0}, v_z – скорость на поверхности в которую входит и выходит поток. Форма проекции определяется формой кроны.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ПОТОКА ВОЗДУХА

В рассматриваемом случае скорость потока воздуха изменяется благодаря рассеянию частиц воздуха, а также вследствие потери импульса, затраченного на деформацию веток кроны. Детальное рассмотрение взаимодействия воздушного потока с кроной дерева затруднительно, поэтому в дальнейшем применим вероятностный подход. В результате задача прохождения воздушного потока может быть решена на основе вероятностных представлений, подобно тому, как это делается при анализе рассеяния частиц и поглощения излучения [3].

Пусть число неподвижных рассеивающих частиц в единице объема будет n. Заменим каждую рассеивающую частицу мишенью в виде кружка радиусом r и площадью σ, выбранной таким образом, что каждая движущаяся частица, которая пройдет внутри этой мишени испытает отклонение. Площадь σ называется «эффективным сечением» и, соответственно r радиусом эффективного сечения. Произведение $n\sigma$ называется макроскопическим сечением; оно представляет собой сумму эффективных сечений в единице объема.

Рассмотрим ослабление потока частиц при прохождении сквозь слой любой толщины, имея в виду, что каждая частица, испытавшая «соударение», выйдет из параллельного потока и не будет зарегистрирована. Разобьем весь слой на бесконечно тонкие слои dz . Число рассеивающих частиц, приходящихся на каждую единицу площади слоя dz , будет $n\,dz$. Сумма их эффективных сечений равна $\sigma n\,dz$.

Если на переднюю поверхность бесконечно тонкого слоя падает параллельный поток частиц плотностью N , то ослабление потока будет

$$-dN = N\sigma n\,dz , \qquad (14)$$

откуда, интегрируя, получаем

$$N = N_0 e^{-n\sigma z} = N_0 e^{-kz} , \qquad (15)$$

где N_0 – плотность потока частиц на входе в толстый слой. Произведение $n\sigma$ обозначено буквой k .

С другой стороны плотность потока частиц можем представить следующим образом:

$$N = \rho v \tag{16}$$

Сопоставляя выражения (15) и (16) принимаем, что скорость потока воздуха при прохождении его через крону меняется согласно закону:

$$v = v_0 e^{-kz}, \tag{17}$$

где v_0 – начальная скорость потока на входе в крону дерева, z – путь, пройденный выделенным элементом потока через крону.

5. РАСЧЕТ СИЛЫ

Теперь задача свелась к вычислению выражения (13) распространенного на внешнюю поверхность, аппроксимирующую форму кроны (обычно это сфера либо эллипсоид вращения, что зависит от породы дерева).

На поверхности, в которую входит поток, функция скорости постоянна и равна v_0. На поверхности, из которой поток выходит скорость меняется согласно закону (17). Учитывая все вышеперечисленное, получаем:

$$R = \int\limits_{D2} \rho v_0^2 dxdy - \int\limits_{D1} \rho \left(v_0 e^{-kz}\right)^2 dxdy. \tag{18}$$

где D1 и D2 – плоские фигуры – проекции поверхности кроны на плоскость xy, по которым выполняется интегрирование на входе и выходе потока. Будем считать их равными $D1 = D2 = D$.

Плотность воздуха и начальную скорость будем считать постоянными, поэтому вынесем их за знак интегрирования. Получаем:

$$R = \rho v_0^2 \int\limits_D \left(1 - e^{-2kz}\right) dxdy \tag{19}$$

Примем $2k = K$ и перепишем выражение (19)

$$R = \rho v_0^2 \int\limits_D \left(1 - e^{-Kz}\right) dxdy. \tag{20}$$

Рассмотрим частный случай когда форма кроны дерева трехосный эллипсоид (рис 1), уравнение которого следующее [4] :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1. \tag{21}$$

В этом случае область D ограничена координатными осями и эллипсом, уравнение которого в явном виде:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{22}$$

Уравнение поверхности эллипсоида в явном виде будет

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \tag{23}$$

Следовательно, интеграл примет вид:

$$R = 4\rho v_0^2 \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(1 - e^{-Kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \right) dxdy \tag{24}$$

Интегрирование ведется для одной четверти эллипсоида, поэтому перед интегралом (24) появляется четверка.

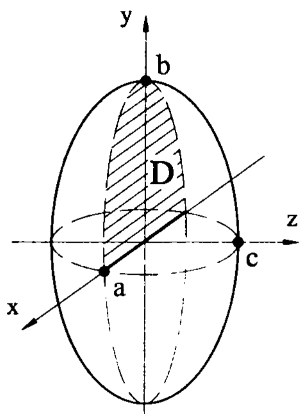

Рис.1. Модель кроны дерева в виде трехосного эллипсоида вращения.

Для решения интеграла (24) необходимо знать значение коэффициента K. Для оценки его величины построим зависимость $R(K)$. Вычислим интеграл (24) численно и получаем искомое значение силы сопротивления. Параметры кроны задаем исходя из реальных размеров крон деревьев [5].

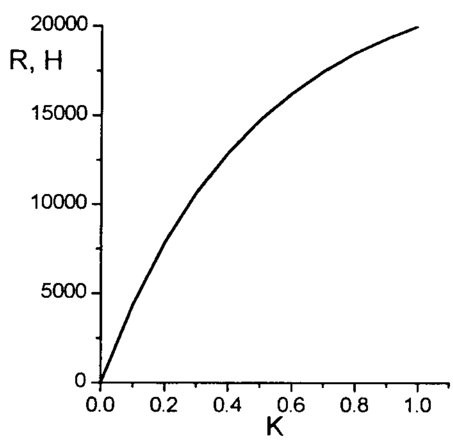

Рис 2. Зависимость силы действующей на крону дерева от коэффициента K (Размеры кроны приняты следующие $a = 3$ м, $b = 5$ м, $c = 3$ м, скорость $v_0 = 20$ м/с).

Значение K равное нулю соответствует абсолютно проницаемой кроне и поэтому сила сопротивления равна нулю. Интересно посмотреть зависимость силы от величины скорости на входе в крону (рис. 3). Значения коэффициента K определяются экспериментально. В качестве примера примем K=0.9.

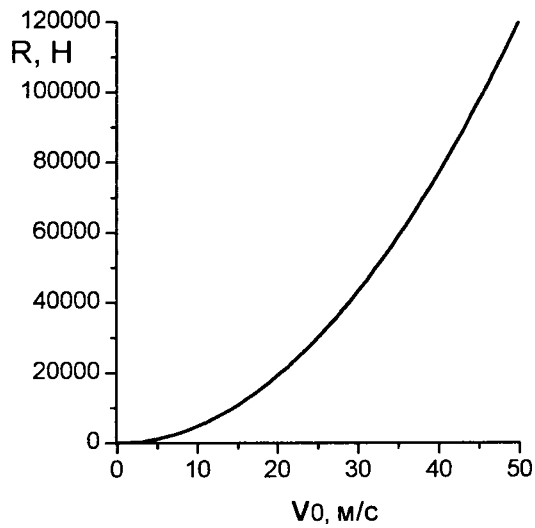

Рис 3. Зависимость силы от скорости движения воздуха на входе в крону(K=0.9).

Подобные расчеты можно привести для различных поверхностей, которые аппроксимируют кроны различных пород деревьев. Для этого нужно поменять пределы интегрирования и уравнение поверхности кроны в интеграле (24).

Коэффициент K очевидно связан с фрактальной размерностью кроны некоторой зависимостью. Установление данной зависимости будет являться темой последующих исследований. Таким образом, из приведенных выше рассуждений видно, что традиционные представления о квадратичном по скорости законе для силы сопротивления воздуха, протекающего через крону дерева, является приближенным. Наша теория позволяет уточнить упомянутый выше закон.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М., 1983. Т 2, – 640 с.

2. Немцов В. Б. Макаревич С. С. Учебно-методическое пособие по разделу «Механика сплошных сред». – Минск, 1980.

3. Шпольский Э.В. Атомная физика. – М., 1974. – 576 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М., 1969. Т 3, – 656 с.

5. Коротаев Л.В. Параметры деревьев и хлыстов как объектов лесозаготовительного производства. – Ленинград: АЛТИ, 1982, – 80 с.