*Воронежский филиал Всероссийского заочного финансово-экономического института. Воронеж*
*Белорусский национальный технический университет. Минск*

# О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

**Поленов В.С., Чигарев А.В.**

*The non-uniform elastic porous environment in which three waves are distributed is considered: two longitudinal and one cross. Intensity of a cross wave is received.*

Динамическому деформированию однородной пористой среды посвящен ряд работ. Среди них важное место занимают работы М.А. Био [1-3], в которых отражена теория распространения упругих стационарных волн в двухкомпонентной среде.

В данной работе изучаются нестационарные волны в неоднородной упругой пористой среде. Пористое тело представляет собой микронеоднородную среду, физико-механические характеристики которой являются функциями координат. Предполагается, что размеры пор малы по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики движения. Это позволяет считать обе среды сплошными, и в каждой точке пространства в этом случае будет два вектора смещения: вектор смещения твердой фазы и вектор смещения газа, который заполняет полость в результате газовыделения или газопоглощения при литье.

Тогда полный тензор напряжений для неоднородной упругой пористой среды запишется в виде [4,5]

$$T_{ik} = \lambda u_{r,r}{}^{(1)}\delta_{ik} + \mu(u_{i,k}{}^{(1)} + u_{k,i}{}^{(1)}) + c\cdot\chi\cdot u_{r,r}{}^{(2)}\delta_{ik}, \tag{1}$$

а силу N, действующую на газ, отнесенную к единице поперечного сечения пористой среды запишем в виде

$$N = c\chi u_{k,k}{}^{(1)} + cR_0 u_{k,k}{}^{(2)}$$

$$\chi = \frac{1-c}{c}\cdot R_0 \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) вместе с уравнениями движения

$$\rho_{11}\ddot{u}_i{}^{(1)} + \rho_{12}\ddot{u}_i{}^{(2)} = T_{ik,k},,$$

$$\rho_1 - \rho_{12}, \rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12}, \tag{3}$$

$$\rho_{12}\ddot{u}_i{}^{(1)} + \rho_{22}\ddot{u}_i{}^{(2)} = N,i$$

представляют замкнутую систему уравнений для описания процесса динамического деформирования неоднородной бесконечной упругой среды с наличием пор.

В формулах (1)...(3) $c = c(x_i)$ – пористость; $\lambda = \lambda(x_i), \mu = \mu(x_i)$ – коэффициенты Ламе; $R_0 = R_0(x_i)$ – модуль сжимаемости фазы, заполненной газом; $\rho_{12} = \rho_{12}(x_i)$ – коэффициент динамической связи твердой фазы и газа в поре; $\rho_1 = \rho_1(x_i)$ и $\rho_2 = \rho_2(x_i)$ – плотность твердой фазы и газа в порах; $\delta_{шл}$ – символ Кронекера; $u_k^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1,2)$ – компоненты перемещения фаз среды.

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам предполагается суммирование от единицы до трех, по греческим – от единицы до двух. Точка над буквой означает производную по времени.

Продифференцировав (1) и (2) по времени t и используя теорию разрывов [6] для основных соотношений с учетом разности значений величин на двух сторонах волновой поверхности $\sum(t)$, аналогично работе [5], получим систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\lambda_j^{(1)}\nu_j\nu_i + \mu\lambda^{(1)}{}_i + c\chi\,\lambda_j^{(2)}\nu_j\nu_i = \rho_{11}G^2\lambda^{(1)}{}_i + \rho_{12}G^2\lambda_i^{(2)} \\
&c\chi\lambda_j^{(1)}\nu_j\nu_i + c\chi\lambda\nu_j\nu_i = \rho_{12}G^2\lambda_i^{(1)} + \rho_{22}G^2\lambda_i^{(2)}
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

где G – нормальная скорость движения поверхности Σ(t) ; $\nu_i$ – компоненты единичной нормали к поверхности ; $\lambda_i^{(\alpha)}{}_{(\alpha=1,2)}$ – величина скачков компонент скоростей перемещений.

Предполагая, что $\lambda_i^{(\alpha)}\nu_i$ не обращаются в нуль на волновой поверхности Σ(t), умножим (4) на $\nu_i$ и просуммируем по повторяющемуся индексу $i$, получим однородную систему уравнений относительно

$$\omega_k = \lambda_i^{(\alpha)}\nu_i \text{ (к=1,2)},$$

решение которой имеет вид:

$$AG_l^4 - BG_l^2 + D = 0, \qquad (5)$$

$$A = \rho_{11}\rho_{22} - \rho^2{}_{12},$$

$$B = -2\rho_{12}c_2 + \rho_{11}c_3 + \rho_{22}c_1,$$

$$D = c_1c_3 - c_2^2,$$

$$c_1 = \lambda + 2\mu, c_2 = c\chi, c_3 = cR_0.$$

Из уравнения (5) следует:

$$G_l^2 = \frac{1}{2A}(B \pm \sqrt{B^2 - 4AD}) \qquad (6)$$

Если $\lambda^{(\alpha)}{}_i\ \nu_i = 0$ на поверхности $\sum(t)$ при условии, что не все $\lambda^{(\alpha)}{}_i$ равны нулю одновременно, то из (4) получим:

$$\begin{aligned} &(\mu - \rho_{11} G_t{}^2)\lambda_i{}^{(1)} - \rho_{12} G_t{}^2 \lambda^{(2)}{}_i = 0 \\ &\rho_{12} G_t{}^2 \lambda_i{}^{(1)} + \rho_{22} G_t{}^2 \lambda_i{}^{(2)} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Из системы уравнений (7) следует, что скорость поперечной волны определяется равенством:

$$G^2{}_t = \rho_{22}(A)^{-1} \tag{8}$$

Таким образом, в упругой неоднородной пористой среде распространяются две продольные и одна поперечная волны, скорости которых определяются по формулам (6) и (8).

Вычислим интенсивность поперечной волны. Для этого продифференцируем (1) и (2) дважды по t и $x_j$ и, записав полученные соотношения в разрывах с учетом геометрических и кинематических условий совместности второго порядка [6] для поперечной волны после преобразований, получим дифференциальное уравнение, определяющее изменение интенсивности $W_t{}^{(1)}$ поперечной волны в процессе ее распространения в неоднородной упругой пористой среде:

$$\frac{dW_t{}^{(1)}}{ds} = (\Omega_t - \frac{1}{2}\frac{d(\ln G_t \mu)}{ds})W_t{}^{(1)}, \tag{9}$$

где $\Omega_e$ – средняя кривизна поверхности $\sum(t)$, s – расстояние по нормали к поверхности $\sum(t_0)$.

При выводе уравнения (9) учитывалось, что

$$\frac{\delta\lambda_i{}^{(1)}}{\delta t} = G_t \frac{d\lambda_i{}^{(1)}}{ds}.$$

Уравнение (9) не замкнуто, так как содержит среднюю кривизну $\Omega_t$, являющуюся геометрической характеристикой распространяющегося фронта волны. Согласно [7,8] и формулам (8) получим уравнение для $\Omega_t$ в лучевой системе координат

$$\frac{d\Omega_t}{ds} = 2\Omega^2{}_t - K_t + \frac{1}{2}Q_1, \tag{10}$$

где K – гауссова кривизна поверхности $\sum(t)$, которая определяется из уравнения:

$$\frac{dK_t}{ds} = 2\Omega_t K_t + \frac{1}{2}\Omega_t Q_1 - Q_2, \tag{11}$$

$$Q_1 = C_t^{-1} C_{t,\alpha\beta} q^{\alpha\beta},$$

$$Q_2 = C_t^{-1} C_{t,\alpha\beta} b^{\alpha\beta}$$

$$C_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_{11}}},$$

где $g^{\alpha\beta}$ – контравариантные коэффициенты первой фундаментальной квадратичной формы;

$b^{\alpha\beta}$ – коэффициенты второй квадратичной формы.

Решения уравнений (10) и (11) приведены в работах [7,8].

Определим уровень амплитуды, удовлетворяющий уравнению (9) и начальным условиям:

$$W_t^{(0)}(0) = W_{0t}^{(0)},$$

$$W_t^{(i)}(0) = 0, \qquad (12)$$

$$\text{i} = 1,2,\ldots$$

Подставляя

$$W_t = \sum_{n=o}^{\infty} W_t^{(n)}$$

в уравнение (9) и решая методом последовательных приближений, получим:

$$\frac{dW_t^{(0)}}{ds} = \Omega_t^{(0)} W_t^{(0)},$$

$$\Omega_t^{(0)} = \frac{\Omega_0 - K_0 s}{1 - 2\Omega_0 s + K_0 s}; \qquad (13)$$

$$\frac{dW_t^{(1)}}{ds} = \Omega_t^{(0)} W_t^{(1)} + (\Omega_t^{(1)} - f^{(1)}) W_t^{(0)}; \qquad (14)$$

$$\frac{dW_t^{(2)}}{ds} = \Omega_t^{(0)} W_t^{(2)} + (\Omega_t^{(1)} - f^{(1)}) \Omega_t^{(1)} + \Omega_t^{(2)} W_t^{(0)} \qquad (15)$$

Решения уравнений (13)...(15) при начальных условиях (12) в предположении, что в начале волна является плоской, то есть $\Omega^{(1)} = K^{(1)} = 0$, будут записаны в виде:

$$W_t^{1(0)} = \frac{W_{t0}^{\ 1}}{\sqrt{\psi}}, \qquad (16)$$

$$\psi = 1 - 2\Omega_0 s + K_0 s^2;$$

$$W_t^{1(1)} = -\frac{W_{t0}^{\ 1}}{\sqrt{\psi}} \int_0^s f^{(1)}(s) ds,$$

$$f^{(1)}(s) = \frac{1}{2} \frac{d(\ln G_t \mu)}{ds}; \tag{17}$$

$$W_t^{1(2)} = \frac{W_{t0}^{\ 1}}{\sqrt{\psi}} \int_0^s \int_0^s f^{(1)}(s_1) f^{(2)}(s_2) ds_1 ds_2 + \int_0^s \Omega_t^{(2)}(s_2) ds_2 \tag{18}$$

Тогда:

$$W_t^1 = \frac{W_{t0}^{\ 1}}{\sqrt{\psi}} (1 + \int_0^s f^{(1)}(s_1) ds_1 + \int_0^s \Omega_t^{(2)}(s_2) ds_2 + \int_0^s \int_0^s f^{(1)}(s_1) f^{(1)}(s_2) ds_1 ds_2 \tag{19}$$

Из второго равенства (7) находим $W_t^2$

$$W_t^2 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} W_t^{(1)} \tag{20}$$

Формулы (19) и (20) дают выражения для определения интенсивности поперечной упругой волны в неоднородной пористой среде.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Био М.А. Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды. // Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. – 1956. №1.-С. 140-146.

2. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. // J.Appl. Phys. - 1953. V.26. №2. P. 182-185.

3. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. // J.Acoust. Soc. America. - 1956. V.28. №2. P.168-178.

4. Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах. // ПММ. - 1959. Т.23. Вып.6. - С. 1115-1123.

5. Масликова Т.И., Поленов В.С. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах. // МТТ. –2005. №1. – С. 104 108.

6. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – М.: Мир. 1964. – 308с.

7. Поленов В.С., Чигарев А.В. Распространение волн в неоднородной вязкоупругой среде с начальными напряжениями. // ПММ. - 1994. Т.58. №3. - С. 181-185.

8. Чигарев А.В. К геометрии волновых фронтов в неоднородных средах. // Акустический журнал. - 1980. Т. 26. Вып. 6. - С. 905-911.