Белорусский национальный технический университет, Минск

БИОМЕХАНИКА ОДНООПОРНОГО ПРОТЕЗА

Крушевский А. Е.

1. Представление модели опорных корней протеза в виде составного эллиптического гиперболоида, произвольно ориентированного в пространстве. Как известно, корни зубов могут отклоняться в ту или иную сторону от вертикали. Кроме того, плоскость симметрии каждого вертикального корня также наклонена под различными углами по отношению к основной вертикальной плоскости симметрии человеческого тела. Обозначим угол наклона плоскости симметрии вертикального корня к основной плоскости симметрии тела через "α". Угол поворота корня зуба вокруг горизонтальной оси, лежащей в плоскости симметрии зуба обозначим через "β". Наконец, угол поворота вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости симметрии зуба, обозначим через "δ". Итак, определяем положение корня зуба по отношению системе координат xyz, жестко связанной с основной плоскостью симметрии тела, тремя координатами x_0, y_0, z_0 начала локальной координатной системы x^*, y^*, z^*, жестко связанной с определенным корнем зуба, и тремя углами поворота локальной системы (α, β, δ).

Переход от основной системы координат x, y, z к локальной x^*, y^*, z^* осуществляем перемножением матриц.

$$\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\delta, 0, -\sin\delta \\ 0, \quad 1, \quad 0 \\ \sin\delta, 0, \cos\delta \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} 1, \quad 0, \quad 0 \\ 0, \cos\beta, \sin\beta \\ 0, -\sin\beta, \cos\beta \end{Bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \cos\alpha, \sin\alpha, 0 \\ -\sin\alpha, \cos\alpha, 0 \\ 0, \quad 0, \quad 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \right) \right] =$$

$$= \begin{Bmatrix} \cos\delta, 0, -\sin\delta \\ 0, \quad 1, \quad 0 \\ \sin\delta, 0, \cos\delta \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} 1, \quad 0, \quad 0 \\ 0, \cos\beta, \sin\beta \\ 0, -\sin\beta, \cos\beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z \end{Bmatrix} \right] =$$

$$= \begin{Bmatrix} \cos\delta, 0, -\sin\delta \\ 0, \quad 1, \quad 0 \\ \sin\delta, 0, \cos\delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)\cos\beta + z\sin\beta \\ -(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)\sin\beta + z\cos\beta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{cases} (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\cos\delta + (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)\sin\beta\sin\delta - z\cos\beta\sin\delta \\ (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)\cos\beta + z\sin\beta \\ (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\sin\delta - (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)\sin\beta\cos\delta + z\cos\beta\cos\delta. \end{cases}$$

Окончательно формулы перехода с учетом переноса начала координат запишутся:

$$x^* = (x - x_0)(\cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\beta\sin\delta) + (y - y_0)(\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\cos\beta\sin\delta) - (z - z_0)\cos\beta\sin\delta,$$

$$y^* = -(x - x_0)\sin\alpha\cos\beta + (y - y_0)\cos\alpha\cos\beta + (z - z_0)\sin\beta, \qquad (1)$$

$$z^* = (x - x_0)(\cos\alpha\sin\delta + \sin\alpha\sin\beta\cos\delta) + (y - y_0)(\sin\alpha\sin\delta - \cos\alpha\sin\beta\cos\delta) + (z - z_0)\cos\beta\cos\delta.$$

Уравнение поверхности эллиптического гиперболоида в локальных координатах записывается в форме [1].

$$F = z^* - H\sqrt{\left(\frac{x^*}{a_k}\right)^2 + \left(\frac{y^*}{b}\right)^2 + d^2} = 0.$$

Следовательно, чтобы получить уравнение поверхности эллиптического гиперболоида в основных координатах x, y, z нужно заменить x*, y*, z* по формулам перехода (1).

2. Вычисление интегралов при задании формы опорных корней протеза в виде составного эллиптического гиперболоида. Для вычисления интегралов нам понадобятся сначала частные произвольные от функции F (x, y, z). Поскольку будем вычислять интегралы в обобщенных цилиндрических локальных координатах $x^*=\alpha_k r\cos\theta$, $y^*=b\, r\sin\theta$,

$z^*=H\sqrt{r^2+d^2}$, то производные запишем в цилиндрических координатах.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\cos\alpha\sin\delta+\sin\alpha\sin\beta\cos\delta-\frac{Hr}{\sqrt{r^2+d^2}}\left[\frac{(\cos\alpha\cos\delta-\sin\alpha\cos\beta\sin\delta)\cos\theta}{\alpha_k}-\frac{\sin\alpha\cos\beta\sin\theta}{b}\right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\sin\alpha\sin\delta-\cos\alpha\sin\beta\cos\delta-\frac{Hr}{\sqrt{r^2+d^2}}\left[\frac{(\sin\alpha\cos\delta+\cos\alpha\cos\beta\sin\delta)\cos\theta}{\alpha_k}+\frac{\cos\alpha\cos\beta\sin\theta}{b}\right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\cos\beta\cos\delta-\frac{Hr}{\sqrt{r^2+d^2}}\left[\frac{-\cos\beta\sin\delta\cos\theta}{\alpha_k}+\frac{\sin\beta\sin\theta}{b}\right].$$

Итак, нам нужно вычислить следующие 54 интеграла:

$$\int_S\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S x\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S y\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S z\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta},$$

$$\int_S x\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S y\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S z\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S x\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S y\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S z\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},$$

$$\int_S(\frac{\partial F}{\partial x})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S(\frac{\partial F}{\partial y})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S(\frac{\partial F}{\partial z})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S x(\frac{\partial F}{\partial x})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S x(\frac{\partial F}{\partial y})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S x(\frac{\partial F}{\partial z})^2\frac{ds}{\Delta},$$

$$\int_S y(\frac{\partial F}{\partial x})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S y(\frac{\partial F}{\partial y})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S y(\frac{\partial F}{\partial z})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S z(\frac{\partial F}{\partial x})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S z(\frac{\partial F}{\partial y})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S z(\frac{\partial F}{\partial z})^2\frac{ds}{\Delta},$$

$$\int_S x^2(\frac{\partial F}{\partial x})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S x^2(\frac{\partial F}{\partial y})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S x^2(\frac{\partial F}{\partial z})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S y^2(\frac{\partial F}{\partial x})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S y^2(\frac{\partial F}{\partial y})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S y^2(\frac{\partial F}{\partial z})^2\frac{ds}{\Delta},$$

$$\int_S z^2(\frac{\partial F}{\partial x})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S z^2(\frac{\partial F}{\partial y})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S z^2(\frac{\partial F}{\partial z})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S xy(\frac{\partial F}{\partial x})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S xy(\frac{\partial F}{\partial y})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S xy(\frac{\partial F}{\partial z})^2\frac{ds}{\Delta},$$

$$\int_S xz(\frac{\partial F}{\partial x})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S xz(\frac{\partial F}{\partial y})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S xz(\frac{\partial F}{\partial z})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S yz(\frac{\partial F}{\partial x})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S yz(\frac{\partial F}{\partial y})^2\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S yz(\frac{\partial F}{\partial z})^2\frac{ds}{\Delta},$$

$$\int_S xy\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S xy\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S xy\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S xz\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S xz\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S xz\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},$$

$$\int_S yz\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S yz\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S yz\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S x^2\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S y^2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta},\quad \int_S z^2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta}.$$

Следует заметить, что для вычисления координат центров сопротивления нужны первые 24 интеграла, а для вычисления коэффициентов уравнений равновесия – все 54. Ввиду того, что интегралы вычисляются в локальных координатах, а некоторые подынтегральные выражения содержат основные глобальные координаты x, y, z, то следует получить формулы перехода от координат x*, y*, z* к координатам x, y, z. Это можно осуществить либо перемножением соответствующих матриц, либо разрешить формулы (1) относительно координат x, y, z. Выполним переход путем перемножения матриц поворотов.

$$\begin{Bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha, -\sin\alpha, 0 \\ \sin\alpha, \cos\alpha,\ 0 \\ 0,\ 0,\ \ 1 \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} 1,\ 0,\ 0 \\ 0, \cos\beta, -\sin\beta \\ 0, \sin\beta, \cos\beta \end{Bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \cos\delta, 0, \sin\delta \\ 0,\ \ 1,\ \ 0 \\ -\sin\delta, 0, \cos\delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{Bmatrix} \right) \right] =$$

$$= \begin{Bmatrix} \cos\alpha, -\sin\alpha, 0 \\ \sin\alpha, \cos\alpha, 0 \\ 0,\ \ 0,\ \ 1 \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} 1,\ 0,\ 0 \\ 0, \cos\beta, -\sin\beta \\ 0, \sin\beta, \cos\beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x^*\cos\delta + z^*\sin\delta \\ y^* \\ -x^*\sin\delta + z^*\cos\delta \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha, -\sin\alpha, 0 \\ \sin\alpha, \cos\alpha, 0 \\ 0,\ \ 0,\ \ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x^*\cos\delta + z^*\sin\delta \\ y^*\cos\beta - (-x^*\sin\delta + z^*\cos\delta)\cos\beta \\ y^*\sin\beta + (-x^*\sin\delta + z^*\cos\delta)\cos\beta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{cases} (x^*\cos\delta + z^*\sin\delta)\cos\alpha - \sin\alpha[y^*\cos\beta - (-x^*\sin\delta + z^*\cos\delta)\sin\beta] \\ (x^*\cos\delta + z^*\sin\delta)\sin\alpha + [y^*\cos\beta - (-x^*\sin\delta + z^*\cos\delta)\sin\beta]\cos\alpha \\ y^*\sin\beta + (-x^*\sin\delta + z^*\cos\delta)\cos\beta. \end{cases}$$

Итак, формулы перехода

$$x = x_0 + x^*(\cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\beta\sin\delta) - y^*\sin\alpha\cos\beta + z^*(\cos\alpha\sin\delta + \sin\alpha\sin\beta\cos\delta),$$
$$y = y_0 + x^*(\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\beta\sin\delta) + y^*\cos\alpha\cos\beta + z^*(\sin\alpha\sin\delta - \cos\alpha\sin\beta\cos\delta),$$
$$z = z_0 - x^*\cos\beta\sin\delta + y^*\sin\beta + z^*\cos\beta\cos\delta.$$

Прежде, чем перейти к вычислению интегралов в целях компактной записи, введем обозначения коэффициентов в формулах преобразования координат.

$$x^* = \alpha_x(x-x_0) + \alpha_y(y-y_0) + \alpha_z(z-z_0),$$
$$y^* = \beta_x(x-x_0) + \beta_y(y-y_0) + \beta_z(z-z_0),$$
$$z^* = \gamma_x(x-x_0) + \gamma_y(y-y_0) + \gamma_z(z-z_0),\ \text{где}$$
$$\alpha_x = \cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\beta\sin\delta,\ \alpha_y = \sin\cos\delta + \cos\alpha\sin\beta\sin\delta,\ \alpha_z = -\cos\beta\sin\delta,$$
$$\beta_x = -\sin\alpha\cos\beta,\ \beta_y = \cos\alpha\cos\beta,\ \beta_z = \sin\beta,$$
$$\gamma_x = \cos\alpha\sin\delta + \sin\alpha\sin\beta\cos\delta,\ \gamma_y = \sin\alpha\sin\delta - \cos\alpha\sin\beta\cos\delta,\ \gamma_z = \cos\beta\cos\delta.$$

Формулы перехода координат x*, y*, z* к координатам x, y, z в этих обозначениях запишутся соответственно:

$$x = x_0 + x^*\alpha_x + y^*\beta_x + z^*\gamma_x,$$
$$y = y_0 + x^*\alpha_y + y^*\beta_y + z^*\gamma_y,$$
$$z = z_0 + x^*\alpha_z + y^*\beta_z + z^*\gamma_z.$$

Производные $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ в новых обозначениях запишутся

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \gamma_x - \frac{Hr}{\sqrt{r^2+d^2}}\left(\frac{\alpha_x\cos\theta}{a_k} + \frac{\beta_x\sin\theta}{b}\right),\quad \frac{\partial F}{\partial y} = \gamma_y - \frac{Hr}{\sqrt{r^2+d^2}}\left(\frac{\alpha_y\cos\theta}{a_k} + \frac{\beta_y\sin\theta}{b}\right),$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \gamma_z - \frac{Hr}{\sqrt{r^2+d^2}}\left(\frac{\alpha_z\cos\theta}{a_k} + \frac{\beta_z\sin\theta}{b}\right).$$

Фактические все 54 поверхностные интегралы представляют комбинацию следующих простейших однократных определенных интегралов.

$$J_0=\int_0^{\sqrt{1-d^2}} rdr=\frac{1-d^2}{2},\quad J_1=\int_0^{\sqrt{1-d^2}} r\sqrt{r^2+d^2dr}=\frac{1-d^3}{3},$$

$$J_2=\int^{\sqrt{1-d^2}} r(r^2+d^2)dr=\frac{1-d^4}{4},\quad J_3=\int_0^{\sqrt{1-d^2}} r^3dr=\frac{(1-d^2)^2}{4},$$

$$J_4=\int_0^{\sqrt{1-d^2}} r^2dr=\frac{(1-d^2)^{3/2}}{3},\quad J_5=\int_0^{\sqrt{1-d^2}} \frac{r^3dr}{\sqrt{r^2+d^2}}=\frac{1}{3}(1-3d^2+2d^3),$$

$$J_6=\int_0^{\sqrt{1-d^2}} \frac{r^3dr}{r^2+d^2}=\frac{1-d^2}{2}+d^2\ln d,$$

$$J_7=\int_0^{\sqrt{1-d^2}} \frac{r^4dr}{r^2+d^2}=\frac{(1-\mathrm{d}^2)^{3/2}}{3}-d^2\sqrt{1-d^2}+d^3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-d^2}}{d},$$

$$J_8=\int_0^{\sqrt{1-d^2}} \frac{r^4dr}{\sqrt{r^2+d^2}}=\frac{(1-d^2)^{3/2}}{4}-\frac{3d^2}{8}\sqrt{1-d^2}+\frac{3}{8}d^4\ln\frac{1+\sqrt{1-d^2}}{d},$$

$$J_9=\int_0^{\sqrt{1-d^2}} \frac{r^5dr}{r^2+d^2}=\frac{(1-d^2)^2}{4}-\frac{d^2(1-d^2)}{2}-d^4\ln d,$$

$$J_{10}=\int_0^{\sqrt{1-d^2}} r^2\sqrt{r^2+d^2}dr=\frac{(1-d^2)^{3/2}}{4}+\frac{d^2}{8}\sqrt{1-d^2}-\frac{d^4}{8}\ln\frac{1+\sqrt{1-d^2}}{d}.$$

Однако нам нет необходимости вычислять и выписывать все 54 интеграла. Достаточно вычислить лишь три типа интегралов. Остальные получаются в результате перестановки индексов.

Первый тип интегралов:

$$J_{ij}=\int_s\frac{\partial F}{\partial i}\frac{\partial F}{\partial j}\frac{ds}{\Delta}=\pi(a_1+a_2)b\left[\gamma_i\gamma_jJ_0+\frac{\mathrm{H}^2}{2}\left(\frac{\alpha_i\alpha_j}{a_1a_2}+\frac{\beta_i\beta_j}{b^2}\right)J_6\right],$$

Второй тип интегралов:

$$J_{ijp}=\int_s\frac{\partial F}{\partial i}\frac{\partial F}{\partial j}p\frac{ds}{\Delta}=\pi(a_1+a_2)b\left\{\frac{2}{\pi}\alpha_p\gamma_i\gamma_j(a_1-a_2)J_4+\frac{2}{3\pi b^2}(a_1-a_2)H^2J_7-\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha_p}{2}(\gamma_i\alpha_j+\gamma_j\alpha_i)HJ_5-\frac{\beta_p}{2}(\gamma_i\beta_j+\gamma_j\beta_i)HJ_5+\gamma_i\gamma_j\gamma_pHJ_1+\frac{\gamma_p}{2}\left(\frac{\alpha_i\alpha_j}{a_1a_2}+\frac{\beta_i\beta_j}{b^2}\right)H^3J_5\right\}+\mathrm{p}_0J_{ij},$$

Третий тип интегралов:

$$J_{ijpq}=\int_s\frac{\partial F}{\partial i}\frac{\partial F}{\partial j}pq\frac{ds}{\Delta}=\pi(a_1+a_2)b\Big\{(p_0\alpha_q+q_0\alpha_p)[2\gamma_i\gamma_j\frac{(a_1-a_2)}{\pi}J_4+\frac{2(a_1-a_2)}{3\pi b^2}\times$$

$$\times\beta_i\beta_jH^2J_7-(\gamma_i\alpha_j+\gamma_j\alpha_i)\frac{HJ_5}{2}]-(p_0\beta_q+q_o\beta_p)\frac{H}{2}(\gamma_i\beta_j+\gamma_j\beta_i)J_5+(p_0\gamma_q+q_o\gamma_p)\times$$

$$\times H[\gamma_i\gamma_jJ_1+\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_i\alpha_j}{a_1a_2}+\frac{\beta_i\beta_j}{b^2})J_5]+\alpha_p\alpha_q[\gamma_i\gamma_j(a_1^2-a_1a_2+a_2^2)\frac{J_3}{2}+\frac{3}{8}\alpha_i\alpha_jH^2J_9+\frac{\beta_i\beta_j}{8b^2}\times$$

$$\times(a_1^2-a_1a_2+a_2^2)H^2J_9-\frac{4}{3\pi}(a_1-a_2)(\gamma_i\alpha_j+\gamma_j\alpha_i)HJ_8]+$$

$$+\beta_p\beta_q[\gamma_i\gamma_j\frac{b^2}{2}J_3+\frac{a_i\alpha_jb^2H^2}{8a_1a_2}J_9+\frac{3\beta_i\beta_jH^2}{8}J_9]+$$

$$+(\alpha_p\beta_q+\alpha_q\beta_p)[(\alpha_i\beta_j+\alpha_j\beta_i)\frac{H^2}{8}J_9-\frac{2}{3\pi}(a_1-a_2)(\gamma_i\beta_j+\gamma_j\beta_i)HJ_8]+$$

$$+(\alpha_p\gamma_q+\alpha_q\gamma_p)[\frac{2}{\pi}\gamma_i\gamma_j(a_1-a_2)HJ_{10}+\frac{2(a_1-a_2)}{3\pi b^2}\beta_i\beta_jH^3J_8-(\gamma_i\alpha_j+\gamma_j\alpha_i)\frac{H^2}{2}J_3]-$$

$$-(\beta_p\gamma_q+\beta_q\gamma_p)(\gamma_i\beta_j+\gamma_j\beta_i)\frac{H^2}{2}J_3+\gamma_p\gamma_qH^2[\gamma_i\gamma_jJ_2+\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_i\alpha_j}{a_1a_2}+\frac{\beta_i\beta_j}{b^2})J_3]\Big\}+p_0q_0J_{ij},$$

где $p=p_0+\alpha_pa_kr\cos\theta+\beta_pbr\sin\theta+\gamma_pH\sqrt{r^2+d^2}$,

$q=q_0+\alpha_qa_kr\cos\theta+\beta_qbr\sin\theta+\gamma_qH\sqrt{r^2+d^2}$,

i, j, p, q, - индексы, пробегающие значения x, y, z.

С помощью этих трех типов интегралов легко записываются все вышеуказанные 54 интеграла.

3. Вычисление жесткости одноопорного мостовидного протеза при поступательных перемещениях для модели опорного корня в виде эллиптического гиперболоида. Жесткость протеза вдоль горизонтальной оси x вычисляется с помощью интеграла первого типа и равна.

$$c_x=\frac{G}{h_0}\int_s[\gamma(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]\frac{ds}{\Delta}=\frac{G}{h_0}(\gamma J_{xx}+J_{yy}+J_{zz})=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}[\gamma\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma_z^2)J_0+$$

$$+\frac{H^2}{2}(\frac{\gamma\alpha_x{}^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2}{a_1a_2}+\frac{\gamma\beta_x{}^2+\beta_y^2+\beta_z^2}{b^2})J_6],\qquad \gamma=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$$

При вертикальном расположении опорного корня, т.е. при

$\beta=\delta=0\,(\alpha_x=\cos\alpha,\alpha_y=\sin\alpha,\alpha_z=0,\beta_x=-\sin\alpha,\beta_y=\cos\alpha,\beta_z=0,\gamma_x=\gamma_y=0,\gamma_z=1)$ жесткость c_x равна

$$c_x=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}[J_0+\frac{H^2}{2}(\frac{\gamma\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{a_1a_2}+\frac{\gamma\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{b^2})J_6],$$

В частности при α=0 получим формулу, приведенную в монографии [ ].

$$c_x=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{2h_0}[(\frac{\gamma H^2}{2a_1a_2}+\frac{H^2}{2b^2}+1)(1-d^2)+H^2(\frac{\gamma}{a_1a_2}+\frac{1}{b^2})d^2\ln d].$$

Жесткость протеза вдоль другой горизонтальной оси "y" равна

$$c_y=\frac{G}{h_0}(J_{xx}+\gamma J_{yy}+J_{zz})=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}[(\gamma_x^2+\gamma\gamma_y^2+\gamma_z^2)J_0+$$

$$+\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha x^2+\gamma\alpha_y^2+\alpha_z^2}{a_1a_2}+\frac{\beta x^2+\gamma\beta_y^2+\beta_z^2}{b^2})J_6].$$

Для протеза с вертикальным опорным корнем

$$c_y=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}[J_0+\frac{\mathrm{H}^2}{2}(\frac{\cos^2\alpha+\gamma\sin^2\alpha}{a_1a_2}+\frac{\sin^2\alpha+\gamma\cos^2\alpha}{b^2})J_6].$$

При $\alpha = 0$ получаем известную формулу [ ]:

$$c_y=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{2h_0}[(\frac{\mathrm{H}^2}{2a_1a_2}+\frac{\gamma\mathrm{H}^2}{2b^2}+1)(1-d^2)+\mathrm{H}^2(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{\gamma}{b^2})d^2\ln d].$$

Жесткость протеза вдоль вертикальной оси z

$$c_z=\frac{G}{h_0}(J_{xx}+J_{yy}+\gamma J_{zz})=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}[(\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma\gamma_z^2)J_0+\frac{\mathrm{H}^2}{2}(\frac{\alpha_x{}^2+\alpha_y^2+\gamma\alpha_z^2}{a_1a_2}+\frac{\beta_ч{}^2+\beta_y^2+\gamma\beta_z^2}{b^2})J_6].$$

В случае вертикального опорного корня

$$c_z=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}[\gamma J_0+\frac{H^2}{2}(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{\gamma}{\mathrm{b}^2})J_6].$$

При α=0 имеем [ ]:

$$c_z=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{2h_0}[(\frac{\mathrm{H}^2}{2a_1a_2}+\frac{H^2}{2b^2}+\gamma)(1-d^2)+H^2(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b^2})d^2\ln d].$$

В общем случае расположения опорного корня протеза возникают поступательные перемещения не только вдоль линии действия силы, но и поступательные перемещения вдоль других направлений, а также повороты вокруг линии действия силы. Поэтому вычислим соответствующие жесткости опорного корня в направлении оси "y" при действии силы вдоль оси "x".

$$c_{xy}=(\gamma-1)J_{xy}=\frac{(\gamma-1)G\pi(a_1+a_2)b}{h_0}[\gamma_x\gamma_yJ_0+\frac{\mathrm{H}^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_y}{a_1a_2}+\frac{\beta_x\beta_y}{b^2})J_6].$$

Для протеза с вертикальным корнем

$$c_{xy}=\frac{\pi G(\gamma-1)(a_1+a_2)bH^2}{2h_0}\sin\alpha\cos\alpha(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{b^2})J_6.$$

При α=0, т.е. если ось "x" совпадает с осью симметрии горизонтального поперечного сечения вертикального корня, c_{xy}=0.

Аналогично находим жесткости c_{xz} и c_{yz}.

$$c_{xz}=\frac{\pi G(\gamma-1)(a_1+a_2)b}{h_0}[\gamma_x\gamma_zJ_0+\frac{\mathrm{H}^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_z}{a_1a_2}+\frac{\beta_x\beta_z}{b^2})J_6],$$

$$c_{yz}=\frac{\pi G(\gamma-1)(a_1+a_2)b}{h_0}[\gamma_y\gamma_zJ_0+\frac{\mathrm{H}^2}{2}(\frac{\alpha_y\alpha_z}{a_1a_2}+\frac{\beta_y\beta_z}{b^2})J_6].$$

Для протеза с вертикальным опорным корнем жесткости c_{xz} и c_{yz} равны нулю.

Это означает, что при действии горизонтальных сил не возникают поступательные перемещения вдоль вертикальной оси протеза с вертикальным опорным корнем, и наоборот, при действии вертикальных сил не возникают горизонтальные перемещения протеза с вертикальным опорным корнем.

Для вычисления жесткостей при поворотах нам понадобятся формулы для координат центров сопротивления.

4. Определение координат центров сопротивления одноопорного протеза для модели корня в виде эллиптического гиперболоида. Формулы приводятся в параграфе § 5 [3]. Нам остается вычислить соответствующие интегралы:

$$s_{xzx} = (\gamma-1)\frac{G}{h_0}\int_s x\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta} = \frac{(\gamma-1)\pi G(a_1+a_2)}{h_0}b\Big\{x_0[\gamma_x\gamma_z J_0 + \frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_z}{a_1a_2}+\frac{\beta_x\beta_z}{b^2})J_6]+$$

$$+\frac{2\alpha_x}{\pi}\gamma_x\gamma_z(a_1-a_2)J_4 + \frac{2\alpha_x}{\pi}\beta_x\beta_z(a_1-a_2)H^2J_7 - \alpha_x(\gamma_x\alpha_z+\gamma_z\alpha_x)\frac{H}{2}J_5 - \beta_x(\gamma_x\beta_z+\gamma_z\beta_x)\frac{H}{2}J_5 +$$

$$+\gamma_x H[\gamma_x\gamma_z J_1 + \frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_z}{a_1a_2}+\frac{\beta_x\beta_z}{b^2})J_5]\Big\}.$$

$$s_{xz} = \frac{G}{h_0}\int_s z[\gamma(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2]\frac{ds}{\Delta} = \frac{\pi G(a_1+a_2)}{h_0}b\{(\gamma\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma_z^2)(z_0J_0+\gamma_z HJ_1)+$$

$$+\frac{H^2}{2}(\frac{\gamma\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2}{a_1a_2}+\frac{\gamma\beta_x^2+\beta_y^2+\beta_z^2}{b^2})(z_0J_6+\gamma_z HJ_5)+\frac{2a_z(a_1-a_2)}{\pi}[\gamma\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma_z^2)J_4+$$

$$+(\frac{\gamma\beta_x^2+\beta_y^2+\beta_z^2}{3b^2})H^2J_7] - H[\alpha_z(\gamma\alpha_x\gamma_x+\alpha_y\gamma_y+\alpha_z\gamma_z)+\beta_z(\gamma\beta_x\gamma_x+\beta_y\gamma_y+\beta_z\gamma_z)]J_5\};$$

$$s_{xzz} = \frac{(\gamma-1)G}{h_0}\int_s z\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta} = \frac{(\gamma-1)\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\Big\{\gamma_x\gamma_z(z_0J_0+\gamma_z HJ_1)+\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_z}{a_1a_2}+\frac{\beta_x\beta_z}{b^2})\times$$

$$\times(z_0I_6+\gamma_z HJ_5)+\frac{2\alpha_z}{\pi}(a_1-a_2)(\gamma_x\gamma_z J_4+\frac{\beta_x\beta_z}{3b^2}H^2J_7)-\frac{H}{2}[\alpha_z(\alpha_x\gamma_z+\alpha_z\gamma_x)+\beta_z(\beta_x\gamma_z+\beta_z\gamma_x)J_5\Big\};$$

$$s_{zx} = \frac{G}{h_0}\int_s x[(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + \gamma(\frac{\partial F}{\partial z})^2]\frac{ds}{\Delta} = \frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{(\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma\gamma_z^2)(x_0J_0+\gamma_x HJ_1)+$$

$$+\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x^2+\alpha_y^2+\gamma\alpha_z^2}{a_1a_2}+\frac{\beta_x^2+\beta_y^2+\gamma\beta_z^2}{b^2})(x_0J_6+\gamma_x HJ_5)+\frac{2\alpha_x(a_1-a_2)}{\pi}$$

$$[(\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma\gamma_z^2)J_4+(\frac{\beta_x^2+\beta_y^2+\gamma\beta_z^2}{3b^2})H^2J_7] - H[\alpha_x(\alpha_x\gamma_x+\alpha_y\gamma_y+\gamma\alpha_z\gamma_z)+$$

$$+\beta_x(\beta_x\gamma_x+\beta_y\gamma_y+\gamma\beta_z\gamma_z)]J_5\};$$

Теперь можно определить x_c и z_α по формулам (7) [3]. Для протеза с вертикальным опорным корнем имеем: $c_{xz} = 0$

$$s_{xzx} = -\frac{(\gamma-1)GH\pi(a_1+a_2)bJ_5}{2h_0}, \qquad s_{xzz} = 0,$$

$$s_{xz} = \frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{z_0J_0 + HJ_1 + \frac{H^2}{2}(\frac{\gamma\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{a_1a_2}+\frac{\gamma\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{b^2})(z_0J_6+HJ_5)\};$$

$$s_{zx} = \frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{\gamma x_0J_0 + \frac{H^2}{2}(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b^2})x_0J_6 + \frac{2(a_1-a_2)\cos\alpha}{\pi}(\gamma J_4+\frac{H^2}{3b^2}J_7)\};$$

$$x_c=\frac{c_{zx}}{c_z}=x_0+\frac{2(a_1-a_2)(\gamma J_4+\frac{H^2}{3b^2}J_7)\cos\alpha}{\pi[\gamma J_0+\frac{H^2}{2}(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b^2})J_6]};$$

$$z_a=\frac{s_{xz}-s_{xzz}}{c_x}=z_0+\frac{H[J_1+\frac{H^2}{2}(\frac{\gamma\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{a_1a_2}+\frac{\gamma\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{b^2})J_5]}{J_0+\frac{H^2}{2}(\frac{\gamma\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{a_1a_2}+\frac{\gamma\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{b^2})J_6};$$

Аналогично находим и другие координаты центров сопротивления опорного корня протеза.

$$s_{xy}=\frac{G}{h_0}\int_s y[\gamma(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]\frac{ds}{\Delta}=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{(\gamma\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma_z^2)(y_0J_0+\gamma_yHJ_1)+$$
$$+\frac{H^2}{2}(\frac{\gamma\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2}{a_1a_2}+\frac{\gamma\beta_x^2+\beta_y^2+\beta_z^2}{b^2})(y_0J_6+\gamma_yHJ_5)+\frac{2\alpha_y(a_1-a_2)}{\pi}[(\gamma\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma_z^2)J_4+$$
$$+(\frac{\gamma\beta_x^2+\beta_y^2+\beta_z^2}{3b^2})H^2J_7]-H[\alpha_y(\gamma\alpha_x\gamma_x+\alpha_y\gamma_y+\alpha_z\gamma_z)+\beta_y(\gamma\beta_x\gamma_x+\beta_y\gamma_y+\beta_z\gamma_z)]J_5\};$$

$$s_{yx}=\frac{G}{h_0}\int_s x[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+\gamma(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]\frac{ds}{\Delta}=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{(\gamma_x^2+\gamma\gamma_y^2+\gamma_z^2)(x_0J_0+\gamma_xHJ_1)+$$
$$+\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x^2+\gamma\alpha_y^2+\alpha_z^2}{a_1a_2}+\frac{\beta_x^2+\gamma\beta_y^2+\beta_z^2}{b^2})(x_0J_6+\gamma_xHJ_5)+\frac{2\alpha_x(a_1-a_2)}{\pi}[(\gamma_x^2+\gamma\gamma_y^2+\gamma_z^2)J_4+$$
$$+(\frac{\beta_x^2+\gamma\beta_y^2+\beta_z^2}{3b^2})H^2J_7]-H[\alpha_x(\alpha_x\gamma_x+\gamma\alpha_y\gamma_y+\alpha_z\gamma_z)+\beta_x(\beta_x\gamma_x+\gamma\beta_y\gamma_y+\beta_z\gamma_z)]J_5\};$$

$$s_{xyx}=\frac{(\gamma-1)G}{h_0}\int_s x\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta}=\frac{\pi G(\gamma-1)(a_1+a_2)b}{h_0}\{(\gamma_x\gamma_y(x_0I_0+\gamma_xHJ_1)+$$
$$+\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_y}{a_1a_2}+\frac{\beta_x\beta_y}{b^2})(x_0J_6+\gamma_xHJ_5)+\frac{2\alpha_x}{\pi}(a_1-a_2)(\gamma_x\gamma_yJ_4+\frac{\beta_x\beta_yH^2}{3b^2}J_7)-$$
$$-\frac{H}{2}[\alpha_x(\alpha_x\gamma_y+\alpha_y\gamma_x)+\beta_x(\beta_x\gamma_y+\beta_y\gamma_x)]J_5\};$$

$$s_{xyy}=\frac{(\gamma-1)G}{h_0}\int_s y\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta}=\frac{(\gamma-1)\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{\gamma_x\gamma_y(y_0J_0+\gamma_yHJ_1)+$$
$$+\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_y}{a_1a_2}+\frac{\beta_x\beta_y}{b^2})(y_0J_6+\gamma_yHJ_5)+\frac{2\alpha_y(a_1-a_2)}{\pi}(\gamma_x\gamma_yJ_4+\frac{\beta_x\beta_yH^2}{3b^2}J_7)-$$
$$-\frac{H}{2}[\alpha_y(\alpha_x\gamma_y+\alpha_y\gamma_x)+\beta_y(\beta_x\gamma_y+\beta_y\gamma_x)]J_5\}.$$

Координаты x_b и y_a вычисляем по формулам (8) [3]. Для протеза с вертикальным опорным корнем:

$$s_{xy}=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{y_0J_0+\frac{H^2}{2}(\frac{\gamma\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{a_1a_2}+\frac{\gamma\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{b^2})y_0J_6+$$
$$+\frac{2(a_1-a_2)\sin\alpha}{\pi}[J_4+(\frac{\gamma\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)H^2}{3b^2}J_7]\},$$

$$s_{yx}=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{x_0J_0+\frac{H^2}{2}(\frac{\cos^2\alpha+\gamma\sin^2\alpha}{a_1a_2}+\frac{\sin^2\alpha+\gamma\cos^2\alpha}{b^2})x_0J_6+$$
$$+\frac{2(a_1-a_2)\cos\alpha}{\pi}[J_4+(\frac{\sin^2\alpha+\gamma\cos^2\alpha)H^2}{3b^2}J_7]\},$$

$$s_{xyx}=\frac{(\gamma-1)\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\frac{H^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha[(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{b^2})x_0J_6-\frac{4(a_1-a_2)\cos\alpha}{3\pi b^2}J_7];$$

$$s_{xyy}=\frac{(\gamma-1)\pi G(a_1+a_2)bH^2}{2h_0}\sin\alpha\cos\alpha[(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{b^2})y_0J_6-\frac{4(a_1-a_2)\sin\alpha}{3\pi b^2}J_7];$$

$$x_b=\frac{c_x(s_{yx}-s_{xyy})+c_{xy}(s_{xy}-s_{xyx})}{c_xc_y-c_{xy}^2}=$$

$$=x_0+\frac{4(a_1-a_2)[\gamma(\frac{(1-d^2)^{3/2}}{3}-d^2\sqrt{1-d^2}+d^3arctg\frac{\sqrt{1-d^2}}{d})+\frac{b^2}{H^2}(1-d^2)^{3/2}]\cos\alpha}{3\pi[(\gamma+\frac{b^2}{a_1a_2})(\frac{1-d^2}{2}+d^2\ln d)+\frac{b^2}{H^2}(1-d^2)]};$$

$$y_a=\frac{c_y(s_{xy}-s_{xyx})+c_{xy}(s_{yx}-s_{xyy})}{c_xc_y-c_{xy}^2}=$$

$$=y_0+\frac{4(a_1-a_2)[\gamma(\frac{(1-d^2)^{3/2}}{3}-d^2\sqrt{1-d^2}+d^3arctg\frac{\sqrt{1-d^2}}{d})+\frac{b^2}{H^2}(1-d^2)^{3/2}]\sin a}{3\pi[(\gamma+\frac{b^2}{a_1a_2})(\frac{1-d^2}{2}+d^2\ln d)+\frac{b^2}{H^2}(1-d^2)]}.$$

Если $\alpha=0$, то получим формулы для x_b, y_a, приведенные в работе [2]. Координаты y_c и z_b определяются по формулам (8) [3]. Для протеза с вертикальным опорным корнем формулы упрощаются.

$$y_c=\frac{s_{zy}}{c_z},\qquad z_b=\frac{s_{yz}-s_{yzy}}{c_y},$$

$$s_{yz}=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}[z_0J_0+HJ_1+\frac{H^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha+\gamma\sin^2\alpha}{a_1a_2}+\frac{\sin^2+\gamma\cos^2\alpha}{b^2}\right)(z_0J_6+HJ_5)],$$

$$s_{zy}=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}[\gamma y_0 J_0+\frac{H^2}{2}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b^2}\right)y_0J_6+\frac{2(a_1-a_2)\sin\alpha}{\pi}(\gamma J_4+\frac{H^2}{3b^2}J_7)],$$

$$s_{yzz}=c_{yz}=0,\qquad s_{yzy}=-\frac{(\gamma-1)\pi G(a_1+a_2)bHJ_5}{2}$$

$$y_c=y_0+\frac{4(a_1-a_2)[\frac{(1-d^2)^{3/2}}{3}-d^2\sqrt{1-d^2}+d^3arctg\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}+\frac{\gamma b^2}{H^2}(1-d^2)^{3/2}]\sin\alpha}{\pi[(1+\frac{b^2}{a_1a_2})(\frac{1-d^2}{2}+d^2\ln\mathrm{d})+\frac{\gamma(1-d^2)}{H^2}]}$$

$$z_b=z_o+\frac{H\{(1-3d^2+2d^3)[\frac{\cos^2\alpha+\gamma\sin^2\alpha}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{\sin^2\alpha+\gamma\cos^2\alpha}{b^2}+\frac{\gamma-1}{H^2}]+\frac{2(1-d^3)}{H^2}\}}{3[(\frac{\cos^2\alpha+\gamma\sin^2\alpha}{\alpha^1\alpha1}+\frac{\gamma\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{b^2})(\frac{1-d^2}{2}+d^2\ln d)+\frac{1-d^2}{H^2}]}.$$

При $\alpha = 0$ получим формулы для y_c и z_b, приведенные в работе [2].

5. Определение жесткости одноопорного протеза при поворотах на основе модели эллиптического гиперболоида. Прежде всего, определим жесткость при поворотах, возникающих при действии сил вдоль осей координат. Эти повороты создают винтовой характер перемещений, например, при перемещении протеза вдоль оси “X” он поворачивается вокруг этой оси. Как было сказано ранее, центры сопротивления в общем случае – это точки, в которых сила вызывает поступательные перемещения с одновременным поворотом вокруг линии действия этой силы.

Итак, $c_{x\varphi}$ – жесткость поворота вокруг оси “x” протеза при действии силы вдоль этой оси “x”.

$$c_{x\varphi}=s_{xzy}-y_cc_{xz}-s_{xyz}+z_bc_{xy}=\frac{\pi(\gamma-1)G(a_1+a_2)b}{h_0}\{\gamma_x[\gamma_z(y_0-y_c)J_0-\gamma_y(z_0-z_b)J_0]+$$
$$+\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_z}{a_1a_2}+\frac{\beta_x\beta_z}{b^2})[(y_0-y_c)J_6+\gamma_yHJ_5]-\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_y}{a_1a_2}+\frac{\beta_x\beta_y}{b^2})[(z_0-z_b)J_6+\gamma_zHJ_5]+$$
$$+\frac{2(a_1-a_2)}{\pi}[\gamma_x(\alpha_y\gamma_z-a_z\gamma_y)J_4+\beta_x(\alpha_y\beta_z-\alpha_z\beta_y)\frac{H^2}{3b^2}J_7]+\frac{H}{2}[\alpha_x(\gamma_y\alpha_z-\alpha_y\gamma_z)+$$
$$+\beta_x(\beta_z\gamma_y-\beta_y\gamma_z)]J_5\}.$$

Для протеза с вертикальным опорным корнем

$$c_{x\varphi}=\frac{\pi(\gamma-1)G(a_1-a_2)b}{h_0}\{-\frac{\mathrm{H}^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{b^2})[(z_0-z_b)J_6+HJ_5]+$$
$$\frac{\mathrm{H}^2}{2}[-\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha]=-\frac{(\gamma-1)\pi G(a_1+a_2)bH^2}{2h_0}(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{b^2})[(z_0-z_b)J_6+HJ_5]\sin\alpha\cos\alpha.$$

Отметим, что при $\alpha = 0$, т.е. когда локальная ось "x" совпадает с осью симметрии сечения корня, $c_{x\varphi}=0$. Это означает, что сила, действующая вдоль оси симметрии сечения корня, не вызывает вращения вокруг линии действия силы.

Рассмотрим жёсткость

$$c_{y\varphi} = s_{xyz} - c_{xy}\, z_{\alpha} - s_{yzx} + x_c c_{yz} = \frac{\pi(\gamma-1)G(a_1+a_2)b}{h_0}\{\gamma_y[\gamma_x(z_0-z_a)-\gamma_z(x_0-x_c)]J_0+$$
$$+\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_y}{a_1a_2}+\frac{\beta_x\beta_y}{b^2})[(z_0-z_a)J_6+\gamma_z HJ_5]-\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_y\alpha_z}{a_1a_2}+\frac{\beta_y\beta_z}{b^2})[(x_0-x_c)J_6+\gamma_z HJ_5]+$$
$$+\frac{2(a_1-a_2)}{\pi}[\gamma_y\,(\alpha_z\gamma_z-\alpha_x\gamma_z)J_4+\beta_y(\alpha_z\beta_x-\alpha_x\beta_z)\frac{H^2}{3b^2}J_7]+$$
$$+\frac{H}{2}[\alpha_y(\alpha_x\gamma_z-\alpha_z\gamma_x)+\beta_y(\beta_x\gamma_z-\beta_z\gamma_x)]J_5\}.$$

Для протеза с вертикальным опорным корнем

$$c_{y\varphi}=\frac{\pi(\gamma-1)G(a_1+a_2)bH^2}{h_0}(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{b^2})[(z_0-z_a)J_6+HJ_5]\sin\alpha\cos\alpha.$$

При α=0 $c_{y\varphi}=0$, хотя сила P_y перпендикулярна к локальной плоскости симметрии XOZ.

$$c_{z\varphi}=\frac{(\gamma-1)\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{\gamma_z[\gamma_y(x_0-x_b)-$$
$$-\gamma_x(y_0-y_a)]J_0+\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_y\alpha_z}{a_1a_2}+\frac{\beta_y\beta_z}{b^2})[(x_0-x_b)J_6+\gamma_x HJ_5]-\frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_z}{a_1a_2}+\frac{\beta_x\beta_z}{b^2})\times$$
$$\times[(y_0-y_a)J_6+\gamma_y HJ_5]+\frac{2(a_1-a_2)}{\pi}[\gamma_z(\alpha_x\gamma_y-\alpha_y\gamma_x)J_4+\beta_z(\alpha_x\beta_y-\alpha_y\beta_x)\frac{H^2}{3b^2}J_7]+$$
$$+\frac{H}{2}[\alpha_z(\gamma_x\alpha_y-\alpha_x\gamma_y)+\beta_z(\beta_y\gamma_x-\beta_x\gamma_y)]J_5\}.$$

При вертикальном опорном корне протезе $c_{z\varphi}=0$, т.е. под действием вертикальной силы отсутствует вращение вокруг вертикальной оси.

Теперь рассмотрим жесткость протеза при поворотах. Выписывать формулы для $\mu_x,\mu_y,\mu_z,\mu_{xy},\mu_{xz},\mu_{yz}$ в общем случае нет смысла из-за их громоздкости. Как указывалось выше в § 5 целесообразнее их записать с помощью интегралов, структура которых известна и приводится в том же параграфе.

Для вертикального опорного корня формулы значительно упрощаются и их можно выписать:

$$\mu_x = \frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{(y_0^2 - y_0 y_c - z_0^2 - z_0 z_b)J_0 + \frac{H^2}{2}[(y_0^2 - y_0 y_c)(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{b^2}) +$$

$$+(z_0^2 - z_0 z_b)(\frac{\cos^2\alpha + \gamma\sin^2\alpha}{a_1 a_2} +$$

$$+\frac{\sin^2\alpha+\gamma\cos^2\alpha}{b^2})]J_6 + [J_1 + \frac{H^2}{2}(\frac{\cos^2\alpha+\gamma\sin^2\alpha}{a_1a_2} + \frac{\sin^2\alpha+\gamma\cos^2\alpha}{b^2})]J_5 H(2z_0 - z_b) +$$

$$+H(\gamma-1)(z_0 - z_b)J_5 - \frac{2y_c(a_1-a_2)\sin\alpha}{\pi}(\gamma J_4 + \frac{H^2}{3b^2}J_7) + [\frac{(a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2)\gamma\sin^2\alpha}{2} +$$

$$+\frac{\gamma b^2\cos^2\alpha}{2} + (\gamma-1)H^2 + \frac{H^4}{2}(\frac{\cos^2\alpha+\gamma\sin^2\alpha}{a_1a_2} +$$

$$+\frac{\sin^2\alpha+\gamma\cos^2\alpha}{b_2})]J_3 + H^2 J_2 + \frac{H^2}{8}[3 + \frac{(a_1^2 - a_1a_2 + a^2)\sin^2\alpha}{b^2} + \frac{b^2}{a_1a_2}\cos^2\alpha]J_9$$

При $\alpha = 0$ и $y_0 = z_0 = 0$

$$\mu_x = \frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{-z_b H J_1 + H^2 J_2 + [\frac{\gamma b^2}{2} + \frac{H^4}{2}(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{\gamma}{b_2}) + (\gamma-1)H^2]J_3 - \frac{z_b H}{2}[\gamma - 1 + H^2 \times$$

$$\times(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{b^2})]J_5 + + \frac{H^2}{8}(3 + \frac{b^2}{a_1a_2})J_9\}.$$

Если подставить значения интегралов, то получим результат, приведенный в монографии [2].

Для протеза с вертикальным опорным корнем

$$\mu_{xy} = \frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{\sin\alpha\cos\alpha[\frac{\gamma}{2}(b^2 - a_1^2 + a_1a_2 - a_2^2)J_3 - \frac{H^4}{2}(\gamma-1)(\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{b^2})J_3 +$$

$$+\frac{H^2}{8}(\frac{b^2}{a_1a_2} - \frac{a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2}{b^2})J_9] - y_0(x_0 - x_c)[\gamma J_0 + \frac{H^2}{2}(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{b^2})J_6] -$$

$$-(z_0^2 - z_0 z_a - z_0 z_b + z_a z_b)(\gamma-1)H^2(\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{b^2})J_6 - (\gamma-1)(2z_0 - z_a - z_b)\times$$

$$\times H^3(\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{b^2})J_5] - [(x_0 - x_c)\sin\alpha + y_0\cos\alpha]\frac{2(a_1-a_2)}{\pi}(\gamma J_4 + \frac{H^2}{3\pi b^2}J_7)\}.$$

При $\alpha = 0$ и $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ $\mu_{xy} = 0$.

$$\mu_{xz}=\frac{\pi G(a_1-a_2)b}{h_0}\{-H(x_0-x_b)[J_1+\frac{H^2}{2}(\frac{\cos^2\alpha+\gamma\sin^2\alpha}{a_1a_2}+\frac{\sin^2\alpha+\gamma\cos^2\alpha}{b^2})J_5+\frac{(\gamma-1)}{2}J_5]-$$

$$-(\gamma-1)(y_0-y_a)(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{b^2})\frac{H^3}{2}\sin\alpha\cos\alpha J_5-\frac{2(\gamma-1)(a_1-a_2)}{3\pi}H\cos\alpha J_8-$$

$$-(\gamma-1)(y_0-y_a)z_0(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{b^2})\frac{H^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha J_6-z_0(x_0-x_b)[J_0+\frac{H^2}{2}\times$$

$$\times(\frac{\cos^2\alpha+\gamma\sin^2\alpha}{a_1a_2}+\frac{\sin^2\alpha+\gamma\cos^2\alpha}{b^2})J_6]-\frac{2\pi}{\pi}(a_1-a_2)\cos\alpha[z_0J_4+\gamma\frac{z_0H^2}{3b^2}J_7+HJ_{10}+\frac{\gamma H^3}{3b^2}J_8\}.$$

При $\alpha=0$ и $x_0=y_0=z_0=0$.

$$\mu_{xz}=\frac{\pi G(a_1+a_2)b}{h_0}\{x_b[J_1+\frac{H^2}{2}(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{\gamma}{b^2}+\frac{\gamma-1}{H_2})J_5]-\frac{2(a_1-a_2)H}{\pi}[(\gamma_2+\frac{\gamma H^2}{b^2})J_8+(1-d^2)^{3/2}]\},$$

что соответствует коэффициенту при φ_z в уравнении на стр. 29 монографии [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. “Решение задачи о равновесии периодонта, ограниченного двумя эллиптическими гиперболоидами”. // Теоретическая и прикладная механика.-Мн.: Вышейшая школа, 1983.–Вып.10.–с.11–21.

2. Наумович С.А., Крушевский А.Е. Биомеханика системы зуб-периодонт. – Мн.: Экономические технологии, 2000, 132с.+36с.

3. Крушевский А.Е., Наумович С.С. Основы биомеханики мостовидных протезов. “Теоретическая и прикладная механика” -Мн.:Технопринт, 2006.-Вып.20.-с.134–139.