

ISSN 0134-9635

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

**Международный научно-технический
журнал**

Основан в 1975 году

Выпуск 21

**Минск
2006**

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК 22.21я43

30.12я43

Т 33

Редакция сборника

Президиум редакции:

П.А. Витязь, М.С. Высоцкий, Л.Г. Красневский,
Ю.М. Плескачевский, Б.М. Хрусталеv

Международный совет редакции:

J. Awrejcewicz (Польша), В.М. Благодарный (Словакия), Г.Я. Беляев (Беларусь),
J. Grabski (Польша), G. Gudehus (Германия), Д.Д. Ивлев (Россия), В.В. Лобода (Украина),
Н.Ф. Морозов (Россия), Ж.А. Мрочек (Беларусь), Н.К. Мышкин (Беларусь),
Rutko (Польша), Ф.А. Романюк (Беларусь), K. Zimmerman (Германия), А.И. Шашкин
(Россия), Е.И. Шемякин (Россия), Г.П. Черепанов (США), А.М. Якимович (Беларусь)

Редакционная коллегия:

Ю.В. Василевич (зам. председателя), В.С. Вихренко
М.А. Журавков, М.Г. Ботогова (уч. секретарь), А.Е. Крушевский,
И.С. Куликов, А.Т. Скойбеда, А.В. Чигарев (председатель), А.М. Якимович

Экспертный совет по направлениям

Теоретическая и прикладная механика: А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, М.А. Журавков

Механика материалов и структур: Ю.В. Василевич, М.И. Кулак, Спиридонов Н.В.

Мехатроника и интеллектуальные системы: В.М. Колешко, Л.Г. Красневский

Механика машин: В.Б. Альгин, А.Т. Скойбеда, В.К. Шелег,

Приборы точной механики: И.Е. Зуйков, М.Г. Киселев, В.Л. Соломахо

Механика конструкций: А.Н. Борисевич, С.В. Босаков, Т.М. Пецольд, Э.И. Старовойтов

Адрес редакции:

220013 Минск, проспект Независимости, 65

БНТУ, кафедра «Теоретическая механика»

Тел.: (+375 17) 292 74 25, 299 92 52

E-mail: tmecb@bntu.by, theormecb@rambler.ru

В сборнике содержатся научные и методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов и научных учреждений. Включены также материалы, обсуждавшиеся на республиканском научно-методическом семинаре с международным участием «Научно-методические основы применения информационных технологий в преподавании механики и научных исследованиях».

Тематика статей сборника охватывает широкий круг вопросов. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Теория механизмов и машин». Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов.

Сборник будет полезен для преподавателей вузов, научно-инженерных работников, аспирантов.

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК 22.21я43

30.12я43

ISBN 978 985-479-609-3

© Белорусский национальный
технический университет, 2006



**Профессору
Анатолию Власовичу**

Чигареву

65 лет

2 декабря 2006 года Анатолию Власовичу Чигареву, заведующему кафедрой "Теоретическая механика" БГПА, доктору физико-математических наук, профессору исполнилось 65 лет.

После окончания математико-механического факультета Воронежского госуниверситета в 1967 году поступил в аспирантуру к профессору Д.Д. Ивлеву. В это время, в связи с бурно растущим применением композитных материалов, во всех развитых странах проводились интенсивные исследования по механике деформирования и разрушения неоднородных сред. Были разработаны методы для расчета эффективных модулей в статике по схемам Фойгта и Рейсса: основополагающими здесь были работы Хилла, Кренера, В.В. Болотина, В.А. Ломакина, Т.Д. Шермергора и др. В теории распространения упругих волн И.М. Лифшицем и Г.Д. Пархомовским были получены результаты в случаях длинных и коротких волн в приближении однократного рассеяния (борновское приближение). В теории распространения волн была актуальна проблема разработки методов расчета затухания и дисперсии скорости во всем диапазоне длин волн с учетом многократного рассеяния. По результатам, полученным в 1967–71 гг. А.В. Чигаревым была защищена диссертация на степень кандидата физико-математических наук.

В дальнейшем А.В. Чигаревым развивался статистический вариант метода осреднения для теории распространения гармонических волн в неоднородных упругих средах. Метод позволил решить единообразно прямые и обратные задачи рассеяния для сред, структура которых меняется в диапазоне от периодической до полностью разупорядоченной. Метод замены полевых величин дал возможность впервые рассчитать упругие волновые (эффективные) операторы во всем диапазоне длин волн с учетом многократного рассеяния. Для статической части динамических эффективных операторов были получены уравнения, аналогичные методу самосогласованного поля и обобщенные на случай сред с непрерывным распределением упругих и теплопроводных свойств. Для решения дисперсионных уравнений был разработан метод эталонного уравнения, что позволило впервые описать ряд эффектов затухания и дисперсии скорости, которые изменяются симметрично с акустической ветвью и описывают краевые эффекты. Для длин волн порядка радиуса корреляции было установлено падение групповой скорости, что является проявлением стохастического резонанса.

В средах со структурами, описываемыми квазислучайными функциями были установлены фильтрующие свойства волн, для длин которых выполняются определенные соотношения.

На основе разработанного статистического варианта метода осреднения было найдено дальнейшее развитие метода статистического обращения для последовательного решения обратной задачи рассеяния (метод, реконструирующий свойства среды по алгоритму фотолитографии). Статистический вариант метода осреднения был обобщен на гармонические по-

верхностные волны Релея и Лява, для которых были установлены эффекты затухания волн в направлении распространения и гармонического затухания вглубь среды, за счет установленного механизма обмена энергией между разными модами.

Второе направление работ А.В. Чигарева – развитие метода разрывных решений для распространения волн в неоднородных средах. Впервые были получены уравнения для изменения вдоль лучей всех параметров внутренней геометрии фронтов волн, для случайно неоднородных сред были исследованы различные вероятностные модели и установлены законы изменения средних функций когерентности, дисперсии, интенсивности. Уменьшение корреляции при росте дисперсии свидетельствует, что волновое поле в неоднородной, статистически однородной и изотропной среде хаотизируется вдоль луча. Для марковских моделей происходит рост энтропии.

Третье направление – детерминированный хаос в динамике лучей объемных и поверхностных волн в неоднородных средах развивается А.В. Чигаревым начиная с 1975 года. В дальнейшем это явление изучалось для процессов разрушения: прогнозирования траектории трещины в неоднородной среде, накопления повреждений.

С 1980 г. А.В. Чигарев включается в тематику исследований новосибирской школы академика Е.М. Шемякина по вопросам самоорганизации и хаоса в процессах деформирования и разрушения, теории распространения волн.

В 1986 г. Чигаревым А.В. была защищена докторская диссертация в Институте теоретической и прикладной механики СО АН СССР.

Результаты теоретических исследований А.В. Чигарева представлены в 200 публикациях, трех монографиях.

С 1991 года А.В. Чигарев заведует кафедрой "Теоретическая механика". Им была организована исследовательская лаборатория "Динамика и прочность материалов, конструкций и машин".

Наряду с исследованиями в теории деформируемого твердого тела А.В. Чигаревым выполнен ряд работ в области прикладной механики. Разработаны и апробированы рекуператоры энергии пневмогидроаккумуляторного типа для городского автобуса, погрузчика, экскаватора, планетарная мельница и др.

Изданы учебные пособия с грифом Министерства образования по теоретической механике. Подготовлены 4 доктора и 11 кандидатов наук.

Коллеги и друзья, ученики сердечно поздравляют Анатолия Власовича с юбилеем, желают крепкого здоровья, дальнейших творческих успехов.

МЕХАНИКА — ОСНОВА ДЛЯ РАЗРАБОТКИ КОНКУРЕНТОСПОСОБНЫХ МАШИН И ИХ КОМПОНЕНТОВ

Высоцкий М.С., Альгин В.Б.

The paper discusses the state programs of researches in a field of mechanical engineering. The system of scientific supply for the machinery complex of Belarus is described. Roles of machinery components are examined.

Введение

Статья посвящена исследованиям в области механики машин. Описана система научного обеспечения машиностроительного комплекса республики. Рассматриваются вопросы организации научных разработок в рамках государственных программ и наиболее актуальные направления исследований по созданию наукоемких компонентов и конкурентоспособных отечественных машин.

1. Государственные комплексные целевые научно-технические программы. ГКЦНТП «Машиностроение»

В 2001–2005 годах основными государственными программами, формирующими цепочку от фундаментальных исследований до создания новой конкурентоспособной техники, выступили Государственная программа фундаментальных исследований «Механика» и Государственная научно-техническая программа «Белавтотракторостроение». За прошедший пятилетний период программе «Механика» придан статус государственной программы ориентированных фундаментальных исследований. Кроме того, была сформирована и выполнялась в 2003–2005 годах государственная программа прикладных научных исследований «Новые компоненты в машиностроении». ГНТП «Белавтотракторостроение» в 2004 году в результате укрупнения государственных научно-технических программ вошла как подпрограмма с сохранением названия в состав ГНТП «Машиностроение». Целью ГНТП «Машиностроение» является обеспечение научно-технической продукцией ГЦП «Автотракторокомбайностроение» — государственной целевой программы развития автотракторостроения и комбайностроения Республики Беларусь на 2003–2010 годы.

Основные результаты ГНТП «Белавтотракторостроение» по созданию новых моделей конкурентоспособных автомобилей, тракторов, комбайнов и двигателей, во многом связаны с отечественной школой механики и комплексного проектирования машин [1].

В рамках выполнения ГНТП «Белавтотракторостроение» предприятиями республики под руководством и непосредственном участии головной организации НИРУП «Белавтотракторостроение» НАН Беларуси, государственного заказчика программы Министерства промышленности Республики Беларусь, в сотрудничестве с учреждениями НАН Беларуси, ВУЗами и другими научно-исследовательскими организациями и научными коллективами за период 2001 – 2005 гг. создано: машин и механизмов – 40 моделей, оборудования – 9 видов, комплектующих к машинам, механизмам и оборудованию – 51 тип, материалов – 2, технологий – 8, приборов – 3, систем различного применения – 34, программных продуктов – 50, баз данных – 3, нормативно-справочных документов – 5.

Объем выпущенной продукции, разработанной и освоенной в производстве в 1999 – 2005 годах по завершённым заданиям подпрограммы «Белавтотракторостроение», превысил один млрд. долл. США. При этом, объемы выпуска разработанной по подпрограмме и освоенной продукции достигли в 2005 году 11,9 млн. долл. США, а с учетом выпуска по ГЦП «Автотракторокомбайностроение» — более 350 млн. долл. США. Отчисления в бюджет в 2005 году превысили 75 млн. долл., а начиная с 2001 года — 250 млн. долл., и в 22 раза превысили бюджетные затраты программы на разработку объектов новой техники.

Формально до 2006 года государственные программы рассмотренных типов были независимыми и не связанными друг с другом. С целью большей интеграции государственных научно-технических программ и программ фундаментальных исследований, повышения эффективности исследований на всех научных уровнях, их координации и обеспечения внедрения результатов в республике сформированы государственные комплексные целевые научно-технические программы (ГКЦНТП).

Постановлением Совета Министров Республики Беларусь от 31.08.2006 № 1117 утверждены Положение о порядке формирования, финансирования и выполнения ГКЦНТП и их перечень на 2006–2010 гг., определены также руководители и их заместители.

Государственная комплексная целевая научно-техническая программа — это комплекс государственных научно-технических программ и государственных программ фундаментальных и прикладных научных исследований, взаимодополняющих друг друга в рамках соответствующих приоритетных направлений научной и научно-технической деятельности, направленный на обеспечение полного инновационного цикла, начиная от фундаментальных научных исследований и заканчивая внедрением научной и научно-технической продукции в производство, и реализацию приоритетов социально-экономического развития Республики Беларусь.

ГКЦНТП формируется в целях обеспечения текущей и перспективной координации тематики научно-исследовательских, опытно-конструкторских и опытно-технологических работ, проводимых в рамках названных в упомянутом Положении программ, повышения эффективности использования в народном хозяйстве результатов исследований и разработок. Включаемые в состав ГКЦНТП государственные научно-технические программы, государственные программы фундаментальных и прикладных научных исследований являются ее самостоятельными разделами, формирование, финансирование и выполнение которых осуществляется в установленном порядке для указанных типов программ.

Перечень государственных комплексных целевых научно-технических программ на 2006–2010 годы содержит 11 наименований, в том числе ГКЦНТП «Машиностроение».

Государственными заказчиками – координаторами ГКЦНТП «Машиностроение» являются Минпром и НАН Беларуси. Информация о разделах и руководителях ГКЦНТП «Машиностроение», приведена ниже в таблице.

Разделы ГКЦНТП «Машиностроение»	
Наименование государственных научно-технических программ, сроки их выполнения и государственные заказчики	Наименование государственных программ фундаментальных и прикладных научных исследований, сроки их выполнения и государственные заказчики
Создание и освоение производства в республике новых поколений конкурентоспособной автотракторной, сельскохозяйственной и специальной техники на базе новых и высоких технологий (ГНТП «Машиностроение»), 2006–2010 годы, Минпром; Создание, освоение и внедрение в производство в республике новых образцов конкурентоспособного станочного, литейного, оптико-электронного и другого технологического оборудования и новых технологических процессов для организаций машиностроения с применением новых и высоких технологий (ГНТП «Технологии и оборудование машиностроения»), 2006–2010 годы, Минпром; Разработка и внедрение в промышленности технологий информационной поддержки жизненного цикла продукции (ГНТП «CALS-технологии»), 2005–2010 годы, Минпром;	Исследование механики технических и биомеханических систем, разработка эффективных методов повышения их надежности, создание новых компонентов машин и оборудования для машиностроения (ГКПНИ «Механика»), 2006–2010 годы, НАН Беларуси; Развитие физических принципов взаимодействия полей с материалами, создание высокоэффективных и конкурентоспособных методов, средств и информационных технологий неразрушающего контроля, диагностики и прогнозирования технического состояния промышленных объектов (ГКПНИ «Техническая диагностика»), 2006–2010 годы, НАН Беларуси, МЧС; Создание высокоэффективных технологических процессов и оборудования для развития металлургического комплекса Республики Бела-

Разработка и внедрение новых технологий, оборудования и машин для объектов городского хозяйства (ГНТП «Городское хозяйство»), 2006–2010 годы, Минжилкомхоз	реть (ГППИ «Металлургия»), 2005–2010 годы, НАН Беларуси	
Руководители ГКЦНТП «Машиностроение»		
Председатель координационного совета	Руководитель	Заместитель руководителя
Первый заместитель Премьер-министра Республики Беларусь Семашко Владимир Ильич	Первый заместитель Министра промышленности Демидович Иван Иванович	Директор ГНУ «Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси» Высоцкий Михаил Степанович

Как видно из приведенной таблицы, ГКЦНТП «Машиностроение» включает четыре государственные научно-технические программы (ГНТП) и три государственные программы фундаментальных и прикладных научных исследований (две ГКПНИ и одну ГППИ). Состав ГНТП возглавляет программа «Машиностроение», а государственных программ фундаментальных и прикладных научных исследований — ГКПНИ «Механика». Эти две программы образуют своеобразную научно-техническую ось, вокруг которой вращаются и действуют остальные программы.

В связи с приведенной системой государственных программ особое значение приобретает организация, направленность и качество научных исследований по ГКПНИ «Механика», которые, являясь базовыми для последующей реализации в научно-технических программах, прежде всего в ГНТП «Машиностроение».

2. Государственная комплексная программа научных исследований «Механика»

ГКПНИ «Механика» утверждена в составе Плана важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических, гуманитарных и социальных наук по Республике Беларусь НА 2006 – 2010 годы (План утвержден постановлением Президиума Национальной академии наук Беларуси от 24 февраля 2006 года № 20). Государственный заказчик программы: Национальная академия наук Беларуси; головные организации – Институт механики и надежности машин НАН Беларуси, Институт механики металлополимерных систем им. В.А.Белого НАН Беларуси; научный руководитель программы – академик М.С.Высоцкий

Цели программы: Создание новых методов исследования и развитие физико-математического аппарата описания динамики мобильных машин, механизмов, конструкций, механических, гидравлических, газовых и биомеханических систем; развитие теории и разработка новых методов расчета оценки и нормирования надежности машин и технических систем; создание новых компонентов и подготовка их для последующего промышленного освоения, повышение конкурентоспособности машин и оборудования на основе применения новых материалов и технологий

Структура программы

Программа включает:

подпрограмму прикладных научных исследований «Создание новых компонентов машин и оборудования для машиностроения» и подпрограмму ориентированных фундаментальных научных исследований «Динамика, надежность и управление в мобильных машинах, механических, гидравлических, газовых и биомеханических системах». Последняя состоит из трех разделов:

Раздел 1. «Динамика и прочность машин, механика жидкостей и газов»;

Раздел 2. Надежность технических систем;

Раздел 3. Биомеханика и механика адаптивных материалов и композитов.

Планируемая инновационная деятельность

Общее направление работ по программе — создание новых методов исследования, методик, программных комплексов расчета и проектирования машин, оборудования, их систем, технологических процессов и материалов, макетных образцов новых компонентов машин повышенного технического уровня.

В исследованиях заинтересованы Минпром, а также Минсельхозпрод, Минздрав, Минкоммунхоз, концерн «Белнефтехим», БелЖД.

В числе крупных заинтересованных предприятий — МАЗ, МТЗ, БелАЗ, МЗКТ, ММЗ, ПО «Гомсельмаш», а также станкозаводы республики, РУП «Гомельтранснефть «Дружба», ПО «Беларуськалий» и другие.

В результате исследований по заданиям программы планируется разработать:

52 макетных образца новых компонентов машин и оборудования, в том числе: «Гидромеханические трансмиссии и их базовые модули для мобильных машин», «Адаптивная система поддрессирования колесных тракторов «Беларусь», «Система управления тяговым электродвигателем троллейбуса МАЗ-103Т повышенного технического уровня», «Перспективная тормозная система тракторов «Беларусь», «Устройство управления работой подсистемы «стартер-генератор» электрических машин», «Подсистема контроля восприятия информации водителями», «Движитель типа «мотор-колесо» на основе высокомоментного вентильного электропривода прямого действия» и др.;

93 методики (метода), в том числе

- исследования и проектирования модульных транспортных средств,
- расчета и проектирования механических систем машин с заданными ресурсно-функциональными свойствами,
- синтеза, расчета и оптимизации силовых передач мобильных машин,
- конструирования технических средств динамической стабилизации дисков различных геометрических параметров для компонентов автотракторной техники,
- проектирования устройств управления работой подсистемы «стартер-генератор» электрических машин,
- расчета зубчато-ременных передач повышенной несущей способности и долговечности,
- контроля заданной структуры картерных отливок агрегатов автомобилей и термообработанных болтов двигателей,
- совершенствования конструкций и рабочих процессов в двигателях внутреннего сгорания,
- изготовления высокопрочного лезвийного инструмента на основе композиционных материалов с наноразмерными наполнителями и др.

43 технологии, в том числе: «Виртуальных испытаний автотракторной и сельскохозяйственной техники», «Замещения импортируемых компонентов отечественными изделиями с повышенным ресурсом работы», «Формирования поверхностных слоев с заданным комплексом триботехнических и упруго-диссипативных свойств», «Формирования поверхностных износостойких структур с пониженным коэффициентом трения», «Изготовления и термообработки литых зубчатых колес взамен поковок», «Изготовления и химико-термического упрочнения зубчатых колес из высокопрочных сталей нового поколения» и др.

5 новых материалов: «Композиционные многослойные системы на основе оксидокерамики, поверхностно модифицированные антифрикционными материалами с нанонаполнителями», «Волокнисто-пористые материалы», «Биосовместимые полимерные трикотажные эксплантанты», «Ауксетичные и мультимодульные материалы», «Композиционные материалы с наноразмерными наполнителями».

Подписаны соглашения о взаимной заинтересованности в использовании результатов работ с Минпромом (по программе в целом), с потребителями результатов по группам заданий с МАЗ, МТЗ, ПО «Гомсельмаш». Задания программы поддержаны более чем 25 предприятиями промышленного комплекса, в том числе МАЗ, МТЗ, БелАЗ, МЗКТ, ПО

«Гомсельмаш», ОАО «Амкодор», ОАО «Пеленг», БелЖД, РУП «Гомельтранснефть «Дружба», а также Министерством обороны, Министерством транспорта, рядом промышленных предприятий, выпускающими оборудование, компоненты и комплектующие для машиностроения и смежных отраслей. Предусмотрено внедрение результатов разработок по заданиям программ на промышленных предприятиях.

Вклад программы в развитие фундаментальной науки, сохранение и развитие научного потенциала страны, в развитие международного сотрудничества в области науки

Разработка и создание современных компьютерных методов расчета, динамического анализа и испытаний мобильных машин и технических систем (компьютерная механика); методов прогнозирования ресурса машин, принципов мониторинга надежности автотракторной, сельскохозяйственной техники и станочного оборудования; наноматериалов и нанотехнологии, интеллектуальных адаптивных материалов и композитов для машиностроения; научных основ создания компонентов новых двигателей, трансмиссий, приводных систем, электронных и мехатронных систем для автомобилей, тракторов, комбайнов, станков; интеллектуальной и бортовой электроники и мехатроники.

По тематике заданий программы Объединенным институтом машиностроения выполняются контракты с организациями Республики Корея в области разработки методик оценки прочности механических передач мобильных машин и их ускоренных испытаний. В стадии подготовки находятся контракты по ускоренным испытаниям моделей силовых систем машин, нейтрализаторам выхлопных газов двигателей мобильных машин и др.

В рамках договоров о научном сотрудничестве между НАН Беларуси и СО РАН проводятся совместные работы в области физики прочности и физической мезомеханики с Институтом физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН. Подписаны соглашения с Массачусетским технологическим институтом (США), Версальским университетом Св. Квентина (Франция), Высшей национальной инженерной школой г. Бурж (Франция), Найянским технологическим университетом (Сингапур), Токийским университетом (Япония) о проведении совместных работ в области развития исследований по наноматериалам и нанотехнологиям.

Вклад результатов программы в повышение уровня образования в стране

Координация научных исследований и подготовка научных кадров в областях: механики машин, механизмов, конструкций, механических, гидравлических, газовых и биомеханических систем; разработки компонентов машиностроения, потенциально имеющих ключевое значение для машиностроения республики.

В программе участвуют 76 организаций и предприятий двенадцати министерств и ведомств, в т.ч. 13 учреждений НАН Беларуси, 14 вузов Минобразования, 2 вуза Минсельхозпрода, 2 вуза Минздрава и 1 – Минспорта и туризма

Исполнителями и соисполнителями заданий программы являются представители крупнейших вузов страны: БГУ, БНТУ, БГУИР, БелГУТ, БРУ, БГАТУ, ГрГУ, ПГУ, ГГУ, ГГТУ, БГТУ, ВГТУ, ГГМУ, БГУФК.

В курсы лекций по общетехническим дисциплинам, основам конструирования автомобильной, тракторной и сельскохозяйственной техники, технологическому оборудованию, технологиям производства изделий машиностроения и сопутствующим технологиям, включаются результаты фундаментальных и прикладных исследований по программе, что обеспечивает интеграцию академической науки и высшей школы.

3. Роль компонентов

Изменение требований к качеству компонентов по годам приведено на рис. 1. Компоненты являются наиболее подвижной и быстро прогрессирующей составляющей машин, что во многом определяют их ведущую и возрастающую роль при создании новой конкурентоспособной техники.

ГППИ «Создание новых компонентов машин и оборудования для машиностроения» является первой и наиболее значимой частью ГКПНИ «Механика», что отражает отмеченную тенденцию.

В мировой практике можно выделить три подхода к производству и использованию компонентов машин:

1. Производство компонентов за счет собственных ресурсов;
2. Широкое использование компонентов от мировых производителей;
3. Комбинированный подход.

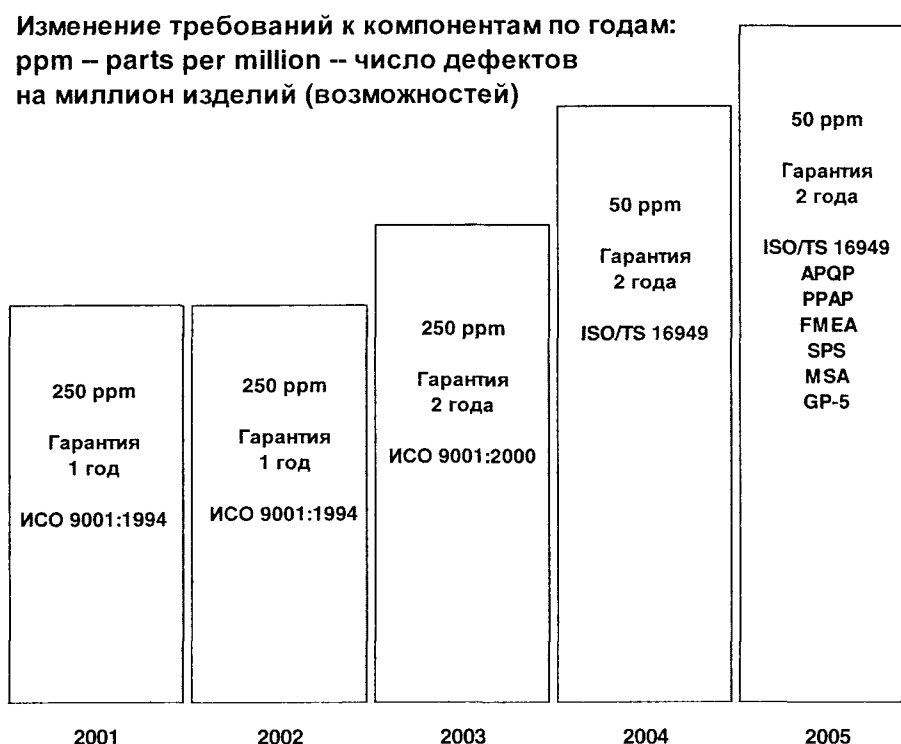


Рис. 1. Изменение требований к качеству компонентов по годам

В отечественной практике можно найти примеры, когда машиностроительное предприятие широко использует компоненты мировых производителей (БелАЗ) и когда предприятие ориентируется на собственные ресурсы (МТЗ). Следует отметить, что наличие определенной доли собственных (отечественных) компонентов в выпускаемой продукции является одним из критериев конкурентоспособности предприятия и страны в целом.

В общем случае использование собственных (отечественных) либо мировых компонентов связано с экономическими факторами и во многом зависит также от государственной научно-технической и социальной политики.

В настоящее время на мировых рынка машиностроительной, особенно автомобильной продукции, отмечается особая активность производителей из Китая и Кореи.

Китай стремится вытеснить конкурентов с рынка компонентов за счет дешевизны своей продукции. При этом в научно-технической сфере китайские специалисты уделяют особое внимание внедрению результатов в практику машиностроения в областях исследования прочности, использования электронных систем и мероприятий по защите окружающей среды. Во время участия белорусских специалистов в Китайской международной конференции по обмену специалистами и Выставке научно-технических достижений в сентябре 2006 года большой интерес был проявлен к разработке «Нейтрализатор выхлопных газов двигателя

внутреннего сгорания», выполненной в Объединенном институте машиностроения НАН Беларуси [2].

Корейские автомобили в последнее время имеют высокий рейтинг по надежности. Это во многом связано с активной государственной политикой в области собственных (отечественных) компонентов. При Корейском институте машин и материалов создан Центр оценки надежности механических компонентов в Корее. В описании деятельности Центра отмечено следующее.

Сегодня, корейская промышленность механических компонентов сталкивается с трудными ситуациями из-за сокращения внутреннего спроса, увеличения цен на сырье, конкуренции развивающихся стран (таких как Китай) и общего развития мировой индустриальной структуры. Поэтому есть острая потребность создать испытательную инфраструктуру и систему оценки на уровне развитой страны. Это позволит проводить быструю и точную оценку характеристик и ресурса компонентов, для того чтобы достигнуть международной конкурентоспособности корейских механических компонентов.

Но для отдельных предприятий невозможно иметь все испытательное требуемое оборудование и необходимый технический персонал. Поэтому Министерство торговли, промышленности и энергии Кореи продвигают проекты по надежности так, чтобы отечественные предприятия смогли повысить свою международную конкурентоспособность при сокращающемся бюджете. Это также даст им возможность приблизить их технологию и качество производства к уровню развитых стран. Как часть этой программы Корейский институт машиностроения и материалов (КИММ) учредил Центр оценки надежности (RAC), чтобы выполнять подтверждение требований по надежности механических компонентов.

Центр Оценки надежности механических компонентов играет роль Медицинского диагностического центра механических компонентов, произведенных в Корее. В настоящее время он обладает приблизительно ста тридцатью испытательными станциями, и развивает около 10 технологий ускоренных ресурсных испытаний, что позволит сократить время испытаний и связанную с ним стоимость. Также планируется разработать методы для выполнения около 20 различных климатических тестов, которые будут соответствовать военным стандартам (MIL-STD-810F).

RAC будет проводить в действие «Правительственный проект сертификации Надежности» и, в конечном счете, добавит технологию оценки надежности при выполнении отдельных проектов по исследованиям и разработкам механических компонентов. Это сделает качество отечественных компонентов одним из лучших в 4 международных классах в пределах 10 лет. Ожидается рост интереса среди индустриальных компаний в использовании технологий, для того чтобы улучшить надежность и конкурентоспособность механических компонентов [3].

На рис. 2 показаны основные этапы в процедуре получения сертификата «R»-Mark Certification Award, выдаваемого RAC после успешного тестирования механического компонента. Performance, Environmental, Durability и Safety тесты означают соответственно: тест на функциональные характеристики, климатический тест, тест на долговечность (ресурс) и тест на безопасность. Видно, что эта процедура имеет более широкий характер по сравнению с испытаниями на надежность (долговечность). Фактически процедура испытаний выявляет все основные свойства механического компонента.

На рис. 3 показано различие между испытаниями на оценку качества и испытаниями на надежность в понимании RAC. В нижней части рис. 3 указано, что тест на надежность (Reli-

ability assessment test) представляет собой синтетический (комплексный) гарантирующий качество системе тест (Synthetic Quality Guaranteed System» test), который служит для подкрепления оценки качества испытаниями на ресурс и климатическими испытаниями.

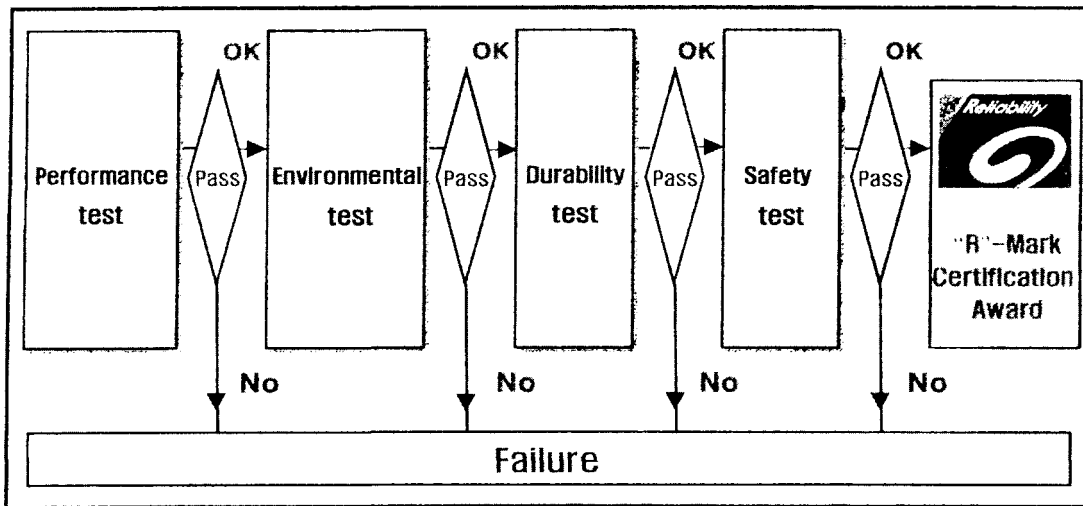


Рис. 2. Процедура испытаний на надежность

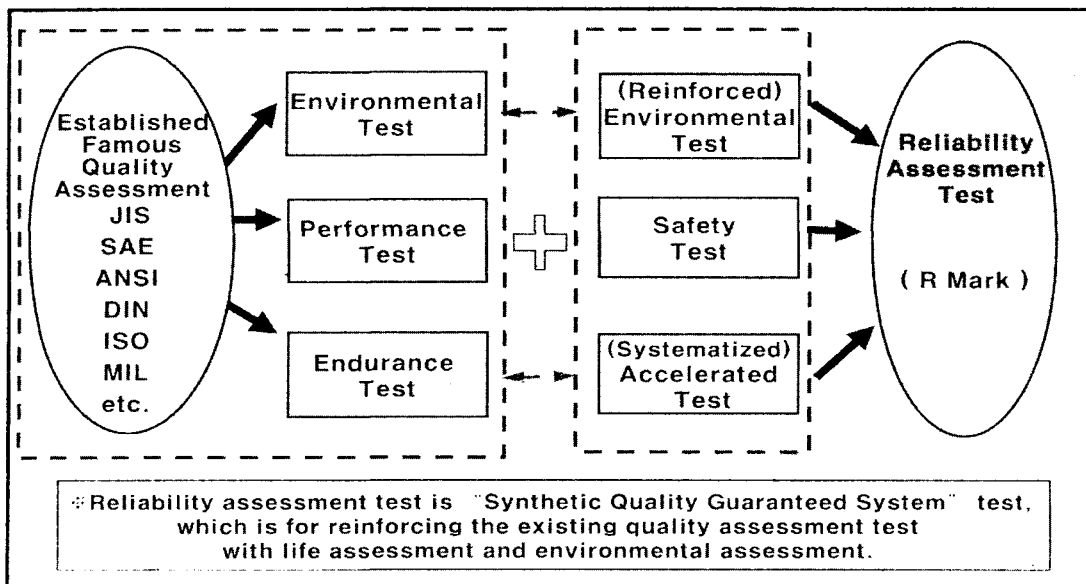


Рис. 3. Сравнение между испытаниями на оценку качества и испытаниями на надежность

Следует отметить большое число испытательных станций, стендов (около 130) и при этом сравнительно небольшое число методик, особенно в области ускоренных ресурсных испытаний (около 10), что свидетельствует о стремлении создать унифицированные методики испытаний, несмотря на широкий спектр испытываемых компонентов: механические компоненты (тормоза, подшипники, пружины, муфты, сцепления, карданные валы, мосты и оси автомобилей и тракторов, гидротрансформаторы и замедлители, ступенчатые и бесступенчатые коробки передач, редукторы и т.д.), гидравлические устройства (гидронасосы и гидро-

моторы, сервоприводы, разнообразные клапаны и т.д.), пневматические устройства (цилиндры, моторы, компрессоры, регуляторы, клапаны и т.д.).

Данный опыт корейских специалистов во многом может быть использован в нашей стране как в организационно плане, так и по вопросам создания унифицированных современных методик для ускоренных ресурсных испытаний машиностроительных компонентов.

Заключение

Развитие отечественного машиностроения во многом зависит от научно-технического обеспечения процессов создания новой техники, в том числе от эффективности и результативности государственных программ. Механика как наука была и остается основным поставщиком результатов для создания современных машин и их компонентов. Особое значение на современном этапе развития машиностроения приобретает быстрая и экономичная разработка новых наукоемких компонентов, создание методов их проектирования и ускоренных испытаний. На эти цели в рамках описанных государственных программ задействован и интегрирован потенциал отечественной академической, вузовской и производственной науки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высоцкий М.С. Белорусская школа механики и комплексного проектирования машин // Теоретическая и прикладная механика, 2005. Вып. 18. – С. 26–43.
2. Янкевич Н.С. Отчет о работе, проделанной во время командировки на Китайскую международную конференцию по обмену специалистами и Выставку научно-технических достижений в провинции Ляонин (г. Шеньян, Китай, 16.09.06-22.09.06). – Мн.: ОИМ, 2006.
3. Introduction to Reliability Assessment Center for Mechanical Components in KOREA. – Mechanical Components. – KIMM: Korea Institute of Machinery and Materials. – 2006. – P. 8 – 37.

ПРОБЛЕМЫ ПРОЧНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ГОРНЫХ ПОРОД

Шемякин Е.И.

1. Синтетическая теория прочности

1.1. Введение. Развитие представлений о прочности твердых тел продолжается в двух противоположных аспектах:

- предотвращение нежелательного разрушения конструкций или элементов конструкций из металлов, сплавов и горных пород;
- создание системы направленного управляемого разрушения (отделение от массива в горнодобывающих процессах, разделение тела на части, дробление и измельчение твердых деформируемых материалов).

И та и другая постановки опираются на особенности деформирования твердых тел вплоть до разрушения, на установление, разработку критериев «разрушения». И та и другая требуют знания некоторых основных механических свойств материала и характеристик процесса нагружения (деформирования).

В этих проблемах при постановке задач и при выборе методов исследования важно было опираться на современные разделы механики сплошных сред и на опыт исследований в физике твердого тела, т. е. фактически на уровне исследований разного типа (конечные объемы материала в механике и молекулярный или кристаллический уровень в физике твердого тела).

По-видимому, впервые эти проблемы сопоставлены очень ответственно, с соответствующими оценками и выводами, в школе академика В. Е. Панина, в которой введено понятие «мезомеханики» как раздела физики, объемлющего указанные интересы: что нужно знать и на каком уровне микроисследований о твердом теле (металлы, сплавы, горные породы), чтобы судить о поведении макроструктур, т.е. дать расчетные, технологические ответы на два вопроса, поставленные в начале [1].

С самого начала развития теоретических основ прочности преобладали позиции Сен-Венана и Треска. Первый, являясь блестящим основателем теории пластичности, образно сопоставил наблюдения за линиями скольжения, которые в истории получили название Людерса-Чернова, с теоретическими выводами о линиях максимальных касательных напряжений и пришел к выводу, что экспериментальные данные Треска могут быть положены в основу теории в силу схожести тех и других (линий скольжения и изолиний максимальных касательных напряжений). Это единственно основательное предположение, полученное в условиях плоской деформации и не дающее никаких оснований для перехода к трехмерной ситуации. Это очень важное обстоятельство в развитии общей теории пластичности и вязкой жидкости, о чем еще не раз будет сказано далее.

В альтернативном и преобладающем до сих пор развитии теории прочности и пластичности, ползучести, разрушения превалирует построение, в основе которого лежат представления о предельных условиях гладкого типа (Губер, Мизес и их обобщения). Тем не менее практический интерес к сингулярным поверхностям (Треска-Сен-Венана, Кулона-Мора) также привлекал внимание серьезных исследователей: здесь достаточно упомянуть ранние работы академика А.Ю. Ишлинского [2] и замечательные работы Д. Д. Ивлева и В. Д. Ключникова и их последователей [3, 4].

В определенном смысле предлагаемое изложение, безусловно навеянное историей и последними работами школы академика В. Е. Панина, надо считать примыкающим к направлению исследований, идущих за Т. Карманом и С. А. Христиановичем [5-7].

1.2. Опыты по исследованию нагружения деформируемых тел на эквивалентных материалах.

В начале 70-х годов в связи с вопросами о деформировании и разрушении горных пород в Институте горного дела СО РАН были начаты работы по моделированию процессов поведения материалов при различных нагрузках на эквивалентных материалах. Работы оказались достаточно плодотворными, позволили обсудить поставленные во введении вопросы и получить ряд новых выводов. Это дало возможность провести кардинальное обсуждение путей построения современной теории прочности и назвать один из ее вариантов синтетическим (смысл этого термина будет ясен из предлагаемого материала).

Как всегда, при постановке исследований, связанных с одновременным экспериментальным и теоретическим исследованием, необходимо было поставить под вопрос самые простые, исходные представления, чтобы точнее и проще оценить получаемые результаты. Этому способствовал состав исследователей, который включал и сильных теоретиков (А. Ф. Ревуженко) и опытных экспериментаторов (С. Б. Стажевский, А. П. Бобряков). В этом обзоре все эти ученые являются полноправными соавторами публикуемых результатов.

Первым этапом исследования было создание (изобретение) «ящика» — прибора для осуществления однородного сдвига в эквивалентном материале. При этом самым существенным было реализовать «жесткую» машину, которая работает в режиме заданных перемещений (деформаций) и позволяет зарегистрировать так называемую ниспадающую ветвь (или запредельное поведение материала, или послепиковую прочность). Это было очень важно и приобрело в механике твердого деформируемого тела особенное значение, а машин, реализующих такой режим, тогда практически еще не было. Напомним, что к первым машинам такого типа относились машины СН-3, предложенные А. А. Ильюшиным [8]. Конечно из дальнейшего изложения будет ясно, почему авторам [9-11] не удалось сразу реализовать состояние чистого сдвига, но будет также понятно, что реализация простого сдвига (в отличие от схемы Роско) принесла новое представление о несимметричной схеме деформирования и о локализации деформаций.

Прежде чем обсудить основные результаты испытаний и выводы, остановимся на основных представлениях механики сплошной среды, которые широко использовались для этого в прошлом.

Для описания исходного напряженного состояния элемента зададим главные нормальные напряжения

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (1.1)$$

и триэдр главных направлений.

При этом, в отличие от обычной формы главных инвариантов напряженного состояния, примем другой набор, связанный с максимальным касательным напряжением

$$\tau_{\max} \equiv T = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.2)$$

и нормальным напряжением на этих же площадках

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (1.3)$$

проходящих через второе главное направление и делящих пополам углы между первым и третьим главными направлениями.

Эти величины имеют четкий физический смысл: T – усилие проскальзывания, а σ_n – препятствие для проскальзывания.

Для полного инвариантного описания исходного напряженного состояния (1.1) необходимо ввести третью величину [5, 6, 12].

$$\mu_{\sigma} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (1.3)$$

или

$$\mu_{\sigma} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{T}$$

Так что набор трех инвариантов $T = \tau_{\max}$, σ_n и μ_{σ} доставляет необходимые и достаточные условия описания произвольного напряженного состояния твердого деформируемого тела [5, 6, 13]. Не вдаваясь в подробности использования «языка» площадок для описания напряженно-деформированного состояния твердых тел, отметим, что наряду с T и σ_n эти инварианты обеспечивают все нюансы представлений Треска-Сен-Венана и Кулона-Мора, а параметр Лодэ-Надаи μ_{σ} [2], определяющий вид напряженного состояния, играет очень важную роль, указывая на работу площадок с экстремальными значениями касательных напряжений на этих площадках, ориентированных относительно главных направлений известным образом:

$$T_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{и} \quad T_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{и} \quad \sigma_n = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

Так что можно различить напряженное состояние полной пластичности

$$\mu_{\sigma} = \pm 1 \begin{pmatrix} T = T_{12} \\ T_{23} = 0 \end{pmatrix}$$

и неполной пластичности (например, чистого кручения)

$$\mu_{\sigma} = \pm 1 \begin{pmatrix} T = \tau_{\max} \\ T_{12} = T_{23} \end{pmatrix}$$

Эта классификация не рассматривалась ранее детально, хотя можно считать, что именно ее имели в виду Надаи и его ученик Лодэ. Это описание напряженного состояния позволяет детализировать различные ситуации, возникающие при нагрузках в твердом теле.

Здесь очень важно подчеркнуть два обстоятельства, которые имели в виду авторы экспериментов с эквивалентными материалами при постановке опытов [9].

Первое, по-видимому, подразумевал еще Сен-Венан, а именно: в опытах наблюдаются в основном картины по деформациям элемента (перемещениям, точнее говоря), а предвычисляются – по напряжениям (площадки максимального касательного напряжения, их ориентация в декартовой, лабораторной системе координат). Это сопоставление и было основным в теории Сен-Венана, на чем основана его гипотеза о совпадении главных направлений тензора напряжений и скоростей деформации сдвига

(плоский случай!). Затем этот экспериментально наблюдавшийся факт лег в основу практически всех построений пространственной теории пластичности, хотя наблюдался только в достаточно простых условиях. Более того, аналогичные обобщения проникли и в теорию вязкой жидкости (уже независимо от Сен-Венана). Обычные в настоящее время, эти обобщения не имеют других обоснований – и это очень печально, хотя именно выход из условий плоской деформации и, особенно, условий простого нагружения позволит определить дальнейшую судьбу теории пластичности, ползучести, прочности твердых тел.

В связи с этим продолжим схему рассуждений, связанных с введением группы основных инвариантов, определяющих деформирование твердых тел.

Дело в том, что введение той или иной группы инвариантов для описания напряженного состояния (1.2)-(1.4) не связано, вообще говоря, с деформированием твердых тел. Какими бы ни были системы нагружения деформируемого тела внешними силами, всегда, по Коши, можно ввести тензор напряжений (в отличие от закона Паскаля для жидкости и газа) и посчитать удельные усилия на отдельные площадки (напряжения). То есть напряжения вычисляются по заданным внешним усилиям и положению (включая повороты и изменения размеров) площадок. В этом принципиальная разница между определением напряжений и деформаций в теории упругости и в теории необратимых деформаций (пластичности, ползучести, разрушения).

Поэтому обратимся к введению группы инвариантов для описания деформаций, скоростей деформаций на ином уровне.

Конечно, формально можно ввести, следуя (1.2)-(1.4), группу инвариантов

$$\Gamma_{\max} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} \quad (1.6)$$

$$\mu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (1.7)$$

Но это не имеет смысла нигде, кроме изотропной теории упругости, где это очевидно.

Для пояснения рассмотрим простой закон связи $T = T(\Gamma)$ при $\mu_\sigma = \mu_\varepsilon = 0$. Этого достаточно для обсуждения и для иллюстрации основной идеи. Эта связь между максимальным касательным напряжением T и величиной главного сдвига Γ явится основной в предлагаемой модели синтетической прочности твердых тел и поэтому подлежит детальному обсуждению. Поэтому основные новые результаты по моделированию с эквивалентными материалами относятся к исследованию этой фундаментальной характеристики прочности. В статье [9] обсуждалась типичная картина деформирования материала (эквивалентного) на «жесткой» машине типа «ящик» (рис. 1).

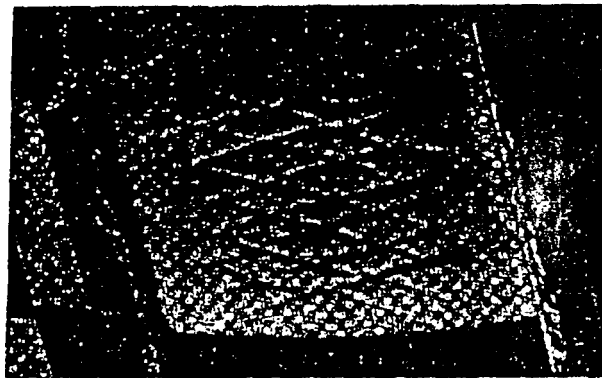


Рис. 1

Напомним еще раз идеализированную схему описания: в экспериментальной установке задавались- перемещения, по которым вычислялись сдвиги, а напряжения измерялись в ходе эксперимента по факту (*in situ*), линии I, II, III (рис.2) описывают поведение материала после максимума (постпиковое поведение, запредельное и т. п.) и указаны как возможные реализации при разных краевых условиях опыта.

Прежде чем обратиться к обсуждению основных результатов, остановимся на описании самого опыта.

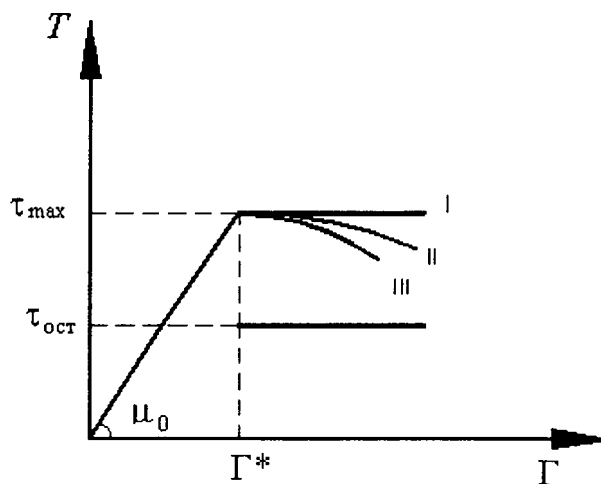


Рис.2

Вместе с ростом напряжений до некоторых максимальных τ_{\max} (критических) значений происходит рост деформаций сдвига (искажение первоначального прямого угла между избранными волокнами). Это и есть реальное преодоление прочности. Что происходит с материалом, когда $\mu = dT/d\Gamma$ падает: $\mu < \mu_0$ (μ_0 – упругое сопротивление сдвигу)? Еще Батдорф и Будянский [14] обратили внимание в одной из первых послевоенных работ, что сопротивление сдвигу на разных площадках, по-разному ориентированных относительно главных направлений тензора деформаций, будет разным. Это обстоятельство как основное использовал в своих построениях М. Я. Леонов [15]. Действительно, давайте рассмотрим две картинки: распределение (тензорное) напряжений τ_{\max} относительно главных направлений тензора напряжений (1.1) и (1.3) и распределение (тензорное) деформаций (или скоростей деформации) [5, 6] с учетом локализации деформаций. В этой ситуации, если есть линейная связь (закон Гука или Ньютона в случае вязкой жидкости и $\dot{\Gamma} \approx \Gamma$), то все в порядке. Этот закон гарантирует сохранение линейной связи, а значит изотропности состояния среды при всех

последующих значениях $T > 0$, $\dot{\Gamma} > 0$. А если закон является нелинейным, а тем более различным при $\Delta T > 0$, $\Delta T < 0$, то вопрос о «соосности» вееров по T и Γ (или $\dot{\Gamma}$) в общем случае теряет смысл: «нарисованные» по тензорным правилам напряжения по-прежнему имеют смысл, а деформации распределяются отнюдь не по тензорным правилам – происходит локализация [5, 6, 9]. Это сейчас наблюдается многими, но мало кто признает, что это одновременно означает отказ от тензорного описания деформаций и даже от скоростей деформаций. Веера распределений напряжений и деформаций (скоростей деформаций) не совпадают. Утверждение этого факта было едва ли не самым главным результатом, приведшим к следующей серии испытаний (см. [6]).

Впервые этот факт был рассмотрен академиком С. А. Христиановичем и автором в [6], где была явно отмечена необходимость сложного нагружения (по А. А. Ильюшину) [8], так как иначе нельзя было обнаружить этого различия в описании напряжения по Коши и деформаций с локализациями.

Теперь вернемся к описанию результатов опытов с «ящиком». В опытах, если оставить пока в стороне детали реализации, было обнаружено:

существование ниспадающей ветви и ее зависимости от масштаба опыта (линии I-III на рис. 2), появление размера (блоков) в изначально изотропном эквивалентном материале, проявление «проскальзывания» (перемещения) по берегам площадок скольжения; несимметрия функционирования ожидаемых площадок с $T = \tau_{\max}$ и их проявление оказались связаны с появлением локальных поворотов. При достижении $T \approx \tau_{\max}$ возникающие площадки проявляют себя по разному: до разгрузки элементы движутся друг за другом, а после разгрузки и движения в обратном направлении появляются кинематические возможности поворота. В целом проявилась новая, ранее неизвестная возможность деформаций твердого тела за пределом упругости: разделяться на регулярные блоки, так что эти блоки поворачиваются образуют в новом состоянии сплошное тело.

Эта схема деформаций с существенной локализацией в окрестности площадок с $T = \tau_{\max}$ была независимо обнаружена в опытах в Новосибирске и Томске, что было отмечено общей премией Сибирского отделения АН СССР по работам этого направления [1, 9].

1.3. Предел упругости, переход к необратимым деформациям и разрушению.

В рамках предлагаемой теории основное внимание будет уделено площадкам главного сдвига с возможной локализацией и площадкам с максимальным касательным напряжением (Треска-Сен-Венан). Поэтому вернемся еще раз к обсуждению принципиально важных опытов, выполненных Лодэ [12] и приведших разных авторов к разным выводам. На рис. 3 повторены результаты замечательного рис. 46 из книги А. Надаи, по которым можно сделать заключение о влиянии среднего главного нормального напряжения σ_2 на $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Там же нанесены данные, связанные с указанным выше набором инвариантов (1.2-1.4):

$$I_2 = \tau_{\max} \sqrt{1 + \frac{\mu_\gamma^2}{3}} \quad (1.8)$$

где I_2 – второй инвариант девиатора (тензора) напряжений. Данные этого рисунка всюду в развитиях различных вариантов теории пластичности считаются основным аргументом в пользу применений гладких условий пластичности типа Губера-Мизеса взамен сингулярных типа Треска-Сен-Венана. Как следует из сравнения опытных данных и [5, 6], в диапазоне $1 \geq \mu_\sigma \geq -1$ – I влияние среднего главного направления

реализуется через параметр μ_σ . Из этих данных можно сделать разные выводы. Таким образом, можно считать, что при переходе к «языку» площадок скольжения нет необходимости вводить гладкие условия пластичности — достаточно при описании перехода учесть параметр Лодэ.

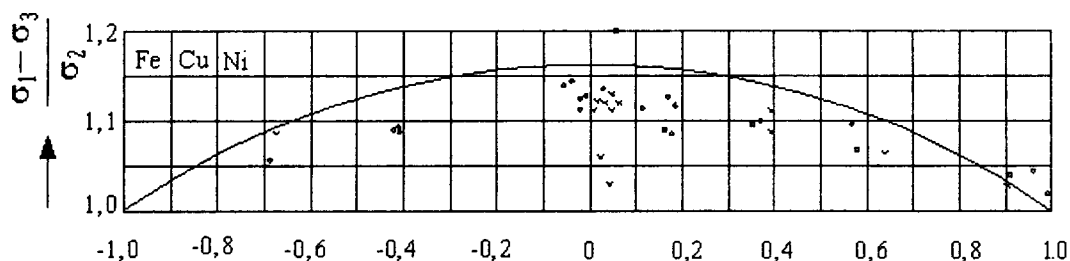


Рис.3

Таким образом, в синтетической теории прочности можно (и следует) делать оценку величины перехода к необратимым деформациям в соответствии с [16-18], но при этом – что главное – надо проследивать «историю» наступления «пластичности» (в широком смысле слова) по конкретным площадкам (их ориентации, прежде всего) и по параметру μ_σ . Это означает, в первую очередь, учет анизотропии сопротивления сдвигам в среде, которая (анизотропия) возникает на переходе к необратимым деформациям и учитывается либо параметром μ_σ , либо сингулярностью условий пластичности, либо чисто формально учетом третьего инварианта. После работ Надаи и Лодэ следующими были Ю. Янг [17] и В. В. Новожилов [16], см. также обзор в книге А. А. Лебедева и Г. С. Писаренко [19].

Отмеченный факт и новая интерпретация данных Лодэ привлекли внимание авторов [5, 6] также в связи с попытками выйти за рамки плоской деформации и предпринять попытки обобщения результатов испытаний на трехмерный случай (опыты Тэйлора-Квини в книге Л.М. Качанова [18]). Если, следуя Т. Карману (что проделали авторы [5, 6] сначала независимо, а потом с удовлетворением обнаружили, что Т. Карман мог бы получить этот же результат, используя введенные им впервые понятия неполной и полной пластичности), ввести зависимость $\mu_\sigma(\mu_\epsilon)$ или $\mu_\sigma(\mu_{\Delta\epsilon})$ то эта зависимость будет иметь различный характер при переходе от линейных связей между напряжениями и деформациями (скоростями деформаций) к нелинейным (необратимые деформации, например), [5, 6]. Эта зависимость тем больше отклоняется от биссектрисы $\mu_\sigma = \mu_\epsilon$ или $\mu_\sigma = \mu_{\Delta\epsilon}$ (что означает подобие тензоров), чем больше необратимые деформации по сравнению с предельными упругими (рис.4 [18]).

Опытный результат (рис. 4) был отмечен в упомянутой классической работе [18], но, к сожалению, практически не использовался при построении трехмерных (пространственных) моделей необратимого деформирования твердых тел и их разрушения.

Это же обстоятельство, по-видимому, имеет значение и при построении модели вязкой жидкости и турбулентности.

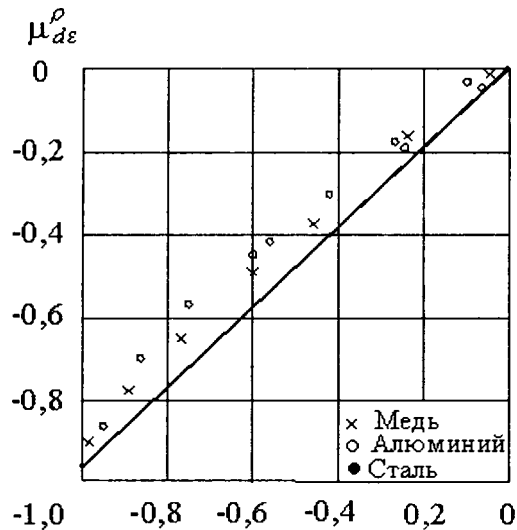


Рис.4

Но отсутствие подобия тензоров напряжений и деформаций (скоростей деформаций) не единственное препятствие на пути часто необоснованных переходов от плоского случая (плоская деформация или обобщенное плоское напряженное состояние) к пространственной (трехмерной) ситуации. Есть еще фактор локализации деформаций, на который было обращено внимание в самом начале работ в Новосибирске и Томске, и возможность в связи с этим отказа от тензорного описания деформаций (скоростей деформаций) и перехода к описанию кинематики деформирования с помощью перемещений (скоростей перемещений) и введения независимых, дополнительных кинематических параметров. Такими важными параметрами явились повороты элементов, о которых было сказано при описании опытов с эквивалентными материалами на «ящике». Введение таких параметров очень важно для описания необратимых деформаций в твердых телах, включая образование блоков (размера) в первоначально однородных и изотропных телах и появление их поворотов друг относительно друга для обеспечения сплошности «разрушенного» тела. Эти повороты, в отличие от вычисляемых по полю перемещений (или скоростей), являются новыми независимыми переменными [11].

Введение этих дополнительных параметров в теоретическом плане приводит к постановке новых краевых задач, а в практическом – означает оценку остаточной прочности «разрушенного» материала.

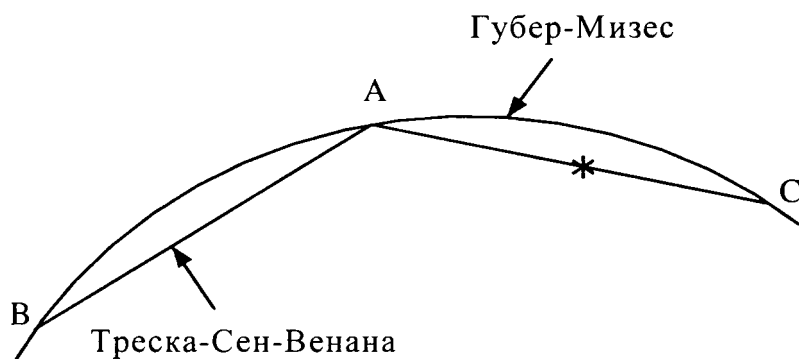


Рис.5

Для иллюстрации влияния параметра Лодэ рассмотрим нагружение материала с изменением величин главных напряжений без поворота главных направлений тензора

напряжений. На рис. 5 в сечении девиаторной плоскостью указано положение поверхности $\tau_{\max} = \text{const}$ в соответствии с (1.8), там же указано положение поверхностей по Сен-Венану-Треска и по Губеру-Мизесу.

Если иметь ввиду «историю» действия площадок с максимальным касательным напряжением, то можно «расширить» представление о простом нагружении. Если точка, отмеченная * на этой поверхности, перемещается по нормали к любой из линий Т-СВ или Г-М либо вообще вне этих линий, то это может отвечать упрочнению — увеличению $\tau_{\max} = \tau_s$, вместе с γ , главные оси неподвижны. Нетрудно рассмотреть различные реализации нагружения.

Введем исходное, соответствующее точке *, напряженное состояние $\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0$

$$\frac{\sigma_1^0 - \sigma_3^0}{2} = \tau_{\max}$$

соответствующее тем самым неполной пластичности $\mu_\sigma \neq 1$, и будем увеличивать напряжение с индексом «0» пропорционально с параметром $k > 1$:

$$\sigma_1 = k\sigma_1^0, \quad \sigma_3 = k\sigma_3^0$$

Тогда

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k \frac{\sigma_1^0 - \sigma_3^0}{2} = k\tau_{\max}$$

что может отвечать упрочнению материала:

$$k = \tau_{\max} / \tau_{\max}^0 > 1$$

Но для рассматриваемого варианта с влиянием μ_σ появляется новая возможность — растут касательные напряжения на других площадках с экстремальными значениями:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = k \frac{\sigma_1^0 - \sigma_2^0}{2} = kT_{12}^0$$

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = k \frac{\sigma_2^0 - \sigma_3^0}{2} = kT_{23}^0$$

При этом приближение kT_{12}^0 (или kT_{23}^0) к величине τ_{\max} означает переход к полной пластичности — движение точки * либо к А, либо к С, т. е. изменение μ_σ либо к $\mu_\sigma = 1$, либо к $\mu_\sigma = -1$. В любом из этих вариантов существенно не перемещение * вонне линий Т-СВ либо Г-М, а изменение μ_σ , так как это означает включение, кроме главных, площадок с T_{12} или T_{23} .

Таким образом, несмотря на внешнее сходство предельных условий, важно различать «историю» развития площадок с касательными напряжениями, отвечающую $|\mu_\sigma| = 1$ и $\mu_\sigma = \pm 1$, так как эта история отвечает «физически» различной анизотропии сопротивления сдвигам в неупругом состоянии. С этой точки зрения «простым» является нагружение при

$\mu_\sigma = const$ при любом начальном значении μ_σ из общего промежутка $-1 < \mu_\sigma < 1$. Иначе говоря, параметр нагружения k должен быть единым для σ_1 , σ_3 и для σ_2 .

С этой точки зрения – возникновение анизотропии сопротивления сдвигам в первоначально изотропном упругом теле при переходе в неупругое состояние – надо различать $\mu_\sigma = const$ и μ_σ переменное. Последнее может означать, что при приближении * к А или к С перераспределяется роль площадок с экстремальными, касательными напряжениями, при этом на одних площадках они растут, а на других могут убывать. Произойдет разгрузка, и будут нарушены условия «простого» нагружения. Есть еще одна формулировка: «простым» на «языке» площадок следует считать продолжение деформирования на площадках, где наступила пластичность, включая дополнительное включение других площадок. Это «простое» нагружение происходит до тех пор, пока не наступит разгрузка на площадках с наступившей до этого пластичностью.

Наконец, при переходе от одного напряженного состояния (например, А или С вдоль линии Т-СВ или Г-М обязательно наступит разгрузка по подходящей системе площадок. С этой точки зрения, «история» возникновения точки * и ее движение вдоль указанных линий является опорной позицией в синтетической теории прочности, несмотря на почти гладкие аппроксимации предельных линий Т-СВ или Г-М.

Обратим внимание на то, что переход к площадкам скольжения (и их кинематическому смыслу) привлек внимание к так называемой ниспадающей ветви на зависимостях «напряжение-деформация», если эти зависимости могут быть построены и допускают недвусмысленную интерпретацию.

Последнее очень важно, так как при построении паспортных зависимостей материала часто используют, например, данные об одноосном растяжении тонких образцов. При этом предполагается симметрия деформирования в упругом и неупругом состояниях вплоть до разрушения, под которым понимается не только появление линий Людерса-Чернова, шейки, но и разделение образца на части. Машины с заданными перемещениями (жесткое нагружение) лишают этой иллюзии, в отличие от прессы Гагарина, – на них разрушение регистрируется более четко [8, 9].

Что происходит, например, на ниспадающей ветви в рассматриваемой модели где основное внимание уделяется деформации сдвига, а не уплотнениям (или разрыхлениям) материала, т. е. без учета дилатансии материала? Что происходит, например, на зависимости $\tau \sim \gamma$ на ниспадающей ветви? Опыты на ящике и другие опыты такого типа показали, что при переходе к ниспадающей ветви материал ведет себя внешне (по отношению нагрузкам) неустойчиво – $\Delta\tau < 0$ при $\Delta\gamma > 0$. Но, по-видимому, на ниспадающей ветви это уже другой материал, к которому неприменимы прежние требования к устойчивости (по А. А. Ильюшину или Д. Друккеру). Этот новый материал, родившийся из старого после перехода в соответствии с критериями (1.8), означает новую возможность реализации синтетической прочности – материал разделяется на блоки, которые мало изменяясь в объеме, скользят друг по другу и поворачиваются настолько, чтобы составить сплошной материал [20-22].

Обратим внимание на материал, иллюстрирующий вышесказанное. Пусть за пределом упругости имеет место зуб текучести, т. е. вместо плавно и резко ниспадающей ветви происходит скачок напряжений при ниспадающей деформации. Кстати сказать, на некоторых материалах типа мягкой стали независимо от конструкций испытательной машины это явление наблюдалось с удивительным постоянством. В одной из работ нашей группы [9] этот пример позволил прояснить эту особенность поведения материала на ниспадающей ветви как переход к новой, блочной структуре материала, первоначально изотропного и однородного.

Действительно, падение касательного напряжения от величины τ_{\max} до $\tau_{\text{ост}}$ после нагружения в упругом режиме с модулем сдвига μ_0 указывает, что на площадке скольжения происходит реальное относительное перемещение берегов площадки величины δ , которое вычисляется через указанные величины:

$$\delta = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\text{ост}}}{\mu_0} L$$

где L – размер образца. Не нужно большой фантазии, чтобы сообразить, что если скольжение происходит в заданном образце размера L и по нескольким площадкам скольжения числом n , то величина δ есть суммарное значение по всем этим площадкам. На это суммарное перемещение (проскальзывание) расходуется та часть упругой энергии, которая высвободилась при падении от величины τ_{\max} до $\tau_{\text{ост}}$.

2. О сдвиговой прочности горных пород

2.1. Задача о прочности горных пород в окрестности подземной выработки.

В задачах механики горных пород основной является задача о прочности (устойчивости) горных пород в окрестности подземной выработки. Основной моделью для таких рассуждений является круговая выработка определенного диаметра на заданной глубине и ориентировке оси выработки относительно главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ со своими главными направлениями. (Наиболее распространенным случаем является выбор главных направлений, связанный с направлением (вертикаль) силы тяготения σ_1 и боковых напряжений, направления которых перпендикулярны главному направлению силы тяготения) [5, 6, 23] (рис. 6).

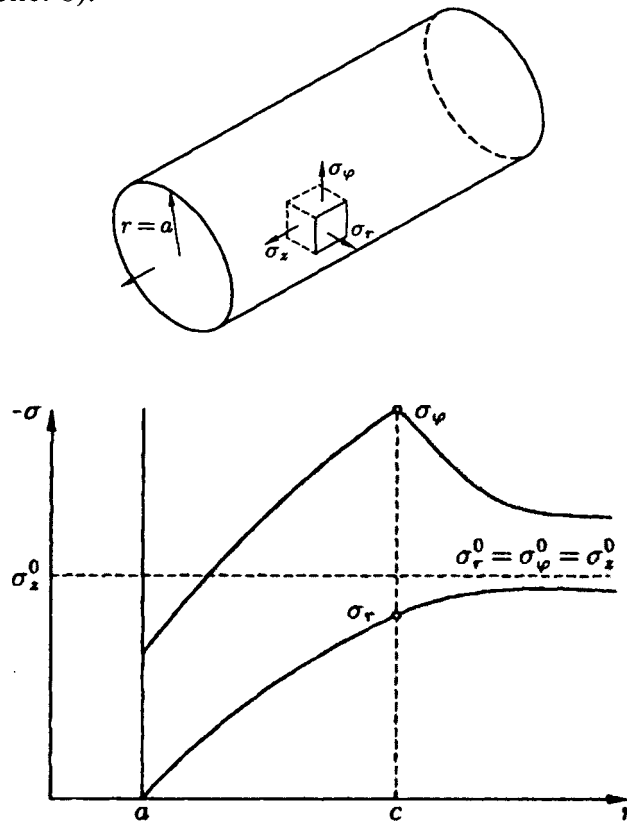


Рис. 6. Общий вид подземной выработки

Самым ответственным моментом в создании такой выработки как подземного сооружения является изменение соотношений между главными напряжениями в окрестности выработки (главные направления при этом будем считать неизменными). Хотя соотношение между главными напряжениями и главными направлениями могут изменяться и в ходе горных работ. Если принять пока для простоты, что на глубинах 1-2-3 км исходное напряженное состояние (*in situ*) было равномерным гидростатическим:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p \quad (2.1)$$

где p – литостатическое давление, то после проходки выработки, будь то скважина (горизонтальная или вертикальная) или шахтный ствол, напряженное состояние изменится.

Важно отметить, что это изменение не есть следствие фантазий, предположений о модели деформируемости среды, а отражение законов равновесия (или динамики, квазистатики в процессе проходки или бурения). Уже сам этот процесс (проходка забоя) является трехмерным, слабо изученным процессом [5, 6]. Так, например, если главные направления напряженного состояния $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, выбрать в соответствии с цилиндрической системой координат горизонтальной или вертикальной выработки, то в ходе подготовки выработки (скважины), при отходе от забоя, обязательно происходят два процесса.

Первый из них связан с тем, что радиальное напряжение обязательно падает по величине, даже если со стороны выработки (скважины, например) оказывается возможным организовать подпор, как правило, по величине меньший, чем было радиальное напряжение до проходки скважины.

Второй частью процесса является развитие касательных напряжений за счет различия в главных напряжениях исходного состояния или возникших при создании выработки. Так, в рассматриваемом примере (вертикальная или горизонтальная выработка – скважина в равномерном *in situ* напряженном состоянии) возникают касательные напряжения, которых не было до работ, а именно за счет возникающего различия в главных напряжениях. Этот этап является наименее изученным в напряженно-деформированном состоянии призабойной зоны [5, 6, 23]. В этой зоне происходит сложный переход от исходного состояния (гидростатического в этом примере) к состоянию в окрестности выработки. При этом важно оценить сдвиговую прочность, так как именно эта прочность принципиально отличает твердые тела от жидких и газообразных. Так, возникающие касательные напряжения связаны с разностями главных напряжений и равны

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2T, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2T_{12}, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2T_{23}, \quad (2.2)$$

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi, \quad \sigma_2 = \sigma_r, \quad \sigma_3 = \sigma_z \quad (2.3)$$

($\sigma_\varphi \geq \sigma_z \geq \sigma_r$, окрестности вертикальной выработки, например).

Т. Карман при этом считал, что σ_z необязательно теряет свою (упругую) связь с деформациями, существовавшую до проходки выработки или скважины. Главное, что с достижением предельной сдвиговой прочности наступает новое состояние. Возникновение анизотропии сопротивления сдвигам в результате роста касательных напряжений является едва ли не самым примечательным механическим эффектом создания выработок (скважин) в горном массиве.

Вообще говоря, о величинах касательных напряжений уместнее высказаться позже (в связи с паспортом прочности горных пород), но одно общее свойство твердых тел и горных пород должно быть отмечено. Это свойство конечного предельного сопротивления сдвигу для всех реальных тел. Здесь же уместно привести замечание об отпоре крепи или о противодавлении со стороны жидкости в скважине. Реальный отпор или крепь, которые должны заменить удаленный материал, создать технически очень

трудно, имея в виду величины отпора в сотни и тысячи тонн на квадратный метр. Во всяком случае, в задачах горного дела реальная крепь играет другую роль, удерживая (главным образом) возможный вывал за счет ползучести или разрушения призабойной зоны.

Поэтому естественно до детального подробного анализа различных вариантов (негидростатическое напряженное состояние, горизонтальная или вертикальная скважина, слоистость окружающего массива и его блочная структура) обратить внимание на этот основной процесс – изменение сопротивления сдвигу на различных площадках, включая новые современные элементы: появление ниспадающей ветви (*post-peak behavior of rock under loading*) со всеми эффектами парадоксального для сплошной среды проявления (см. ниже). Таким образом, изучение напряженно-деформированного состояния в окрестности выработки (скважины) сведено к исследованию сдвиговой прочности горного массива как определенного свойства.

При этом основное изменение объема, включая критическое разрыхление до вывала в обнаженное пространство, будет обусловлено эффектом дилатансии — изменением объема, связанным со сдвигом [24]. Это изменение объема позволит ввести в рассмотрение фильтрацию жидкости и газа (нефти и конденсата, в том числе) в объеме в окрестности скважины (выработки), подвергнутом изменению напряженного деформированного состояния.

2.2. Структурно-дилатансионная прочность горных пород. Ниже используем представление о структурно-дилатансионной прочности горных пород, позволяющее рассмотреть различие поведения горных пород при растяжении, сжатии и сдвиге вплоть до разрушения. Такое представление часто используется в литературе и служит для качественного описания деформирования и разрушения твердых тел [25].

В рассматриваемой модели были указаны определяющие соотношения на основе структуры материала, состоящего из зерен и связующего. При этом максимальное касательное напряжение на площадке главного сдвига T и нормальное напряжение на той же площадке связаны известными соотношениями:

$$T = -tg(\varphi + \nu)\sigma_n + c \quad (2.4)$$

где $\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$, а коэффициент c (сцепление) определяется через параметр ξ - коэффициент в скелете без зерен (без связующего) и напряжения g_1 и g_2 от усилий, переданных от зерен первому материалу-связующему:

$$c = \frac{\xi g_1 + g_2}{1 + \xi}$$

При одноосном растяжении величину g_2 можно отождествить с пределом всего материала на растяжение: $g_2 = \sigma_{расм}$. Структура среды характеризуется углом дилатансии.

Таким образом, для описания прочности горной породы в рамках принятой модели следует:

- угол трения рассчитывать с учетом дилатансии;
- сцепление практически считать по прочности связующего (заполнителя) на растяжение.

Эти ранее не учитываемые результаты оказываются настолько существенными, что могут дать наиболее значительный вклад в понимание прочности таких «составных» синтетических материалов, как горные породы и композиты.

2.3. Основные особенности сдвигового деформирования. Рассмотрим прежде основные особенности сдвигового деформирования, принимая гипотезу Т. Кармана о том, что наступление предельной деформации сдвига (и максимального касательного напряжения) на основных площадках с касательными напряжениями T не нарушает упругих (или других) связей между напряжениями и деформациями во втором главном направлении. В этом приближении можно считать, что на системах площадок с напряжениями T_{12} и T_{23} повторится (возможно, с некоторыми небольшими вариациями) та же самая ситуация, что и на главных площадках с касательным напряжением T ; роль и значение этих площадок учитываются параметром Лодэ – параметром вида напряженного состояния. Поэтому рассмотрим внимательнее поведение среды при сопротивлении сдвигу на диаграмме $T = T(\Gamma)$, где T – максимальное касательное напряжение, а Γ – главный сдвиг, $\Gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$ (при совпадающих главных направлениях напряженного и деформированного состояний) (рис.7). На этом рисунке из [26] представлены описательные результаты реальных испытаний опытных образцов

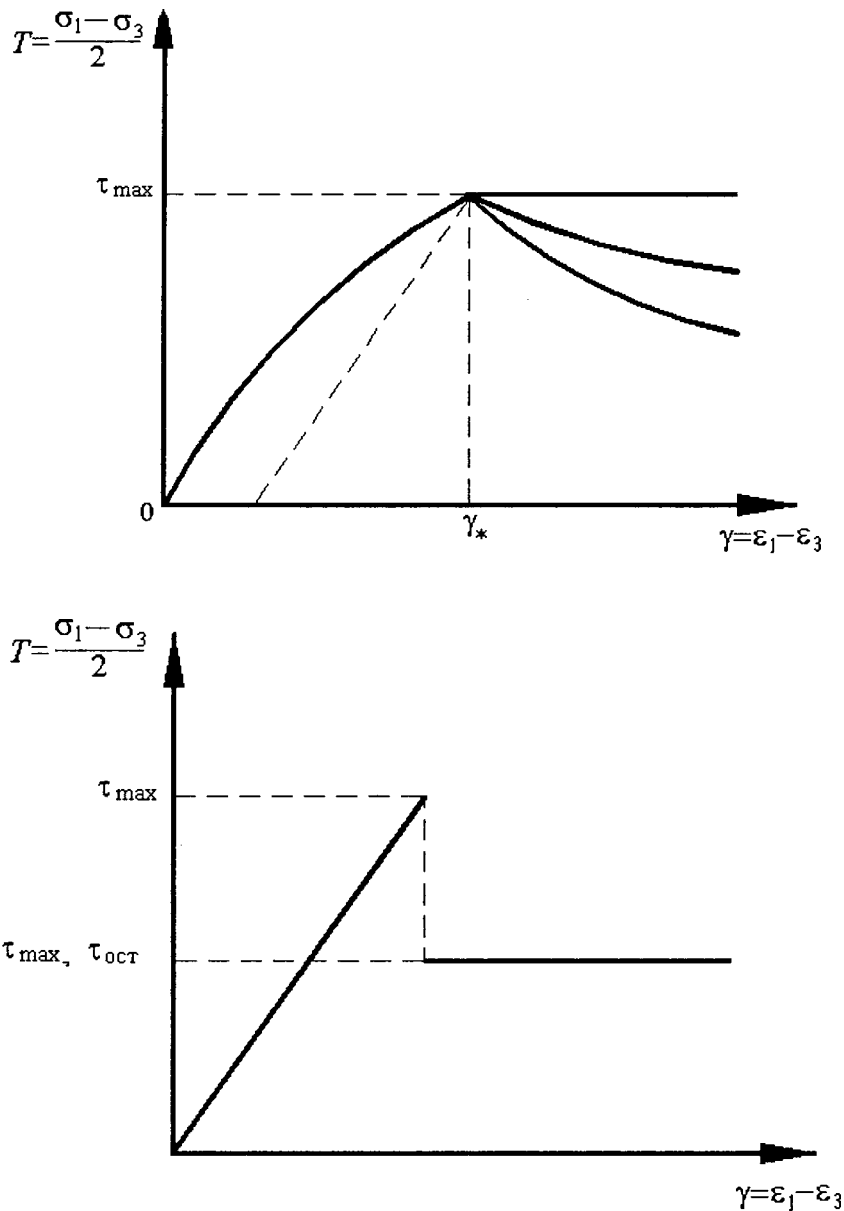


Рис.7 Зависимость максимальных касательных напряжений от главных сдвигов с учетом ниспадающей ветви

грунтов (в том числе с эквивалентными материалами) и горных пород [25, 26]. После практически обратимых деформаций до пика касательных напряжений дальнейшее сопротивление сдвигу с ростом деформаций падает. Это состояние — послепиковое поведение – иногда называют разупрочнением, имея в виду уменьшение касательного напряжения с одновременным ростом сдвига.

Это – самый важный для современных задач горного дела и механики грунтов участок необратимого поведения горной среды, который стал доступным после создания “жестких” машин для испытаний грунтов и горных пород, взамен машин с заданным нагружением по усилиям (напряжениям). Таким методом испытаний в частности стал “ящик” сибиряков, который явился планомерной реализацией идей А.А. Илюшина о создании машин с нагружением по деформациям, а не по программе напряжений, как до него. В последние годы внимание ученых привлечено к исследованиям послепикового поведения горных пород, хотя, по мнению автора, это внимание совершенно недостаточно.

Что обнаружилось в этих новых результатах?

1. Возникновение структуры в изначально однородном и изотропном материале, вполне согласованной подготовленными площадками максимальных касательных напряжений (возможно, с учетом трения и дилатансии по площадкам реального скольжения) [25, 26].

2. Асимметрия функционирования площадок скольжения (в отличие от предсказаний механики сплошной среды), которая явно проявляется уже при малых деформациях на пределе обратимых напряжений как основной процесс (асимметрия) при развитии деформаций вплоть до разрушения.

3. В области, где элементы горной породы и грунтов находятся в послепиковом состоянии, деформация в целом, в конечном объеме осуществляется как скольжение блоков (практически жестких) друг по другу с вращением этих блоков относительно друг к другу так, чтобы составить квазисплошную среду [24, 25].

В целом, это новое представление о деформации грунтов и горных пород за счет сдвигов и преодоления прочности на сдвиге сводится к тому, что в рассматриваемом конечном объеме реально проявляются различные площадки скольжения, разделение тела на блоки, и, значит, несущая способность такой среды должна рассчитываться по этой схеме вплоть до разрушения среды [24, 25].

Что же является новым? Введение новой группы инвариантов, описывающих напряженно-деформированное состояние горной породы в окрестности подземной выработки (скважины), взамен величин главных напряжений, но, конечно в силу инвариантности, пригодных и для других ситуаций в горном массиве.

В соответствии с этим вместо (2.1) или аналогичных утверждений предлагается рассмотреть три инварианта:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \sigma_n &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \\ \mu_\sigma &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Нетрудно видеть, что этот набор инвариантов опирается на параметры T и σ_n и вводится в рассмотрение параметр Лодэ-Надаи, характеризующий роль прочности массива по упругим площадкам T_{12} и T_{23} :

$$\mu_\sigma = \frac{T_{23} - T_{12}}{T}$$

Это простое физическое истолкование, по-видимому, более адекватно обсуждению вопросов прочности твердых тел [24, 25, 26].

Набор инвариантов (2.5), конечно, представляет определенные удобства при оценке прочности массива в конкретных ситуациях (так, например, сечение поверхности $T(\sigma_n, \mu_\sigma)$ при $\mu_\sigma = 0$ дает вполне удовлетворительное описание огибающей кругов Мора, как это широко принято). Введение T отвечает тому, что было сказано выше о предельной прочности сдвигу в твердых телах. С этой точки зрения введение инварианта T означает, что предельная прочность достигается на площадках скольжения с максимальным касательным напряжением, положение которых обычно известно из предыдущего состояния, чаще всего упругого:

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad \mu_\sigma = \frac{T_{23} - T_{12}}{T}$$

$$T_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad T_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

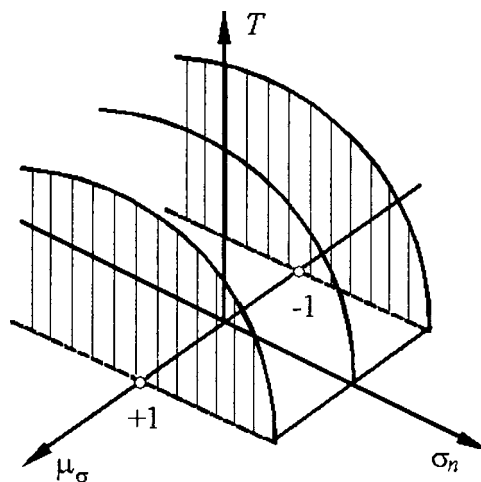


Рис.8 Паспорт прочности трехосного напряженного состояния

Это позволяет ввести новый “паспорт прочности” (рис.8) в переменных (2.5). Точка, представляющая напряженное состояние, находится под предельной поверхностью, когда рассматривается исходное напряженное состояние, близкое к гидростатическому, равновесному. Затем, при развитии горных работ по сооружению выработки или бурению скважины точка перемещается на поверхность и движется вдоль нее в соответствии с ростом T и σ_n по абсолютной величине. Если и происходит реальный рост сопротивления сдвигу на площадках скольжения, то за счет трения. В влияние параметра Лоде-Надаи сказывается на включении других площадок T_{12} и T_{23} в работу.

Но этого недостаточно. Достижение предельного напряженного состояния (в смысле величин (2.5)) недостаточно для суждения о достижении предела прочности или исчерпаниии несущей способности сплошной среды в конкретных ситуациях (в окрестности скважины, выработки, на откосе, при оползнях и т.д.).

Главным дополнительным рецептом исследования послепикового поведения горных пород является исследование деформаций

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \quad (2.6)$$

Если при последовательном нагружении исходного (*in situ*) состояния не возникает вопрос ни о соответствии знаков в (2.1) и (2.6), ни о соответствии главных направлений напряженного и деформированного состояний, то в целом для характеристики необратимых деформаций и разрушения необходимо также ввести три новых инварианта:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \\ \mu_\varepsilon &= \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \end{aligned} \quad (2.7)$$

И дело здесь не только в том, что $T = T(\Gamma)$ -зависимость, которая должна быть определена в “чистых” условиях, т.е. при $\mu_\sigma = \mu_\varepsilon = 0$, в состоянии основного сопротивления материала сдвигу, а еще и в том, что на ниспадающей ветви напряжения и деформации не связаны однозначной зависимостью (вспомните идеальную пластичность!), а представляют собой независимо и по отдельности определяемые из законов механики величины:

- напряжения (усилия) определяются из законов равновесия или движения;
- деформации (и перемещения)- из законов сохранения массы с учетом дилатансии [24].

Конечно, отсутствие прямых зависимостей между напряжениями и деформациями является основным свойством при описании остаточной прочности $T_{ост}$.

О роли напряжения σ_z при равновесии объемного элемента можно сказать только одно: при условии плоской деформации вклад этой компоненты оказывается несущественным по сравнению с изменением других напряжений. В целом напряженное состояние в окрестности слабо подкрепленного пласта в окрестности скважины оказывается близким к состоянию чистого сдвига $\mu_\sigma = 0$.

Для иллюстрации рассмотрим равновесие кольца из материала, окружающего выработку (рис.6, 9). Под действием внешних сил материал находится в равновесии, если в нем созданы напряжения σ_φ , σ_z , σ_r :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (2.8)$$

или

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r)$$

т.е. изменение σ_φ целиком определяется изменением σ_r по радиусу r . В рассуждениях всюду рассматриваются изменения напряжений, т.е. приращения напряжений по сравнению с исходным, в данном случае гидростатическим, в других ситуациях надо ввести неоднородность в правой части (2.8).

Это явление, связанное с ролью кольцевых усилий, до сих пор не получило бы признания, если бы не работы наших теоретиков в области механики грунтов и горных пород [5]. Дело в том, что непонимание этого явления связано с отсутствием подробных, детальных опытных фактов и наблюдений за поведением материалов на ниспадающей ветви. Поэтому очевиден наш интерес к ниспадающей ветви на диаграмме $T = T(\Gamma)$ (а как следствие, и на диаграмме $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ одноосного сжатия) (рис. 7). В области $T > T_{max}$ (послепиковое давление) развиваются не только общие деформации, но и деформации сдвига (а значит, и дилатансия) – и этот эффект в изменении объема (сумма изменений объема за счет изменения среднего напряжения изменения объема за счет сдвига) оказывается самым существенным (рис. 8).

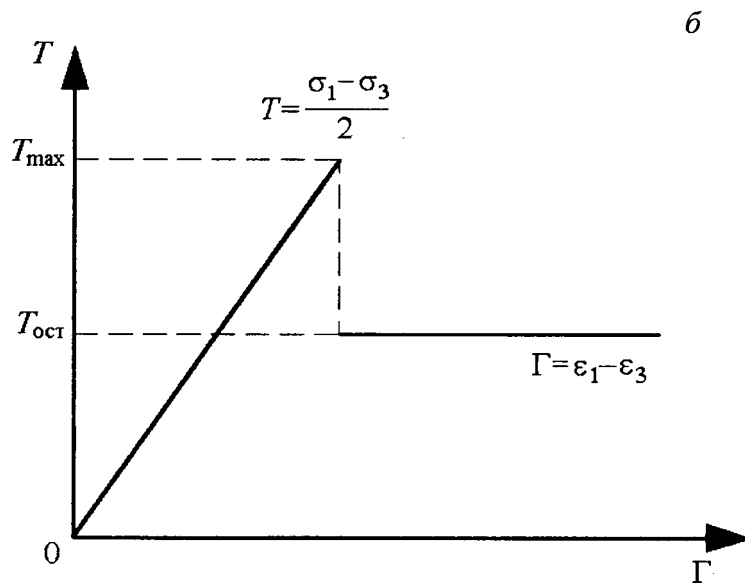
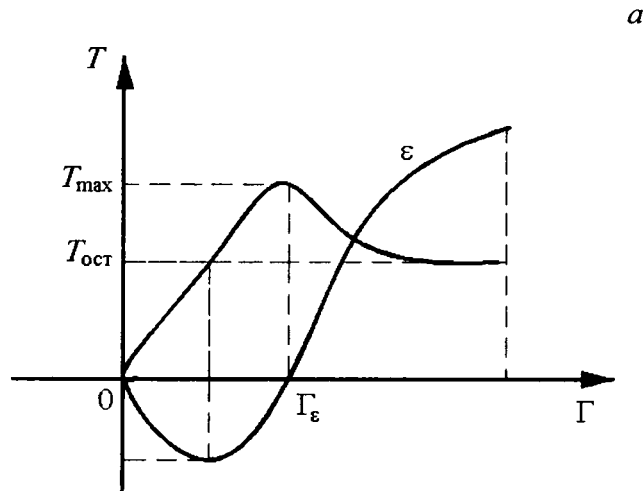


Рис.9 Зависимость ε от Γ (дилатансия) [28] (а), идеализация данных рис.7 (б)

Трудно переоценить эту гипотезу по сравнению с другими (изменение объема скелета, объема пористости, эффекта проницаемости), так как проявление площадок скольжения, связанной с ним дилатансии являются, по-видимому, основными причинами для закона фильтрации. Изменение объема вследствие дилатансии оказывается в интересующей нас области (для задач нефти и газа) генеральным [23, 24]. В связи с этим надо рассматривать и влияние остаточной сдвиговой прочности [29] (рис. 9), которую надо оценивать в массиве, а не по образцам, как T_{\max} .

Можно сказать, что последняя определяется по прочности по М. М. Протодьяконову (половина прочности при одноосном сжатии), а первая – $T_{\text{ост}}$ – М.М. Протодьяконову (мл.) или С. Е. Чиркову [30].

2.4. Равновесие кольца из материала, окружающего выработку

Для иллюстрации рассмотрим равновесие кольца из материала, окружающего выработку (скважину) (рис. 10). Под действием внешних сил материал кольца находится в равновесии, если в нем созданы напряжения σ_φ , σ_z , σ_r , при этом имеет место уравнение равновесия (2.8).

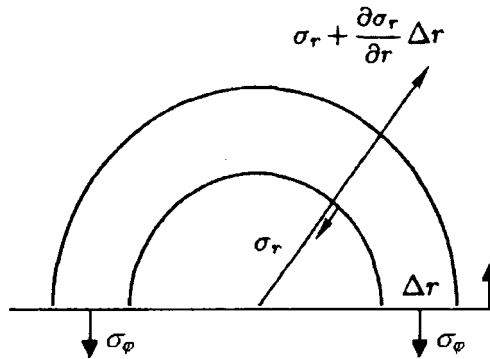


Рис. 10 О законе равновесия и роли кольцевых напряжений. Уравнение равновесия плоского кольца [27]:

$$\text{при } \sigma_r \rightarrow 0, r \rightarrow a \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\phi - \sigma_r}{r} \approx \frac{T_{\text{ост}}}{r}, \quad \sigma_\phi > \sigma_z \approx \frac{1}{2}(\sigma_\phi + \sigma_r) > \sigma_r, \quad \text{т.е. } \mu_\sigma = 0 - \text{чистый сдвиг}$$

Соотношение (2.8), следующее только из уравнения равновесия (без привлечения конкретной модели сплошной среды!), можно проинтегрировать по площади кольца в окрестности выработки и оценить кольцевую прочность. Это очень важно, тогда

$$T_{\text{max}} a \approx T_{\text{ост}} r^*$$

где r^* – радиус кольца с наибольшим кольцевым напряжением, $r^* > a$. При этом механические параметры в массиве и на образцах определяются как указано выше.

По мере удаления от выработки (r растет) или неподкрепленной (слабо подкрепленной) скважины (σ_r по величине растет) σ_ϕ растет. Это важный вывод, так как именно кольцевые напряжения «душат» скважину, препятствуя фильтрации в нефтегазовых задачах, но защищают выработку от горного давления в типичных горных задачах.

В заключение пункта подчеркнем, что именно здесь проявляется конечность сопротивления сдвигу в твердых телах.

Таким образом, вне конкретных представлений о математической модели прочности только уравнения равновесия определяют напряженное состояние горного массива в окрестности выработки – таким важным эффектом оказывается возникновение кольцевых напряжений в окрестности выработки или скважины. Перемещения и деформации определяются из другого закона механики – закона сохранения масс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / Под. ред. В.Е. Панина. – Новосибирск: Наука, 1995. – Т. 1. – 298 с. Т. 2. – 320 с.
2. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журнал. 1954. – Т. 6. – №3.
3. Ивлев Л.Д. Теория идеальной пластичности. Наука, 1966.
4. Ключников В.Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4.
5. Христианович С. Л., Шемякин Е.И. К теории идеальной пластичности // МТТ. 1967. – №4.
6. Христианович С. Л., Шемякин Е.И. К теории идеальной пластичности // МТТ. 1969. №5. – С. 138-149.
7. Карман Т., Хаар Л. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности. М., 1948.

8. Ильющин А.Л. Деформация вязко-пластического тела // Ученые записки МГУ. М. Вып. 39.1940.
9. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // ФТПРПИ. 1974.– №3.– С. 130-133.
10. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О несимметрии пластического течения в сходящемся симметричном канале // ФТПРПИ. 1977. – № 3. – С. 3-9.
11. Ревуженко А. Ф. О деформировании сыпучей среды. Ч. 4. Микровращения // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 1983. – №6. – С. 8-17.
12. Надаи А. Пластичность. ОНТИ СССР, 1936.
13. Шемякин Е.И. Две задачи механики горных пород, связанные с освоением глубоких месторождений угля и руды // ФТПРПИ. 1975. – №6.
14. Батдорф С., Будянский Б. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // Механика. 1962. – № 1.
15. Леонов М.Я., Швайко Н.Ю. Сложная пластическая деформация // ДАН СССР. 1954. – Т. 150.– №5.
16. Новожилов В. В. О физическом смысле инвариантов напряжения // ПММ. 1951. – Т. 15. – Вып. 2.
17. Янг Ю.И. II Вестник инженеров и техников. 1931. – № 6.
18. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
19. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев, 1976. – 415 с.
20. Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. Некоторые постановки краевых задач Л-пластичности // ПМТФ. 1979. – №2. С. – 128-137.
21. Шемякин Е.И. О хрупком разрушении твердых тел // МТТ. 1997. –№2. – С. 145-150.
22. Шемякин Е.И. Сейсмозврывные волны в процессе горного производства. М.: ННЦ ГП-ИГД им. А. А. Скочинского, 2004. – 76 с.
23. Христианович С.А., Желтов Ю.П. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР, ОТН. 1955. №5. – С. 3-41.
24. Шемякин Е.И. Синтетическая теория прочности // Физ. мезомех. 1999. – Т. 2. – №6.– С. 63-69.
25. Ревуженко Л.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О структурно-дилатансионной прочности горных пород // ДАН СССР. 1989. –Т. 305. – С. 1077-1080.
26. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. Задачи механики сыпучих сред в горном деле // ФТПРПИ. 1982. № 3. С. 19-25.
27. Стажевский С. Б. Приложение механики сыпучих сред к решению некоторых задач механики горных пород // ФТПРПИ. 1987. – № 3. – С. 3-15.
28. Адигамов Н. С. и др. Об учете дилатансии и разупрочнения при деформировании горных пород / Сб. посв. 70-летию И. Т. Айтматова. Бишкек, 2001.
29. Замахаев В. С. Переходные процессы в пластах при первичном вскрытии // Бурение (Приложение к сб. «Нефть и капитал»), 2001. – № 2.
30. Чирков С.Е. Влияние масштабного фактора. М.: Наука, 1969.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Ивлев Д.Д.

На примере плоской задачи определение напряженного и деформированного состояния интерпретируется как установление соответствия деформирования двух плоскостей.

1. Рассмотрим некоторую область S в плоскости xy , (рис. 1, а), точки которой получают перемещения

$$s = u(x, y)i + v(x, y)j. \quad (1.1)$$

В результате перемещений область S деформируется и переходит в область S_1 (рис. 1, б). Если ограничиться малыми перемещениями, то деформирование определяется следующими компонентами:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (1.2)$$

где e_x, e_y – деформации растяжения (сжатия) вдоль осей x, y ; e_{xy} – деформация сдвига, характеризующая искажение углов первоначальной координатной сетки.

Может быть определено также вращение элемента как жесткого целого

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (1.3)$$

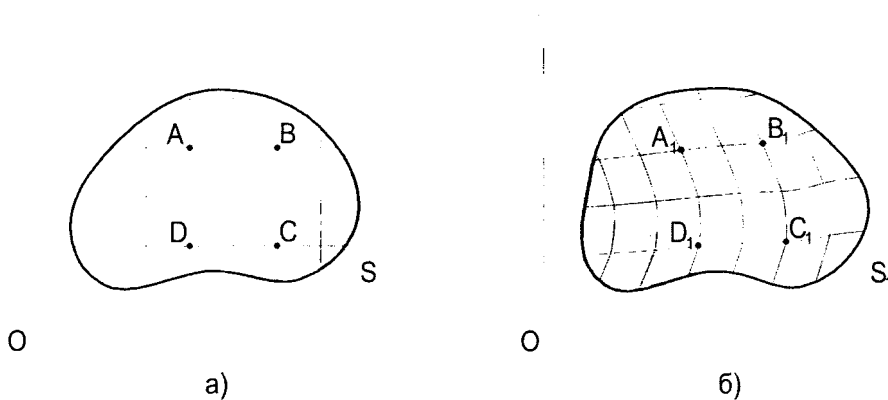


Рис. 1

Три величины e_x, e_y, e_{xy} , характеризующие деформирование элемента тела, выражаются через две компоненты перемещения u, v (1.2). Согласно (1.2), (1.3), имеют место условия совместности

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует условие совместности деформаций в виде

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (1.5)$$

Поле деформаций e_x, e_y, e_{xy} , не удовлетворяющее условиям совместности (1.4), (1.5), определяет деформирование, нарушающее сплошность среды. В дальнейшем рассматривается сплошная среда, условия (1.4), (1.5) имеют место.

Деформирование сплошной среды происходит за счет действия приложенных усилий, в теле возникает напряженное состояние, которое характеризуется величинами $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, где σ_x, σ_y – нормальные растягивающие (сжимающие) напряжения вдоль осей x, y ; τ_{xy} – касательное (сдвигающее) напряжение.

Имеют место уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (1.6)$$

Уравнения равновесия (1.6) можно рассматривать как условия совместности для поля «перемещения напряжений»

$$\tau = \xi(x, y)i + \eta(x, y)j, \quad (1.7)$$

а напряжения – как «деформации»

$$\sigma_x = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (1.8)$$

Из (1.8) следуют уравнения (1.6), а также

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (1.9)$$

Согласно (1.9), поле перемещений является потенциальным, безвихревым. Уравнение (1.9) можно удовлетворить, полагая

$$\xi = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (1.10)$$

где U – потенциал перемещений.

Из (1.8), (1.10) следуют формулы Эри

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \quad (1.11)$$

Согласно (1.6) – (1.9), уравнениям равновесия (1.6) может быть поставлено в соответствие поле перемещений, определяющее безвихревое (1.9) деформирование плоскости.

Согласно (1.8), перемещениям ξ, η соответствуют деформации

$$\bar{e}_x = \sigma_y = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \bar{e}_y = \sigma_x = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \bar{e}_{xy} = -\tau_{xy} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \quad (1.12)$$

Закон Гука для случая плоской задачи можно записать в виде

$$e_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad e_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad e_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad E, G, \nu - const. \quad (1.13)$$

Выражения (1.13), согласно (1.12), можно записать в виде

$$e_x = \frac{1}{E}(\bar{e}_y - \nu \bar{e}_x), \quad e_y = \frac{1}{E}(\bar{e}_x - \nu \bar{e}_y), \quad e_{xy} = -\frac{1}{G} \bar{e}_{xy}. \quad (1.14)$$

Соотношения (1.14), согласно (1.2), (1.12), примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \nu \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \nu \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{G} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \quad (1.15)$$

Итак, согласно (1.14), (1.15), деформирование некоторой области S может быть осуществлено за счет перемещений \bar{s} и $\bar{\tau}$

$$s = ui + vj, \quad \tau = \xi + \eta j. \quad (1.16)$$

Закон Гука (1.14), (1.15) устанавливает соответствие между двумя деформированиями области S , согласно (1.16), (1.2), (1.12).

Отметим, что любому безвихревому полю перемещений

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.17)$$

путем преобразования

$$u = -v, \quad v = u \quad (1.18)$$

можно поставить в соответствие несжимаемое деформирование

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.19)$$

Введем преобразование аналогично (1.18)

$$\tau_1 = pi + qj, \quad p = \eta, \quad q = -\xi. \quad (1.20)$$

Согласно (1.8), (1.20), можно ввести несжимаемое поле «перемещений напряжений»

$$\sigma_x = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \sigma_y = -\frac{\partial q}{\partial x}. \quad (1.21)$$

Из (1.21) следует условие несжимаемости

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \quad (1.22)$$

Согласно (1.21), «деформации» в плоскости напряжений будут иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{e}_x = -\bar{e}_y = -\tau_{xy}, \quad \bar{e}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y), \\ \bar{w} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Закон Гука (1.13) можно записать в виде

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{1-\nu} (e_x + e_y), \quad \sigma_x - \sigma_y = \frac{E}{1+\nu} (e_x - e_y), \quad \tau_{xy} = Ge_{xy}. \quad (1.24)$$

Согласно (1.23), выражения (1.24) примут вид

$$\bar{w} = \frac{E}{2(1-\nu)} (e_x + e_y), \quad \bar{e}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (e_x - e_y), \quad \bar{e}_x = -\bar{e}_y = -Ge_{xy}. \quad (1.25)$$

Выражения (1.25), согласно (1.2), (1.23), можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{G}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (1.26)$$

где u, v, p, q – компоненты перемещений.

Аналогично (1.14), (1.15) соотношения (1.25), (1.26) устанавливают соответствие между двумя деформированиями области S , согласно (1.20), (1.2), (1.23).

Для определения решений должны быть сформулированы краевые условия. Обычно формулируются задачи в перемещениях, когда на контуре L области S заданы компоненты перемещения

$$u = u_0, \quad v = v_0 \text{ на } L, \quad (1.27)$$

где u_0, v_0 – заданные функции, в напряжениях, когда на L заданы нормальные и касательные усилия, и смешанная, когда на части контура L заданы перемещения, а на другой – напряжения.

Свойства среды могут быть самыми разнообразными, они определяются формой связи $e_{ij} - \sigma_{ij}$ или $e_{ij} - \bar{e}_{ij}$. Соотношения связи $e_{ij} - \sigma_{ij}$ устанавливают лишь форму соответствия деформирования областей.

2. Рассмотрим аналитическую функцию

$$Z(z) = u + iv, \quad z = x + iy. \quad (2.1)$$

Условие Коши-Римана можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.2)$$

Согласно (1.2), уравнения (2.2) примут вид

$$e_x - e_y = 0, \quad e_{xy} = 0. \quad (2.3)$$

Соотношения (2.3) определяют бессдвиговое (без искажения углов) деформирование. Отсюда термин – «конформное преобразование».

Введем аналитическую функцию

$$Z_0(z) = u_0 - iv_0, \quad z = x + iy. \quad (2.4)$$

Условия Коши-Римана для функции (2.4) записываются в виде

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

или

$$e_x^0 + e_y^0 = 0, \quad w^0 = 0, \quad (2.6)$$

где $e_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$, $e_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}$, $w = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^0}{\partial y} - \frac{\partial v^0}{\partial x} \right)$.

Соотношения (2.5) определяют безвихревое (потенциальное) деформирование несжимаемой среды. Уравнения (2.5) широко использовались Н.Е. Жуковским и его последователями.

Покажем, что имеет место

$$Z(z)Z_0(z) = C, \quad C - const. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует

$$Z = \frac{C}{Z_0} = \frac{C\bar{Z}}{|Z_0|^2}, \quad Z_0 = \frac{C}{Z} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}, \quad (2.8)$$

где черта наверху определяет сопряженную функцию.

Из (2.8) следует

$$u = \frac{Cu_0}{u_0^2 + v_0^2}, \quad v = \frac{Cv_0}{u_0^2 + v_0^2} \quad (2.9)$$

или

$$u_0 = \frac{Cu}{u^2 + v^2}, \quad v_0 = \frac{Cv}{u^2 + v^2}. \quad (2.10)$$

В справедливости формул (2.4), (2.10) можно убедиться непосредственной проверкой, подставив соотношения (2.9) в выражения (2.2) и воспользовавшись (2.5) и, наоборот, используя выражения (2.10), (2.5), (2.2).

Для механической интерпретации результатов удобно воспользоваться гидродинамической аналогией и трактовать u, v ; u_0, v_0 как компоненты скорости V, V_0 :

$$V = ui + vj, \quad V_0 = u_0i + v_0j. \quad (2.11)$$

Из (2.9), (2.10) следует коллинеарность векторов V, V_0 . Согласно (2.9), (2.10),

$$|V||V_0| = C. \quad (2.12)$$

Соотношения (2.9), (2.10) соответствуют обтеканию одних и тех же тел, так как линии тока в обоих случаях совпадают.

Обтекание цилиндра потоком идеальной несжимаемой жидкости (2.5) определяется функцией

$$Z_0 = 1 - \frac{1}{Z^2}, \quad C = 1. \quad (2.13)$$

Обтекание того же цилиндра бессдвиговой средой будет определяться, согласно (2.7),

$$Z = \frac{1}{Z_0} = \frac{Z^2}{Z^2 - 1}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим изменение плотности для среды (2.2). Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15), согласно (2.2), преобразуются к виду

$$u \frac{\partial}{\partial x} [\rho(u^2 + v^2)] + v \frac{\partial}{\partial y} [\rho(u^2 + v^2)] = 0. \quad (2.16)$$

Из (2.16) следует

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{d[\rho(u^2 + v^2)]}{0}. \quad (2.17)$$

Из (2.17) получим

$$f(x, y) = 0, \quad \rho V^2 = const, \quad V^2 = u^2 + v^2, \quad (2.18)$$

где $f(x, y)$ – функция тока.

Соотношение $\rho V^2 = const$ имеет место вдоль линии тока. Приписывая индексы 1, 2 двум точкам вдоль одной линии тока, из (2.18) получим

$$\rho_1 V_1^2 = \rho_2 V_2^2, \quad \rho_2 = \rho_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2. \quad (2.19)$$

Из (2.19) следует, что плотность среды уменьшается с увеличением скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д. К теории дифференциальных соотношений в механике сплошной среды // Изв. ИТА ЧР. – 1996. – №2 (3).
2. Ивлев Д.Д. О плоских течениях идеально сжимаемых сред // Изв. РАН МТТ. – 1992. – №3.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Гостехиздат, 1959.

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЖЕНИЯ ТРЁХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ, СКРЕПЛЕННОГО С УПРУГИМ БЕЗЫНЕРЦИОННЫМ ОСНОВАНИЕМ

*Плескачевский Ю. М., **Кубенко В. Д., ***Старовойтов Э. И., ***Леоненко Д. В.

Рассмотрены собственные и вынужденные колебания упругого трёхслойного стержня, лежащего на упругом основании под действием поверхностной прямоугольной нагрузки. Для описания кинематики несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли. Заполнитель жёсткий, сжимаемый. Основание описывается моделью Винклера. Получены аналитические решения и проведен их численный анализ.

1. Постановка задачи. Широкое применение трёхслойных элементов конструкций в современных отраслях промышленности обуславливает необходимость разработки методов их расчета [1, 2]. Деформирование несимметричного по толщине упругого трёхслойного стержня, не связанного с упругим основанием, исследовано в работе [3]. Статьи [4, 5] посвящены изгибу круговой трёхслойной пластины лежащей на упругом основании. Здесь рассматриваются собственные и вынужденные колебания трёхслойного стержня на упругом основании.

Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта слоёв используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Система координат x, y, z связывается со средней плоскостью заполнителя. Распределенная поверхностная нагрузка $q(x)$ приложена перпендикулярно внешней плоскости первого слоя (рис. 1). На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция основания $q_r(x, t)$. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв; h_k и ρ_k – толщина и плотность k -го слоя ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), $h_3 = 2c$; b_0 – ширина стержня. Все перемещения и линейные размеры стержня отнесены к его длине l .

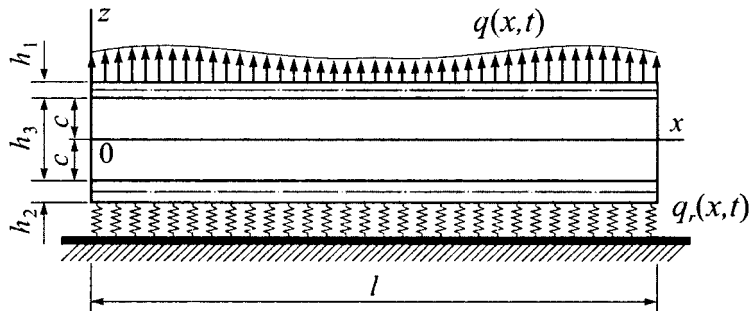


Рис. 1. Расчетная схема трёхслойного стержня

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w_1(x, t)$, $u_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ и $u_2(x, t)$ следующими соотношениями:

▪ в несущих слоях

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}; \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1);$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}; \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

▪ в заполнителе

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{h_1}{4}w_{1,x}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{h_2}{4}w_{2,x}\right);$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c}\right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c}\right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c),$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, например $w_{1,x} \equiv \partial w_1 / \partial x$.

Введем внутренние продольные и поперечные усилия, а также моменты в слоях (интегралы берутся по толщине k -го слоя):

$$N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz; \quad N_z^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} dz; \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz;$$

$$M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz; \quad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz,$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_{zz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений (верхний индекс – номер слоя).

Уравнения движения трехслойного стержня следуют из принципа Лагранжа с учетом работы сил инерции:

$$\delta A - \delta W = \delta A_I. \quad (1)$$

где δA – вариация работы внешних сил; δW – вариация работы внутренних сил упругости; δA_I – вариация работы сил инерции.

При определении работы внешних сил считаем, что к внешней поверхности первого несущего слоя приложена произвольная поперечная нагрузка $q(x, t)$ (см. рис. 1), а к торцам стержня – некоторые усилия и моменты. Тогда

$$\delta A = b_0 \int_0^l \left[p \left(\delta u_1 - \frac{h_1}{2} \delta w_{1,x} \right) + q \delta w_1 - q_r \delta w_2 \right] dx. \quad (2)$$

Вариация работы сил упругости

$$\delta W = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \delta \epsilon_{xx}^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \epsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} \delta \epsilon_{zz}^{(3)} dz \right] dx. \quad (3)$$

Вариация работы сил инерции

$$\delta A_I = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_0^l \int_{h_k} \left[\rho_k (\ddot{w}^{(k)} \delta w^{(k)} + \dot{u}^{(k)} \delta u^{(k)}) \right] dz dx. \quad (4)$$

Здесь две точки над перемещениями обозначают вторую производную по времени, т. е. $\ddot{w} \equiv \partial^2 w / \partial t^2$.

В зависимости от свойств деформируемого основания связь между реакцией и прогибом может быть различной. Рассмотрим случай безынерционного основания – модель Винклера (Winkler E.), согласно которой в нашем случае, т. к. стержень прикреплен к основанию вторым слоем, выполняется следующее соотношение

$$q_r = \kappa_0 w_2. \quad (5)$$

Подстановка вариации работы внешней нагрузки (2), работы внутренних усилий (3) и работы сил инерции (4) в (1) приводит к уравнению, которое должно тождественно выполняться при произвольных значениях варьируемых величин. Это возможно, если коэффици-

енты при независимых вариациях приравнять нулю. В результате приходим к следующей системе уравнений движения рассматриваемого трехслойного стержня в усилиях:

$$\begin{cases} F_1 + \frac{1}{b_0}(H_1 - P_{1,x}) = 0; & F_3 + \frac{1}{b_0}(S_{1,xx} + H_2 - T_{1,x}) = q; \\ F_2 - \frac{1}{b_0}(H_1 + P_{2,x}) = 0; & F_4 + \frac{1}{b_0}(S_{2,xx} - H_2 - T_{2,x}) = -q. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь введены обозначения

$$H_1 = \frac{Q^{(3)}}{2c}; \quad H_2 = \frac{N_x^{(3)}}{2c}; \quad P_1 = \frac{N_x^{(3)}}{2} + \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(1)}; \quad P_2 = \frac{N_x^{(3)}}{2} - \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(2)};$$

$$T_1 = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q^{(3)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}; \quad S_1 = \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_x^{(1)} - M_x^{(1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)};$$

$$T_2 = \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q^{(3)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}; \quad S_2 = -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_x^{(2)} - M_x^{(2)} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)};$$

$$F_1 = m_1 \ddot{u}_1 + m_8 \ddot{u}_2 + 2m_5 \ddot{w}_{1,x} - m_7 \ddot{w}_{2,x}; \quad F_2 = m_8 \ddot{u}_1 + m_2 \ddot{u}_2 + m_5 \ddot{w}_{1,x} - 2m_7 \ddot{w}_{2,x};$$

$$F_3 = -2m_5 \ddot{u}_{1,x} - m_5 \ddot{u}_{2,x} + m_1 \ddot{w}_1 + m_8 \ddot{w}_2 - m_3 \ddot{w}_{1,xx} + m_6 \ddot{w}_{2,xx};$$

$$F_4 = m_7 \ddot{u}_{1,x} + 2m_7 \ddot{u}_{2,x} + m_8 \ddot{w}_1 + m_2 \ddot{w}_2 + m_6 \ddot{w}_{1,xx} - m_4 \ddot{w}_{2,xx},$$

где

$$m_1 = \rho_1 h_1 + \frac{2}{3} \rho_3 c; \quad m_2 = \rho_2 h_2 + \frac{2}{3} \rho_3 c; \quad m_3 = \frac{\rho_1 h_1^3}{12} + \frac{\rho_3 c h_1^2}{6}; \quad m_4 = \frac{\rho_2 h_2^3}{12} + \frac{\rho_3 c h_2^2}{6};$$

$$m_5 = \frac{\rho_3 c h_1}{6}; \quad m_6 = \frac{\rho_3 c h_1 h_2}{12}; \quad m_7 = \frac{\rho_3 c h_2}{6}; \quad m_8 = \frac{\rho_3 c}{3}.$$

В слоях рассматриваемого стержня для связи напряжений и деформаций используются соотношения закона Гука в девиаторно-шаровой форме ($i, j = x, y, z; k = 1, 2, 3$ – номер слоя):

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)},$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций; G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации.

Компоненты тензора напряжений в слоях стержня будут

$$\sigma_{xx}^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)}; \quad \sigma_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}; \quad \sigma_{xx}^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)}; \quad \sigma_{zz}^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)}, \quad (7)$$

где $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k$; $K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k$.

Применяя закон Гука (7), соотношения Коши и выражение (5), получим из (6) систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно четырех неизвестных функций $w_1(x, t)$, $u_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Оставляя в ней из инерционных только те члены, которые учитывают инерцию движения вдоль координатных осей и инерцию вращения нормалей в несущих слоях, выпишем уравнения движения рассматриваемого трехслойного стержня в следующем виде:

$$a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 = 0;$$

$$-a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 \ddot{u}_2 = 0;$$

$$-a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} +$$

$$+ a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 + m_1 \ddot{w}_1 - m_3 \ddot{w}_{1,xx} = q;$$

$$\begin{aligned}
& -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\
& -a_{16} w_{1,xxxx} + a_{13} w_{2,xxxx} - a_8 w_1 + (a_8 + \kappa_0) w_2 + m_2 \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_{2,xx} = 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

где K_k, G_k – объемный и сдвиговой модули упругости материалов слоев;

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{G_3}{2c}; \quad a_2 = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) - \frac{K_3^-}{2}; \quad a_3 = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2}; \quad a_4 = K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \\
a_5 &= \frac{K_3^+ c}{3}; \quad a_6 = \frac{K_3^+ c h_1}{6}; \quad a_7 = \frac{K_3^+ c h_2}{6}; \quad a_8 = \frac{K_3^+}{2c}; \quad a_9 = K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \\
a_{10} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2}; \quad a_{11} = \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; \quad a_{13} = \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6}; \\
a_{12} &= \frac{K_3^- (h_1 + h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) - \frac{G_3 c}{6}; \quad a_{14} = \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; \\
a_{15} &= \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6}; \quad a_{16} = \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12}; \quad a_{17} = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) - \frac{K_3^-}{2}.
\end{aligned}$$

В качестве граничных принимаются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие ограничения для перемещений в сечениях $x = 0; l$ имеют вид:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \tag{9}$$

Начальные условия движения будут ($t = 0$)

$$u_k(x, 0) = u_{k0}(x); \quad \dot{u}_k(x, 0) = \dot{u}_{k0}(x); \quad w_k(x, 0) = w_{k0}(x); \quad \dot{w}_k(x, 0) = \dot{w}_{k0}(x) \quad (k = 1, 2), \tag{10}$$

где $u_0^k(x), \dot{u}_0^k(x), w_0^k(x), \dot{w}_0^k(x)$ – заданные начальные перемещения и скорости точек срединных поверхностей несущих слоев.

Решение начально-краевой задачи (8)–(10) проводится методом Бубнова–Галеркина. Для этого искомые перемещения $u_1(x), u_2(x), w_1(x), w_2(x)$ и нагрузка $q(x, t)$ представляются в виде разложения в ряды по системам базисных функций, удовлетворяющего принятым граничным условиям (9):

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m1}(t); \quad u_2(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m2}(t); \quad q(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} q_m(t); \\
w_1(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m3}(t); \quad w_2(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m4}(t),
\end{aligned} \tag{11}$$

где $q_m(t)$ – коэффициенты разложения нагрузки в ряд

$$q_m(t) = \frac{2}{l} \int_0^l q(x, t) \sin \frac{\pi m x}{l} dx.$$

Подстановка выражений (11) в (8) приводит к системе уравнений для определения функций времени $T_{mi}(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), которая в матричном виде будет:

$$[B]\{T\} + [M]\{\ddot{T}\} = \{Q\} \tag{12}$$

Здесь $[B]$ – квадратная матрица четвертого порядка, составленная из коэффициентов B_{mij} ; $[M]$ – диагональная матрица четвертого порядка с элементами M_{mij} ; $\{T\}$ и $\{\ddot{T}\}$ – векторы, сформированные из искомых функций времени T_{mi} и их вторых производных; $\{Q\}$ – вектор, элементы которого Q_{mk} составлены из коэффициентов разложения нагрузки в ряд:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ b_3 & b_6 & b_8 & b_9 \\ b_4 & -b_7 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix}; \quad \{T\} = \begin{bmatrix} T_{m1} \\ T_{m2} \\ T_{m3} \\ T_{m4} \end{bmatrix}; \quad \{Q\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_m \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 + m_3 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 + m_4 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 \end{bmatrix}; \quad \{\ddot{T}\} = \begin{bmatrix} \ddot{T}_{m1} \\ \ddot{T}_{m2} \\ \ddot{T}_{m3} \\ \ddot{T}_{m4} \end{bmatrix}.$$

Здесь коэффициенты b_i зависят от параметра m и вычисляются через коэффициенты a_i следующим образом:

$$b_1 = a_1 + a_4 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2; \quad b_2 = -a_1 + a_5 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2; \quad b_3 = a_2 \frac{\pi m}{l} + 2a_6 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^3;$$

$$b_4 = a_3 \frac{\pi m}{l} - a_7 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^3; \quad b_5 = a_1 + a_9 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2; \quad b_6 = -a_{10} \frac{\pi m}{l} + a_6 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^3;$$

$$b_7 = a_{17} \frac{\pi m}{l} + 2a_7 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^3; \quad b_8 = -a_{11} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + a_{15} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 + a_8;$$

$$b_9 = a_{12} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 - a_{16} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 - a_8; \quad b_{10} = -a_{14} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + a_{13} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 + a_8 + \kappa_0.$$

Систему (12) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^4 B_{mkj} T_{mj} + M_{mkk} \ddot{T}_{mk} = Q_{mk} \quad (k = 1, \dots, 4). \quad (13)$$

Т. к. матрица $[M]$ диагональная, то от второй суммы осталось только одно k -е слагаемое. Для замыкания задачи к системе (13) необходимо добавить начальные условия (10).

2. Собственные колебания. Предполагается, что внешняя нагрузка отсутствует $q(x, t) = 0$. При этом условии начально-краевая задача (8) – (10) будет описывать собственные колебания трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем, находящимся на упругом основании. Система уравнений движения (13) принимает вид ($Q_{mk} = 0$)

$$\sum_{j=1}^4 B_{mkj} T_{mj} + M_{mkk} \ddot{T}_{mk} = 0 \quad (k = 1, \dots, 4). \quad (14)$$

Ее решение

$$T_{mk}(t) = A_{mk} \sin(\omega_m t + \alpha_{mk}), \quad (15)$$

где A_{mk} – амплитуда; ω_m – частота и α_{mk} – начальная фаза колебаний.

Подстановка выражения (15) в систему (14) приводит к обобщенной задаче на собственные значения:

$$[B]\{A\} = \omega^2 [M]\{A\}, \quad (16)$$

где $\{A\}$ – вектор, сформированный амплитудами A_{mk} .

Обращение в уравнении (16) матрицы $[M]$, так как она не является вырожденной, осуществляет переход к стандартной задаче на собственные значения:

$$[R]\{A\} = \omega^2 \{A\}, \quad [R] = [M]^{-1}[B]; \quad ([R] - \omega^2 E)\{A\} = 0. \quad (17)$$

Система уравнений (17) однородна относительно амплитуд A_{mk} . Нулевое решение в рассматриваемом случае означает отсутствие колебаний. Для нахождения нетривиального решения необходимо потребовать равенство нулю определителя системы. Это приводит к алгебраическому уравнению 4-го порядка относительно ω_m^2 . Решив его, получим четыре вещественных неотрицательных корня. Таким образом, колебательный процесс для каждого значения параметра m оказывается четырехчастотным. Следовательно, вместо решения (15) нужно принять:

$$T_{mk}(t) = \sum_{i=1}^4 A_{mki} \sin(\omega_{mi} t + \alpha_{mi}). \quad (18)$$

Искомые перемещения теперь определяются выражениями (11) с учетом (18). Определение 20 констант интегрирования A_{mki} , α_{mi} для каждого m проводится следующим образом. Если подставить найденные ω_{mi}^2 в систему (14), то для каждого $k = 1, 2, 3, 4$ следует четыре уравнения, из которых три – независимые. К этим двенадцати независимым однородным уравнениям нужно добавить еще восемь неоднородных уравнений, которые определяются из начальных условий (10). Заметим, если все начальные условия нулевые, то и все A_{mki} , α_{mi} будут равны нулю в силу единственности решения однородной алгебраической системы уравнений.

Здесь и далее численное исследование проводилось для трехслойного стержня, набранного из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т.

Зависимость частот ω_{m1} собственных колебаний трехслойного стержня от коэффициента постели κ_0 упругого основания показана на рис. 2 ($c = 0,09$, $h_2 = 0,05$, $h_1 = 0,01$).

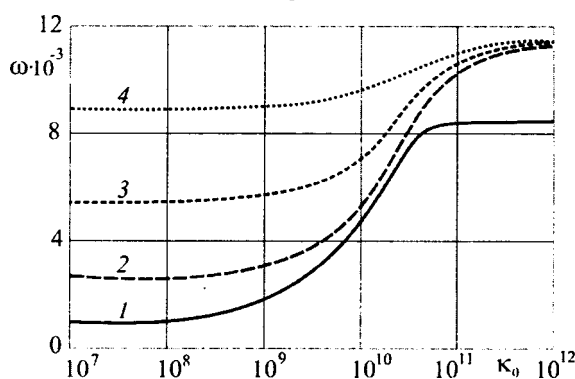


Рис. 2. Зависимость собственных частот колебаний трехслойного стержня от коэффициента жесткости основания κ_0 (Па / м)

Номера кривых совпадает с параметром m , шкала – полулогарифмическая. При основаниях малой и высокой жесткости (до $\kappa_0 = 10^8$ Па / м и после $\kappa_0 = 10^{11}$ Па / м) эта зависимость слабая и частоты изменяются мало. В диапазоне $10^8 < \kappa_0 < 10^{11}$ Па / м рост жесткости основания вызывает существенное увеличение исследуемых частот. Здесь также следует отметить, что при колебаниях рассматриваемого стержня не связанного с упругим основанием,

собственные частоты мало отличаются от соответствующих частот при основании малой жесткости.

3. Вынужденные колебания. Функции времени $T_{mk}(t)$ представляются в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^4 \delta_{mki} \zeta_{mi} \quad \left(\sum_{i=1}^4 \delta_{mik}^2 = 1 \right), \quad (19)$$

где δ_{mki} – амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Функции $\zeta_{mi}(t)$ определяются из системы уравнений

$$\ddot{\zeta}_{mi} + \omega_{mi}^2 \zeta_{mi} = \tilde{q}_{mi}(t), \quad (20)$$

$$\tilde{q}_{mi} = \sum_{k=1}^4 Q_{mk} \delta_{mki} / \sum_{k=1}^4 M_{mkk} \delta_{mki}^2.$$

Общее решение уравнения (20) будет

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi} \cos(\omega_{mi} t) + B_{mi} \sin(\omega_{mi} t) + \frac{1}{\omega_{mi}} \int_0^t \sin(\omega_{mi}(t-\tau)) \tilde{q}_{mi}(\tau) d\tau.$$

В случае действия на стержень динамической поверхностной равномерно распределенной нагрузки q_0 коэффициенты разложения ее в ряд

$$q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q_0 \sin \frac{\pi m x}{l} dx = \frac{2q_0}{\pi m} (\cos \pi m - 1). \quad (21)$$

Соответствующие параметрам (21) функции времени

$$\zeta_{mi}(t) = \frac{2q_0 \delta_{m3i} (1 - \cos(\omega_{mi} t))}{\pi m \omega_{mi}^2 \sum_{k=1}^4 M_{mkk} \delta_{mki}^2} (\cos \pi m - 1). \quad (22)$$

Искомые перемещения $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ описываются формулами (11), с учетом выражений для функций времени (19) и (22).

На рис 3 а, б показано изменение во времени прогибов несущих слоев в середине пролета трехслойного стержня ($h_1 = 0,01$, $h_2 = 0,05$, $h_3 = 0,18$) при различных жесткостях упругого основания (МПа / м): 1 – $\kappa_0 = 1$, 2 – $\kappa_0 = 500$, 3 – $\kappa_0 = 10^4$ (увеличен в 10 раз).

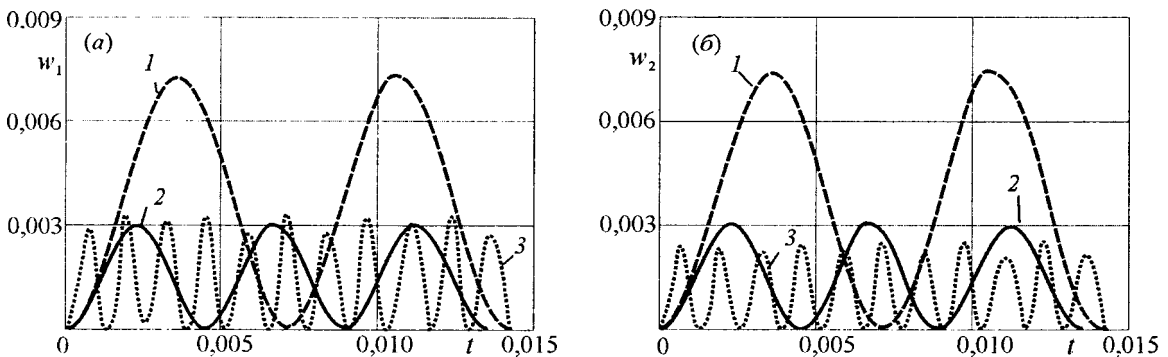


Рис. 3. Изменение прогибов несущих слоев во времени: а – внешнего слоя 1, б – слоя 2, связанного с упругим основанием ($x = 0,5$)

Интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q_0 = 1$ МПа. Увеличение жесткости основания от слабого до среднего вызывает уменьшение амплитуд прогибов в 2,5 раза.

Дальнейшее усиление жесткости до высокой, дополнительно уменьшает прогибы примерно в 10 раз.

При слабых и средних основаниях (1, 2) прогибы несущих слоев мало отличаются друг от друга. В случае основания высокой жесткости (3) амплитуда колебаний слоя, связанного с основанием, меньше на 25 % амплитуды внешнего несущего слоя.

Рис. 4 иллюстрирует изменение амплитуд прогиба (а) и горизонтального перемещения (б) первого несущего слоя вдоль оси стержня при основаниях различной жесткости (МПа/м): 1 – $\kappa_0 = 0$, $t_1 = 3,55 \cdot 10^{-3}$ с, 2 – $\kappa_0 = 1$, $t_2 = 3,544 \cdot 10^{-3}$ с, 3 – $\kappa_0 = 500$, $t_3 = 2,229 \cdot 10^{-3}$ с, 4 – $\kappa_0 = 10^4$, $t_4 = 2,179 \cdot 10^{-4}$ (увеличен в 15 раз). Моменты времени здесь подбирались так, чтобы попасть в амплитудное значение исследуемых величин.

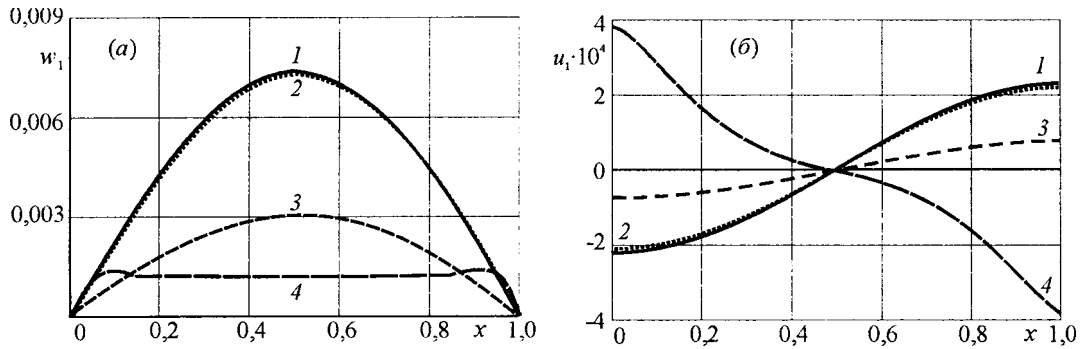


Рис. 4. Изменение прогиба (а) и горизонтального перемещения (б) первого несущего слоя вдоль оси стержня

Амплитуды прогибов стержня на упругом основании малой жесткости (2) и без него (1) различаются по величине не более чем на 3 %. Увеличение жесткости основания до среднего (3) приводит к уменьшению амплитуды в 2,5 раза. При основании высокой жесткости (4) в слое 1 наблюдается характерный обратный отпор – прогиб перестает быть максимальным в середине стержня, максимумы смещаются к опорам.

Поведение амплитуд продольных перемещений срединных поверхностей несущих слоев стержня на упругом основании подобно прогибам. Здесь также с ростом жесткости основания амплитуды перемещений уменьшаются. При этом они мало отличаются в случаях основания малой жесткости и без него.

4. Выводы. Приведенные в работе аналитические и численные результаты, позволяют сделать вывод о существенном влиянии упругого основания средней и высокой жесткости на частоты и перемещения. При колебаниях элементов конструкций на основаниях малой жесткости его влиянием в ряде случаев можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
3. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.
4. Плещачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Металлополимерная пластина на упругом основании. Часть 1. Равномерная нагрузка // Весці НАНБ. Сер. фізіка-тэхнічных навук. – 2005. – № 3. – С. 48–52.
5. Плещачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Металлополимерная пластина на упругом основании. Часть 2. Локальная нагрузка // Весці НАНБ. Сер. фізіка-тэхнічных навук. – 2005. – № 4. – С. 41–45.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Каминский Э., Чигарев А.В.

Модели нейронных сетей представляют собой попытки описать математически процессы функционирования мозга. Искусственные нейронные сети (ИНС) могут послужить основой для создания нейрокомпьютеров функционирование которых будет основой не на программах, реализующих определенные алгоритмы, а на обучении и адаптации вычислительной системы для решения поставленной задачи.

В настоящее время существует большое разнообразие различных моделей ИНС, способных решать достаточно сложные задачи распознавания образов, управления роботами и т.д.

Наиболее перспективным считается направление сочетающее в себе методы ИНК, генетических алгоритмов и систем с нечетной логикой.

Почвы, как известно, представляют собой с точки зрения механики сплошных сред сложный объект исследования, описываемый различными моделями механики, в которых предпринимаются попытки учесть такие свойства как упругость, вязкость, пластичность и т.д. Учет реологии почвы осуществляется с помощью дифференциальных или интегральных операторов в определяющих соотношениях.

Задача идентификации модели среды заключается в том, чтобы на основании экспериментов над образцами, в которых измеряются входные (деформации или напряжения) и выходные (напряжения или деформации) данные, определить определяющие соотношения. Как известно, это задача "черного ящика".

Наиболее простой является модель однородного изотропного линейного упругого тела, описываемого в рамках закона Гука. Если же тело является неоднородным, то задача значительно усложняется, т.к. выход в этом случае зависит интегрально от входа и конкретной реализации неоднородности среды. Схема идентификации представлена на рис. 1.

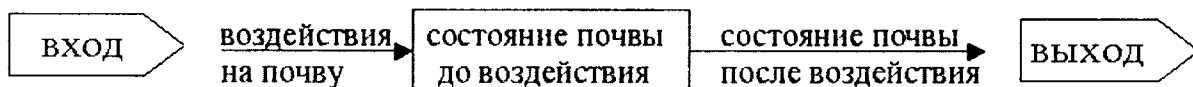


Рис. 1

Одномерная модель линейной неоднородной упругой среды при динамическом дифференцировании описывается уравнением:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\rho(x)}{\lambda(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (1)$$

где $\lambda = \lambda(x)$ – коэффициент упругости слоисто-неоднородной среды, причем в случае нормального к слоям воздействия $\lambda(x) = E(x)$ (модуль Юнга), в случае касательного к слоям воздействия $\lambda(x) = \mu(x)$ (модуль сдвига), u – перемещение, ρ – плотность.

Если воздействие имеет периодическую зависимость от времени, то $U(x, t)$ можно представить в виде

$$U(x, t) = U(x) e^{i\omega t} \quad (2)$$

где ω – частота.

Уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \ln \lambda \frac{1}{\lambda} \frac{dU}{dx} + \frac{\omega^2}{c_{(x)}^2} U = 0. \quad (3)$$

Обычным образом можно перейти от уравнения (3) к уравнению вида

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \omega^2 Q_{(x)} U = 0 \quad (4)$$

где $Q_{(x)}$ зависит от $\lambda(x)$, $\rho(x)$.

Представим $Q_{(x)}$ в виде

$$Q_{(x)} = Q_0 + Q'_{(x)} \quad (5)$$

где Q_0 характеризует упругость и плотность однородной среды, а $Q'_{(x)}$ функции, неоднородности.

Тогда представляя

$$U(x) = U_0(x) + U'_{(x)}$$

получим систему уравнений [1]

$$\frac{d^2U_0}{dx_2} + \omega^2 Q_0 U_0 = 0. \quad (6)$$

$$\frac{d^2U'}{dx_2} + \omega^2 Q_0 U' = -\omega^2 Q' U_0. \quad (7)$$

Схема рис. 1 воздействия машин на почву может быть представлена в виде

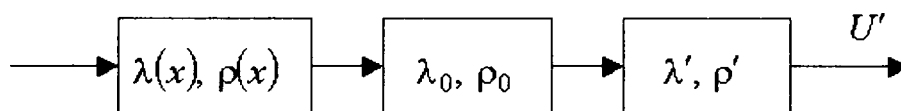


Рис. 2

Решение уравнения (7) запишем в виде

$$U'_{(x)} = \omega^2 \int G(x-x') Q'(x') U'_0(x') dx'. \quad (8)$$

Пусть идентификация свойств среды проводится на основе наблюдения распространения ультразвука в образцах почв, тогда в соотношении (8) измеряемой величиной является U' , а реализацию неоднородности почвы, $Q(x)$ необходимо определить.

Эта задача некорректна, т.к. не имеет единственного устойчивого решения. Аналогичная ситуация возникает в случае учета вязкоупругих свойств почвы,

Например, одномерная модель Максвелла описывается моделью рис. 3 и соотношением

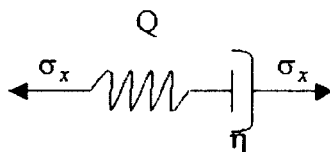


Рис. 3

$$\eta \frac{de(t)}{dt} = \sigma(t) + \frac{\eta}{Q} \frac{d\sigma(t)}{dt} \quad (9)$$

где η – вязкость, $e(t)$ – деформация, $\sigma(t)$ – напряжение, Q – упругость.

Из (9) получаем

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \dot{e}(\tau) d\tau \quad (10)$$

где $K(t-\tau) = Q \exp\left\{-\frac{Q}{\eta}(t-\tau)\right\}$ – релаксационный модуль Максвелла.

В задаче идентификации по измерению $\sigma(t)$ в (10) необходимо определить коэффициенты η и Q модуля релаксации, что также представляет собой некорректную задачу.

Соответственно для модели Кельвина-Фойхта рис. 4 (параллельное соединение вязкости и упругости) имеем

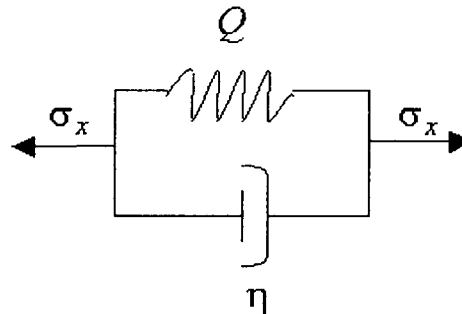


Рис. 4

$$\sigma(t) = Qe(t) + \eta \frac{de(t)}{dt} \quad (11)$$

Из (11) аналогично (10) находим

$$e(t) = \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (12)$$

где $e(t) = \Gamma(t-\tau)$ – модуль (ядро) ползучести.

При решении задачи идентификации по измерению $e(t)$ необходимо определить Q , η , что также представляет собой некорректную задачу.

В общем случае можем записать для вязкоупругого тела определяющие соотношения в интегральной форме

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E \left[e(t) + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) e(\tau) d\tau \right] \\ e(t) &= \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Решение задачи идентификации на основе уравнений (13) также не дает возможности получить единственное устойчивое решение.

Из рассмотренных примеров видно, что даже в случае линейных вязкоупругих однородных или упругих неоднородных сред задача идентификации не имеет простого решения. Еще более сложная ситуация когда среда проявляет нелинейные свойства.

Рассмотрим некоторые модели нейронных сетей и их применение для решения задачи идентификации.

На рис.5 изображена модель нейрона

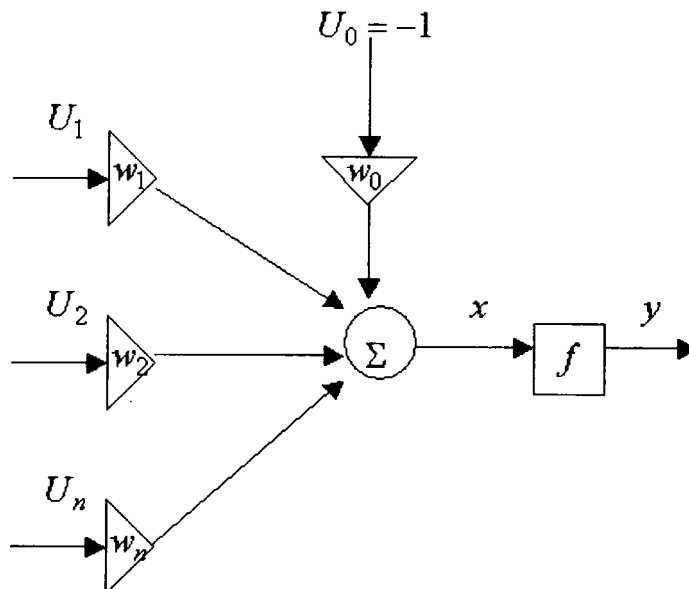


Рис. 5

Аналитическая запись модели Маккалока-Питса имеет вид

$$y = f\left(\sum_{i=0}^N n_i U_i\right) \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (15)$$

или

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0 \\ -1, & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (16)$$

а также

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 1 \\ -1, & \text{при } x < -1 \\ 0, & \text{при } |x| \leq 1 \end{cases} \quad (17)$$

В настоящее время широко используются сигмоидальная функция

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\beta x}} > 0 \quad (18)$$

а также функция тангенса

$$f(x) = th\left(\frac{\alpha x}{2}\right) = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{1 + e^{-\alpha x}} > 0 \quad (19)$$

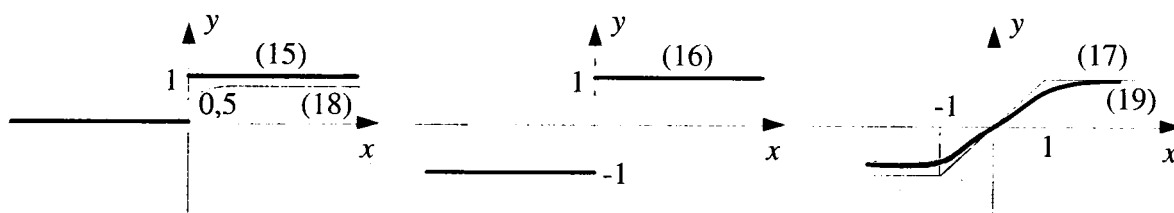


Рис. 6

Для того, чтобы нейронная сеть могла решать задачи, которые перед ней ставятся, нужно, чтобы нейрон изменял свои свойства в процессе функционирования, т.е. обладал адаптацией (обучаемостью). Простой моделью является адаптивный линейный взвешенный сумматор, схема которого представлена на рис.7.

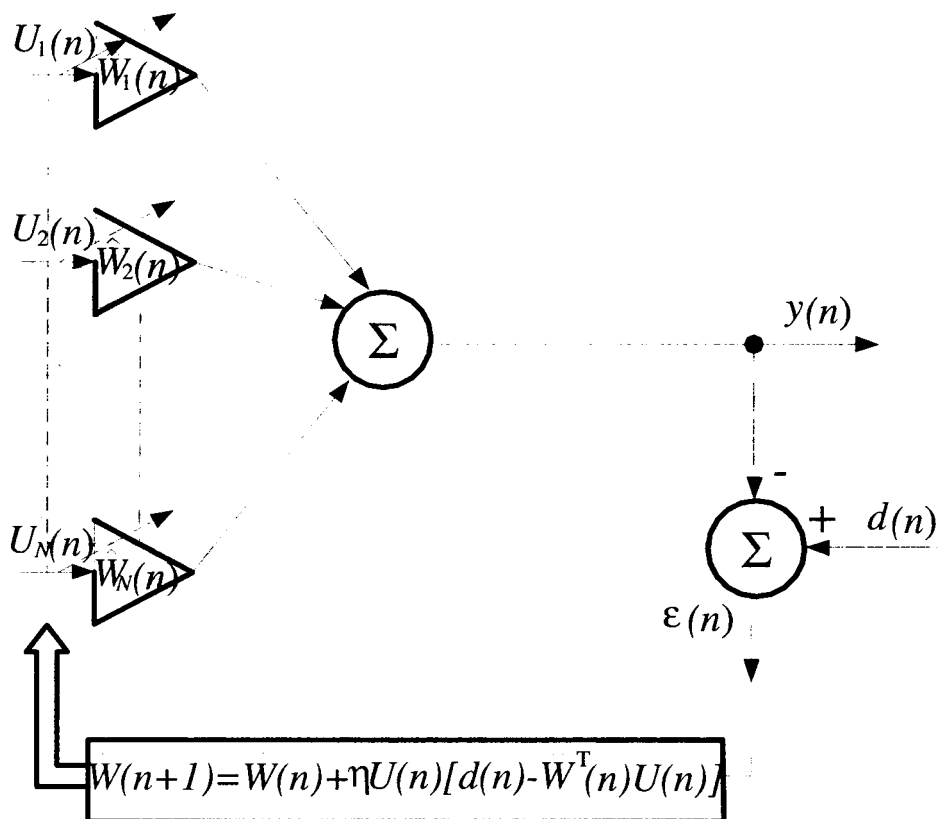


Рис. 7

Две составляющие ALN (Adaptive Linear Neuron) : 1)линейный взвешенный сумматор с адаптивно корректируемыми весами: $\hat{W}_1(n), \dots, \hat{W}_N(n)$; 2) подсистема адаптивной коррекции весов. Согласно алгоритма LMS (Linear Mean Square) обучение (изменение весов) происходит в соответствии с алгоритмом

$$\hat{W}_k(n+1) = \hat{W}_k(n) + \eta U_k(n) \left[d(n) - \sum_{k=1}^N \hat{W}_k(n) U_k(n) \right]$$

$$k = 1, 2, \dots, N, \tag{20}$$

$$0 < \eta < \frac{2}{\sum M [(U_k(n))^2]} \tag{21}$$

Для решения достаточно сложных задач используются многослойные нейронные сети типа изображенных на рис.8.

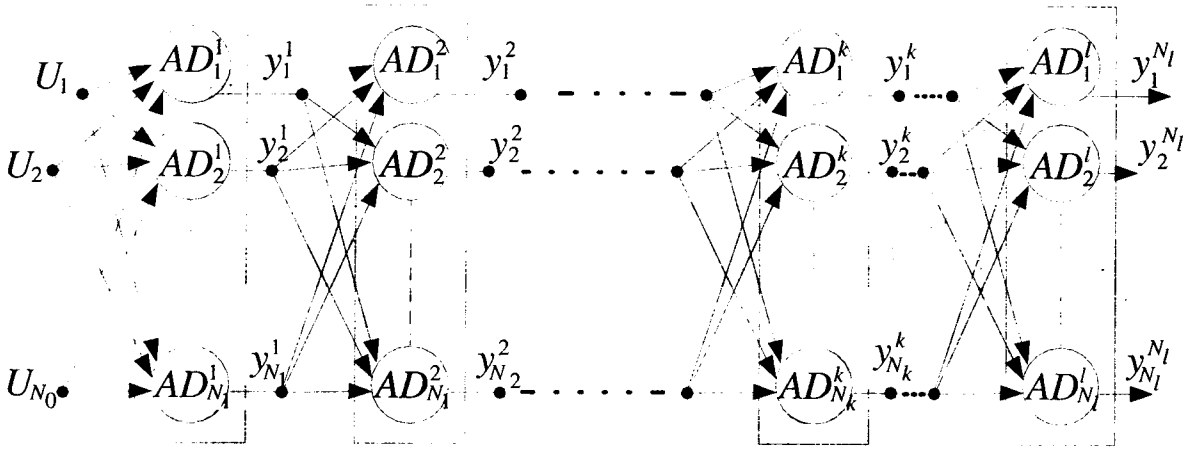


Рис. 8

Элементы AD_i^k называем нейронами, каждый из которых может быть системой типа ALN. В многослойных сетях применяются алгоритмы обратного распространения ошибки. Наиболее часто для обучения нейронных сетей применяется регулярный метод наименьших квадратов в той или иной форме.

Рассмотрим идентификацию модели вязкоупругой среды типа Фойхта-Кельвина в интегральной форме. Тогда в качестве входного сигнала берем вектор градиента деформации а выходного напряжения. Вид обучающего входного сигнала представлен на рис. 9.

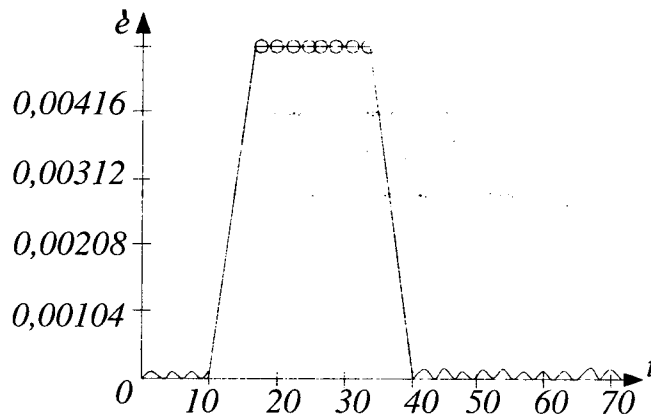


Рис. 9

Вид обучающего выходного сигнала представлен рис. 10.

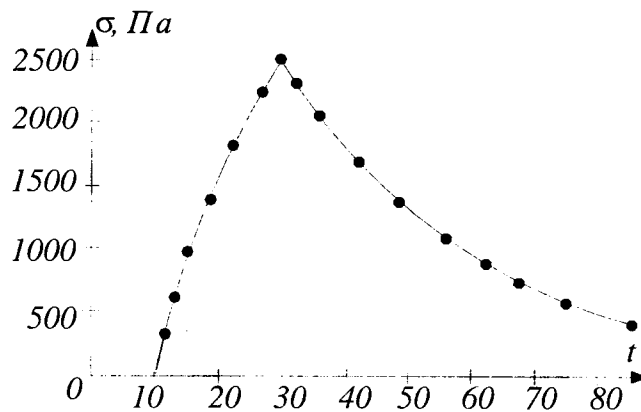


Рис. 10

Задача идентификации модели: по экспериментальным данным $(\dot{\epsilon}, \sigma)$ требуется идентифицировать параметры модели при заданном критерии качества.

Запишем связь между (11) между напряжением $\sigma(t)$ и скоростью деформации $\dot{\epsilon}(t)$ в виде

$$\sigma(k) = \sum_{i=1}^N K(k-i)\dot{\epsilon}(i) + \beta(k) \quad (22)$$

Уравнение (22) описывает функционирование системы (среды). Идентификации подлежит $K(k-i)$, а также погрешность (смещение) сети $\beta(k)$.

Качество идентификации зависит от вида критерия качества, который выберем в виде среднеквадратичной ошибки $\epsilon(j)$

$$\Omega_{(n)} = \sum_{j=1}^N \epsilon^2(j) \quad (23)$$

$$\epsilon(j) = \hat{\sigma}(j) - \sigma(j)$$

где $\hat{\sigma}(j)$ – оценка выхода.

Для того, чтобы настроить сеть ее необходимо обучить в соответствии с требованием минимума $\Omega_{(n)}$, из которого следуют алгоритмы обучения сети

$$K(k+1) = K(k) + 2\alpha\epsilon(k) \quad (24)$$

$$\beta(k+1) = \beta(k) + 2\alpha\epsilon(k) \quad (25)$$

где α – параметр скорости настройки.

Проведем обучение на основе приведенных выше экспериментальных данных. На рис. 11 приведем график ошибок обучения

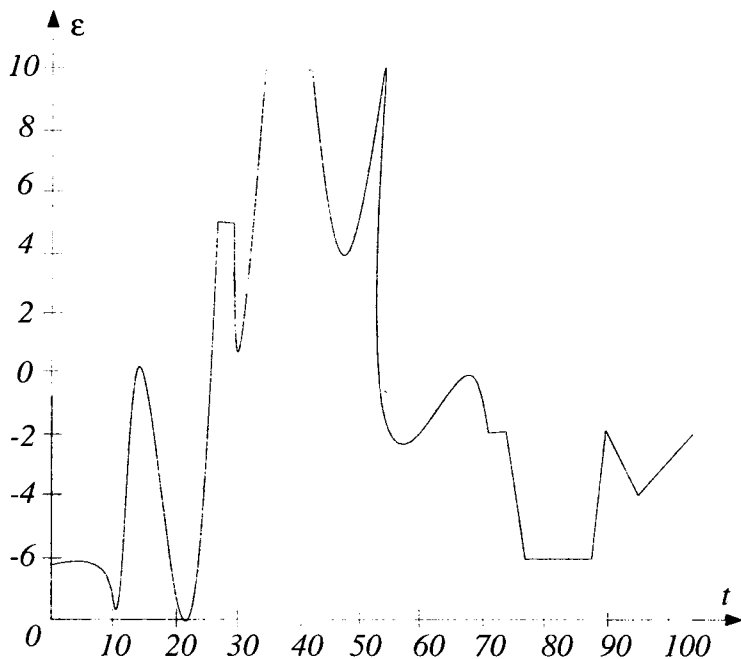


Рис. 11

В результате обучения сеть может подгонять параметры модели так, что ошибка идентификации была минимальна и практически стремилась к нулю. На рис. 12 изображена зависимость выхода $\sigma(t)$ от времени после обучения.

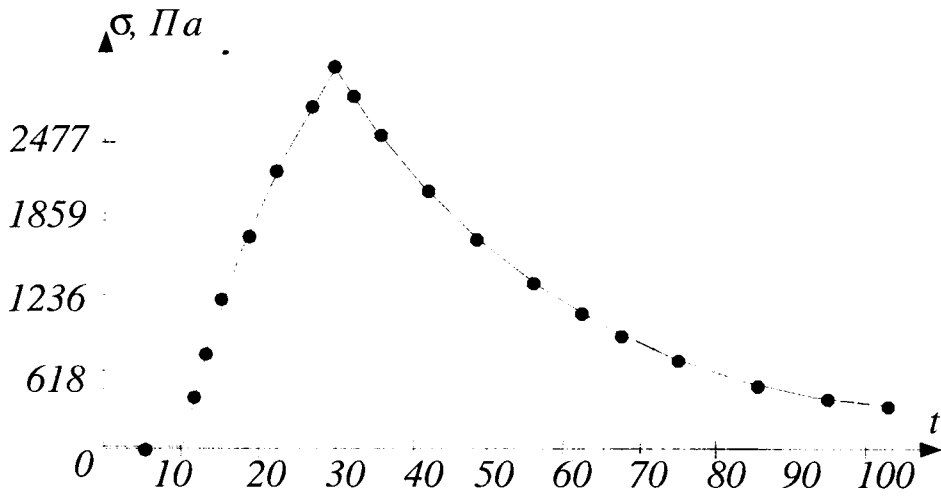


Рис. 12

Рассмотренная модель описывает реакцию на действие единичного импульса.
Рассмотрим реакцию среды на действие серии импульсов типа изображенной на рис. 13

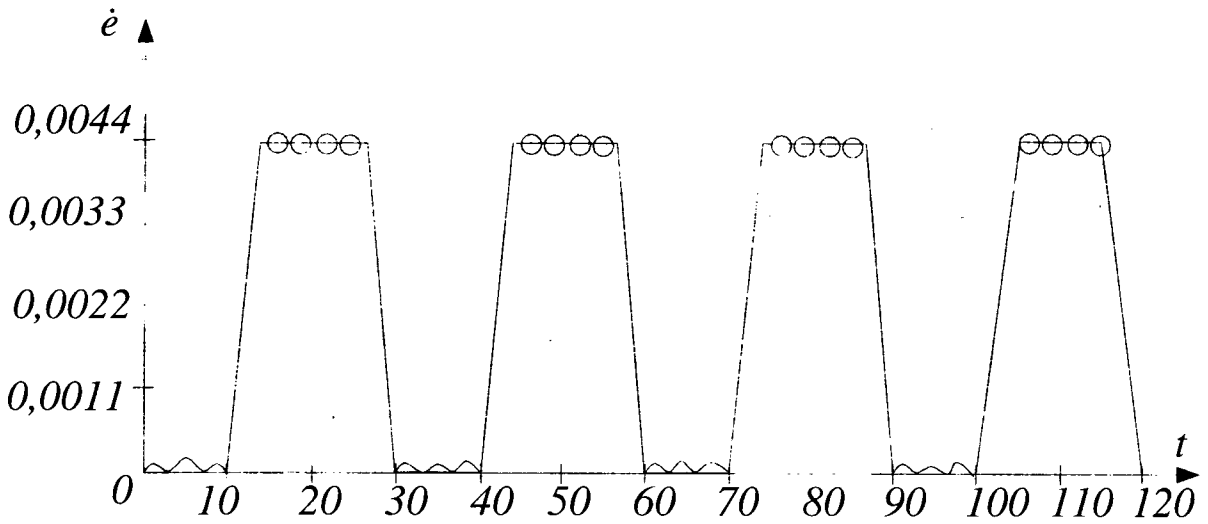


Рис. 13

Выход (напряжение) представлен на рис. 14

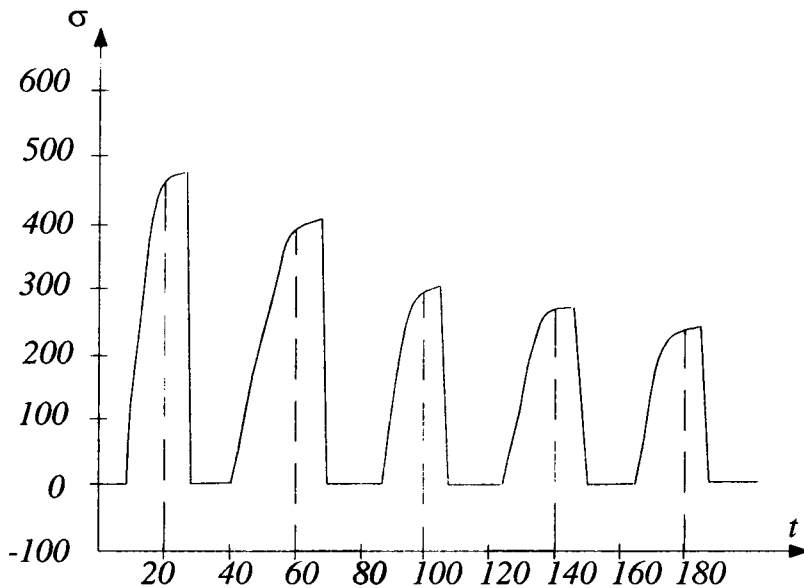


Рис. 14

Функция ошибок обучения сети зависит от информативности обучающего материала. Рассмотрение базы данных экспериментов позволяет существенно увеличить скорость уменьшения ошибки идентификации. На рис. 14 представлен график функции ошибок обучения

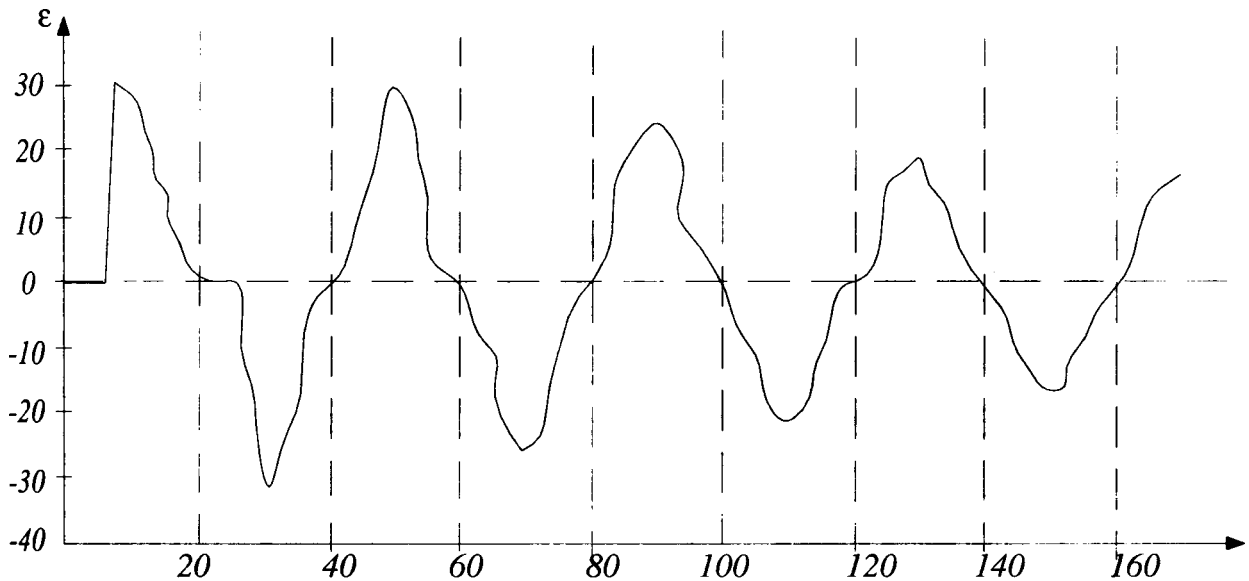


Рис. 15

Рассмотрим применение методов нейронной сети для идентификации упругих коэффициентов неоднородной среды. Перейдем от интегральной записи (8) к сумме, тогда алгоритм функционирования сети имеет вид

$$U'(j) = \sum_{k=1}^N G(j-k)U_0(k)\lambda(k) + \beta(j) \quad (26)$$

где $\beta(j)$ погрешность (смещение) погрешность.

Требуется по измеренному U' (выход), известному U_0 (вход) оценить $\lambda'(x)$.

За критерий качества идентификации берем среднеквадратичную ошибку

$$\Omega_{(n)} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^N (U'(k) - \hat{U}'(k))^2 \quad (27)$$

где \hat{U} – оценка выхода.

Для обучения сети получим алгоритм типа Видроу-Хоффа []

$$\lambda'(k+1) = \lambda'(k) + 2\alpha\varepsilon(k) \quad (28)$$

$$\beta(k+1) = \beta(k) + 2\alpha\varepsilon(k) \quad (29)$$

Обучение сети проводим на эталонных переменных состояния вход-выход. Если вход U_0 представляет собой импульс, то выход U' также будет импульс, однако в зависимости от характера изменения коэффициента упругости по длине образца он будет испытывать компрессию-декомпрессию ширины и уменьшение-увеличение высоты. Если жесткость среды в направлении прохождения импульса растет, то перемещение U убывает, а напряжение растет за счет компрессии импульса в ширину, в случае убывания жесткости за счет декомпрессии импульса напряжение убывает, а перемещение растет по амплитуде. Если упругие свойства (жесткость среды) меняется случайным образом, то в этом случае на вид выходного импульса влияют стохастические свойства среды. Если среда статистически однородна, то ширина импульса не меняется, а амплитуда уменьшается. Если среда не статистически однородна, то вид выхода зависит от средней жесткости. Если она растет, то импульс напряжений растет, а перемещений убывает, если средняя жесткость убывает, то импульс перемещений растет, а напряжений убывает.

На рис. 16 а, б изображена последовательность обучающих входных-выходных импульсов в случае линейно неоднородной среды: $\lambda(x) = \lambda_0(1 + x/L)$, где l – длина образца.

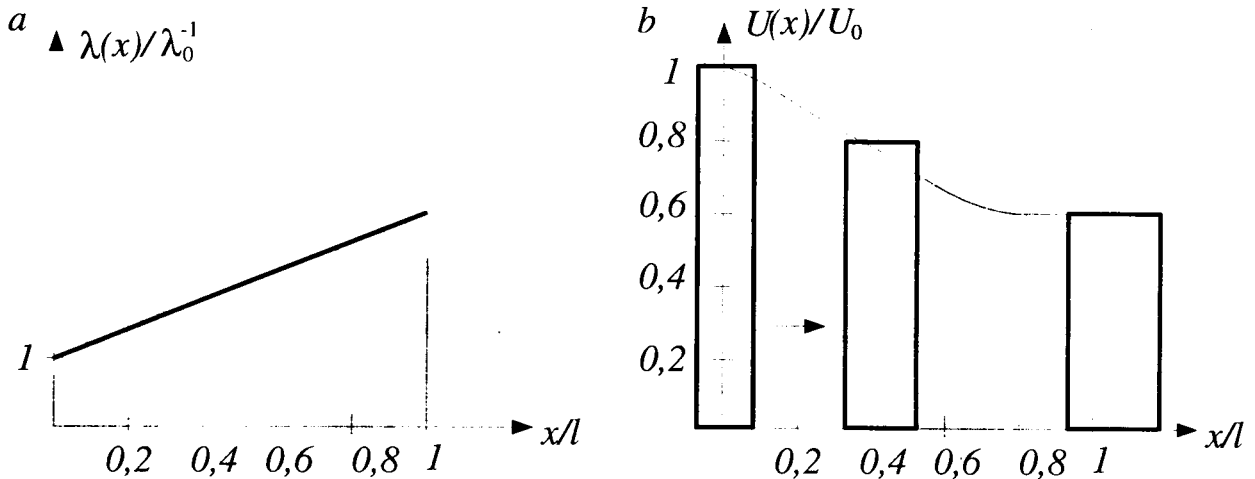


Рис. 16 а, б

На рис. 15с, д изображена последовательность входных-выходных импульсов линейно неоднородной среды: $\lambda(x) = \frac{\lambda_0}{2}(1 - x/L) + \frac{\lambda_0}{2}$

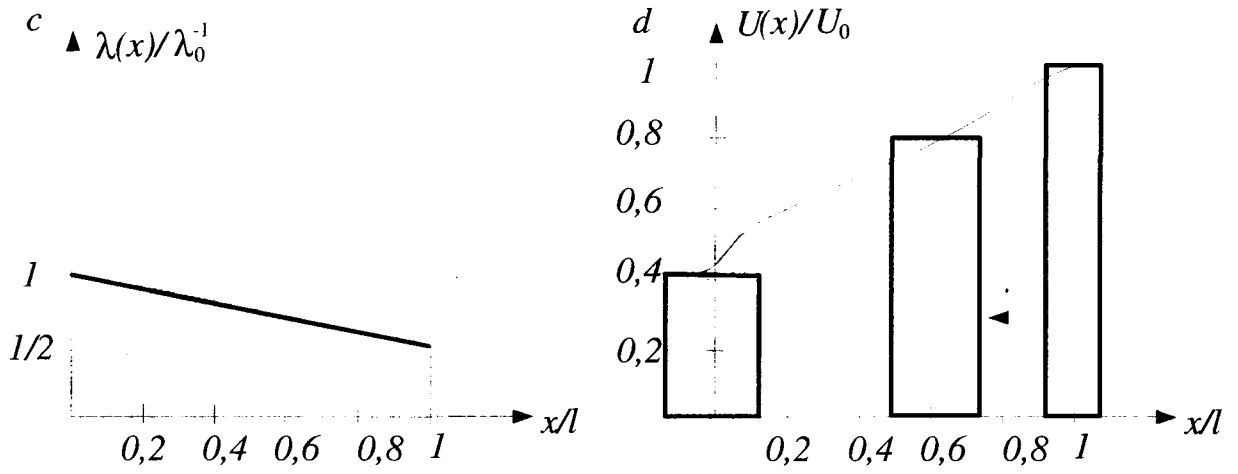


Рис. 16 c,d

На рис.17 а изображена типичная реализация статистически однородной случайной среды $\lambda_0 = \langle \lambda \rangle$

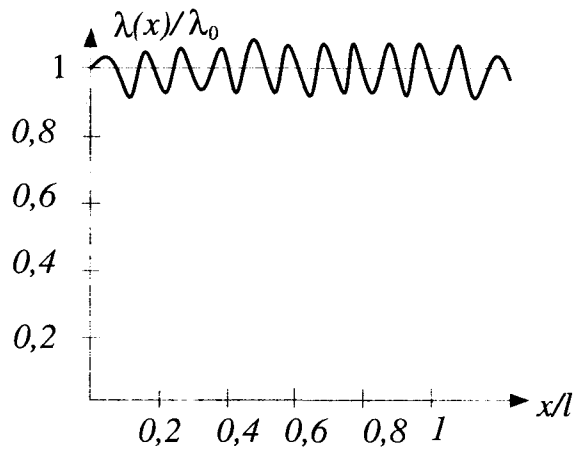


Рис. 17 а

На рис.17 б изображены обучающие входные-выходные импульсы.

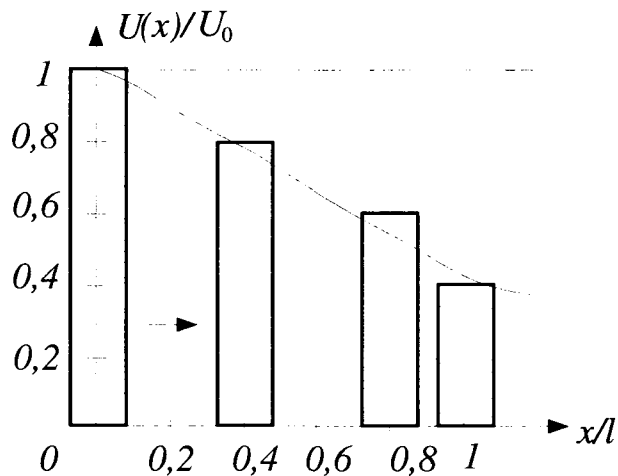


Рис. 17 б

На рис.17 с. изображена реализация идентификации статистически однородной среды с корреляционной функцией вида $R(r) = R_0 \frac{\sin r/a}{r/a}$, (a – радиус корреляции).

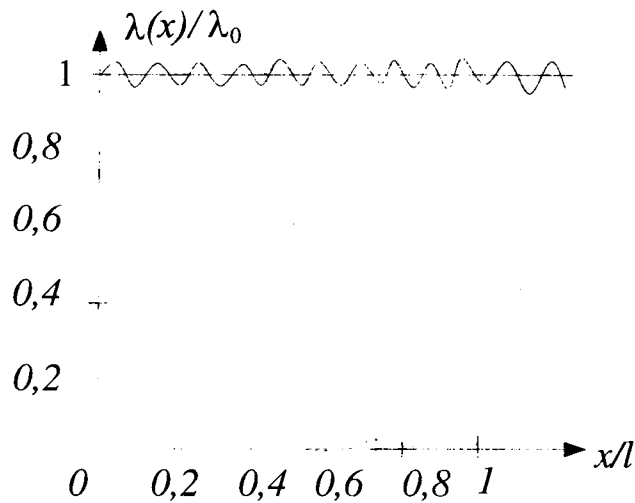


Рис. 17 с

Отметим, что идентификацию по методу нейронных сетей можно сопоставить с идентификацией по методу линейной фильтрации Калмана-Бьюси [1].

Например, пусть состояние линейной системы описывается уравнением

$$\dot{\bar{x}}(t) = F\bar{x}(t) + G\xi(t) \tag{30}$$

где ξ – интенсивность случайных воздействий в процессе функционирования. Наблюдение (выход) определяется соотношением

$$\bar{r}(t) = H\bar{x}(t) + \bar{n}(t) \tag{31}$$

где $n(t)$ также случайная функция.

Пусть матрицы G и H известны, а матрица F имеет все или некоторые неизвестные элементы, подлежащие определению совместно с состоянием $x(t)$.

Обозначим через \bar{p} вектор неизвестных элементов в \bar{F} , тогда, если оценку \bar{p} ищем среди постоянных величин, то можем записать

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = 0 \tag{32}$$

а если среди функций, то необходимо получить уравнения вида

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{f}(p, t) \tag{33}$$

Расширяем вектор состояния до вида

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{p} \end{pmatrix}$$

и записываем (30), (32) (или (33)) в виде

$$\dot{\hat{z}}(t) = \varphi[\hat{z}(t)] + G_z \xi(t) = \begin{pmatrix} F\bar{x}(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{G} \\ 0 \end{pmatrix} \xi(t).$$

Тогда согласно методу фильтрации Калмана-Бьюси оптимальные оценки состояния и параметров среды удовлетворяют уравнениям вида

$$\dot{\hat{z}}(t) = F(t)\hat{z}(t) + V(t)H'(t)N^{-1} \left[r(t) - H(t)\hat{z}(t) \right], \quad (34)$$

а погрешность оценивания – $V(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\bar{V}}(t) = F(t)\bar{V} + \bar{V}(t)F'(t) + G(t)XG'(t) - \bar{V}(t)H'(t)N^{-1}H(t)\bar{V}(t) \quad (35)$$

Для установившегося состояния $\dot{V} = 0$ и из (35) получаем алгебраические соотношения относительно параметров оптимизации.

Условие $\dot{V} = 0$ эквивалентно требованию минимума среднеквадратичной ошибки $\Omega(j)$. Условие $\dot{V} = 0$ позволяет найти j^* – линейное время обучения (адаптации) системы.

$$\hat{z}(j_0) = \hat{z}(j_0 + 1) = \dots \quad (36)$$

Выводы:

1. Применение алгоритмов нейронных сетей не требует полных знаний об объекте идентификации. Более того, некорректные задачи могут решаться без регуляризации и получения дополнительной информации.
2. Обучающие алгоритмы нейронной сети получаются из условия минимума среднеквадратичной ошибки, что позволяет придать механический смысл условию типа вариационного.
3. Алгоритмы нейронных сетей могут быть обобщены на случай нелинейных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. Мн.: Технопринт, 2002. – 425 с.
2. D. Ruthovski, M. Pilinski, L. Ruthovski, Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne I systemy rozmute, Wydawnictwa naukowe PWN, Warszawa, Lodz, 1999.
3. Yanovsky Yn. G, Basistor Yn. A, Filipenkov P.A., Problem of identification of rheological behavior of heterogeneous polymeric media under finite deformation. Proc. XIV Int. Congress on Rheology, ISBN 89-950057-5-0, Korean Society of Rheology, 2004 S018-1-S018-3.
4. Hagan M.T., Denuth H.B., Beale M.H. Neural Network Design, Boston, MA PES Publishing, 1996.

ДИНАМИКА ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ СО СВОБОДНЫМ ВНУТРЕННИМ ОТВЕРСТИЕМ ИЛИ ЖЕСТКОЙ ШАЙБОЙ

Немировский Ю. В., Романова Т. П.

A rigid, perfectly-plastic model of solids is applied to study the dynamic behavior of simply supported or clamped, arbitrarily shaped plates with an internal free hole or a rigid insert and with changing thickness. Equations of dynamic behavior are obtained. Operating conditions of possible mechanism of deformation are analyzed. Analytical expressions for the ultimate loads and the maximum final deflections are obtained. Numerical examples are given.

Изучение динамического поведения элементов конструкций важно для анализа рисков и прогнозирования чрезвычайных ситуаций. В работе предложена методика, которая на основе модели жесткопластического тела позволяет рассчитывать поведение криволинейной пластины переменной толщины со свободным внутренним отверстием или абсолютно жесткой шайбой под действием взрывных нагрузок. Методика может быть использована для широкого класса инженерных задач.

1. Рассмотрим тонкую идеальную жесткопластическую пластину переменной толщины с криволинейным внешним контуром, шарнирно опертым или защемленным, и имеющую внутри отверстие, которое может быть свободным или закреплено абсолютно жесткой шайбой Z_a . Пластина нагружена равномерно распределенной по поверхности взрывной нагрузкой интенсивностью $P(t)$, которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения $P_{\max} = P(0)$ в начальный момент времени $t = 0$ с последующим быстрым его уменьшением. Пластина имеет произвольный гладкий выпуклый внешний контур L_1 , заданный в параметрической форме: $x = x_1(\varphi)$, $y = y_1(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Радиус кривизны контура L_1 равен $R(\varphi) = L^3(\varphi) / (x_1' y_1'' - x_1'' y_1')$, где $L(\varphi) = \sqrt{x_1'^2(\varphi) + y_1'^2(\varphi)}$; $(\square)' = \partial(\square) / \partial\varphi$. Для определенности рассматриваем пластины, симметричные относительно оси x , имеющие геометрические размеры по оси y не больше, чем по оси x (рис. 1). Рассмотрим такие пластины, у которых контур отверстия L_2 находится на одинаковом расстоянии λ от внешнего контура, причем λ выбираем таким, чтобы нормали, опущенные из L_1 внутрь пластины, не пересекались между собой внутри пластины (рис. 1). Это условие выполняется, если $0 < \lambda \leq \min_{\varphi} [R(\varphi)]$.

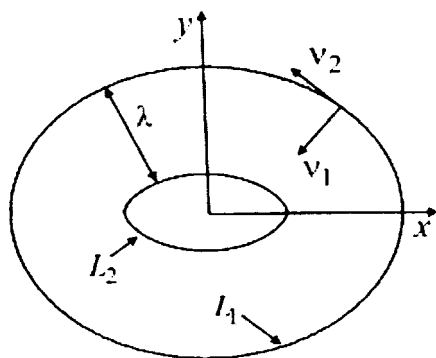


Рис. 1.

Введем криволинейную ортогональную систему координат (v_1, v_2) , связанную с декартовой системой координат (x, y) соотношениями

$$\begin{aligned} x &= x_1(v_2) - v_1 y_1'(v_2) / L(v_2); \\ y &= y_1(v_2) + v_1 x_1'(v_2) / L(v_2). \end{aligned}$$

Кривые $v_1 = \text{const}$ находятся на расстоянии v_1 от контура L_1 и имеют радиус кривизны $\rho_1 = R(v_2) - v_1$. Прямые линии $v_2 = \text{const}$ перпендикулярны к контуру l (радиус кривизны $\rho_2 = \infty$) (рис. 1). Тогда уравнение контура пластины L_1 имеет вид: $v_1 = 0, 0 \leq v_2 \leq 2\pi$. Уравнение контура L_2 : $v_1 = \lambda, 0 \leq v_2 \leq 2\pi$, а нормаль к контуру L_2 является нормалью к контуру L_1 [1, 2].

Считаем, что толщина пластины h является функцией параметра v_1 и изменяется симметрично относительно срединной поверхности пластины. В работе предлагается модель деформирования криволинейной пластины для частного вида функции $h(v_1)$. Ограничения на функцию $h(v_1)$ обсудим подробно ниже.

Считаем, что под действием нагрузки $P(t)$ пластина деформируется в конусообразную поверхность, а точки внутреннего контура L_2 и абсолютно жесткой шайбы движутся вертикально с постоянной скоростью. Тогда угол отклонения плоскости пластины на опорном контуре не зависит от параметра v_2 . Обозначим его $\dot{\alpha}(t)$. Нормальный изгибающий момент на L_2 равен $M_{11} = \sigma_0 h^2(\lambda)(1 - \delta)/4$, а на контуре L_1 : $M_{11} = -\sigma_0 h^2(0)(1 - \eta)/4$, где σ_0 – предел текучести материала пластины; $\delta = 1$ для свободного контура L_2 и $\delta = 0$ для случая жесткой шайбы; $\eta = 0$ при защемлении контура L_1 и $\eta = 1$ при его шарнирном опирании.

Поле скоростей прогибов $\dot{u}(v_1, v_2, t)$ пластины имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}(v_1, v_2, t) &= \dot{\alpha}_i(t)v_1; & 0 \leq v_1 \leq \lambda; \\ \dot{u}(v_1, v_2, t) &= \dot{\alpha}_i(t)\lambda; & v_1 > \lambda \text{ (для жесткой шайбы)}. \end{aligned} \quad (0 \leq v_2 \leq 2\pi) \quad (1)$$

Главные кривизны деформируемой поверхности скоростей прогибов пластины равны:

$$\kappa_1 = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial v_1^2} = 0; \quad \kappa_2 = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \dot{u}}{\partial v_1} = \frac{\dot{\alpha}(t)}{R(v_2) - v_1}.$$

Уравнение движения пластины получим из принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера [3]:

$$K = A - N; \quad (2)$$

$$K = \iiint_{V \setminus V_a} \rho_V \ddot{u} \dot{u} dV + (1 - \delta) \beta \iiint_{V_a} \rho_V \ddot{u} \dot{u} dV; \quad A = \iint_S P(t) \dot{u} dS,$$

где K, A, N – мощности инерционных, внешних и внутренних сил, соответственно; V, S – объем и площадь пластины; V_a – объем шайбы; ρ_V и $\beta \rho_V$ – плотность материалов пластины и шайбы, u – прогиб; dV, dS – элементы объема и площади. Точки над символами обозначают производные по времени.

Учитывая распределение скорости прогибов (1), и выражения $dV = h(v_1) ds$, $ds = L(1 - \frac{v_1}{R}) dv_1 dv_2$, будем иметь

$$K = \rho_V \ddot{\alpha} \dot{\alpha} \Sigma_1; \quad \Sigma_1 = 2 \int_0^\pi L \left[\int_0^\lambda h v_1^2 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 + (1 - \delta) \beta \lambda^2 \int_\lambda^{D_l(v_2)} h \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2;$$

$$A = P(t) \dot{\alpha} \Sigma_2; \quad \Sigma_2 = 2 \int_0^\pi L \left[\int_0^\lambda v_1 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 + (1 - \delta) \lambda \int_\lambda^{D_l(v_2)} \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2,$$

где $D_l(v_2) = \left| \frac{y_1(v_2)}{x_1'(v_2)} \right| L(v_2)$ (см. [1]).

Выражение мощности внутренних сил N представим в виде:

$$N = \sum_{i=1}^3 N_i,$$

где N_1, N_2, N_3 – мощности внутренних сил на контуре L_1 и внутри пластины и на контуре L_2 , соответственно:

$$N_1 = (1 - \eta)\sigma_0 \frac{h^2(0)}{4} \oint_{L_1} [\dot{\theta}]_{L_1} dL_1 \quad (dL_1 = L dv_2); \quad N_2 = \frac{\sigma_0}{4} \iint_S h^2(v_1) \kappa_2 ds;$$

$$N_3 = (1 - \delta)\sigma_0 \frac{h^2(\lambda)}{4} \oint_{L_2} [\dot{\theta}]_{L_2} dL_2 \quad (dL_2 = L(1 - \frac{\lambda}{R}) dv_2),$$

где $[\dot{\theta}]_m$ – разрыв угловой скорости на линии m ; dL_1, dL_2 – элементы длины линий L_1, L_2 .

Из (3) и того, что нормаль к линии L_1 является нормалью к контуру L_2 , следует, что $[\dot{\theta}]_{L_1} = [\dot{\theta}]_{L_2} = \dot{\alpha}$. Тогда будем иметь

$$N_1 = (1 - \eta)\sigma_0 \frac{h^2(0)}{2} \dot{\alpha} \int_0^\pi L dv_2; \quad N_3 = (1 - \delta)\sigma_0 \frac{h^2(\lambda)}{2} \dot{\alpha} \int_0^\pi L(1 - \frac{\lambda}{R}) dv_2;$$

$$N_2 = \frac{\sigma_0}{4} \dot{\alpha} \iint_S h^2(v_1) \frac{1}{R(v_2) - v_1} ds = \frac{\sigma_0}{2} \dot{\alpha} \left(\int_0^{\frac{L}{R}} dv_2 \right) \int_0^\lambda h^2 dv_1.$$

Полная мощность внутренних сил пластины N равна:

$$N = \sigma_0 \dot{\alpha} \Sigma_3; \quad \Sigma_3 = \sum_{i=1}^3 N_i / (\dot{\alpha} \sigma_0).$$

Подставляя выражения для K, A, N в (2), получим уравнения движения пластины:

$$\rho_V \ddot{\alpha} \Sigma_1 = P(t) \Sigma_2 - \sigma_0 \Sigma_3. \quad (4)$$

Начальные условия имеют вид:

$$\dot{\alpha}(0) = \alpha(0) = 0. \quad (5)$$

Проведем анализ деформирования пластины. Если $0 < P_{\max} \leq P_0$ (“низкие” нагрузки), где P_0 – предельная нагрузка, то пластина остается в покое. Величину P_0 определим из уравнения (4) в момент начала движения $t = 0$, считая $\ddot{\alpha}(0) = 0$. Тогда имеем

$$P_0 = \sigma_0 \Sigma_3 / \Sigma_2. \quad (5)$$

Если $P_0 < P_{\max}$, то пластина начнет движение. Уравнение (4) запишем в виде

$$\ddot{\alpha}(t) = F [P(t) - P_0]; \quad F = \Sigma_2 / (\rho_V \Sigma_1). \quad (6)$$

Начальные условия имеют вид (5). В момент времени $t = T$ нагрузка снимается, и пластина некоторое время движется по инерции.

При $0 \leq t \leq T$, интегрируя уравнение движения (6), будем иметь

$$\dot{\alpha}(t) = F \left[\int_0^t P(\tau) d\tau - P_0 t \right], \quad \alpha(t) = F \left[\int_0^t \int_0^m P(\tau) d\tau dm - P_0 \frac{t^2}{2} \right].$$

При $T < t \leq t_f$ движение пластины происходит по инерции до остановки в момент t_f и описывается уравнением

$$\ddot{\alpha}(t) = -FP_0$$

с начальными условиями $\dot{\alpha}(T), \alpha(T)$. Момент t_f определяется из условия

$$\dot{\alpha}(t_f) = 0. \quad (7)$$

Интегрируя уравнение движения, получим равенства

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(T) - FP_0(t-T), \quad (8)$$

$$\alpha(t) = \alpha(T) + \dot{\alpha}(T)(t-T) - FP_0(t-T)^2/2.$$

Из (7), (8) следует, что

$$t_f = \left(\int_0^T P(t) dt \right) / P_0.$$

Прогибы вычисляются из уравнений (1); максимальный остаточный прогиб будет на контуре L_2 :

$$u_{\max} = \lambda F \left[\left(\int_0^T P(t) dt \right)^2 / (2P_0) - \int_0^T t P(t) dt \right]. \quad (9)$$

2. Обсудим ограничения на функцию $h(v_1)$, связанные с предлагаемой схемой деформирования. Эти условия можно получить, сравнивая предельную нагрузку P_0 с предельной нагрузкой для других возможных схем движения. Пластины с переменной толщиной могут деформироваться с образованием краевых пластических шарниров \bar{L}_1 не по периметру контура опирания, а на некотором расстоянии $v_1^a < \lambda$ от контура L_1 внутрь пластины; при этом область у контура пластины остается недеформированной. Уравнение контура \bar{L}_1 имеет вид: $v_1 = v_1^a$ ($0 \leq v_2 \leq 2\pi$). На контуре \bar{L}_1 изгибающий момент равен $M_{11} = -\sigma_0 h^2(v_1^a)/4$. Из (5) следует, что предельная нагрузка \bar{P}_0 для защемленной криволинейной пластины с контуром \bar{L}_1 равна $\bar{P}_0 = \sigma_0 \bar{\Sigma}_3 / \bar{\Sigma}_2$, где

$$\bar{\Sigma}_3(v_1^a) = \frac{1}{2} \left[h^2(v_1^a) \int_0^\pi L \left(1 - \frac{v_1^a}{R}\right) dv_2 + (1-\delta) h^2(\lambda) \int_0^\pi L \left(1 - \frac{\lambda}{R}\right) dv_2 + \left(\int_0^L \frac{L}{R} dv_2 \right) \int_{v_1^a}^\lambda h^2 dv_1 \right];$$

$$\bar{\Sigma}_2(v_1^a) = 2 \int_0^\pi L \left[\int_{v_1^a}^\lambda v_1 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2.$$

Если около контура L_2 толщина $h(v_1)$ достаточно большая, тогда в области Z_c ($v_1^c \leq v_1 \leq \lambda$, $0 \leq v_2 \leq 2\pi$) изгибающий момент $M_{22} = \sigma_0 h^2(v_1)/4$ будет намного больше, чем в остальной части пластины. Следовательно, область Z_c деформироваться не будет. Нормальный изгибающий момент на контуре L_1^c ($v_1 = v_1^c$, $0 \leq v_2 \leq 2\pi$) равен $M_{11} = \sigma_0 h^2(v_1^c)/4$. Движение пластины будет происходить при наличии двусвязной жесткой области Z_c ,двигающейся поступательно со скоростью $\dot{\alpha}v_1^c$. Поле скоростей прогибов имеет вид:

$$\dot{u}(v_1, v_2, t) = \dot{\alpha}_i(t) v_1 \quad \text{для} \quad 0 \leq v_1 \leq v_1^c, \quad 0 \leq v_2 \leq 2\pi;$$

$$\dot{u}(v_1, v_2, t) = \dot{\alpha}_i(t) v_1^c \quad \text{для} \quad v_1^c \leq v_1, \quad 0 \leq v_2 \leq 2\pi.$$

Определим предельную нагрузку P_0^c для такой схемы деформирования. Мощности внешних сил A^c и внутренних сил N^c будут равны:

$$A^c = P(t) \left[\iint_{S \setminus (Z_c \cup Z_a)} \dot{\alpha} v_1 ds + (1-\delta) \iint_{Z_a} \dot{\alpha} v_1^c ds + \iint_{Z_c} \dot{\alpha} v_1^c ds \right] = P(t) \dot{\alpha} \Sigma_2^c;$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2^c(v_1^c) &= 2 \left\{ \int_0^\pi L \left[\int_0^{v_1^c} v_1 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2 + \right. \\ &+ v_1^c \int_0^\pi L \left[\int_{v_1^c}^\lambda \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 + (1 - \delta) \int_\lambda^{D_l(v_2)} \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2 \left. \right\}; \\ N^c &= (1 - \eta) \sigma_0 \frac{h^2(0)}{4} \dot{\alpha} \int_{L_1} dL_1 + \frac{\sigma_0}{4} \iint_{S \setminus (Z_c \cup Z_a)} h^2(v_1) \kappa_2 ds + \\ &+ \sigma_0 \frac{h^2(v_1^c)}{4} \int_{L_1^c} [\dot{\theta}]_{L_1^c} dL_1^c = \sigma_0 \dot{\alpha} \Sigma_3^c; \quad (dL_1^c = L \left(1 - \frac{v_1^c}{R}\right) dv_2; \quad [\dot{\theta}]_{L_1^c} = \dot{\alpha}) \end{aligned}$$

$$\Sigma_3^c(v_1^c) = \frac{1}{2} \left[(1 - \eta) h^2(0) \int_0^\pi L dv_2 + \left(\int_0^{\frac{L}{R}} dv_2 \right) \int_0^{v_1^c} h^2 dv_1 + h^2(v_1^c) \int_0^\pi L \left(1 - \frac{v_1^c}{R}\right) dv_2 \right].$$

Тогда $P_0^c = \sigma_0 \Sigma_3^c(v_1^c) / \Sigma_2^c(v_1^c)$.

Также возможна ситуация, когда вместе с образованием краевого шарнира \bar{L}_1 ($v_1 = v_1^a$; $0 \leq v_2 \leq 2\pi$) некоторая центральная часть пластины Z_c ($v_1^c \leq v_1 \leq \lambda$, $0 \leq v_2 \leq 2\pi$) остается жесткой. Распределение скоростей прогибов имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}(v_1, v_2, t) &= 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq v_1 \leq v_1^a, \quad 0 \leq v_2 \leq 2\pi; \\ \dot{u}(v_1, v_2, t) &= \dot{\alpha}_i(t) v_1 \quad \text{для} \quad v_1^a \leq v_1 \leq v_1^c, \quad 0 \leq v_2 \leq 2\pi; \\ \dot{u}(v_1, v_2, t) &= \dot{\alpha}_i(t) v_1^c \quad \text{для} \quad v_1^c \leq v_1, \quad 0 \leq v_2 \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Определим предельную нагрузку \bar{P}_0^c для такой схемы деформирования. Мощность внешних сил \bar{A}^c равна

$$\bar{A}^c = P(t) \dot{\alpha} \bar{\Sigma}_2^c;$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2^c &= 2 \left\{ \int_0^\pi L \left[\int_{v_1^a}^{v_1^c} v_1 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2 + \right. \\ &+ v_1^c \int_0^\pi L \left[\int_{v_1^c}^\lambda \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 + (1 - \delta) \int_\lambda^{D_l(v_2)} \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2 \left. \right\}. \end{aligned}$$

Мощность внутренних сил \bar{N}^c равна

$$\begin{aligned} \bar{N}^c &= \sigma_0 \dot{\alpha} \bar{\Sigma}_3^c; \quad \bar{\Sigma}_3^c = \frac{1}{2} \left[(1 - \eta) h^2(v_1^a) \int_0^\pi L \left(1 - \frac{v_1^a}{R}\right) dv_2 + \right. \\ &+ \left. \left(\int_0^{\frac{L}{R}} dv_2 \right) \int_{v_1^a}^{v_1^c} h^2 dv_1 + h^2(v_1^c) \int_0^\pi L \left(1 - \frac{v_1^c}{R}\right) dv_2 \right]. \end{aligned}$$

Тогда $\bar{P}_0^c = \sigma_0 \bar{\Sigma}_3^c / \bar{\Sigma}_2^c$.

Если $P_0 < \min(P_0^c, \bar{P}_0, \bar{P}_0^c)$, то пластина будет деформироваться по схеме, рассмотренной в части 1.

Если выполняется неравенство

$$\bar{P}_0 < \min(P_0, P_0^c, \bar{P}_0^c), \quad (10)$$

то пластина деформируется только в области ($v_1^a \leq v_1 \leq \lambda$; $0 \leq v_2 \leq 2\pi$); при этом величина v_1^a соответствует минимальному значению \bar{P}_0 , для которого выполняется неравенство (10). Анализ поведения в рассматриваемом случае подобен проведенному в части 1 анализу, но с заменой контура L_1 на заземленный контур \bar{L}_1 . Движение описывается уравнением (6) с начальными условиями (5) при замене F на \bar{F} : $\bar{F} = \bar{\Sigma}_2 / (\rho_V \bar{\Sigma}_1)$, где

$$\bar{\Sigma}_1 = 2 \int_0^\pi L \left[\int_{v_1^a}^\lambda h v_1^2 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 + (1 - \delta) \beta \lambda^2 \int_\lambda^{D_1(v_2)} h v_1^2 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2.$$

Максимальный остаточный прогиб будет на контуре L_2 , он вычисляется по формуле (9) при замене F на \bar{F} и λ на $\lambda - v_1^a$.

Если $h(v_1)$, v_1^c таковы, что $P_0^c < \min(P_0, \bar{P}_0, \bar{P}_0^c)$, то следует рассматривать задачу о движении криволинейной пластины переменной толщины с жесткой шайбой сплошной или со свободным отверстием. В случае $h(v_1) = \text{const}$ и сплошной шайбы такая задача подробно рассмотрена в [4].

3. В качестве примера рассмотрим эллиптическую пластину со свободным отверстием. Контур L_1 задан уравнениями: $x = a \cos \varphi$; $y = \gamma a \sin \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$); $\gamma \leq 1$. Тогда $R(\varphi) = L^3(\varphi) / (\gamma a^2)$; $L(\varphi) = a \sqrt{\sin^2 \varphi + \gamma^2 \cos^2 \varphi}$. Криволинейная ортогональная система координат (v_1, φ) связана с декартовой системой координат (x, y) соотношениями

$$x = a \left[1 - v_1 \gamma / L(\varphi) \right] \cos \varphi; \quad y = a \left[\gamma - v_1 / L(\varphi) \right] \sin \varphi.$$

Величина λ , характеризующая размер свободного отверстия равна $\lambda = \gamma_1 a$; $\gamma_1 \leq \gamma^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 2 \int_0^\pi L \left[\int_0^{\gamma_1 a} h v_1^2 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] d\varphi; & \Sigma_2 &= \frac{(\gamma_1 a)^2}{3} \left[3 \int_0^\pi L d\varphi - 2\pi \gamma_1 a \right]; \\ \Sigma_3 &= \frac{1}{2} \left[(1 - \eta) h^2(0) \int_0^\pi L d\varphi + \pi \int_0^{\gamma_1 a} h^2(v_1) dv_1 \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\int_0^\pi L d\varphi \approx \frac{\pi a}{4} \left[3(\gamma + 1) - 2\sqrt{\gamma} \right]$ (см. [2]), и обозначение $M_0 = \sigma_0 h^2(0) / 4$, получим выражение для предельной нагрузки:

$$P_0 = \frac{6M_0}{a^2} \frac{(1 - \eta) \left[3(\gamma + 1) - 2\sqrt{\gamma} \right] + \frac{4}{ah^2(0)} \int_0^{\gamma_1 a} h^2(v_1) dv_1}{\gamma_1^2 \left\{ 3 \left[3(\gamma + 1) - 2\sqrt{\gamma} \right] - 8\gamma_1 \right\}}.$$

Зависимость безразмерной предельной нагрузки $p_0 = P_0 a^2 / M_0$ от параметра γ_1 приведена на рис. 2. Кривая 1 соответствует случаю: $\gamma = 1$ (кольцевая пластина); $h(v_1) = h(0)$; $\eta = 1$ (шарнирное опирание). Кривая 2 – случаю: $\gamma = 1$; $h(v_1) = h(0) [1 + v_1 / (3\gamma_1 a)]$; $\eta = 1$. Кривая 3 – случаю: $\gamma = 1$; $h(v_1) = h(0) [5/4 - v_1 / (4\gamma_1 a)]$; $\eta = 1$. Кривая 4 – случаю: $\gamma = 1$; $h(v_1) = h(0) [1 + v_1 / (3\gamma_1 a)]$; $\eta = 0$ (защемление). Кривая 5 – случаю: $\gamma = 0,7$; $h(v_1) = h(0)$; $\eta = 1$. Кривая 6 соответствует случаю: $\gamma = 0,7$; $h(v_1) = h(0) [1 + v_1 / (3\gamma_1 a)]$; $\eta = 1$. Видно, что для кольцевой пластины ($\gamma = 1$, кривые 1 – 4) предельная нагрузка при увеличении размера отверстия сначала несколько снижается, а затем увеличивается. Это свойство для шарнирно

опертой квадратной пластины постоянной толщины с квадратным свободным отверстием отмечено в [5].

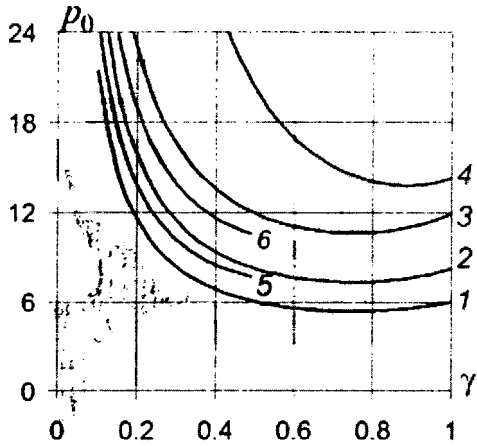


Рис. 2.

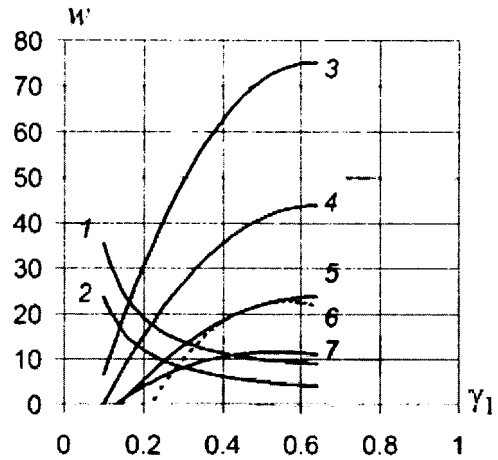


Рис. 3.

Для рассматриваемой шарнирно опертой пластины с $\gamma = 0,8$ зависимость безразмерного максимального остаточного прогиба $w = u_{\max} a^2 \rho_V h(0) / (M_0 T^2)$ от параметра γ_1 ($0,1 < \gamma_1 \leq \gamma^2 = 0,64$) при воздействии нагрузки “прямоугольного” вида [$P(t) = p_{\max} M_0 / a^2$ при $0 \leq t \leq T$, $P(t) = 0$ при $t > T$] приведена на рис. 3. Случай $p_{\max} = 2p_0$ изображают кривые 1 и 2 при $h(v_1) = h(0)$ и $h(v_1) = h(0)[1 + v_1 / (4\gamma_1 a)]$, соответственно. Случаю $p_{\max} = 24$ соответствуют кривые: 3 – $h(v_1) = h(0)[1 - v_1 / (4\gamma_1 a)]$; 4 – $h(v_1) = h(0)$; 5 – $h(v_1) = h(0)(-v_1^2 + \gamma_1 v_1 a + \gamma_1^2 a^2) / (\gamma_1^2 a^2)$; 6 – $h(v_1) = h(0)[5/4 - v_1 / (4\gamma_1 a)]$; 7 – $h(v_1) = h(0)[1 + v_1 / (4\gamma_1 a)]$.

Из рисунков видно, что переменная толщина существенно влияет как на величины предельных нагрузок пластины, так и на остаточные прогибы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05-01-00161-а; 06-08-08035-офи), Президиума СО РАН (Постановление № 54 от 09.02.2006, проект № 2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика пластического деформирования пластин с криволинейным контуром // Прикл. механика. – 2001. – Т. 37, № 12. – С. 68 – 78.
2. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическая пластическая повреждаемость одно- и двусвязных эллиптических пластин // ПМТФ. – 2002. – Т. 43, № 2. – С. 142 – 154.
3. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
4. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое деформирование криволинейной пластины с жесткой вставкой // ПМТФ. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 126 – 138.
5. Ржаницын А. Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1983. – 288 с.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРАНСМИССИОННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ РЕГУЛЯРНЫХ СТРУКТУРНЫХ КОМПОНЕНТОВ

Альгин В.Б., Дробышевская О.В., Ломоносов С.В.,
Максимов С.А., Сорочан В.М., Широков Б.Н.

The paper discusses the techniques and computation problems for transmission as a typical MBS-object. Transmission schematization, representation and calculations on kinematic and dynamic schemes (diagrams) are based on using the rigid and elasto-dissipative constructs. The techniques are proposed to calculate the transmissions in an arbitrary configuration and constituent elements. The paper describes a software family for automated development of kinematic and dynamic schemes as well as assembling schemes for transmission systems with the subsequent calculation procedures. The techniques and associated software is destined for the development of transmissions beginning at the earliest design stage. Software realized on the basis of proposed technique has efficient practice in the machine design on several Belarusian OEM companies.

Введение

Статья посвящена расчетам трансмиссионных систем по кинематическим, динамическим и компоновочным схемам. Общие положения по кинематическим и динамическим расчетам механических систем, представленные в [1], развиваются применительно к трансмиссионным системам. Рассматриваются механические и гидромеханические трансмиссии автомобилей и тракторов, которые могут быть выполнены по различным схемам, с использованием зубчатых передач и планетарных механизмов. Трансмиссии имеют несколько передач, переключение с одной передачи на другую изменяет состояние трансмиссии и уравнения ее движения. Разнообразие типов передач и планетарных механизмов, изменение состояний трансмиссии затрудняет вопросы ее схематизации и расчета как MBS-объекта (объекта типа многомассовой системы), особенно, когда создается новая конструкция. В основе предлагаемых методик расчетов лежит общий подход — использование регулярных структурных компонентов. Большая часть статьи посвящена динамическому расчету. Формирование механической модели объекта реального мира и последующее создание многомассовой расчетной модели (1), описание контактного взаимодействия тел и внешних воздействий (2) — это основные вопросы динамического анализа систем. В статье мы фокусируемся на первом вопросе, который связан с построением расчетной схемы и автоматическим формированием уравнений движения. Второй вопрос в различных методиках решается практически одинаково.

Однако некоторым недостатком известных методик и пакетов [2, 3], особенно при проведении динамического расчета трансмиссий, является их излишняя абстрактность. В частности, они не отображают реальную конфигурацию объекта и привычные для пользователя-механика расчетные схемы. Поэтому предлагается подход, в котором для описания расчетной схемы трансмиссии вводится набор типовых механических компонентов, используемых при схематизации механических объектов. Уровень абстракции приходится повышать, когда необходимо моделировать разнообразные типы и виды трансмиссионных узлов. Для таких случаев предлагаются символические изображения узлов, интуитивно понятные пользователю-механику. По сформированным расчетным схемам формальным образом генерируются математические модели для кинематических и динамических вычислений.

Основными особенностями подхода являются правила схематизации объектов, структурно-силовая матрица, типовые жесткие и упруго-диссипативные структурные компоненты (модули), индикаторы состояния муфт и тормозов, совместное рассмотрение вращательной и поступательной систем, а также моделирование трансмиссии как системы с переменными состояниями, которые имеют место при включении различных элементов управления и пробуксовке двигателя.

Расчеты по кинематической схеме

Эти расчеты включают два вида силового расчета моментов (для идеального механизма и с учетом потерь) и расчет скоростей.

Представление структуры трансмиссии

Кинематическая схема трансмиссии рассматривается как объект, состоящий из N_z основных звеньев и $K_{\lambda G}$ устройств их соединяющих. Основные звенья (ОЗ) имеют оси вращения в неподвижном звене. К устройствам относятся дифференциал D (как узел с числом степеней свободы $W=2$), передача P (как частный случай дифференциала с заторможенным звеном, $W=1$), муфта F и тормоз T (как частный случай муфты). Для описания структуры и распределения внутренних крутящих моментов в устройствах вводится структурно-силовая (точнее структурно-распределительная) матрица ССМ. В такой матрице каждое из упомянутых устройств представлено в виде столбца, как показано в табл. 1.

Таблица 1 – Представление устройств

ОЗ	Дифференциал D	Передача P	Вал S	Муфта F	Тормоз T
i	1	1	1	1	1
j	$-u$	$-u$	-1	-1	0
k	$-(1-u)$	0	—	—	—

Здесь u — внутреннее кинематическое передаточное число; при силовом расчете с учетом КПД устройств u заменяется силовым передаточным числом, равным $u\eta^x$, где $x = +1$ или -1 , в зависимости от направления передачи мощности устройством. В таблице представлен также компонент «Вал» S , который используется для схематизации трансмиссии при динамических расчетах. Он может использоваться при кинематическом расчете, если нужно разделить звено на два компонента.

Рассмотренная матрица служит для формализованного составления уравнений во всех видах расчетов трансмиссии, выполняемых по кинематической схеме. Представленное описание устройств является универсальным, оно пригодно для любых их кинематических и конструктивных реализаций, включая случаи, получаемые совмещением основных звеньев (такой прием часто используется в планетарных коробках передач).

Решение задач силового и скоростного расчета трансмиссии

Силовой расчет

При силовом расчете неизвестными являются моменты на первых звеньях устройств M_{1k} и момент на выходном валу M_x . В матричном виде уравнение силового равновесия основных звеньев имеет вид

$$AX = B \quad (1)$$

где A — матрица, формируемая на основе ССМ и состояния муфт и тормозов; X — вектор искомых моментов M ; B — вектор воздействий на основные звенья.

Верхняя постоянная часть матрицы A формируется $K_{\lambda G}$ столбцами с коэффициентами A_{jk} ($j=1, \dots, N_z; k=1, \dots, K_{\lambda G}$), взятыми из ССМ, к которым добавляется $(K_{\lambda G} + 1)$ -й столбец A_{jk+1} для момента на выходном звене. Каждая строка этой (верхней) части матрицы представляет собой уравнение моментов, приложенных к j -му основному звену

$$\sum A_{jk} M_{1k} + A_{jk+1} M_x = 0 \quad (2)$$

Нижняя часть матрицы изменяется в зависимости от состояния устройств управления (муфт и тормозов) на рассматриваемой передаче трансмиссии. Для каждого не включенного устройства управления формируется строка матрицы. В позиции устройства записывается 1, а в столбце B записывается 0.

Процедура нахождения X является стандартной. Обычно расчет выполняется в относительных единицах, если ведущее звено имеет номер j , то $B_j = 1$. В этом случае полученный момент на выходном звене M_x равен передаточному числу трансмиссии на рассматриваемой передаче.

Силовой расчет с учетом потерь

Расчет проводится аналогично предыдущему случаю с использованием силовых передаточных чисел $\hat{u}_i = u_i \eta_i^x$ для передач и дифференциалов. Предварительно определяется значение показателя степени x для каждого механизма. После этого определяются моменты, в том числе момент на выходном звене \hat{M}_x . Общий КПД трансмиссии на передаче η_{0x} равен отношению \hat{M}_x / M_x .

Скоростной расчет

Для расчета скоростей формируется уравнение вида (1), где B — вектор заданных скоростей основных звеньев. Матрица A формируется тремя группами строк.

Группа 1 имеет K_C строк. Это столбцы ССМ, соответствующие зубчатым механизмам (передачам и дифференциалам). Каждая строка имеет вид

$$\sum A_{jk} \omega_k = 0, \quad k = 1, \dots, N_z \quad (3)$$

Группа 2 описывает состояние включаемых устройств управления. Строки являются столбцами ССМ для тех устройств, которые включаются на рассчитываемой передаче или режиме работы трансмиссии, например, на нейтрали.

Группа 3 — уравнения для звеньев с заданными скоростями ω_{0j} . В позициях соответствующих звеньев записываются единицы ($A_{jk} = 1$), а в столбце — значения $B_j = \omega_{0j}$. В обычном случае в столбце B задано одно значение, равное 1, что соответствует стандартному расчету угловых скоростей в относительных единицах.

В результате определяется вектор X , который представляет собой угловые скорости N_z основных звеньев. Они используются для расчета скоростей скольжения муфт и тормозов, а также скоростей относительного движения сателлитов. Если схема имеет дифференциалы нестандартного вида, то для расчета скоростей их сателлитов задаются дополнительные параметры.

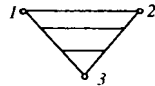
Расчеты по динамической схеме

Представление структуры

Для представления трансмиссии в динамическом расчете к ранее выделенным кинематическим компонентам добавляются инерционный компонент, вал (в жестком и упругом представлении), демпфер и неподвижное звено (стойка). Валы и их комбинации с жесткими кинематическими компонентами передач и дифференциалом образуют компоненты вал S , передачу P и дифференциал D . Они могут быть представлены как в жестком виде (их будем называть M -компонентами), так и в упруго-диссипативном виде (их будем называть E -компонентами). У M -компонентов значения податливостей E и коэффициентов демпфирования K равны 0. Правила расчета обобщенных податливостей и коэффициентов демпфирования E -компонентов приведены в работе [4].

Базовые компоненты для построения динамических схем показаны в таблице 2.

Таблица 2 – Базовые компоненты

Компонент	Вид	Параметры
Крутильная (вращательная) система		
Маховая масса		J
Неподвижное звено (стойка)		—
Демпфер		K
Вал S		E, K
Передача P		u, E, K
Дифференциал D		u, E, K
Муфта		$M_M =$ $= (1 - \lambda)M_1 + \lambda M_F,$
Линейная (поступательная) система		
Масса		m
Линейный демпфер		k
Линейное трение		F

M - и E -компоненты, муфты и тормоза, отдельные демпферы, а также дополнительные компоненты играют роль *соединителей* для инерционных компонентов и неподвижных звеньев. Непосредственная связь (не через массу) для соединителей запрещена. В этом состоит *принцип регулярности* рассматриваемых динамических схем. Его нарушение может привести к неправильной схематизации динамических объектов и ошибкам в расчетах.

Второй принципиальное положение — это использование при схематизации конечных и бесконечных масс и жесткостей. Массы, существенно превышающие величины остальных компонентов, заменяются стойками, а компоненты с высокой жесткостью — M -компонентами. Это также способствует получению корректных результатов для объектов, у которых упомянутые параметры имеют существенное расхождение.

Третья особенность методики состоит в использовании индикаторов состояния λ_k для муфт и тормозов. Их применение позволяет получить универсальные уравнения динамической схемы, которые не зависят от состояния этих устройств управления (замыкание или буксование) [5]. В уравнении момента k -го устройства управления, присутствуют момент трения M_{Fk} и момент в замкнутом устройстве M_{Ik} , которые за счет индикатора действуют альтернативно.

Состояние индикатора на i -м и $(i+1)$ -м шагах расчета определяется следующим образом:

$$\lambda_{k_i} = 0 \text{ и } |M_{1k_i}| > M_{Fk_i} \rightarrow \lambda_{k_{i+1}} = 1; \quad (4)$$

$$\lambda_{k_i} = 1 \text{ и } \Delta\omega_{Fk_{i-1}} \Delta\omega_{Fk_i} \leq 0 \rightarrow \lambda_{k_{i+1}} = 0, \quad (5)$$

$$k = 1, 2, \dots, K_\lambda.$$

В общем случае объект описывается *динамической схемой*, которая содержит N_{JS} инерционных звеньев, K_E обобщенных упругодемпфирующих звеньев (E -компоненты) и $K_{\lambda G}$ жестких звеньев. В число $K_{\lambda G}$ жестких звеньев могут входить K_λ муфт/тормозов и $(K_{\lambda G} - K_\lambda)$ M -компонентов. Кроме того, в схеме могут присутствовать дополнительные компоненты, для которых используются специальные математические модели. Характерным компонентом для гидромеханических трансмиссий является гидротрансформатор.

N_J инерционных звеньев связаны с M -компонентами. Часть упомянутых звеньев могут быть связаны с E -компонентами. Остальные $(N_{JS} - N_J)$ инерционных звеньев соединены с E -компонентами и/или со специальными устройствами, которые моделируются в составе объекта.

На каждое инерционное звено J_j может действовать внешний момент M_{Bj} и внешнее демпфирование $M_{Vj} = K_j \omega_j$, где K_j — коэффициент демпфирования, ω_j — угловая скорость инерционного звена J_j .

Формирование и решение уравнений

Особенностью математической модели является то, что необходимо решать алгебраические уравнения для нахождения моментов жесткой части, а также дифференциальные уравнения движения и контролировать состояние индикаторов муфт/тормозов.

Моменты жесткой части определяются с использованием коэффициентов A_{jk} ССМ и индикаторов λ_k муфт/тормозов. В общем случае уравнение движения j -го инерционного звена, связанного с жесткой частью имеет вид

$$J_j \dot{\omega}_j + \sum_{k=1}^{K_{\lambda G}} A_{jk} I_k M_{1k} = M_{Jj} - \sum_{k=1}^{K_\lambda} A_{jk} \lambda_k M_{Fk}, \quad j = 1, 2, \dots, N_J, \quad (6)$$

где J_j и ω_j — момент инерции и угловая скорость j -го инерционного звена; $I_k = 1 - \lambda_k$, если $k \leq K_\lambda$, $I_k = 1$, если $k > K_\lambda$; M_{Jj} — сумма внутренних упругих моментов и внешних моментов, приложенных к этому звену; M_{Fk} — момент k -й муфты/тормоза.

При определении внутренних моментов в жестких компонентах целесообразно исключить из уравнений, члены с производными. Используем кинематические уравнения связей для инерционных звеньев устройств

$$\sum_{j=1}^{N_J} A_{ji} \dot{\omega}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_J \quad (7)$$

Предварительно каждое из уравнений вида (6) умножим соответственно на A_{ji} / J_j , $j = 1, 2, \dots, N_J$. Затем просуммируем выражения, относящиеся к каждому устройству. Получим $K_{\lambda G}$ уравнений. В каждом из них суммы вида (7) обратятся в нуль. Полученные уравнения можно записать в матричном виде следующим образом

$$\sum_{k=1}^{K_{\lambda G}} \alpha_{\lambda ik} M_{1k} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, K_{\lambda G}, \quad (8)$$

$$\text{где } \alpha_{\lambda ik} = \begin{cases} \alpha_{ik}, i = k; \\ I_i I_k \alpha_{ik}, i \neq k \end{cases}, \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{N_j} \frac{A_{ij}}{J_j} A_{jk},$$

$$b_i = I_i \left(\sum_{j=1}^{N_j} \frac{A_{ji}}{J_j} M_{j_j} - \sum_{k=1}^{K_i} \alpha_{ik} \lambda_k M_{Fk} \right);$$

I_i определяется сходно с I_k .

Решением алгебраической системы уравнений (8) на каждом шаге расчета определяют внутренние моменты M_{1k} в M -компонентах. Эта процедура является частью общей процедуры решения дифференциальных уравнений динамики.

Формирование правых частей для производных угловых скоростей инерционных звеньев $\dot{\omega}$, упругих моментов \dot{M} в E -компонентах и удельной работы трения фрикционных муфт/тормозов осуществляется в соответствии со структурой динамической схемы.

Демпфирование

Внутреннее трение механической трансмиссии и связанных с ней систем можно рассматривать как частотно-независимое [5]. Основным параметром для описания демпфирования служит логарифмический декремент δ , который не зависит от частоты колебаний. Данные по этому коэффициенту приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Логарифмические декременты систем

Машинный агрегат в целом	0,45—0,95
Трансмиссия (в основном ведущий мост)	0,13—0,27
Рессора на выкручивание	1,15—2,45
Шины ведущих колес при кручении	0,30—0,64
Карданная передача	0,02—0,04
Коробка передач	0,06—0,14

При решении задач динамики необходимо рассчитывать конкретные значения коэффициентов демпфирования по формуле

$$K = \delta / (\pi E \omega), \quad (9)$$

где E — податливость подсистемы; ω — частота колебаний. Для установившихся колебаний ω — частота вынужденных колебаний, для неустановившихся колебаний — это преобладающая частота переходного процесса.

Система «колесо—масса машины»

Рассмотренные методы схематизации и решения уравнений динамики одинаково пригодны для вращательных и поступательных систем. Для естественного представления поступательных систем могут быть использованы элементы, приведенные в нижней части таблицы 2. Кроме того, можно моделировать комбинированные вращательно-поступательные регулярные системы.

Характерным случаем является подсистема «колесо—масса машины» (рис.1). В ней колесо представлено в двух упомянутых системах. Вращательное движение ведущего колеса через контакт шины с опорной поверхностью трансформируется в поступательное движение колеса и машины в целом за счет M -компонента «передача P » с параметром $u = 1/r$, где r — радиус, связывающий угловую скорость ω и линейную скорость v периферии колеса.

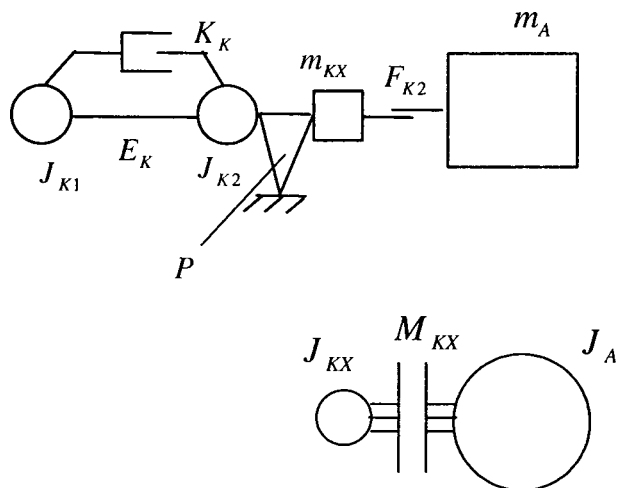


Рис. 1. Система «колесо — масса машины»

При цепных и кольцевых симметричных схемах поступательную часть можно заменить эквивалентной крутильной (вращательной) системой. Это показано в нижней части рис. 1. Однако это не всегда возможно. Например, при моделировании динамики таких объектов как полноприводные машины с различными радиусами передних и задних ведущих колес значения радиусов присутствуют в параметрах динамической схемы и соответственно в уравнениях. В таких случаях динамическая схема содержит необходимое число подсистем «колесо — масса машины», имеющих общую массу машины.

Описанные методики реализованы в виде расчетной основы пакетов программ, для расчета трансмиссий и связанных с ними систем. При практическом использовании пакетов пользователь только составляет (рисует с помощью меню) кинематическую или динамическую схему в зависимости от задачи и задает параметры. Меню включает описанные базовые компоненты, ряд специальных устройств (гидротрансформатор и др.) и внешних воздействий. В пакетах распознается структура системы, а затем ее уравнения генерируются автоматически.

Данное программное обеспечивает автоматизированное построение кинематических, динамических и компоновочных схем для трансмиссионных систем и проведение по ним разнообразных расчетов. Программное обеспечение для построения и расчета кинематических схем реализовано в двух видах. Первый основан на библиотеке распространенных типов передач и дифференциалов. Второй вид применяется, когда используются нестандартные передачи и дифференциалы. В этом случае используются универсальные обобщенные изображения, применяемые также при построении динамических схем. Компоновочные схемы позволяют проверить собираемость, определить силовые и массо-инерционные параметры, а также выполнить анимацию трансмиссионного узла.

Пакет «Кинематика»

Примеры применения пакета версии 2.0 (Kinematics 2.0) приведены в [1]. Пакет обладает интеллектуальными свойствами. Так, наряду с управлением процессом установки на схему элементы отслеживают свои изменения на схеме и соответственно изменяют свое поведение. Например, зубчатые колеса автоматически входят в зацепление, если оказываются на минимальном расстоянии друг от друга. То же относится и к муфтам, которые входят в зацепление с валами, если их совместить на схеме.

Как показывает практика, подобная организация процесса проектирования ускоряет работу и позволяет избежать ошибок в кинематической схеме при ее создании. Это ускоряет этап проектирования структуры кинематической схемы и освобождает конструктора от простых механических действий.

Такой подход несет еще один положительный момент: облегчается распознавание структуры кинематической схемы. Это используется при расчете ее параметров. Кроме того, анализ схемы, в которой изначально исключены ошибочные варианты зацепления, выполняется достаточно быстро и с наименьшими затратами.

Третья версия пакета Kinematics 3.0 основывается на предшествующих версиях, кроме того, в ней реализуется дополнительная функциональность.

Программа основывается на модульной архитектуре. Механизм организации элементов в схему отделен от главного приложения и может быть использован отдельно. Это дает возможность загружать схему, выполнять действия над элементами схемы и вычисления в любой другой программе. Единственное требование, чтобы внешняя программа была написана на технологии .NET.

Описанная выше модульная архитектура также позволяет выполнять наращивание функциональности программы при помощи дополнительных компонент. Они, после подключения к системе могут использовать все сервисы по работе со схемой. Данные компоненты-расширения могут быть написаны сторонними разработчиками, которые не имеют доступа к исходным кодам программы Kinematics 3.0.

Улучшен визуальный интерфейс. Теперь он реализован по технологии «плавающих окон».

Пакет «Динамика»

При построении динамической схем средствами пакета аналогично пакету «Kinematics» разработан набор «активных элементов», соответствующих базовым компонентам динамической схемы. Подобным образом был реализован механизм трансформации графической информации о динамической схеме в структурную. При добавлении элемента в схему происходит анализ его взаимодействий с другими элементами, автоматически устанавливаются связи и добавляются уравнения, описывающие поведение этого элемента, в математическую модель. Таким образом, создание математической модели (системы дифференциальных уравнений) сводится к точному построению (отрисовке) динамической схемы и заданию корректных параметров элементов системы. Рассмотрим пример динамической схемы, построенной с использованием таких элементов-блоков.

На рисунках 2 и 3 приведен пример перехода от механической модели объекта к его динамической схеме.

Представленная планетарная коробка передач состоит из нестандартных дифференциалов с совмещенными звеньями, однако это не является проблемой для создания динамической схемы и проведения расчетов средствами пакета «Динамика».

На рис. 4 показан общий вид динамической схемы системы «двигатель-трансмиссия-двигатель-масса машины», которую можно рекомендовать в качестве типовой для проведения динамических расчетов при трогании автомобиля и переключении передач.

Инерционные звенья: J_1 – двигатель; J_2 и J_3 – насосное и турбинное колеса гидротрансформатора (ТС); J_{10} , J_{12} – элементы привода ведущих колес. Упругие элементы: E_1 – повышающая передача и связанные с ней валы; E_2 – входной вал коробки передач; E_3 – элементы привода ведущих колес. Упругие элементы включают соответствующие демпфирующие звенья K_1, \dots, K_3 . Крутящие моменты: M_1 – момент двигателя; M_2 – моменты сил сопротивления движению машины, F_a – сила сопротивления приложенная к машине.

На рис. 5 показаны результаты моделирования процесса переключения передач (с первой на вторую передачу). При моделировании воспроизведены упругие моменты звеньев. Сплошной линией на рис. 5 показаны экспериментальные значения упругого момента в трансмиссии.

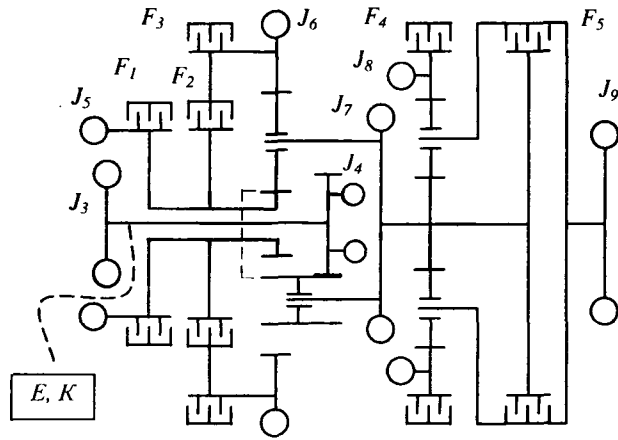


Рис. 2. Механическая модель планетарной коробки передач

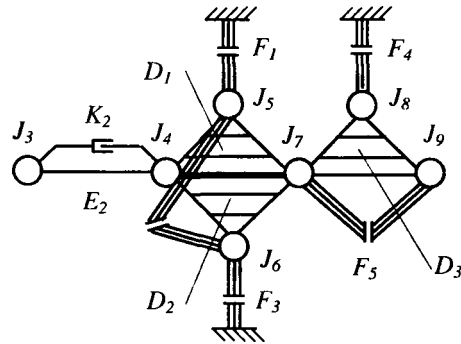


Рис. 3. Динамическая схема коробки передач по рис. 2 в пакете «Динамика»

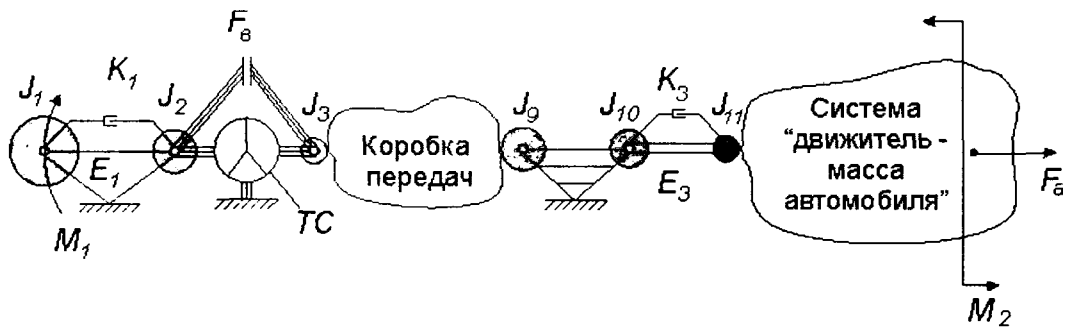


Рис. 4. Обобщенная динамическая схема колесной машины

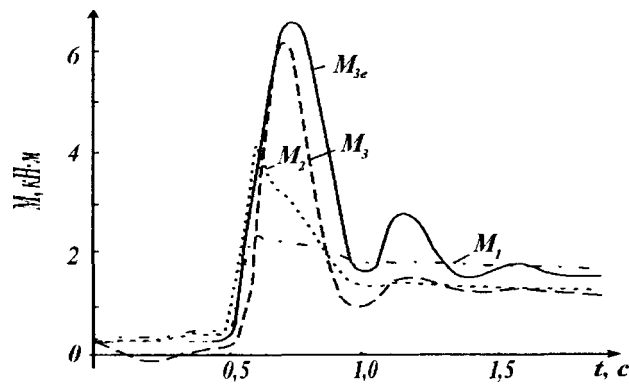


Рис. 5. Результаты расчетов (моменты упругих связей)

Как второй пример типового использования пакета «Динамика» можно привести исследование переходных процессов во время трогания и движения колесного трактора с буксованием движителя. Методика моделирования системы движитель-масса машины представлена вначале данной статьи. Общий вид динамической схемы приведен на рис. 6. Передние и задние колеса трактора отличаются размерами, упруго диссипативными и инерционными параметрами. Поэтому они по-разному представлены в динамической схеме: меньшая масса ($m_{кx1}$) соответствует передним колесам, а большая ($m_{кx2}$) – задним. Эти массы связаны с общей поступательно движущейся массой трактора m_a через фрикционные элементы. Масса J_1 соответствует приведенным массам двигателя и ведущих деталей сцепления, J_2 – массам ведомых деталей сцепления.

На рис. 6 и 7 представлены результаты моделирования для двух случаев. В первом линейные скорости периферии колес одинаковы (рис. 7), во втором – линейные скорости для передних колес выше – опережение на 5% (рис. 8). На рисунках 7 и 8 показаны ω_1 – угловая скорость масс двигателя J_1 , ω_2 – угловая скорость ведомых масс сцепления J_2 , V_a – линейная скорость массы трактора m_a .

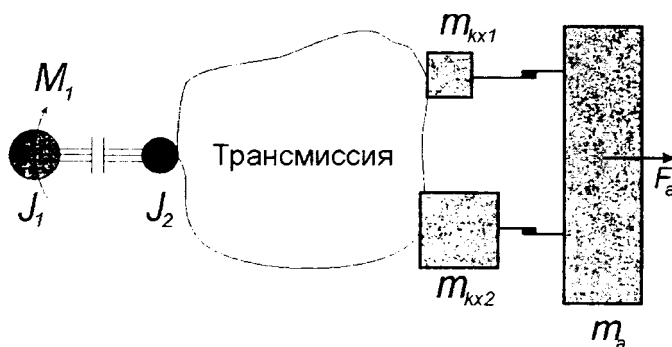


Рис. 6. Общий вид динамической схемы трактора с различными передними и задними ведущими колесами

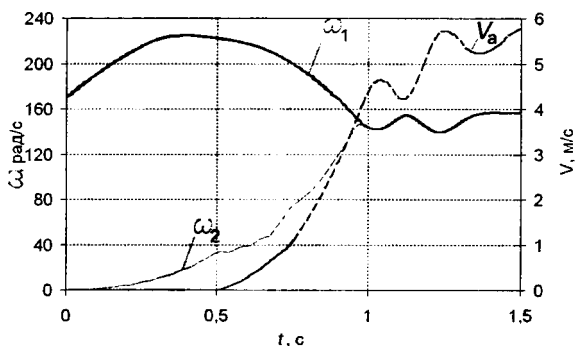


Рис. 7. Результаты расчетов без «опережения»

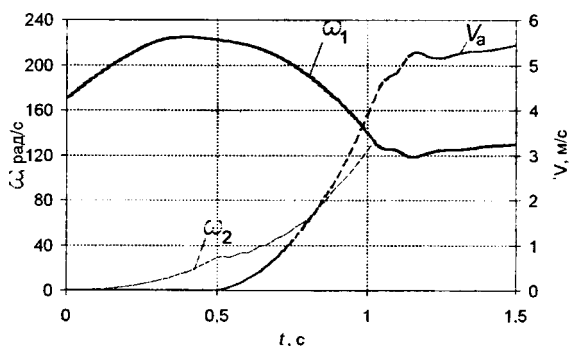


Рис. 8. Результаты расчетов с «опережением»

Для второго случая параметры системы соответствовали реально используемым передаточным отношениям для заднего и переднего моста трактора с рассогласованием линейных скоростей, когда линейная скорость передних колес на 5% превышает скорость задних колес. Видно, что второй случай, реально используемый в практике, лучше в динамическом отношении (колебаний в системе нет).

Пакет «Компоновка»

Компоновочная схема представляет собой продвинутый в пространственном отношении вариант кинематической схемы. Она позволяет описывать трансмиссионные узлы в пространстве. Также она позволяет воспроизвести и определить ряд параметров, необходимых для проведения специфических расчетов (например, сил в зацеплениях передач, реакций в

опорах). Кроме того, так как эта модель пространственная, она может использоваться в дальнейшем на более поздних этапах проектирования при построении трехмерной сборки трансмиссии.

Пакет «Компоновка» также позволяет проводить расчет массо-инерционных параметров механической системы, проверять соответствие геометрических параметров и пространственное расположение элементов трансмиссии, а также выполнять анимацию.

На рисунке 9 приведен вид рассмотренной выше планетарной коробки передач в пакете «Компоновка».

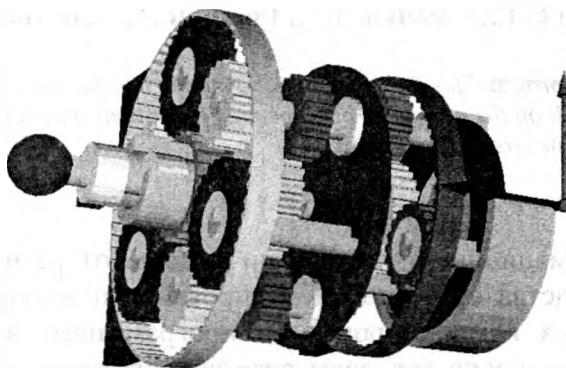


Рис. 9. Вид планетарной коробки передач (смотри рис. 1 и 2) в пакете «Компоновка»

Заключение

Разработанные методики и программные пакеты позволяют автоматизировать построение и расчеты трансмиссионных и связанных с ними систем, включая этап концептуального проектирования, оценить работоспособность, характеристики и свойства проектируемого объекта в том числе в условиях недостаточности исходных данных, автоматизировать рутинные процессы, оптимизировать параметры системы. Они широко используются при проектировании трансмиссий белорусского производства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кинематический, динамический и ресурсный расчеты в механике машин / В.Б. Альгин, О.В. Дробышевская, С.В. Ломоносов и др. // Теоретическая и прикладная механика, 2005. Вып. 19. — С. 42–50.
2. Kane M. and Levinson D. Dynamics Online: Theory and Implementation with Autolev™, 2000.
3. Mukherjee A. and Karmakar R. Modeling and Simulation of Engineering Systems Through Bondgraphs. CRC Press LLC, 2000.
4. Algin V.B., Drabyshevskaya O.V. Transmission Dynamics Based on Regular Dynamic Scheme // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. — Мн., УП «Технопринт», 2001. — С. 23–27.
5. Альгин В.Б. Динамика, надежность и ресурсное проектирование трансмиссий мобильных машин. — Мн.: Навука і тэхніка, 1995.

*Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
Белостокская Политехника (Технический университет), Белосток, Польша
Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь*

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ИНТЕРАКТИВНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Карпович С.Е., Скачко Д.Г., Голдын Л., Алехнович Г.Н.

The building of interactive program for the modeling of dynamic mechanical systems is considered. The modeling algorithm is proposed, it's built on the principles of segmented algorithms and step-by-step approximating calculation. The multimedia visualization program is presented.

Введение

Современные информационные технологии позволяют разрабатывать и эффективно применять различные средства обучения, моделирования и интерактивного исследования. Возможности персональных компьютеров и их программного обеспечения, существенно возросшие за последние несколько лет, дают возможность разрабатывать алгоритмы и программное обеспечение для всех областей техники, в том числе и для машиностроения.

Работа в этом направлении ведется в последние годы в учебно-научной лаборатории "Математическое моделирование технических систем и информационные технологии" (ММТСиИТ) БГУИР [1]. Анимация, интерактивность и средства мультимедиа, применяемые в наших разработках, позволили разработать программные средства – мультимедийные модули – для интерактивного исследования колебательных механических систем, пневматических элементов и систем и других технических объектов и систем [2...5].

Интерактивные мультимедийные модули разрабатываются как вполне законченные информационные страницы, содержащие запрограммированные математические алгоритмы физических законов или технических принципов. При этом алгоритм имитационного моделирования является сегментированным, то есть, каждый элемент, вводимый интерактивно на рабочее поле монитора, имеет алгоритмический интерфейс, согласованный с основным алгоритмом, описывающим объект визуализации. То же относится и к исключению элементов из рабочего поля. Исключенный элемент как сегмент алгоритма, не нарушает функциональность и достоверность расчета по основному алгоритму, обеспечивающему моделирование и визуализацию.

Мультимедийный модуль содержит графическую, интерактивную и описательную (текстовую) часть, которые обеспечивают возможность влиять на входные параметры и наблюдать за изменением выходных параметров в реальном времени, тем самым позволяя проводить интерактивное исследование и анализировать результаты.

В настоящей работе на основании разработанных компьютерных технологий решена задача интерактивного исследования динамических систем, для которых разработана программа интерактивной визуализации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу интерактивного исследования плоской колебательной системы, представляющей собой массу, подвешенную к нескольким пружинам. Такая колебательная система очень широко распространена в технике и может быть применена для моделирования механических систем, устройств и агрегатов.

Рассматривая массу как материальную точку и предполагая, что каждая пружина одним концом жестко связана с ней, а другим – с неподвижной опорой, получим систему, пример которой приведен на рис. 1.

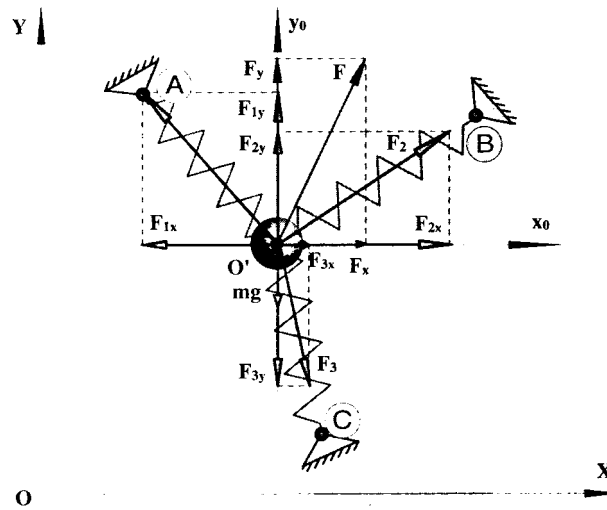


Рис. 1. Пример колебательной системы с 3 пружинами

Для удобства визуализации материальная точка на рис.1 изображена в виде шарика.

Чтобы описать динамику такой колебательной системы для случая нескольких пружин, на основании второго закона Ньютона запишем систему дифференциальных уравнений движения материальной точки [1]:

$$\begin{cases} m \frac{dV_x}{dt} = \sum X_i \\ m \frac{dV_y}{dt} = \sum Y_i \\ m \frac{dV_z}{dt} = \sum Z_i \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X_i \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum Y_i \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum Z_i \end{cases} \quad (1)$$

К сожалению, система дифференциальных уравнений (1) является нелинейной, что требует для ее решения использования численных методов.

2. Аппроксимационная модель динамической системы

Предположим, что материальная точка за небольшой промежуток времени совершает прямолинейное движение, тогда систему (1) можно аппроксимировать короткими перемещениями за равные интервалы времени, и построить итерационный алгоритм расчета положения материальной точки. Для этого необходимо дискретно от точки к точке с учётом параметра времени аналитически анализировать условия движения и равновесия.

Алгоритм аппроксимации может быть следующим. Направление перемещения материальной точки определяется направлением равнодействующей силы. За время Δt , равное кванту времени, материальная точка перейдёт в другое положение, в котором необходимо опять рассчитывать равнодействующую и затем визуализировать новое перемещение.

Рассмотрим формирование законов ускорения, скорости и перемещения, обусловленное таким подходом к описанию движения материальной точки [8].

Предположим, что материальная точка с координатами (0;0) не находится в положении равновесия и её начальная скорость \vec{V}_0 равна нулю. Рассмотрим движение материальной точки в интервале времени $[t_i, t_{i+1}] = 0,2$ с. Разобьем рассматриваемый интервал времени на

четыре части (кадра) длительностью $\Delta t = 0,05$ с и аппроксимируем его, предположив, что движение материальной точки на протяжении каждого кадра равнопеременное с ускорением a_{cp} . Формулы для расчета параметров движения представлены в следующей таблице.

кадр	время (t)	ускорение (a)	скорость (V)	перемещение (S)
1	$t_0 = 0,00$	$a_1 = \frac{F_0}{m}$	$V_0 = 0$	$S_0 = 0$
2	$t_1 = 0,05$	$a_2 = \frac{F_1}{m}$	$V_1 = a_1 \Delta t$	$S_1 = V_1 \Delta t$
3	$t_2 = 0,10$	$a_3 = \frac{F_2}{m}$	$V_2 = V_1 + a_2 \Delta t$	$S_2 = S_1 + V_2 \Delta t$
4	$t_3 = 0,15$	$a_4 = \frac{F_3}{m}$	$V_3 = V_2 + a_3 \Delta t$	$S_3 = S_2 + V_3 \Delta t$
	$t_4 = 0,20$	$a_5 = \frac{F_4}{m}$	$V_4 = V_3 + a_4 \Delta t$	$S_4 = S_3 + V_4 \Delta t$

Использование на каждом шаге формул как для равномерного движения, так и для равноускоренного обусловлено необходимостью кадрирования, так как значение скорости изменяется в начале кадра и остаётся постоянной в течение всего кадра, равного $\Delta t = 0,05$ с.

Законы движения, рассчитанные в соответствии с формулами, показаны на рис. 2.

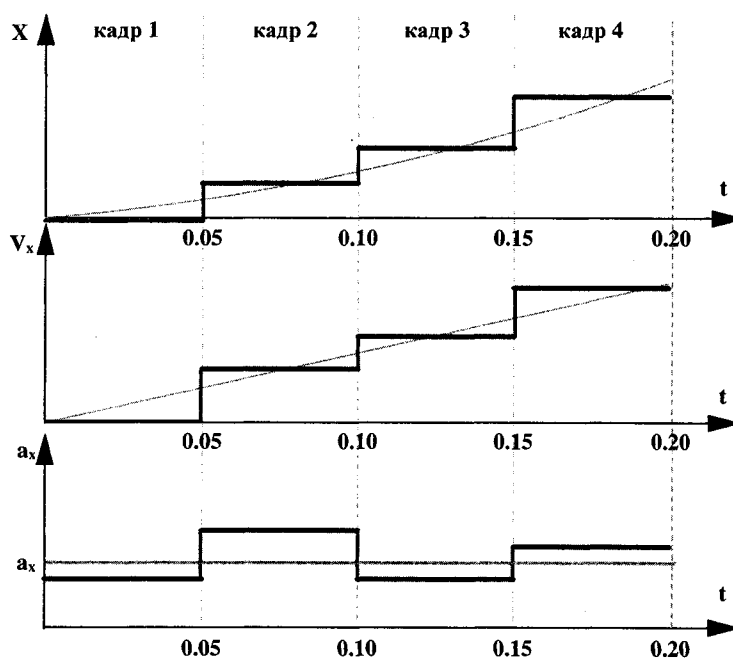


Рис. 2. Покадровое отображение движения материальной точки в интервале времени $[t_i, t_{i+1}] = 0,2$ с

3. Программа для интерактивного исследования

В соответствии с предложенным алгоритмом аппроксимации в лаборатории ММТСи-ИТ была разработана интерактивная мультимедийная программа "Динамика", вид окна которой представлен на рис. 3.

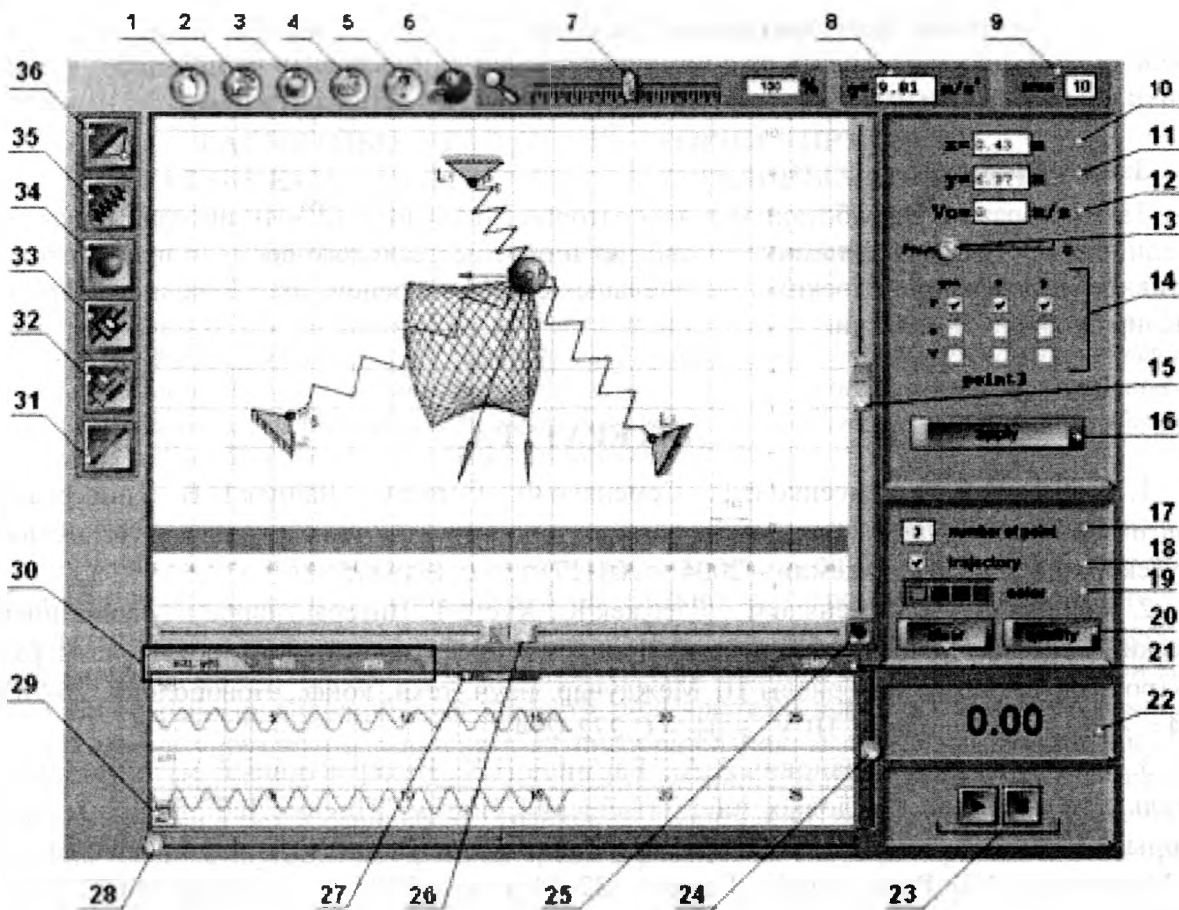


Рис. 3. Окно программы "Динамика" для интерактивного исследования динамических систем

Вначале пользователь производит сборку колебательной системы. Для этого с помощью кнопок 32...36 элементы добавляются на рабочее поле и соединяются между собой методом перетаскивания.

Начальные значения параметров каждого элемента задаются с помощью элементов 10...13. С помощью группы флажков 14 осуществляется настройка отображения векторов силы, скорости, ускорения и их проекций на оси координат. Также в программе можно изменять ускорение свободного падения с помощью элемента 8, что позволяет моделировать динамику системы даже в невесомости.

Элементы 17...20 предназначены для управления отображением траектории, причем пользователь может выбрать цвет для ее рисования. Программа позволяет получить траекторию перемещения материальной точки, изменить параметры системы (например, массу и коэффициенты упругости пружин) и построить новую траекторию, что позволяет на основе сравнения и анализа траекторий исследовать влияние параметров на динамику системы.

После запуска процесса моделирования с помощью группы элементов 23 программа "Динамика" в режиме реального времени рассчитывает положение материальной точки в соответствии с алгоритмом аппроксимации и визуализирует состояние системы. Интервалы моделирования при этом подобраны исходя из требования визуализации 25 кадров в секунду. Одновременно программа строит графики положения материальной точки в нижней части окна. Текущее время моделирования показывается в табло 22.

Управление отображением колебательной системы осуществляется с помощью элементов 7, 15, 26, а управление отображением графиков положения – с помощью элементов 24 и 28. Элемент 27 позволяет скрыть графики, если они не требуются для исследования.

Также программа позволяет сохранять конфигурацию динамической системы с помощью кнопки 3, восстанавливать ее с помощью кнопки 2, и выводить на принтер с помощью кнопки 4.

Заключение

Таким образом, разработанная в лаборатории ММТСиИТ БГУИР интерактивная мультимедийная программа "Динамика" позволяет в режиме реального времени проводить интерактивное исследование плоских колебательных систем на основе предложенного алгоритма моделирования их динамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович С.Е., Лысенко В.Г., Семеняко Ф., Сорко С., Дайняк И.В. Универсальная мультимедийная обучающая система для школ, техникумов и университетов // Известия Белорусской инженерной академии.– 2004. – №1(17)/1. – С.171–175.
2. Карпович С.Е., Семеняко Ф., Дзержек К., Хустё Т. Интерактивное изучение пневматических исполнительных элементов // Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств: Материалы III Междунар. науч.-техн. конф., Новополоцк, 26-28 мая 2004 г. – Т.2. – Новополоцк: ПГУ, 2004. – С.272–274.
3. Молодов Е.С., Агранович А.А., Бармина И.К. Интерактивный мультимедийный модуль для изучения цикловых пневматических систем "ПневмоЛаб" // Новые матем. методы и компьют. технологии в проектировании, производстве и научн. исследованиях: Материалы VII Респ. конф., Гомель, 22-24 марта 2004 г. – Гомель: ГГУ, 2004. – С.246–247.
4. Баев В.С., Литвинов Е.А., Скачко Д.Г. Мультимедийная интерактивная библиотека элементов по пневмоавтоматике // Новые матем. методы и компьют. технологии в проектировании, производстве и научн. исследованиях: Материалы VII Респ. конф., Гомель, 22-24 марта 2004 г. – Гомель: ГГУ, 2004. – С.233–234.
5. Дайняк И.В., Скачко Д.Г., Лобчук А.В., Литвинов Е.А., Баев В.С. Разработка интерактивных мультимедийных страниц для компьютерной обучающей системы // Проблемы проектирования и производства радиоэлектронных средств: Материалы III Междунар. науч.-техн. конф., Новополоцк, 26-28 мая 2004 г. – Т.2. – Новополоцк: ПГУ, 2004. – С.286–289.
6. Dainiak I., Karpovich S., Ahranovich A. Multimedia Interactive Representation of Course "Mechanics" // Scientific Proceedings. – Vol.2. – Aachen: Shaker Verlag, 2004. – p.511-515.
7. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1967. – 319 с.
8. Скачко Д.Г. Интерактивная визуализация линейных динамических систем с постоянными параметрами // Известия Белорусской инженерной академии, 2004. – №1(17)/4. – С.239-246.

**ФУНКЦИИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ДЛЯ ФОРМУЛИРОВКИ
РАСЧЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ**

Босяков С.М., Журавков М.А., Медведев Д.Г.

In the present article functions of the user developed are submitted on the basis of system Mathematica and intended for generation of parities of the equations of dynamic balance, the equation of deformations and the basic settlement equations isotropic environments in curvilinear orthogonal coordinates. Examples of application of functions for the formulation of the various settlement equations in the Cartesian, cylindrical and spherical systems of coordinates are resulted.

При изучении теории упругости зачастую возникает необходимость использования большого количества литературных источников (учебных пособий, монографий, научных и учебно-методических статей), что объясняется сложностью, громоздкостью соответствующих задач и разнообразием методов их решения [1]. Поэтому представляется целесообразным применение функциональных возможностей современных систем компьютерной математики для разработки функций, позволяющих пользователю задавать соотношения математической теории упругости и выполнять их преобразования. В настоящей работе представлены функции, разработанные на базе системы *Mathematica* и позволяющие формулировать уравнения динамического равновесия, уравнения деформаций, а также основные расчетные уравнения теории упругости изотропной среды в различных системах ортогональных криволинейных координат.

Дифференциальные уравнения движения, записанные в компонентах тензора напряжения в ортогональных криволинейных координатах, имеют следующий вид [1]:

$$\frac{\partial(H_h \Delta)}{\partial \alpha_h} + \sum_{v=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_v} \left(\frac{V_h \Delta g_h}{\sqrt{g_v g_h}} \right) - \frac{1}{2} \frac{V_v \Delta}{g_v} \frac{\partial g_v}{\partial \alpha_h} \right) +$$

$$+ H_h \Delta \sqrt{g_h} = \rho \Delta \sqrt{g_h} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}, \quad h = \overline{1,3},$$
(1)

где α_h - ортогональные криволинейные координаты (взаимно перпендикулярные поверхности), H_h, V_v - нормальные напряжения, V_h - касательные напряжения, $\Delta = \sqrt{g_1 g_2 g_3}$ - ко-

эффициент единицы объема, $g_h = \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha_h} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha_h} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \alpha_h} \right)^2$ - коэффициенты первой

квадратичной формы, u_h - перемещения в направлении криволинейных координат, ρ - плотность, H_h - массовая сила, отнесенная к единице объема в направлении координаты α_h .

С использованием уравнений (1) разработана функция `StressEquations` `[[$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$], {X,Y,Z}, opt]`, позволяющая записать уравнения динамического равновесия в любой системе ортогональных криволинейных координат. В качестве аргументов этой функции следует указать список обозначений `{ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ }` для криволинейных координат, а также список `{X,Y,Z}` выражений для первой квадратичной формы. В качестве необязательного входного параметра `opt` выступает опция `Notation`, указывающая на форму представления результата. В случае если `Notation` принимает значение `Functional` (значение, принятое по умолчанию), форма записи уравнений является функциональной (стандартная

форма записи выражений [2]); если Notation→Indicial, форма записи результата является индексированной. На рис. 1 приведены динамические уравнения равновесия в прямоугольной ($\alpha_1 = x, \alpha_2 = y, \alpha_3 = z$ и $X = x, Y = y, Z = z$) и сферической ($\alpha_1 = r, \alpha_2 = \beta, \alpha_3 = z$ и $X = r \cos \beta, Y = r \sin \beta, Z = z$) системах координат, полученные с помощью функции StressEquations (массовые силы здесь и далее обозначены F).

```

In[4]= StressEquations[{x, y, z}, {x, y, z}, Notation→Functional]

Out[4]= {F[x][x, y, z, t] + σ[1, 3]^(0,0,1,0)[x, y, z, t] + σ[1, 2]^(0,1,0,0)[x, y, z, t] +
σ[1, 1]^(1,0,0,0)[x, y, z, t] = ρ u[1]^(0,0,0,2)[x, y, z, t],
F[y][x, y, z, t] + σ[2, 3]^(0,0,1,0)[x, y, z, t] + σ[2, 2]^(0,1,0,0)[x, y, z, t] +
σ[1, 2]^(1,0,0,0)[x, y, z, t] = ρ u[2]^(0,0,0,2)[x, y, z, t],
F[z][x, y, z, t] + σ[3, 3]^(0,0,1,0)[x, y, z, t] + σ[2, 3]^(0,1,0,0)[x, y, z, t] +
σ[1, 3]^(1,0,0,0)[x, y, z, t] = ρ u[3]^(0,0,0,2)[x, y, z, t]}

In[5]= StressEquations[{r, β, z}, {r Cos[β], r Sin[β], z}, Notation→Indicial] //
TableForm

Out[5]/TableForm=
r F_r + σ_11 + σ_22 + r σ_11,r + σ_12,β + r σ_13,z = r ρ u_1,tt
r (r F_β + 2 σ_12 + r σ_12,r + σ_22,β + r σ_23,z) = r^2 ρ u_2,tt
r F_z + σ_13 + r σ_13,r + σ_23,β + r σ_33,z = r ρ u_3,tt
  
```

Рис. 1. Результаты применения функции StressEquations

Для формулировки компонент тензора деформаций, объемного расширения и компонент элементарного вращения в криволинейных ортогональных координатах разработаны функции StrainComponents, Expansion и RotationComponents соответственно. При этом использованы следующие определяющие соотношения [1]:

$$e_{hh} = \frac{1}{\sqrt{g_h}} \frac{\partial u_h}{\partial \alpha_h} + \sum_{v=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g_h g_v}} \frac{\partial \sqrt{g_h}}{\partial \alpha_v} u_v,$$

$$e_{hv} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{g_h}{g_v}} \frac{\partial}{\partial \alpha_v} \left(\frac{u_h}{\sqrt{g_h}} \right) + \sqrt{\frac{g_v}{g_h}} \frac{\partial}{\partial \alpha_h} \left(\frac{u_v}{\sqrt{g_v}} \right) \right),$$

$$\theta = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\sqrt{g_2 g_3} u_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\sqrt{g_1 g_3} u_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\sqrt{g_1 g_2} u_3) \right),$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{g_2 g_3}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\sqrt{g_3} u_3) - \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\sqrt{g_2} u_2) \right),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2\sqrt{g_1 g_3}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\sqrt{g_1} u_1) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\sqrt{g_3} u_3) \right),$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2\sqrt{g_1 g_2}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\sqrt{g_2} u_2) - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\sqrt{g_1} u_1) \right).$$

Здесь e_{hh}, e_{hv} - компоненты тензора деформаций, θ - объемное расширение, ω_h - компоненты объемного вращения, $h, v = \overline{1,3}$.

На рис. 2 приведены компоненты тензора деформаций и компоненты объемного вращения, записанные в сферической системе координат ($\alpha_1 = r, \alpha_2 = \alpha, \alpha_3 = \beta$ и $X = r \cos \alpha \sin \beta, Y = r \sin \alpha \sin \beta, Z = r \cos \beta$) с помощью функций `StrainComponents` и `RotationComponents` соответственно.

```

In[13]= StrainComponents[{r, alpha, beta},
  {r Cos[alpha] Sin[beta], r Sin[alpha] Sin[beta], r Cos[beta]}, Notation -> Indicial]

Out[13]= {epsilon_11 -> u_{1,r}, epsilon_22 -> (u_1 + Cot[beta] u_3 + Csc[beta] u_{2,alpha})/r,
  epsilon_33 -> (u_1 + u_{3,beta})/r, epsilon_12 -> (-u_2 + Csc[beta] u_{1,alpha} + r u_{2,r})/(2 r),
  epsilon_13 -> (-u_3 + u_{1,beta} + r u_{3,r})/(2 r), epsilon_23 -> (-Cot[beta] u_2 + u_{2,beta} + Csc[beta] u_{3,alpha})/(2 r)}

In[12]= RotationComponents[{r, alpha, beta},
  {r Cos[alpha] Sin[beta], r Sin[alpha] Sin[beta], r Cos[beta]}]

Out[12]= {omega[1][r, alpha, beta, t] ->
  -1/(2 r) (Cot[beta] u[2][r, alpha, beta, t] + u[2]^{(0,0,1,0)}[r, alpha, beta, t] -
  Csc[beta] u[3]^{(0,1,0,0)}[r, alpha, beta, t]),
  omega[2][r, alpha, beta, t] -> -1/(2 r) (u[3][r, alpha, beta, t] -
  u[1]^{(0,0,1,0)}[r, alpha, beta, t] + r u[3]^{(1,0,0,0)}[r, alpha, beta, t]),
  omega[3][r, alpha, beta, t] -> 1/(2 r^2) (Csc[beta] (u[2][r, alpha, beta, t] -
  Csc[beta] u[1]^{(0,1,0,0)}[r, alpha, beta, t] + r u[2]^{(1,0,0,0)}[r, alpha, beta, t]))}
  
```

Рис. 2. Результаты применения функций `StrainComponents` и `RotationComponents`

Отметим, что входными параметрами этих функций, так же как и в случае функции `StressEquations`, являются списки $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\{X, Y, Z\}$ и опция `Notation`.

Для формулировки основных уравнений теории упругости, в частности обратной формы закона Гука и дифференциальных уравнений движения в перемещениях, разработаны функции `StressComponents` и `EquationsOfDisplacements` соответственно (аргументы этих функций имеют тот же вид, что и у функций описанные выше). При их создании применены следующие выражения [1]:

$$H_h = \lambda\theta + 2Ge_{hh}, H_v = 2Ge_{hv},$$

$$(\lambda + 2G) \sqrt{\frac{1}{g_1}} \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} - \frac{G\omega_1}{4} + H_1 = \rho\Delta \sqrt{\frac{g_1}{g_2g_3}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$(\lambda + 2G) \sqrt{\frac{1}{g_2}} \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2} - \frac{G\omega_2}{4} + H_2 = \rho\Delta \sqrt{\frac{g_2}{g_1g_3}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$(\lambda + 2G) \sqrt{\frac{1}{g_3}} \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_3} - \frac{G\omega_4}{4} + H_3 = \rho\Delta \sqrt{\frac{g_3}{g_1g_2}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

где λ - константа Ламе, G - модуль сдвига.

Использование функции `EquationsOfDisplacements` для генерации системы уравнений движения в случае прямоугольных координат продемонстрировано на рис. 3.

```

In[12]:= EquationsOfDisplacements[{x, y, z}, {x, y, z},
  Notation -> Indicinal] // Simplify

Out[12]:= {F_x + (2 G + lambda) u_{1,xx} + G u_{1,yy} + G u_{1,zz} +
  G u_{2,xy} + lambda u_{2,xy} + G u_{3,xz} + lambda u_{3,xz} == rho u_{1,tt},
  F_y + (G + lambda) u_{1,xy} + G u_{2,xx} + 2 G u_{2,yy} + lambda u_{2,yy} +
  G u_{2,zz} + G u_{3,yz} + lambda u_{3,yz} == rho u_{2,tt},
  F_z + (G + lambda) u_{1,xz} + G u_{2,yz} + lambda u_{2,yz} + G u_{3,xx} +
  G u_{3,yy} + 2 G u_{3,zz} + lambda u_{3,zz} == rho u_{3,tt}}

```

Рис. 3. Результат применения функции `EquationsOfDisplacements`

Из рисунков 1 - 3 видно, что каждая из переменных является функцией криволинейных ортогональных координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и времени t , что позволяет использовать результаты выше описанных собственных функции в различных преобразованиях, связанных с дифференцированием, интегрированием и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рекач В.Г. Руководство к решению задач теории упругости. - М.: Высш. школа, 1977. - 216 с.
2. Wolfram, St. The Mathematica Book. Fourth Edition. - Cambridge : Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999. - 1470 pp.

О ПРОГНОЗИРОВАНИИ РЕСУРСА АКТИВНЫХ ЗОН ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ НА СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Куликов И.С.

В современной технике понятие предельного состояния, соответствующего исчерпанию ресурса элемента или всей конструкции в целом рассматривается по-разному. Это может быть снижение показателей безопасности, экономическая нецелесообразность эксплуатации объекта, несоответствие шагнувшей вперед технологии (моральный износ) и т.д.

Ресурс и срок службы, характеризующие долговечность, являются основными понятиями теории надежности. В простейших случаях, когда объект эксплуатируют до первого отказа, тождественному предельному состоянию, безотказность работы объекта одновременно является критерием его долговечности. В реальности мы чаще сталкиваемся с более общим случаем, когда после определенного периода работы конструкции интенсивность отказов снижена до минимума, а система технического обслуживания гарантирует предупреждение возможных отказов. В таком случае основными понятиями становятся предельное состояние и ресурс.

Более подробные сведения об этом можно найти в монографии [1].

Рассмотрим данную проблему применительно к ресурсу активных зон ядерных реакторов по признаку радиационной безопасности.

Предположим, что в процессе эксплуатации ядерного реактора в оболочках тепловыделяющих элементов (ТВЭЛОВ) накапливаются повреждения (мгновенные пластические деформации, деформации тепловой и радиационной ползучести, усталостного повреждения, коррозия и т.д.). Практика показывает, что отказ одного или нескольких ТВЭЛОВ не приводит к отказу всей тепловыделяющей сборки, а тем более активной зоны в целом при нормальной работе реактора. Допустимо также предположение о том, что разгерметизация оболочки одного ТВЭЛА не влияет на условия работы других ТВЭЛОВ в смысле их механической целостности. Будем считать, что дальнейшая эксплуатация реактора (по условиям радиационной безопасности и здоровья обслуживающего персонала) становится невозможной только тогда, когда число разгерметизированных ТВЭЛОВ достигнет некоторого критического значения N_k .

Пусть по результатам дореакторных и внутриреакторных испытаний ТВЭЛОВ на долговечность получены данные об их эксплуатационной надежности. Обозначим полученную на основании этих испытаний априорную вероятность безотказной работы ТВЭЛА $P_o(t)$, общее число ТВЭЛОВ в активной зоне – N , число отказавших ТВЭЛОВ n .

Вероятность того, что к моменту времени t среди N ТВЭЛОВ разгерметизируется не более n определим приближенно по схеме Бернулли

$$P_N^n = \sum_{k=0}^n C_N^k [1 - P_o(t)]^k P_o(t)^{N-k} \quad (1)$$

где C_N^k - биномиальные коэффициенты $\left(C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!} \right)$.

Учитывая, что число N достаточно велико, а число n – не слишком мало, распределение разгерметизированных твэлов с достаточной точностью будет соответствовать нормальному закону.

Обозначим плотность вероятности через $P(n, t)$, $n(t)$ – вычисляется по эмпирической зависимости. Тогда

$$P(n, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D[n(t)]}} \exp\left\{-\frac{n - E[n(t)]}{2D[n(t)]}\right\} \quad (2)$$

где $E[n(t)]$ - математическое ожидание,

$D[n(t)]$ - дисперсия:

$$\begin{aligned} E[n(t)] &= N[1 - P_0(t)] \\ D[n(t)] &= N[1 - P_0(t)]P_0(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Вероятность нормальной работы активной зоны определим как вероятность случайного процесса.

$$R(t) = P\{n(t) < N_k\} \quad (4)$$

Используя нормальное распределение плотности вероятности (2) для значений процесса $n(t)$, найдем приближенно

$$R(t) = \Phi\left\{\frac{N_k - N[1 - P_0(t)]}{\sqrt{NP_0(t)[1 - P_0(t)]}}\right\} \quad (5)$$

Где $\Phi(x)$ – нормированная функция распределения Гаусса

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right) dZ \quad (6)$$

Из соотношения (5) следует, что функция распределения ресурса активной зоны $F(t)$ будет иметь вид

$$F(t) = 1 - R(t) \quad (7)$$

Учитывая данные по вероятности выхода из строя твэлов [2], можно принять с некоторым запасом в первом приближении вероятность нормальной работы каждого твэла.

$$P_0(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{t_k}\right)^v\right] \quad (8)$$

Тогда получим вероятность разгерметизации твэла

$$P_p(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{t_k}\right)^v\right] \quad (9)$$

где t_k - время кампании реактора,

v – определяется на основе дореакторных и внутриреакторных испытаний.

На основе имеющихся эксплуатационных данных для быстрых реакторов типа БН v можно принять равным 6,5.

Результаты расчетов вероятности разгерметизации твэла для v , равным 6,5 представлены на рис. 1.

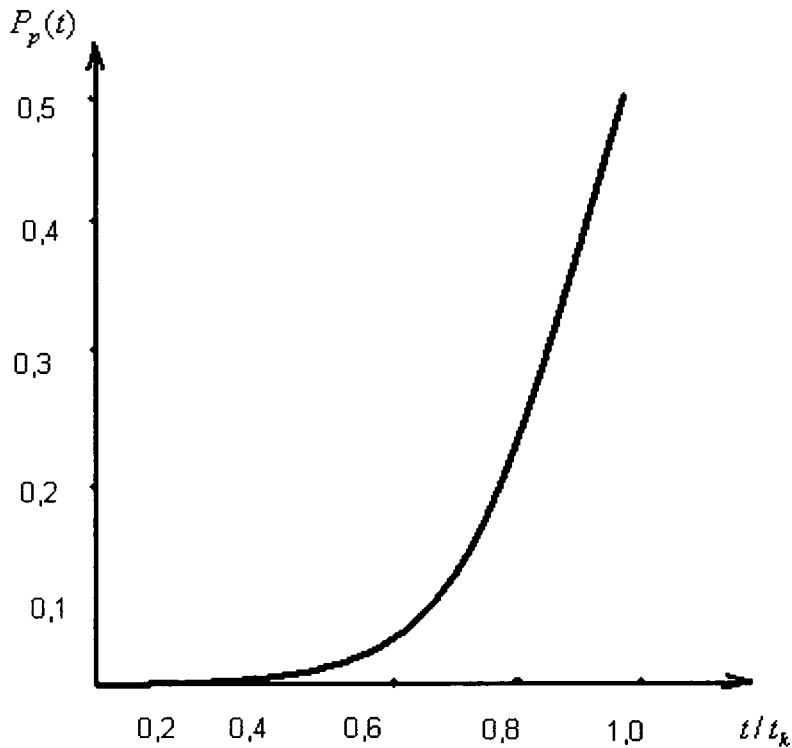


Рис. 1. Вероятность разгерметизации одного твэла с течением времени.

Такой подход является весьма упрощенным, однако эти данные могут быть использованы при построении функции $R(t)$.

Рассмотрим более общий случай, предполагая, что выход из строя одного или нескольких твэлов увеличивает нагрузку на другие элементы.

Введем меру повреждения $\omega(t)$. В качестве повреждения элемента можно рассматривать накопленные материалом оболочки твэла остаточные механические деформации (мгновенные пластические деформации ползучести, усталостные и коррозионные повреждения). Изменение меры повреждения происходит таким образом, что $\omega = 0$ в начальный момент ($t = 0$), а при разгерметизации твэла $\omega = 1$.

Предположим, что мера повреждения удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\omega}{dt} = f[x(t), n(t), \varphi] \quad (10)$$

где $x(t)$ - случайный процесс нагружения; $n(t)$ - число тепловыделяющих элементов, разгерметизированных к моменту времени t , φ - случайная величина, характеризующая свойства элемента.

Тогда вероятность безотказной работы твэла определим как вероятность случайного события, состоящего в том, что в момент времени t будет выполнено неравенство

$$\int_0^t f[x(t'), n(t'), \varphi] dt' < 1 \quad (11)$$

Учитывая большое количество твэлов в активной зоне ядерного реактора, можно принять, что изменчивость случайного процесса $n(t)$ достаточно мала по сравнению с изменчивостью случайной величины φ . Тогда можно записать

$$P_0(t) = P\left\{\int_0^t f[x(t'), NP_0(t'), \varphi] dt' < 1\right\} \quad (12)$$

Таким образом, в данном случае мы имеем интегральное уравнение относительно вероятности нормальной работы твэла $P_0(t)$ в предположении, что функция распределения случайной величины φ известна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. – 312с.
2. Лихачев Ю.И. и др. Оценка вероятности разгерметизации оболочки стержневого твэла, имеющей начальные трещины. Препринт ФЭИ – 900, 1979.– 21с.

БИОМЕХАНИКА ОДНООПОРНОГО ПРОТЕЗА

Крушевский А. Е.

1. Представление модели опорных корней протеза в виде составного эллиптического гиперboloида, произвольно ориентированного в пространстве. Как известно, корни зубов могут отклоняться в ту или иную сторону от вертикали. Кроме того, плоскость симметрии каждого вертикального корня также наклонена под различными углами по отношению к основной вертикальной плоскости симметрии человеческого тела. Обозначим угол наклона плоскости симметрии вертикального корня к основной плоскости симметрии тела через α . Угол поворота корня зуба вокруг горизонтальной оси, лежащей в плоскости симметрии зуба обозначим через β . Наконец, угол поворота вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости симметрии зуба, обозначим через δ . Итак, определяем положение корня зуба по отношению к системе координат x, y, z , жестко связанной с основной плоскостью симметрии тела, тремя координатами x_0, y_0, z_0 начала локальной координатной системы x^*, y^*, z^* , жестко связанной с определенным корнем зуба, и тремя углами поворота локальной системы (α, β, δ).

Переход от основной системы координат x, y, z к локальной x^*, y^*, z^* осуществляем перемножением матриц.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \cos \delta, 0, -\sin \delta \\ 0, 1, 0 \\ \sin \delta, 0, \cos \delta \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, \cos \beta, \sin \beta \\ 0, -\sin \beta, \cos \beta \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} \cos \alpha, \sin \alpha, 0 \\ -\sin \alpha, \cos \alpha, 0 \\ 0, 0, 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \right] \right] = \\ &= \begin{Bmatrix} \cos \delta, 0, -\sin \delta \\ 0, 1, 0 \\ \sin \delta, 0, \cos \delta \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, \cos \beta, \sin \beta \\ 0, -\sin \beta, \cos \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z \end{Bmatrix} \right] = \\ &= \begin{Bmatrix} \cos \delta, 0, -\sin \delta \\ 0, 1, 0 \\ \sin \delta, 0, \cos \delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \cos \beta + z \sin \beta \\ -(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \sin \beta + z \cos \beta \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \cos \delta + (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \sin \beta \sin \delta - z \cos \beta \sin \delta \\ (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \cos \beta + z \sin \beta \\ (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \sin \delta - (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \sin \beta \cos \delta + z \cos \beta \cos \delta \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Окончательно формулы перехода с учетом переноса начала координат запишутся:

$$\begin{aligned} x^* &= (x - x_0)(\cos \alpha \cos \delta - \sin \alpha \sin \beta \sin \delta) + (y - y_0)(\sin \alpha \cos \delta + \cos \alpha \cos \beta \sin \delta) - (z - z_0) \cos \beta \sin \delta, \\ y^* &= -(x - x_0) \sin \alpha \cos \beta + (y - y_0) \cos \alpha \cos \beta + (z - z_0) \sin \beta, \\ z^* &= (x - x_0)(\cos \alpha \sin \delta + \sin \alpha \sin \beta \cos \delta) + (y - y_0)(\sin \alpha \sin \delta - \cos \alpha \sin \beta \cos \delta) + (z - z_0) \cos \beta \cos \delta. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнение поверхности эллиптического гиперboloида в локальных координатах записывается в форме [1].

$$F = z^* - H \sqrt{\left(\frac{x^*}{a_k}\right)^2 + \left(\frac{y^*}{b}\right)^2} + d^2 = 0.$$

Следовательно, чтобы получить уравнение поверхности эллиптического гиперboloида в основных координатах x, y, z нужно заменить x^*, y^*, z^* по формулам перехода (1).

2. Вычисление интегралов при задании формы опорных корней протеза в виде составного эллиптического гиперboloида. Для вычисления интегралов нам понадобятся сначала частные производные от функции $F(x, y, z)$. Поскольку будем вычислять интегралы в обобщенных цилиндрических локальных координатах $x^* = \alpha_k r \cos \theta, y^* = b r \sin \theta,$

$z^* = H\sqrt{r^2 + d^2}$, то производные запишем в цилиндрических координатах.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos \alpha \sin \delta + \sin \alpha \sin \beta \cos \delta - \frac{Hr}{\sqrt{r^2 + d^2}} \left[\frac{(\cos \alpha \cos \delta - \sin \alpha \cos \beta \sin \delta) \cos \theta}{\alpha_k} - \frac{\sin \alpha \cos \beta \sin \theta}{b} \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin \alpha \sin \delta - \cos \alpha \sin \beta \cos \delta - \frac{Hr}{\sqrt{r^2 + d^2}} \left[\frac{(\sin \alpha \cos \delta + \cos \alpha \cos \beta \sin \delta) \cos \theta}{\alpha_k} + \frac{\cos \alpha \cos \beta \sin \theta}{b} \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \cos \beta \cos \delta - \frac{Hr}{\sqrt{r^2 + d^2}} \left[\frac{-\cos \beta \sin \delta \cos \theta}{\alpha_k} + \frac{\sin \beta \sin \theta}{b} \right].$$

Итак, нам нужно вычислить следующие 54 интеграла:

$$\begin{aligned} & \int_s \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s x \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s y \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s z \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{ds}{\Delta}, \\ & \int_s x \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s y \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s z \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s x \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s y \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s z \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \\ & \int_s \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s x \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s x \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s x \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \\ & \int_s y \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s y \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s y \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s z \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s z \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s z \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \\ & \int_s x^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s x^2 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s x^2 \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s y^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s y^2 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s y^2 \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \\ & \int_s z^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s z^2 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s z^2 \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s xy \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s xy \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s xy \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \\ & \int_s xz \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s xz \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s xz \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s yz \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s yz \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s yz \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{ds}{\Delta}, \\ & \int_s xy \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s xy \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s xy \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s xz \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s xz \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s xz \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \\ & \int_s yz \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s yz \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s yz \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s x^2 \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s y^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta}, \quad \int_s z^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{ds}{\Delta}. \end{aligned}$$

Следует заметить, что для вычисления координат центров сопротивления нужны первые 24 интеграла, а для вычисления коэффициентов уравнений равновесия – все 54. Ввиду того, что интегралы вычисляются в локальных координатах, а некоторые подынтегральные выражения содержат основные глобальные координаты x, y, z , то следует получить формулы перехода от координат x^*, y^*, z^* к координатам x, y, z . Это можно осуществить либо перемножением соответствующих матриц, либо разрешить формулы (1) относительно координат x, y, z . Выполним переход путем перемножения матриц поворотов.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{cases} &= \begin{cases} \cos \alpha, -\sin \alpha, 0 \\ \sin \alpha, \cos \alpha, 0 \\ 0, 0, 1 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos \beta, & -\sin \beta \\ 0, & \sin \beta, & \cos \beta \end{matrix} \right] \left(\begin{cases} \cos \delta, 0, \sin \delta \\ 0, 1, 0 \\ -\sin \delta, 0, \cos \delta \end{cases} \begin{cases} x^* \\ y^* \\ z^* \end{cases} \right) \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \cos \alpha, -\sin \alpha, 0 \\ \sin \alpha, \cos \alpha, 0 \\ 0, 0, 1 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos \beta, & -\sin \beta \\ 0, & \sin \beta, & \cos \beta \end{matrix} \right] \begin{cases} x^* \cos \delta + z^* \sin \delta \\ y^* \\ -x^* \sin \delta + z^* \cos \delta \end{cases} \end{cases} = \begin{cases} \cos \alpha, -\sin \alpha, 0 \\ \sin \alpha, \cos \alpha, 0 \\ 0, 0, 1 \end{cases} \\
&\begin{cases} x^* \cos \delta + z^* \sin \delta \\ y^* \cos \beta - (-x^* \sin \delta + z^* \cos \delta) \cos \beta \\ y^* \sin \beta + (-x^* \sin \delta + z^* \cos \delta) \cos \beta \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (x^* \cos \delta + z^* \sin \delta) \cos \alpha - \sin \alpha [y^* \cos \beta - (-x^* \sin \delta + z^* \cos \delta) \sin \beta] \\ (x^* \cos \delta + z^* \sin \delta) \sin \alpha + [y^* \cos \beta - (-x^* \sin \delta + z^* \cos \delta) \sin \beta] \cos \alpha \\ y^* \sin \beta + (-x^* \sin \delta + z^* \cos \delta) \cos \beta. \end{cases}
\end{aligned}$$

Итак, формулы перехода

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + x^* (\cos \alpha \cos \delta - \sin \alpha \sin \beta \sin \delta) - y^* \sin \alpha \cos \beta + z^* (\cos \alpha \sin \delta + \sin \alpha \sin \beta \cos \delta), \\
y &= y_0 + x^* (\sin \alpha \cos \delta + \cos \alpha \sin \beta \sin \delta) + y^* \cos \alpha \cos \beta + z^* (\sin \alpha \sin \delta - \cos \alpha \sin \beta \cos \delta), \\
z &= z_0 - x^* \cos \beta \sin \delta + y^* \sin \beta + z^* \cos \beta \cos \delta.
\end{aligned}$$

Прежде, чем перейти к вычислению интегралов в целях компактной записи, введем обозначения коэффициентов в формулах преобразования координат.

$$\begin{aligned}
x^* &= \alpha_x (x - x_0) + \alpha_y (y - y_0) + \alpha_z (z - z_0), \\
y^* &= \beta_x (x - x_0) + \beta_y (y - y_0) + \beta_z (z - z_0), \\
z^* &= \gamma_x (x - x_0) + \gamma_y (y - y_0) + \gamma_z (z - z_0), \text{ где} \\
\alpha_x &= \cos \alpha \cos \delta - \sin \alpha \sin \beta \sin \delta, \quad \alpha_y = \sin \alpha \cos \delta + \cos \alpha \sin \beta \sin \delta, \quad \alpha_z = -\cos \beta \sin \delta, \\
\beta_x &= -\sin \alpha \cos \beta, \quad \beta_y = \cos \alpha \cos \beta, \quad \beta_z = \sin \beta, \\
\gamma_x &= \cos \alpha \sin \delta + \sin \alpha \sin \beta \cos \delta, \quad \gamma_y = \sin \alpha \sin \delta - \cos \alpha \sin \beta \cos \delta, \quad \gamma_z = \cos \beta \cos \delta.
\end{aligned}$$

Формулы перехода координат x^*, y^*, z^* к координатам x, y, z в этих обозначениях запишутся соответственно:

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + x^* \alpha_x + y^* \beta_x + z^* \gamma_x, \\
y &= y_0 + x^* \alpha_y + y^* \beta_y + z^* \gamma_y, \\
z &= z_0 + x^* \alpha_z + y^* \beta_z + z^* \gamma_z.
\end{aligned}$$

Производные $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ в новых обозначениях запишутся

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \gamma_x - \frac{Hr}{\sqrt{r^2 + d^2}} \left(\frac{\alpha_x \cos \theta}{a_k} + \frac{\beta_x \sin \theta}{b} \right), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \gamma_y - \frac{Hr}{\sqrt{r^2 + d^2}} \left(\frac{\alpha_y \cos \theta}{a_k} + \frac{\beta_y \sin \theta}{b} \right), \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \gamma_z - \frac{Hr}{\sqrt{r^2 + d^2}} \left(\frac{\alpha_z \cos \theta}{a_k} + \frac{\beta_z \sin \theta}{b} \right).
\end{aligned}$$

Фактически все 54 поверхностные интегралы представляют комбинацию следующих простейших однократных определенных интегралов.

$$J_0 = \int_0^{\sqrt{1-d^2}} r dr = \frac{1-d^2}{2}, \quad J_1 = \int_0^{\sqrt{1-d^2}} r \sqrt{r^2 + d^2} dr = \frac{1-d^3}{3},$$

$$J_2 = \int_0^{\sqrt{1-d^2}} r(r^2 + d^2) dr = \frac{1-d^4}{4}, \quad J_3 = \int_0^{\sqrt{1-d^2}} r^3 dr = \frac{(1-d^2)^2}{4},$$

$$J_4 = \int_0^{\sqrt{1-d^2}} r^2 dr = \frac{(1-d^2)^{3/2}}{3}, \quad J_5 = \int_0^{\sqrt{1-d^2}} \frac{r^3 dr}{\sqrt{r^2 + d^2}} = \frac{1}{3}(1-3d^2 + 2d^3),$$

$$J_6 = \int_0^{\sqrt{1-d^2}} \frac{r^3 dr}{r^2 + d^2} = \frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln d,$$

$$J_7 = \int_0^{\sqrt{1-d^2}} \frac{r^4 dr}{r^2 + d^2} = \frac{(1-d^2)^{3/2}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d},$$

$$J_8 = \int_0^{\sqrt{1-d^2}} \frac{r^4 dr}{\sqrt{r^2 + d^2}} = \frac{(1-d^2)^{3/2}}{4} - \frac{3d^2}{8} \sqrt{1-d^2} + \frac{3}{8} d^4 \ln \frac{1 + \sqrt{1-d^2}}{d},$$

$$J_9 = \int_0^{\sqrt{1-d^2}} \frac{r^5 dr}{r^2 + d^2} = \frac{(1-d^2)^2}{4} - \frac{d^2(1-d^2)}{2} - d^4 \ln d,$$

$$J_{10} = \int_0^{\sqrt{1-d^2}} r^2 \sqrt{r^2 + d^2} dr = \frac{(1-d^2)^{3/2}}{4} + \frac{d^2}{8} \sqrt{1-d^2} - \frac{d^4}{8} \ln \frac{1 + \sqrt{1-d^2}}{d}.$$

Однако нам нет необходимости вычислять и выписывать все 54 интеграла. Достаточно вычислить лишь три типа интегралов. Остальные получаются в результате перестановки индексов.

Первый тип интегралов:

$$J_{ij} = \int \frac{\partial F}{\partial i} \frac{\partial F}{\partial j} \frac{ds}{\Delta} = \pi(a_1 + a_2) b \left[\gamma_i \gamma_j J_0 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\alpha_i \alpha_j}{a_1 a_2} + \frac{\beta_i \beta_j}{b^2} \right) J_6 \right],$$

Второй тип интегралов:

$$J_{ijp} = \int \frac{\partial F}{\partial i} \frac{\partial F}{\partial j} p \frac{ds}{\Delta} = \pi(a_1 + a_2) b \left\{ \frac{2}{\pi} \alpha_p \gamma_i \gamma_j (a_1 - a_2) J_4 + \frac{2}{3\pi b^2} (a_1 - a_2) H^2 J_7 - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_p}{2} (\gamma_i \alpha_j + \gamma_j \alpha_i) H J_5 - \frac{\beta_p}{2} (\gamma_i \beta_j + \gamma_j \beta_i) H J_5 + \gamma_i \gamma_j \gamma_p H J_1 + \frac{\gamma_p}{2} \left(\frac{\alpha_i \alpha_j}{a_1 a_2} + \frac{\beta_i \beta_j}{b^2} \right) H^3 J_5 \right\} + p_0 J_{ij},$$

Третий тип интегралов:

$$\begin{aligned}
 J_{ijpq} = \int \frac{\partial F}{\partial i} \frac{\partial F}{\partial j} pq \frac{ds}{\Delta} = \pi(a_1 + a_2)b \left\{ (p_0\alpha_q + q_0\alpha_p) \left[2\gamma_i\gamma_j \frac{(a_1 - a_2)}{\pi} J_4 + \frac{2(a_1 - a_2)}{3\pi b^2} \times \right. \right. \\
 \times \beta_i\beta_j H^2 J_7 - (\gamma_i\alpha_j + \gamma_j\alpha_i) \frac{HJ_5}{2} \left. \right] - (p_0\beta_q + q_0\beta_p) \frac{H}{2} (\gamma_i\beta_j + \gamma_j\beta_i) J_5 + (p_0\gamma_q + q_0\gamma_p) \times \\
 \times H[\gamma_i\gamma_j J_1 + \frac{H^2}{2} (\frac{\alpha_i\alpha_j}{a_1a_2} + \frac{\beta_i\beta_j}{b^2}) J_5] + \alpha_p\alpha_q [\gamma_i\gamma_j (a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2) \frac{J_3}{2} + \frac{3}{8} \alpha_i\alpha_j H^2 J_9 + \frac{\beta_i\beta_j}{8b^2} \times \\
 \times (a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2) H^2 J_9 - \frac{4}{3\pi} (a_1 - a_2) (\gamma_i\alpha_j + \gamma_j\alpha_i) HJ_8] + \\
 + \beta_p\beta_q [\gamma_i\gamma_j \frac{b^2}{2} J_3 + \frac{a_i\alpha_j b^2 H^2}{8a_1a_2} J_9 + \frac{3\beta_i\beta_j H^2}{8} J_9] + \\
 + (\alpha_p\beta_q + \alpha_q\beta_p) [(\alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i) \frac{H^2}{8} J_9 - \frac{2}{3\pi} (a_1 - a_2) (\gamma_i\beta_j + \gamma_j\beta_i) HJ_8] + \\
 + (\alpha_p\gamma_q + \alpha_q\gamma_p) \left[\frac{2}{\pi} \gamma_i\gamma_j (a_1 - a_2) HJ_{10} + \frac{2(a_1 - a_2)}{3\pi b^2} \beta_i\beta_j H^3 J_8 - (\gamma_i\alpha_j + \gamma_j\alpha_i) \frac{H^2}{2} J_3 \right] - \\
 \left. - (\beta_p\gamma_q + \beta_q\gamma_p) (\gamma_i\beta_j + \gamma_j\beta_i) \frac{H^2}{2} J_3 + \gamma_p\gamma_q H^2 [\gamma_i\gamma_j J_2 + \frac{H^2}{2} (\frac{\alpha_i\alpha_j}{a_1a_2} + \frac{\beta_i\beta_j}{b^2}) J_3] \right\} + p_0q_0 J_{ij},
 \end{aligned}$$

$$\text{где } p = p_0 + \alpha_p a_k r \cos \theta + \beta_p br \sin \theta + \gamma_p H \sqrt{r^2 + d^2},$$

$$q = q_0 + \alpha_q a_k r \cos \theta + \beta_q br \sin \theta + \gamma_q H \sqrt{r^2 + d^2},$$

i, j, p, q, - индексы, пробегающие значения x, y, z.

С помощью этих трех типов интегралов легко записываются все вышеуказанные 54 интеграла.

3. Вычисление жесткости одноопорного мостовидного протеза при поступательных перемещениях для модели опорного корня в виде эллиптического гиперboloида. Жесткость протеза вдоль горизонтальной оси x вычисляется с помощью интеграла первого типа и равна.

$$\begin{aligned}
 c_x = \frac{G}{h_0} \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{ds}{\Delta} = \frac{G}{h_0} (\gamma J_{xx} + J_{yy} + J_{zz}) = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} [\gamma \alpha_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2] J_0 + \\
 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\gamma \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}{a_1a_2} + \frac{\gamma \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}{b^2} \right) J_6, \quad \gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}
 \end{aligned}$$

При вертикальном расположении опорного корня, т.е. при

$$\beta = \delta = 0 (\alpha_x = \cos \alpha, \alpha_y = \sin \alpha, \alpha_z = 0, \beta_x = -\sin \alpha, \beta_y = \cos \alpha, \beta_z = 0, \gamma_x = \gamma_y = 0, \gamma_z = 1) \quad \text{жесткость } c_x \text{ равна}$$

$$c_x = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \left[J_0 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\gamma \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{a_1a_2} + \frac{\gamma \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{b^2} \right) J_6 \right],$$

В частности при $\alpha=0$ получим формулу, приведенную в монографии [].

$$c_x = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{2h_0} \left[\left(\frac{\gamma H^2}{2a_1a_2} + \frac{H^2}{2b^2} + 1 \right) (1 - d^2) + H^2 \left(\frac{\gamma}{a_1a_2} + \frac{1}{b^2} \right) d^2 \ln d \right].$$

Жесткость протеза вдоль другой горизонтальной оси “у” равна

$$c_y = \frac{G}{h_0}(J_{xx} + \gamma J_{yy} + J_{zz}) = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0}[(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2)J_0 + \frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x^2 + \gamma\alpha_y^2 + \alpha_z^2}{a_1a_2} + \frac{\beta_x^2 + \gamma\beta_y^2 + \beta_z^2}{b^2})J_6].$$

Для протеза с вертикальным опорным корнем

$$c_y = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0}[J_0 + \frac{H^2}{2}(\frac{\cos^2\alpha + \gamma\sin^2\alpha}{a_1a_2} + \frac{\sin^2\alpha + \gamma\cos^2\alpha}{b^2})J_6].$$

При $\alpha = 0$ получаем известную формулу []:

$$c_y = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{2h_0}[(\frac{H^2}{2a_1a_2} + \frac{\gamma H^2}{2b^2} + 1)(1 - d^2) + H^2(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{\gamma}{b^2})d^2 \ln d].$$

Жесткость протеза вдоль вертикальной оси z

$$c_z = \frac{G}{h_0}(J_{xx} + J_{yy} + \gamma J_{zz}) = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0}[(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2)J_0 + \frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \gamma\alpha_z^2}{a_1a_2} + \frac{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \gamma\beta_z^2}{b^2})J_6].$$

В случае вертикального опорного корня

$$c_z = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0}[\gamma J_0 + \frac{H^2}{2}(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{\gamma}{b^2})J_6].$$

При $\alpha=0$ имеем []:

$$c_z = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{2h_0}[(\frac{H^2}{2a_1a_2} + \frac{H^2}{2b^2} + \gamma)(1 - d^2) + H^2(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{b^2})d^2 \ln d].$$

В общем случае расположения опорного корня протеза возникают поступательные перемещения не только вдоль линии действия силы, но и поступательные перемещения вдоль других направлений, а также повороты вокруг линии действия силы. Поэтому вычислим соответствующие жесткости опорного корня в направлении оси “у” при действии силы вдоль оси “х”.

$$c_{xy} = (\gamma - 1)J_{xy} = \frac{(\gamma - 1)G\pi(a_1 + a_2)b}{h_0}[\gamma_x\gamma_y J_0 + \frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_y}{a_1a_2} + \frac{\beta_x\beta_y}{b^2})J_6].$$

Для протеза с вертикальным корнем

$$c_{xy} = \frac{\pi G(\gamma - 1)(a_1 + a_2)bH^2}{2h_0}\sin\alpha\cos\alpha(\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{b^2})J_6.$$

При $\alpha=0$, т.е. если ось “х” совпадает с осью симметрии горизонтального поперечного сечения вертикального корня, $c_{xy}=0$.

Аналогично находим жесткости c_{xz} и c_{yz} .

$$c_{xz} = \frac{\pi G(\gamma - 1)(a_1 + a_2)b}{h_0}[\gamma_x\gamma_z J_0 + \frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x\alpha_z}{a_1a_2} + \frac{\beta_x\beta_z}{b^2})J_6],$$

$$c_{yz} = \frac{\pi G(\gamma - 1)(a_1 + a_2)b}{h_0}[\gamma_y\gamma_z J_0 + \frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_y\alpha_z}{a_1a_2} + \frac{\beta_y\beta_z}{b^2})J_6].$$

Для протеза с вертикальным опорным корнем жесткости c_{xz} и c_{yz} равны нулю.

Это означает, что при действии горизонтальных сил не возникают поступательные перемещения вдоль вертикальной оси протеза с вертикальным опорным корнем, и наоборот,

при действии вертикальных сил не возникают горизонтальные перемещения протеза с вертикальным опорным корнем.

Для вычисления жесткостей при поворотах нам понадобятся формулы для координат центров сопротивления.

4. Определение координат центров сопротивления одноопорного протеза для модели корня в виде эллиптического гиперboloида. Формулы приводятся в параграфе § 5 [3]. Нам остается вычислить соответствующие интегралы:

$$s_{xzx} = (\gamma - 1) \frac{G}{h_0} \int_x \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta} = \frac{(\gamma - 1)\pi G(a_1 + a_2)}{h_0} b \left\{ x_0 [\gamma_x \gamma_z J_0 + \frac{H^2}{2} (\frac{\alpha_x \alpha_z}{a_1 a_2} + \frac{\beta_x \beta_z}{b^2}) J_6] + \right. \\ \left. + \frac{2\alpha_x}{\pi} \gamma_x \gamma_z (a_1 - a_2) J_4 + \frac{2\alpha_x}{\pi} \beta_x \beta_z (a_1 - a_2) H^2 J_7 - \alpha_x (\gamma_x \alpha_z + \gamma_z \alpha_x) \frac{H}{2} J_5 - \beta_x (\gamma_x \beta_z + \gamma_z \beta_x) \frac{H}{2} J_5 + \right. \\ \left. + \gamma_x H [\gamma_x \gamma_z J_1 + \frac{H^2}{2} (\frac{\alpha_x \alpha_z}{a_1 a_2} + \frac{\beta_x \beta_z}{b^2}) J_5] \right\}.$$

$$s_{xz} = \frac{G}{h_0} \int_z [\gamma (\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2] \frac{ds}{\Delta} = \frac{\pi G(a_1 + a_2)}{h_0} b \left\{ (\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2) (z_0 J_0 + \gamma_z H J_1) + \right. \\ \left. + \frac{H^2}{2} (\frac{\gamma \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}{b^2}) (z_0 J_6 + \gamma_z H J_5) + \frac{2a_z (a_1 - a_2)}{\pi} [\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2] J_4 + \right. \\ \left. + (\frac{\gamma \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}{3b^2}) H^2 J_7 \right\} - H [\alpha_z (\gamma \alpha_x \gamma_x + \alpha_y \gamma_y + \alpha_z \gamma_z) + \beta_z (\gamma \beta_x \gamma_x + \beta_y \gamma_y + \beta_z \gamma_z)] J_5;$$

$$s_{xzz} = \frac{(\gamma - 1)G}{h_0} \int_z \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{ds}{\Delta} = \frac{(\gamma - 1)\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \left\{ \gamma_x \gamma_z (z_0 J_0 + \gamma_z H J_1) + \frac{H^2}{2} (\frac{\alpha_x \alpha_z}{a_1 a_2} + \frac{\beta_x \beta_z}{b^2}) \times \right. \\ \left. \times (z_0 J_6 + \gamma_z H J_5) + \frac{2\alpha_z (a_1 - a_2)}{\pi} (\gamma_x \gamma_z J_4 + \frac{\beta_x \beta_z}{3b^2} H^2 J_7) - \frac{H}{2} [\alpha_z (\alpha_x \gamma_z + \alpha_z \gamma_x) + \beta_z (\beta_x \gamma_z + \beta_z \gamma_x)] J_5 \right\};$$

$$s_{zx} = \frac{G}{h_0} \int_x [(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + \gamma (\frac{\partial F}{\partial z})^2] \frac{ds}{\Delta} = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \left\{ (\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2) (x_0 J_0 + \gamma_x H J_1) + \right. \\ \left. + \frac{H^2}{2} (\frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \gamma \alpha_z^2}{a_1 a_2} + \frac{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \gamma \beta_z^2}{b^2}) (x_0 J_6 + \gamma_x H J_5) + \frac{2\alpha_x (a_1 - a_2)}{\pi} \right. \\ \left. [(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2) J_4 + (\frac{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \gamma \beta_z^2}{3b^2}) H^2 J_7] - H [\alpha_x (\alpha_x \gamma_x + \alpha_y \gamma_y + \gamma \alpha_z \gamma_z) + \right. \\ \left. + \beta_x (\beta_x \gamma_x + \beta_y \gamma_y + \gamma \beta_z \gamma_z)] J_5 \right\};$$

Теперь можно определить x_c и z_c по формулам (7) [3]. Для протеза с вертикальным опорным корнем имеем: $s_{xz} = 0$

$$s_{xzx} = - \frac{(\gamma - 1)GH\pi(a_1 + a_2)bJ_5}{2h_0}, \quad s_{xzz} = 0,$$

$$s_{xz} = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \left\{ z_0 J_0 + H J_1 + \frac{H^2}{2} (\frac{\gamma \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{a_1 a_2} + \frac{\gamma \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{b^2}) (z_0 J_6 + H J_5) \right\};$$

$$s_{zx} = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \left\{ \gamma x_0 J_0 + \frac{H^2}{2} (\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{b^2}) x_0 J_6 + \frac{2(a_1 - a_2) \cos \alpha}{\pi} (\gamma J_4 + \frac{H^2}{3b^2} J_7) \right\};$$

$$x_c = \frac{c_{zx}}{c_z} = x_0 + \frac{2(a_1 - a_2)(\gamma J_4 + \frac{H^2}{3b^2} J_7) \cos \alpha}{\pi[\gamma J_0 + \frac{H^2}{2}(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{b^2}) J_6]}$$

$$z_a = \frac{s_{xz} - s_{xzz}}{c_x} = z_0 + \frac{H[J_1 + \frac{H^2}{2}(\frac{\gamma \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{a_1 a_2} + \frac{\gamma \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{b^2}) J_5]}{J_0 + \frac{H^2}{2}(\frac{\gamma \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{a_1 a_2} + \frac{\gamma \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{b^2}) J_6}$$

Аналогично находим и другие координаты центров сопротивления опорного корня протеза.

$$s_{xy} = \frac{G}{h_0} \int y [\gamma (\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2] \frac{ds}{\Delta} = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \{(\gamma \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2)(y_0 J_0 + \gamma_y H J_1) + \frac{H^2}{2}(\frac{\gamma \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}{b^2})(y_0 J_6 + \gamma_y H J_5) + \frac{2\alpha_y(a_1 - a_2)}{\pi}[(\gamma \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2) J_4 + (\frac{\gamma \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}{3b^2}) H^2 J_7] - H[\alpha_y(\gamma \alpha_x \gamma_x + \alpha_y \gamma_y + \alpha_z \gamma_z) + \beta_y(\gamma \beta_x \gamma_x + \beta_y \gamma_y + \beta_z \gamma_z)] J_5\};$$

$$s_{yx} = \frac{G}{h_0} \int x [(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + \gamma (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2] \frac{ds}{\Delta} = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \{(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2)(x_0 J_0 + \gamma_x H J_1) + \frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x^2 + \gamma \alpha_y^2 + \alpha_z^2}{a_1 a_2} + \frac{\beta_x^2 + \gamma \beta_y^2 + \beta_z^2}{b^2})(x_0 J_6 + \gamma_x H J_5) + \frac{2\alpha_x(a_1 - a_2)}{\pi}[(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2) J_4 + (\frac{\beta_x^2 + \gamma \beta_y^2 + \beta_z^2}{3b^2}) H^2 J_7] - H[\alpha_x(\alpha_x \gamma_x + \gamma \alpha_y \gamma_y + \alpha_z \gamma_z) + \beta_x(\beta_x \gamma_x + \gamma \beta_y \gamma_y + \beta_z \gamma_z)] J_5\};$$

$$s_{xyx} = \frac{(\gamma - 1)G}{h_0} \int x \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{ds}{\Delta} = \frac{\pi G(\gamma - 1)(a_1 + a_2)b}{h_0} \{(\gamma_x \gamma_y)(x_0 I_0 + \gamma_x H J_1) + \frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x \alpha_y}{a_1 a_2} + \frac{\beta_x \beta_y}{b^2})(x_0 J_6 + \gamma_x H J_5) + \frac{2\alpha_x(a_1 - a_2)}{\pi}(\gamma_x \gamma_y J_4 + \frac{\beta_x \beta_y H^2}{3b^2} J_7) - \frac{H}{2}[\alpha_x(\alpha_x \gamma_y + \alpha_y \gamma_x) + \beta_x(\beta_x \gamma_y + \beta_y \gamma_x)] J_5\};$$

$$s_{xyy} = \frac{(\gamma - 1)G}{h_0} \int y \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{ds}{\Delta} = \frac{(\gamma - 1)\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \{(\gamma_x \gamma_y)(y_0 J_0 + \gamma_y H J_1) + \frac{H^2}{2}(\frac{\alpha_x \alpha_y}{a_1 a_2} + \frac{\beta_x \beta_y}{b^2})(y_0 J_6 + \gamma_y H J_5) + \frac{2\alpha_y(a_1 - a_2)}{\pi}(\gamma_x \gamma_y J_4 + \frac{\beta_x \beta_y H^2}{3b^2} J_7) - \frac{H}{2}[\alpha_y(\alpha_x \gamma_y + \alpha_y \gamma_x) + \beta_y(\beta_x \gamma_y + \beta_y \gamma_x)] J_5\}.$$

Координаты x_b и y_a вычисляем по формулам (8) [3]. Для протеза с вертикальным опорным корнем:

$$s_{xy} = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \left\{ y_0 J_0 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\gamma \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{a_1 a_2} + \frac{\gamma \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{b^2} \right) y_0 J_6 + \right. \\ \left. + \frac{2(a_1 - a_2) \sin \alpha}{\pi} \left[J_4 + \left(\frac{\gamma \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{3b^2} H^2 J_7 \right) \right] \right\},$$

$$s_{yx} = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \left\{ x_0 J_0 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha + \gamma \sin^2 \alpha}{a_1 a_2} + \frac{\sin^2 \alpha + \gamma \cos^2 \alpha}{b^2} \right) x_0 J_6 + \right. \\ \left. + \frac{2(a_1 - a_2) \cos \alpha}{\pi} \left[J_4 + \left(\frac{\sin^2 \alpha + \gamma \cos^2 \alpha}{3b^2} H^2 J_7 \right) \right] \right\},$$

$$s_{xyx} = \frac{(\gamma - 1)\pi G(a_1 + a_2)b H^2}{h_0} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} \left[\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{b^2} \right) x_0 J_6 - \frac{4(a_1 - a_2) \cos \alpha}{3\pi b^2} J_7 \right];$$

$$s_{xyy} = \frac{(\gamma - 1)\pi G(a_1 + a_2)b H^2}{2h_0} \sin \alpha \cos \alpha \left[\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{b^2} \right) y_0 J_6 - \frac{4(a_1 - a_2) \sin \alpha}{3\pi b^2} J_7 \right];$$

$$x_b = \frac{c_x (s_{yx} - s_{xyx}) + c_{xy} (s_{xy} - s_{xyx})}{c_x c_y - c_{xy}^2} = \\ = x_0 + \frac{4(a_1 - a_2) \left[\gamma \left(\frac{(1-d^2)^{3/2}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) + \frac{b^2}{H^2} (1-d^2)^{3/2} \right] \cos \alpha}{3\pi \left[\left(\gamma + \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) \left(\frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln d \right) + \frac{b^2}{H^2} (1-d^2) \right]};$$

$$y_a = \frac{c_y (s_{xy} - s_{xyx}) + c_{xy} (s_{yx} - s_{xyy})}{c_x c_y - c_{xy}^2} = \\ = y_0 + \frac{4(a_1 - a_2) \left[\gamma \left(\frac{(1-d^2)^{3/2}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) + \frac{b^2}{H^2} (1-d^2)^{3/2} \right] \sin \alpha}{3\pi \left[\left(\gamma + \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) \left(\frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln d \right) + \frac{b^2}{H^2} (1-d^2) \right]}.$$

Если $\alpha=0$, то получим формулы для x_b , y_a , приведенные в работе [2]. Координаты y_c и z_b определяются по формулам (8) [3]. Для протеза с вертикальным опорным корнем формулы упрощаются.

$$y_c = \frac{s_{zy}}{c_z}, \quad z_b = \frac{s_{yz} - s_{yzy}}{c_y},$$

$$s_{yz} = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \left[z_0 J_0 + H J_1 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha + \gamma \sin^2 \alpha}{a_1 a_2} + \frac{\sin^2 \alpha + \gamma \cos^2 \alpha}{b^2} \right) (z_0 J_6 + H J_5) \right],$$

$$s_{zy} = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} [\gamma y_0 J_0 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{b^2} \right) y_0 J_6 + \frac{2(a_1 - a_2) \sin \alpha}{\pi} (\gamma J_4 + \frac{H^2}{3b^2} J_7)],$$

$$s_{yz} = c_{yz} = 0, \quad s_{zy} = -\frac{(\gamma - 1)\pi G(a_1 + a_2)b H J_5}{2}$$

$$y_c = y_0 + \frac{4(a_1 - a_2) \left[\frac{(1-d^2)^{3/2}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} + \frac{\gamma b^2}{H^2} (1-d^2)^{3/2} \right] \sin \alpha}{\pi \left[\left(1 + \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) \left(\frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln d \right) + \frac{\gamma(1-d^2)}{H^2} \right]}$$

$$z_b = z_0 + \frac{H \left\{ (1-3d^2 + 2d^3) \left[\frac{\cos^2 \alpha + \gamma \sin^2 \alpha}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{\sin^2 \alpha + \gamma \cos^2 \alpha}{b^2} + \frac{\gamma - 1}{H^2} \right] + \frac{2(1-d^3)}{H^2} \right\}}{3 \left[\left(\frac{\cos^2 \alpha + \gamma \sin^2 \alpha}{\alpha^1 \alpha^1} + \frac{\gamma \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{b^2} \right) \left(\frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln d \right) + \frac{1-d^2}{H^2} \right]}$$

При $\alpha = 0$ получим формулы для y_c и z_b , приведенные в работе [2].

5. Определение жесткости одноопорного протеза при поворотах на основе модели эллиптического гиперboloида. Прежде всего, определим жесткость при поворотах, возникающих при действии сил вдоль осей координат. Эти повороты создают винтовой характер перемещений, например, при перемещении протеза вдоль оси "X" он поворачивается вокруг этой оси. Как было сказано ранее, центры сопротивления в общем случае – это точки, в которых сила вызывает поступательные перемещения с одновременным поворотом вокруг линии действия этой силы.

Итак, $c_{x\varphi}$ – жесткость поворота вокруг оси "x" протеза при действии силы вдоль этой оси "x".

$$c_{x\varphi} = s_{xzy} - y_c c_{xz} - s_{xyz} + z_b c_{xy} = \frac{\pi(\gamma - 1)G(a_1 + a_2)b}{h_0} \{ \gamma_x [\gamma_z (y_0 - y_c) J_0 - \gamma_y (z_0 - z_b) J_0] +$$

$$+ \frac{H^2}{2} \left(\frac{\alpha_x \alpha_z}{a_1 a_2} + \frac{\beta_x \beta_z}{b^2} \right) [(y_0 - y_c) J_6 + \gamma_y H J_5] - \frac{H^2}{2} \left(\frac{\alpha_x \alpha_y}{a_1 a_2} + \frac{\beta_x \beta_y}{b^2} \right) [(z_0 - z_b) J_6 + \gamma_z H J_5] +$$

$$+ \frac{2(a_1 - a_2)}{\pi} [\gamma_x (\alpha_y \gamma_z - a_z \gamma_y) J_4 + \beta_x (\alpha_y \beta_z - \alpha_z \beta_y) \frac{H^2}{3b^2} J_7] + \frac{H}{2} [\alpha_x (\gamma_y \alpha_z - \alpha_y \gamma_z) +$$

$$+ \beta_x (\beta_z \gamma_y - \beta_y \gamma_z)] J_5 \}.$$

Для протеза с вертикальным опорным корнем

$$c_{x\varphi} = \frac{\pi(\gamma - 1)G(a_1 - a_2)b}{h_0} \left\{ -\frac{H^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{b^2} \right) [(z_0 - z_b) J_6 + H J_5] + \right.$$

$$\left. \frac{H^2}{2} [-\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha] = -\frac{(\gamma - 1)\pi G(a_1 + a_2)b H^2}{2h_0} \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{b^2} \right) [(z_0 - z_b) J_6 + H J_5] \sin \alpha \cos \alpha \right.$$

Отметим, что при $\alpha = 0$, т.е. когда локальная ось “х” совпадает с осью симметрии сечения корня, $c_{x\varphi} = 0$. Это означает, что сила, действующая вдоль оси симметрии сечения корня, не вызывает вращения вокруг линии действия силы.

Рассмотрим жёсткость

$$c_{y\varphi} = s_{xyz} - c_{xy} z_a - s_{yzx} + x_c c_{yz} = \frac{\pi(\gamma-1)G(a_1+a_2)b}{h_0} \{ \gamma_y [\gamma_x(z_0-z_a) - \gamma_z(x_0-x_c)] J_0 + \\ + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\alpha_x \alpha_y}{a_1 a_2} + \frac{\beta_x \beta_y}{b^2} \right) [(z_0-z_a) J_6 + \gamma_z H J_5] - \frac{H^2}{2} \left(\frac{\alpha_y \alpha_z}{a_1 a_2} + \frac{\beta_y \beta_z}{b^2} \right) [(x_0-x_c) J_6 + \gamma_z H J_5] + \\ + \frac{2(a_1-a_2)}{\pi} [\gamma_y (\alpha_z \gamma_z - \alpha_x \gamma_x) J_4 + \beta_y (\alpha_z \beta_x - \alpha_x \beta_z) \frac{H^2}{3b^2} J_7] + \\ + \frac{H}{2} [\alpha_y (\alpha_x \gamma_z - \alpha_z \gamma_x) + \beta_y (\beta_x \gamma_z - \beta_z \gamma_x)] J_5 \}.$$

Для протеза с вертикальным опорным корнем

$$c_{y\varphi} = \frac{\pi(\gamma-1)G(a_1+a_2)bH^2}{h_0} \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{b^2} \right) [(z_0-z_a) J_6 + H J_5] \sin \alpha \cos \alpha.$$

При $\alpha=0$ $c_{y\varphi} = 0$, хотя сила P_y перпендикулярна к локальной плоскости симметрии XOZ.

$$c_{z\varphi} = \frac{(\gamma-1)\pi G(a_1+a_2)b}{h_0} \{ \gamma_z [\gamma_y(x_0-x_b) - \\ - \gamma_x(y_0-y_a)] J_0 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\alpha_y \alpha_z}{a_1 a_2} + \frac{\beta_y \beta_z}{b^2} \right) [(x_0-x_b) J_6 + \gamma_x H J_5] - \frac{H^2}{2} \left(\frac{\alpha_x \alpha_z}{a_1 a_2} + \frac{\beta_x \beta_z}{b^2} \right) \times \\ \times [(y_0-y_a) J_6 + \gamma_y H J_5] + \frac{2(a_1-a_2)}{\pi} [\gamma_z (\alpha_x \gamma_y - \alpha_y \gamma_x) J_4 + \beta_z (\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x) \frac{H^2}{3b^2} J_7] + \\ + \frac{H}{2} [\alpha_z (\gamma_x \alpha_y - \alpha_x \gamma_y) + \beta_z (\beta_y \gamma_x - \beta_x \gamma_y)] J_5 \}.$$

При вертикальном опорном корне протезе $c_{z\varphi} = 0$, т.е. под действием вертикальной силы отсутствует вращение вокруг вертикальной оси.

Теперь рассмотрим жесткость протеза при поворотах. Выписывать формулы для $\mu_x, \mu_y, \mu_z, \mu_{xy}, \mu_{xz}, \mu_{yz}$ в общем случае нет смысла из-за их громоздкости. Как указывалось выше в § 5 целесообразнее их записать с помощью интегралов, структура которых известна и приводится в том же параграфе.

Для вертикального опорного корня формулы значительно упрощаются и их можно выписать:

$$\begin{aligned}
\mu_x = & \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \left\{ (y_0^2 - y_0 y_c - z_0^2 - z_0 z_b) J_0 + \frac{H^2}{2} [(y_0^2 - y_0 y_c) \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{b^2} \right) + \right. \\
& + (z_0^2 - z_0 z_b) \left(\frac{\cos^2 \alpha + \gamma \sin^2 \alpha}{a_1 a_2} + \right. \\
& + \left. \left. \frac{\sin^2 \alpha + \gamma \cos^2 \alpha}{b^2} \right) \right] J_6 + \left[J_1 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha + \gamma \sin^2 \alpha}{a_1 a_2} + \frac{\sin^2 \alpha + \gamma \cos^2 \alpha}{b^2} \right) \right] J_5 H (2z_0 - z_b) + \\
& + H(\gamma - 1)(z_0 - z_b) J_5 - \frac{2y_c(a_1 - a_2) \sin \alpha}{\pi} \left(\gamma J_4 + \frac{H^2}{3b^2} J_7 \right) + \left[\frac{(a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2) \gamma \sin^2 \alpha}{2} + \right. \\
& + \frac{\gamma b^2 \cos^2 \alpha}{2} + (\gamma - 1) H^2 + \frac{H^4}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha + \gamma \sin^2 \alpha}{a_1 a_2} + \right. \\
& + \left. \left. \frac{\sin^2 \alpha + \gamma \cos^2 \alpha}{b^2} \right) \right] J_3 + H^2 J_2 + \frac{H^2}{8} \left[3 + \frac{(a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2) \sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{b^2}{a_1 a_2} \cos^2 \alpha \right] J_9
\end{aligned}$$

При $\alpha = 0$ и $y_0 = z_0 = 0$

$$\begin{aligned}
\mu_x = & \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \left\{ -z_b H J_1 + H^2 J_2 + \left[\frac{\gamma b^2}{2} + \frac{H^4}{2} \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{\gamma}{b^2} \right) + (\gamma - 1) H^2 \right] J_3 - \frac{z_b H}{2} [\gamma - 1 + H^2 \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{b^2} \right) \right] J_5 + \frac{H^2}{8} \left(3 + \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) J_9 \}.
\end{aligned}$$

Если подставить значения интегралов, то получим результат, приведенный в монографии [2].

Для протеза с вертикальным опорным корнем

$$\begin{aligned}
\mu_{xy} = & \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \left\{ \sin \alpha \cos \alpha \left[\frac{\gamma}{2} (b^2 - a_1^2 + a_1 a_2 - a_2^2) J_3 - \frac{H^4}{2} (\gamma - 1) \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{b^2} \right) J_3 + \right. \right. \\
& + \frac{H^2}{8} \left(\frac{b^2}{a_1 a_2} - \frac{a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2}{b^2} \right) J_9 \left. \right] - y_0 (x_0 - x_c) \left[\gamma J_0 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{b^2} \right) J_6 \right] - \\
& - (z_0^2 - z_0 z_a - z_0 z_b + z_a z_b) (\gamma - 1) H^2 \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{b^2} \right) J_6 - (\gamma - 1) (2z_0 - z_a - z_b) \times \\
& \times H^3 \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{b^2} \right) J_5 \left. \right] - [(x_0 - x_c) \sin \alpha + y_0 \cos \alpha] \frac{2(a_1 - a_2)}{\pi} \left(\gamma J_4 + \frac{H^2}{3\pi b^2} J_7 \right) \}.
\end{aligned}$$

При $\alpha = 0$ и $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ $\mu_{xy} = 0$.

$$\begin{aligned} \mu_{xz} = & \frac{\pi G(a_1 - a_2)b}{h_0} \left\{ -H(x_0 - x_b) \left[J_1 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha + \gamma \sin^2 \alpha}{a_1 a_2} + \frac{\sin^2 \alpha + \gamma \cos^2 \alpha}{b^2} \right) J_5 + \frac{(\gamma - 1)}{2} J_5 \right] - \right. \\ & - (\gamma - 1)(y_0 - y_a) \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{H^3}{2} \sin \alpha \cos \alpha J_5 - \frac{2(\gamma - 1)(a_1 - a_2)}{3\pi} H \cos \alpha J_8 - \\ & - (\gamma - 1)(y_0 - y_a) z_0 \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{H^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha J_6 - z_0(x_0 - x_b) \left[J_0 + \frac{H^2}{2} \times \right. \\ & \left. \left. \times \left(\frac{\cos^2 \alpha + \gamma \sin^2 \alpha}{a_1 a_2} + \frac{\sin^2 \alpha + \gamma \cos^2 \alpha}{b^2} \right) J_6 \right] - \frac{2\pi}{\pi} (a_1 - a_2) \cos \alpha \left[z_0 J_4 + \gamma \frac{z_0 H^2}{3b^2} J_7 + H J_{10} + \frac{\gamma H^3}{3b^2} J_8 \right] \right\}. \end{aligned}$$

При $\alpha = 0$ и $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

$$\mu_{xz} = \frac{\pi G(a_1 + a_2)b}{h_0} \left\{ x_b \left[J_1 + \frac{H^2}{2} \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{\gamma}{b^2} + \frac{\gamma - 1}{H_2} \right) J_5 \right] - \frac{2(a_1 - a_2)H}{\pi} \left[\left(\gamma_2 + \frac{\gamma H^2}{b^2} \right) J_8 + (1 - d^2)^{3/2} \right] \right\},$$

что соответствует коэффициенту при φ_z в уравнении на стр. 29 монографии [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. “Решение задачи о равновесии периодонта, ограниченного двумя эллиптическими гиперблоидами”. // Теоретическая и прикладная механика.-Мн.: Высшая школа, 1983.-Вып.10.-с.11-21.
2. Наумович С.А., Крушевский А.Е. Биомеханика системы зуб-периодонт. – Мн.: Экономические технологии, 2000, 132с.+36с.
3. Крушевский А.Е., Наумович С.С. Основы биомеханики мостовидных протезов. “Теоретическая и прикладная механика” -Мн.:Технопринт, 2006.-Вып.20.-с.134-139.

ЭЛЕКТРОННЫЙ ЯЗЫК НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

Колешко В.М., Дейнак Д.А., Хмурович Н.В.

Design and experimental results of a surface acoustic wave (SAW) microsensor with polymer microfluidic cell for the sensing and identification of liquids is presented in this article. This microsensor, which is a part of a smart electronic tongue system, uses for the detection and identification of liquids. The design consists of a dual-delay-line configuration in which one line is free and other one is metallized. Synthetic samples were analyzed with the four basic tastes of sour, salt, bitter, and sweet. The electronic tongue classified correctly all of the different basic tastes without a selective biological or chemical coating. Theory relating to the electro-acoustic properties represented by the relative permittivity and conductivity of the sample liquid is presented and related to experimental results.

Биологическая роль вкусовых ощущений заключается не только в проверке съедобности пищи человеком и другими живыми организмами. Вкусовые ощущения влияют на процесс пищеварения, так как рефлекторно связаны с секрецией пищеварительных желез и действуют не только на интенсивность секреции, но и на состав секрета – в зависимости от того, какие вкусовые качества в пище преобладают. В конечном итоге это отражается на самочувствии и здоровье.

Все вкусовые ощущения разделяются на 5 групп: сладкий, соленый, кислый, горький, пряный (мясной). Многие вкусовые раздражители человека вызывают смешанные ощущения. На поверхности языка человека можно выделить области специфической чувствительности. Однако между химическими свойствами веществ и их вкусом не существует никакой определенной корреляции. Например, не только сахар, но и соли свинца имеют сладкий вкус. Более того, воспринимаемое качество вещества зависит от его концентрации – например, поваренная соль в малых концентрациях кажется сладкой.

Поэтому исследование, разработка, производство, как электронных языков, так и электронных носов является актуальной задачей. Это позволит обезопасить рынок и человека от поддельных продуктов питания, в частности, минеральную воду от подделки, а вина и колбасу – без солей свинца. Компьютерная программа составит вкусовой образ тестируемого продукта, а полученный результат сравнивается с эталоном на продукт. Например, в результате анализа обнаруживается, что газированная вода слишком приторна, пиво с кислым привкусом, сок недостаточно свежий, а творог имеет горько-кислый привкус.

Электронный язык – микросенсорная система, вместе с интеллектуальной микропроцессорной обработкой сигнала, способная идентифицировать химические образы вкуса сложных веществ и определить концентрации отдельных компонентов в них.

Одним из наиболее перспективных направлений в разработке интеллектуальных сенсорных систем вкуса является создание электронных языков на поверхностно-акустических волнах (ПАВ) [1].

Электронный язык на ПАВ представляет собой тонкую пластину из пьезоэлектрического материала (например, кварц, $LiNbO_3$, $LiTaO_3$, $Si/SiO_2/ZnO$, $Si/SiO_2/AlN$), на которую нанесены, напылением металла, электроды для двух систем встречно-штыревых преобразователей (ВШП). Электроды связаны с генератором переменного тока с диапазоном частот до 5 ГГц. Напряжение переменного тока индуцирует в пьезоактивной подложке акустическую волну, распространяющуюся со скоростью ~3000 м/с. Длина акустической волны определяется расстоянием между электродами ВШП. Электронные языки на ПАВ структурах могут функционировать в нескольких режимах (резонатора, линии задержки [1,2]), а также использовать дифференциальную схему, состоящую из двух резонаторов, двух линий задержки, одной линии задержки и одного резонатора [3,4]. Дифференциальная схема электронного языка позволяет одновременно измерить два механических (физико-акустических) и два электрических (электроакустических) параметра исследуемых жидких и/или гетерогенных сред.

На рис. 1 представлена сенсорная система электронного языка с двумя линиями задержки. Одна линия задержки (металлизована Au/Cr) измеряет механические параметры (вязкость, массу, импеданс), а вторая – измеряет диэлектрическую проницаемость и электропроводность среды. Электрические параметры связаны с некоторыми свойствами вкуса, так, например, соленое – натрий, сладкое – сахараза.

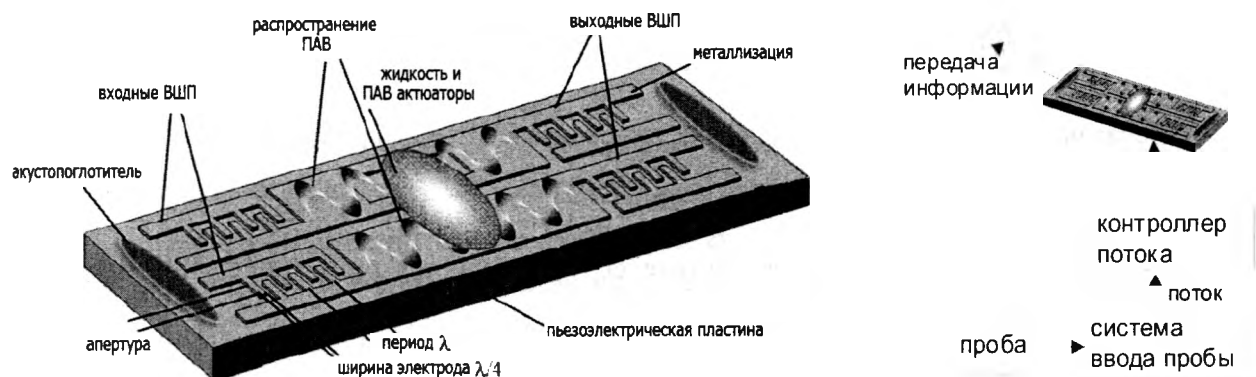


Рис. 1. Структурная схема электронного языка с сенсорной считывающей системой на ПАВ.

При акустоэлектрическом взаимодействии с исследуемой средой изменяется скорость и/или происходит затухание акустической волны (табл. 1, рис. 2) – один из принципов считывания электрических свойств жидких и гетерогенных сред.

Табл. 1. Плотность, скорость звука, характеристический импеданс для некоторых веществ

Вещество	ρ , кг/м ³	c , м/с	Z , кгм ⁻² с ⁻¹
Вода	993	1527	$1,516 \cdot 10^{-6}$
Этиловый спирт	789	1119	$0,883 \cdot 10^{-6}$
Кровь	1060	1530	$1,65 \cdot 10^{-6}$
Воздух при н.у.	1,2	330	$0,0004 \cdot 10^{-6}$
Четыреххлористый углерод	1595	887	$1,415 \cdot 10^{-6}$

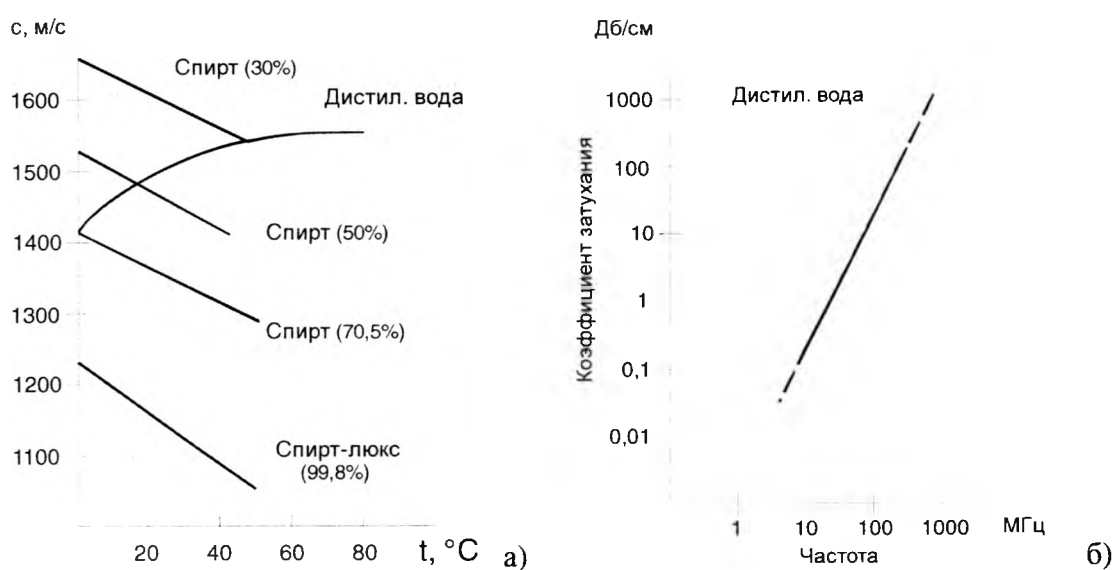


Рис. 2. Зависимость скорости звука от температуры (а) и коэффициента затухания (б) для эталонных сред.

Проводимость излучения ПАВ состоит из активной и реактивной составляющей

$$G_{f\lambda\lambda} = G(\omega) + jB(\omega) \quad (1)$$

Активная акустическая проводимость $G(\omega)$ связана с проводимостью при резонансной частоте G_0 и с угловой частотой ω ПАВ-микросенсора и может быть записана следующим выражением:

$$G(\omega) = G_0 \left[\frac{\sin(\omega)}{\omega} \right]^2, \quad (2)$$

Угловая частота есть функция числа пар электродов ВШП (N) и резонансной частоты ω_0

$$\omega = \pi N \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}. \quad (3)$$

Проводимость при резонансной частоте G_0 есть функция геометрических параметров прибора, а также сопротивления

$$G_0 = 2.25\omega_0 N^2 A (\epsilon_0 + \epsilon_s) \frac{K^2}{2}, \quad (4)$$

где A – акустическая апертура, определяющая область эффективного взаимодействия соседних электродов, ϵ_0 и ϵ_s – диэлектрическая проницаемость в вакууме и пьезоэлектрической подложки соответственно. Коэффициент электромеханической связи (K) обуславливается кристаллографическим срезом кристалла, резонансной частотой, механическими свойствами и толщиной металлизации ВШП [1].

Реактивную акустическую проводимость $B(\omega)$ можно описать формулой

$$B(\omega) = G_0 \left[\frac{\sin(2\omega) - 2\omega}{2\omega^2} \right]. \quad (5)$$

Ток I определяется статической емкостью ВШП на единицу длины перекрытия электродов C_T и полной акустической проводимостью $G_{f\lambda\lambda}$. Входная полная проводимость передатчика ВШП равна

$$A_{11}(\omega) = \frac{I_1}{V} = G(\omega) - jB(\omega) + j\omega C_T. \quad (6)$$

Вследствие взаимодействия, входная полная проводимость приемника ВШП A_{22} равна входной полной проводимости передатчика A_{11} . Поэтому передаточная функция полной проводимости от передатчика к приемнику должна приближенно вычисляться по формуле

$$A_{12}(\omega) = G(\omega) \alpha \exp(-j2\pi L/\lambda) \quad (7)$$

где время задержки $\tau = \frac{L}{v} = \frac{L}{f\lambda}$, L – расстояние между центрами входного и выходного

ВШП, λ – длина волны, α – коэффициент затухания и v – фазовая скорость.

При добавлении исследуемого вещества в чувствительную область происходят изменения, которые затрагивают передаточную функцию полной проводимости – изменяется время задержки и происходит затухание звуковой волны. Эти изменения должны быть добавлены в передаточную функцию как дополнительный фазовый сдвиг и затухание. С учетом этих изменений уравнение для передаточной функции полной проводимости имеет вид

$$A_{12}(\omega) = G(\omega) \alpha \exp\left(-\frac{j2\pi L}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{j2\pi\delta l}{\lambda}\right) \exp(\alpha l) \quad (8)$$

где $\delta = \Delta v/v$ – незначительное изменение скорости вследствие процесса считывания, l – протяженность контактирующей с жидкостью области и α – затухание ПАВ вследствие процесса считывания вдоль l . После возмущения, изменения в скорости и затухании будут приближенными

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{K_s^2 \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2 + (\varepsilon_r \varepsilon_0 - \varepsilon_r \varepsilon_0) (\varepsilon_r \varepsilon_0 + \varepsilon_p^T)}{2 \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2 + (\varepsilon_r \varepsilon_0 + \varepsilon_p^T)^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\Delta \alpha}{k} \approx \frac{K_s^2 \left(\frac{\sigma}{\omega}\right) (\varepsilon_r \varepsilon_0 + \varepsilon_p^T)}{2 \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2 + (\varepsilon_r \varepsilon_0 + \varepsilon_p^T)^2}, \quad (10)$$

Здесь K_s^2 – коэффициент электромеханической связи, ε_p^T – эффективная диэлектрическая проницаемость кристалла, ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость сравнительной жидкости (дистиллированная вода), ε_r и σ – относительная диэлектрическая проницаемость и электропроводность (связаны с потерями при измерении). Изменения в скорости $\Delta v/v$ и в затухании $\Delta \alpha/k$ (где k – волновое число: $k = 2\pi/\lambda$ и λ – длина волны) могут быть определены для различных фаз и соотношений амплитуд с помощью векторного вольтметра. Исключая относительную диэлектрическую проницаемость или электропроводность из (9) и (10) можно получить следующие формулы

$$\left[\frac{\Delta v}{v} + \frac{K_s^2 (2\varepsilon_r \varepsilon_0 - \varepsilon_r \varepsilon_0) + \varepsilon_p^T}{4 \varepsilon_r \varepsilon_0 + \varepsilon_p^T} \right]^2 + \left[\frac{\Delta \alpha}{k} \right]^2 = \left[\frac{K_s^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 + \varepsilon_p^T}{4 \varepsilon_r \varepsilon_0 + \varepsilon_p^T} \right]^2 \quad (11)$$

$$\left[\frac{\Delta v}{v} + \frac{K_s^2}{2} \right]^2 + \left[\frac{\Delta \alpha}{k} - \frac{K_s^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 + \varepsilon_p^T}{4 \sigma/\omega} \right]^2 = \left[\frac{K_s^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 + \varepsilon_p^T}{4 \sigma/\omega} \right]^2 \quad (12)$$

Они используются для построения диаграммы диэлектрическая проницаемость – электропроводность, показанной на рис. 3.

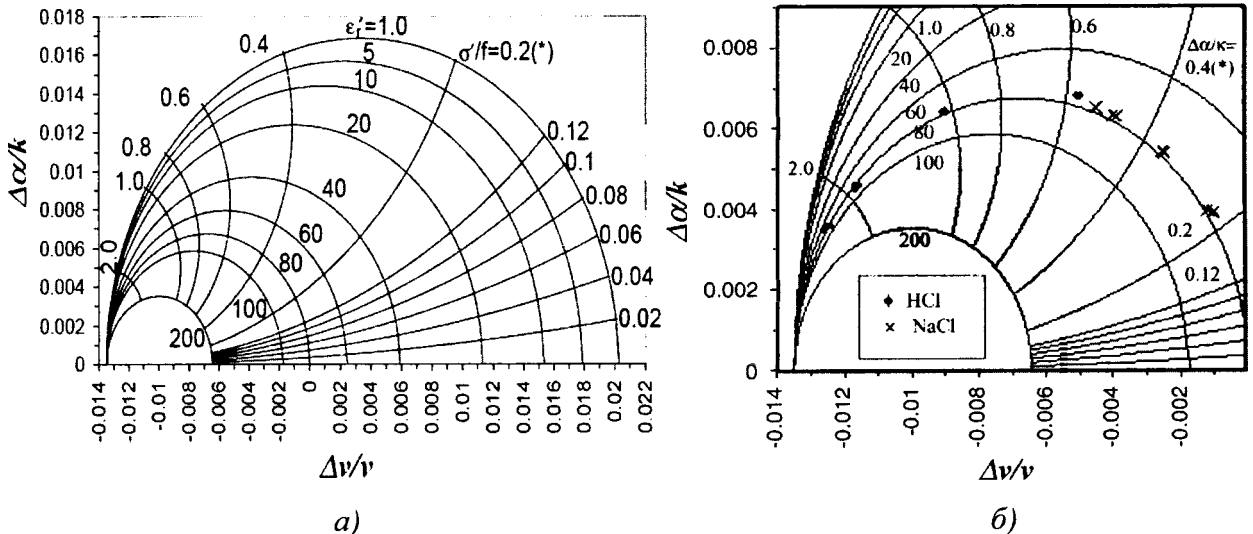


Рис. 3. Диаграмма диэлектрическая проницаемость – электропроводность показывающая теоретическое (а) и экспериментальное (б) поведение исследуемой среды (дистиллированной воды) (*: 1×10^{-8} (С/м)/Гц).

Таким образом, изменения в скорости и затухании ПАВ в двух линиях задержки есть функция диэлектрической проницаемости, электропроводности, вязкости и плотности исследуемой среды.

При разработке сенсоров электронного языка учитывается несколько требований. Чувствительность и время срабатывания улучшаются с уменьшением размеров устройств. Звуковые волны конструктивно интерферируют, когда расстояние между смежными парами электродов ВШП равно половине длины волны, с максимально положительной интерференцией при резонансной частоте. При этой частоте эффективность преобразователя максимальна. Подбирая апертуру и число пар электродов можно, воздействуя на входную линию, снизить вносимые потери. Частота пропускания ПАВ-преобразователя также зависит от числа электродов: увеличение числа электродов уменьшает частоту пропускания. И наоборот, чтобы минимизировать емкостное сопротивление устройства количество электродов должно быть минимальным. Кроме того, для уменьшения потерь при преобразовании число электродов должно быть высоким, а уменьшение дифракционных потерь происходит при широкой апертуре. Принимая во внимание эти различные ограничения, были разработаны устройства на ПАВ, в которых оптимально подобраны параметры входных и выходных преобразователей (табл. 2).

Таблица 2. Параметры ПАВ-микросенсоров для электронного языка

Материал звукопровода	LiTaO ₃	Si/SiO ₂ /ZnO	SiO ₂	Si/SiO ₂ /AlN	GaAs	LiNbO ₃
Ширина электродов ВШП, мкм	17	3	3	3	2	2
Скорость ПАВ, м/с	4212,6	2943,82	3159	3679,93	2604	3488
Частота синхронизма, МГц	55-65	245,32	263,03	306,661	325,5	436
Число пар электродов ВШП	28	9	19	31	67	4
Апертура ВШП, мкм	30λ	89λ	46λ	89λ	4λ	221λ
Длина ПАВ, мкм	7513	12	12	12	8	8

Чтобы контролировать подачу исследуемого вещества, была разработана специальная печатная плата и элемент, который содержит вещество до начала анализа. Этот элемент имеет размеры 32 мм × 20 мм с резервуаром в центре 6,8 мм × 2,5 мм × 8 мм и объемом 136 микролитров. Проба помещается точно по центру между ВШП (рис. 4).



Рис. 4. Лабораторный электронный язык на ПАВ.

Лабораторный электронный язык на ПАВ имеет типичные для ПАВ-сенсорных устройств вносимые потери в 9,652 дБ.

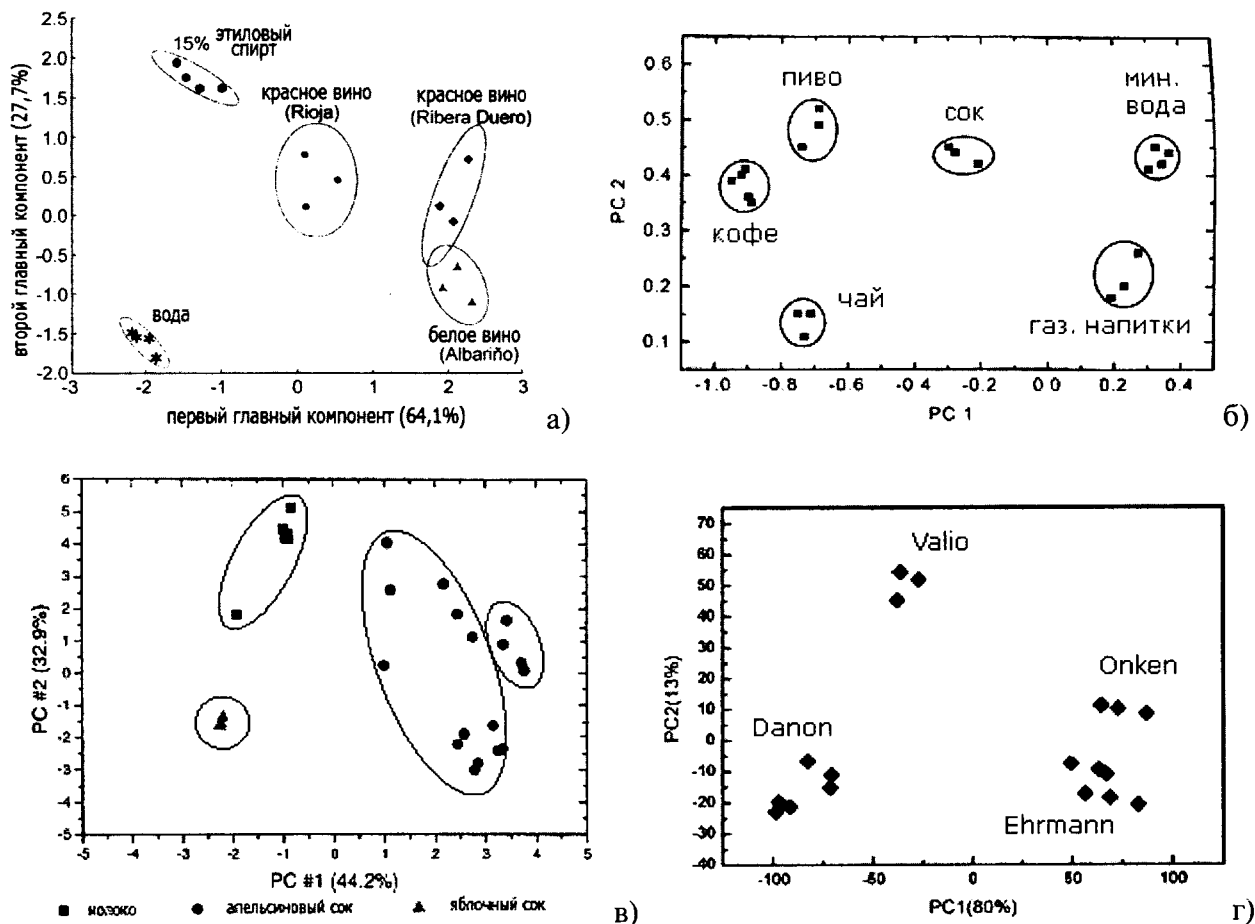


Рис. 5. Вкусовые образы идентифицируемых жидкостей: а) вино, б) прохладительных напитков, в) молоко и соки, г) йогурты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колешко В.М., Мешков Ю.В. Микроэлектронные преобразователи информации на поверхностно-акустических волнах - М.: Электроника, №9, 1985.
2. Колешко В.М., Мешков Ю.В., Скопич В.И., Трынов В.Г. Преобразователь информации на поверхностных акустических волнах. А.с. СССР № 1648234, 1991.
3. Колешко В.М., Мешков Ю.В., Лозовский Э.И. Дифференциальный пьезоэлектрический преобразователь на поверхностных акустических волнах. А.с. СССР № 1501867, 1989.
4. Колешко В.М., Мешков Ю.В., Лозовский Э.И. Стабильные высокочастотные генераторы на быстродействующих логических элементах с резонаторами на поверхностных акустических волнах // Приборы и техника эксперимента. – 1988. №3.-с.119-122.

О РАСЧЕТЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

Кравчук А.С.

An iterative method is proposed to the friction contact problem. Numerical implementation is given.

1. Введение. Работа посвящена развитию метода расчета усилий контактного взаимодействия с учетом трения в области контакта. Постановка задачи отличается от обычно используемых постановок [1 - 3] тем, что закон трения содержит скорости – производные перемещений по времени или по параметру, определяющему изменение внешних воздействий.

Отметим, что закон трения, содержащий скорости, используется в теории качения. Однако это обстоятельство не мешает использовать традиционные методы нелинейного программирования для решения конкретных задач о качении деформируемых тел, поскольку переход к подходящей подвижной системе отсчета позволяет преобразовать эти задачи к стационарным [4-5].

Целью настоящей работы является изучение нестационарных процессов, в которых характеристики контактного взаимодействия зависят от истории нагружения. Адекватным инструментом для построения математической модели нестационарных (переходных) процессов контактного взаимодействия является вариационный метод исследования систем с односторонними связями. Исторически первой работой по исследованию систем с односторонними (неудерживающими) связями была работа М.В.Остроградского [6], в которой был указан алгоритм решения динамических задач для систем с конечным числом степеней свободы. Полное решение задачи М.В.Остроградского было дано в трудах Майера и Цермело.

Первой работой по механике деформируемого твердого тела с учетом односторонних ограничений была работа А.Синьорини [7], перепечатанная, с некоторыми дополнениями, в статье [8]. Возрождение интереса к работе Синьорини связано с тем, что развитие вычислительной техники и численных методов позволило построить обобщения задачи Синьорини как в механике деформируемого твердого тела, так и на многие задачи с другим физическим содержанием – задачи теории фильтрации, биологические мембраны, теплопроводности и многие другие [9]. Численные методы и алгоритмы решения задач с односторонними ограничениями даны в монографии [10].

Несмотря на продолжающийся рост публикаций, многие проблемы остаются нерешенными. К числу таких проблем относится рассматриваемая в данной статье проблема исследования контактного взаимодействия с переменными неизвестными заранее и зависящими от процесса нагружения границами раздела областей сцепления и проскальзывания.

2. Постановка задачи. Математическая модель. Пусть деформируемое тело соприкасается с жестким подвижным штампом. задается либо кинематика штампа – смещение и поворот, или же процесс силового нагружения – изменение векторов силы и момента, действующих на штамп как на абсолютно твердое тело; для определенности ниже предполагается, что задана кинематика штампа. Требуется найти напряженно-деформированное состояние тела и параметры контактного взаимодействия – область контакта, границу раздела областей сцепления и скольжения.

Математическая модель содержит уравнения равновесия тела:

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} = 0 \tag{1}$$

работающие в области Ω , занятой деформируемым телом; в уравнении (1). ∇ - оператор Гамильтона, $\hat{\sigma}$ - тензор напряжений, точка означает операцию свертки. Рассматривается линейно упругий материал, подчиняющийся закону Гука:

$$\hat{\sigma} = {}^4\hat{a} \cdot \cdot \hat{\varepsilon} \quad (2)$$

где ${}^4\hat{a}$ тензор модулей упругости, индекс «4» означает четвертый ранг; двойная точка – операция двойной свертки. В декартовой системе отсчета уравнение (2) имеет вид:

$$(\hat{\sigma})_{ij} = ({}^4\hat{a} \cdot \cdot \hat{\varepsilon})_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3)$$

повторяющиеся индексы означают суммирование по этим индексам от 1 до 3. $\hat{\varepsilon}$ - тензор малых деформаций Коши:

$$\hat{\varepsilon} = 0.5(\nabla u + \nabla u^T) \quad (4)$$

$u = u(x)$ - вектор перемещений, x - радиус-вектор точки в пространстве.

Обозначим через $\Sigma = \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma \cup \Sigma_c$ границу деформируемого тела. В точках части Σ_σ границы задан вектор поверхностных усилий с плотностью $P = P(x, s)$, $x \in \Sigma_\sigma$, s - параметр, определяющий процесс изменения внешних воздействий; на части Σ_u заданы перемещения U ; ниже предполагается, что $U = 0$.

Для описания движения штампа и граничных условий на части границы Σ_c , точки которой могут контактировать со штампом, введем, наряду с неподвижной лабораторной системой отсчета $Ox_1x_2x_3$, подвижную жестко связанную со штампом систему отсчета $O\xi_1\xi_2\xi_3$. В собственной системе отсчета уравнение границы штампа A запишем в виде:

$$\Psi(\xi) = 0 \quad (5)$$

По предположению, функция $\Psi(\xi)$ в уравнении (5) обладает тем свойством, что $\Psi(\xi) > 0$ для точек ξ вне штампа, $\Psi(\xi) < 0$ для внутренних точек штампа.

Зададим движение штампа уравнением:

$$x = U_p + \hat{A} \cdot \xi \quad (6)$$

где U_p - вектор поступательного смещения, \hat{A} - матрица, задающая вращение штампа; уравнение (6) используется для бесконечно-малых движений, в вычислениях – для приращений. Решим уравнение (6) относительно переменных ξ :

$$\xi = \hat{A}^{-1} \cdot (x - U_p) \quad (7)$$

Используя введенные выше гипотезы относительно функции $\Psi(\xi)$, запишем первое из условий на части границы Σ_c , отражающее требование непроникания точек границы деформируемого тела внутрь штампа, в виде:

$$\Psi[\hat{A}^{-1} \cdot (x + u(x, s) - U_p)] \geq 0, \forall x \in \Sigma_c \quad (8)$$

Предположим, что нормальная компонента усилий контактного взаимодействия на Σ_c является неотрицательной, т.е. растягивающими усилия контактного взаимодействия быть не

могут. Пусть ν - единичный вектор внешней нормали к границе тела. Тогда, используя разложение $\hat{\sigma} \cdot \nu|_{\Sigma_c} = \sigma_N \nu + \sigma_T$, будем иметь:

$$\sigma_N(x) \leq 0, \forall x \in \Sigma_c \quad (9)$$

Касательная компонента σ_T вектора усилий контактного взаимодействия на части Σ_c подчиняется закону трения Амонтона – Кулона:

$$|\sigma_T| < f |\sigma_N| \Rightarrow \dot{u}_T = 0, \quad (10)$$

$$|\sigma_T| = f |\sigma_N| \Rightarrow \frac{\dot{u}_T}{|\dot{u}_T|} = -\frac{\sigma_T}{|\sigma_T|} \quad (11)$$

Соотношение (11) справедливо в тех точках, в которых $|\dot{u}_T| \neq 0$; если же $|\dot{u}_T| = 0$, то модуль напряжения трения s_T будет определяться уравнением $|\sigma_T| = f |\sigma_N|$, а направление s_T будет найдено в процессе решения задачи; точка в выражении \dot{u}_T означает производную по параметру s , определяющему изменение состояния системы, в динамике – по времени. Необходимо также задать начальное состояние, например, для значения $s = 0$:

$$U(x, 0) = 0, \forall x \in \Omega \quad (12)$$

Таким образом, задача заключается в том, чтобы найти перемещения, деформации, напряжения, область контакта и линию раздела областей сцепления и проскальзывания из соотношений (1)-(4), (8)-(12). Подчеркнем, что состояние исследуемой системы в момент времени t зависит от ее состояний во все предшествующие моменты, т.е. в общем случае

$$u(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (13)$$

3. Метод решения. Впервые поставленная задача была рассмотрена в работе [11]. Для решения было предложено использовать принцип возможных скоростей. Данный принцип приводит к неравенству:

$$a(u, \delta \dot{u}) \geq \int_{\Sigma_c} f |\sigma_N(u)| (|\dot{v}_T| - |\dot{u}_T|) d\Sigma, \quad (14)$$

$$\forall \delta \dot{u} = \dot{v} - \dot{u}, \dot{u} \in \dot{K}_u, \dot{v} \in \dot{K}_u$$

в котором $\delta \dot{u} = \dot{v} - \dot{u}$, \dot{u} – истинные скорости в данный момент времени, \dot{v} – возможные скорости. В соответствии с принципом Журдена, в данный момент времени варьируются только скорости, а перемещения, ускорения и время остаются постоянными. Определение множества возможных скоростей \dot{K}_u дано, например, в [12]. Поскольку \dot{K}_u зависит от поля перемещений, то это дает основание назвать неравенство (14) квази-вариационным – в соответствии с терминологией, введенной в работах Ж.-Л.Лионса.

В работе [11] для решения неравенства (14) было предложено использовать метод локального потенциала, однако этот подход не был реализован ввиду его сложности. Более эффективным оказался принцип возможных перемещений Лагранжа, использованный для нахождения приращения перемещений $u^{t+dt} - u^t = u(x, t+dt) - u(x, t)$. Здесь, вместо неравенства (14) возникает неравенство:

$$a(u, \delta u) \geq \int_{\Sigma_c} f |\sigma_N(u)| (|v_T - u_T^t| - |u_T - u_T^t|) d\Sigma, \quad (15)$$

$$\forall \delta u = v - u, u \in K, v \in K, u \equiv u^{t+dt}$$

K - множество полей перемещений, удовлетворяющих условию непроникания (8). Заменяя здесь приращения их главной линейной частью, можно перейти к неравенству (14). Производя разбиение отрезка $[0, T]$ на конечное число элементов, можно построить конечно-разностную схему, позволяющую учесть историю нагружения. Используя смешанные вариационные принципы, строгое обоснование которых дано в монографии [13], задачу можно преобразовать к последовательности задач разыскания седловой точки некоторых функционалов, для решения которых имеются эффективные итерационные алгоритмы.

Впервые это было сделано в работе [14] сразу для случая пространственной задачи с использованием решений Буассинеса и Черрутти для упругого полупространства. Точность решения была невысокой – было использовано всего 3 шага по нагружению и 100 граничных элементов при дискретизации по пространственным переменным. Однако развитый подход позволил сделать некоторые важные качественные выводы и получить количественные оценки влияния истории нагружения.

Развитие вычислительной техники за прошедшее время дало возможность уточнить эти выводы и оценки и получить новые, позволяющие убедиться в работоспособности развитой методики. Приведем некоторые новые результаты.

4. Численные результаты и их анализ.

4.1. *Плоская задача.* Пусть жесткий шероховатый штамп внедряется в прямоугольник из линейно упругого изотропного материала – см. Рис.1.

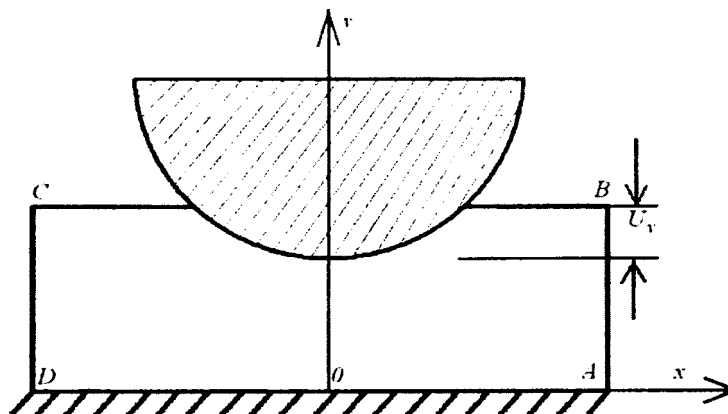


Рис.1: расчетная схема

Сторона DA жестко закреплена, стороны AB и CD свободны от напряжений. Область Σ_c , которая была введена в п.2, совпадает со стороной BC . Задан процесс внедрения штампа U_y . Для дискретизации задачи по пространственным переменным был использован метод граничных элементов. Эпюры напряжения трения σ_T для шести шагов внедрения, каждый из которых равен $0.02AB$, показаны на Рис.2 (всего было использовано 10 шагов); по горизонтальной оси откладываются номера узлов сетки на стороне BC , начиная от точки B . Решение для первого шага, равного $0.01AB$ показано пунктиром, штриховая кривая – решение для одного шага, равного $0.1AB$. Заметим, что для построения аналитических решений [2] обычно используется определение величины σ_T как проекции вектора усилий контактного взаимодействия на ось Oy . Здесь же σ_T определяется как проекция усилий контактного взаимо-

действия на внутреннюю нормаль к штампу. Другие входные данные: $AB = CD = 1$, $BC = DA = 2$, число граничных элементов AB и CD равно 50, на BC и DA - 200; радиус круга равен 4, коэффициент трения 0.2. Один из важных результатов заключается в том, что итерационный процесс, полное описание которого имеется, например, в работе [15], является весьма чувствительным к выбору нулевого приближения для напряжений трения. В частности, если выбрать $\sigma_T^{(0)}$ для очередного шага погружения равным значению σ_T на предыдущем шаге (после окончания итераций), то найти решение за приемлемое число итераций машинного

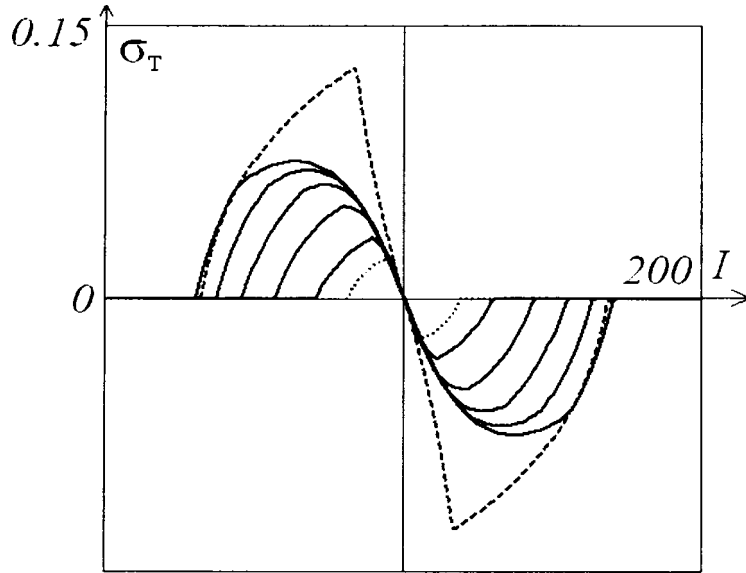


Рис. 2

времени с хорошей точностью невозможно. Оптимальным (найденным методом проб и ошибок) является либо выбор $\sigma_T^{(0)} = 0$, либо $\sigma_T^{(0)} = -f |\sigma_N^{(0)}| x$, где $\sigma_N^{(0)}$ - решение задачи без трения для текущего значения глубины погружения. Из Рис. 2 видно также, что решение, соответствующее одному шагу, дает сильно завышенные значения напряжений трения; заметим, что один шаг соответствует замене скоростей в законе трения Кулона относительными перемещениями – именно такая постановка используется в большинстве работ по контактным задачам с трением. Кроме того, учет истории нагружения приводит к сглаживанию кривых распределения напряжений трения, в то время как имеющиеся аналитические решения [2] имеют разрыв производной в точке, разделяющей области сцепления и скольжения. Отметим также, что решение, соответствующее проецированию усилий контактного взаимодействия на ось Oy , располагается между решениями для одного шага и для десятого шага при многошаговом процессе.

Для того, чтобы убедиться в достоверности численных решений, была решена задача Л.А.Галина [16, 17] о внедрении жесткого прямоугольника в упругую полуплоскость; оказалось, что, как и в [16, 17], граница раздела зон сцепления и скольжения зависит только от коэффициента трения и коэффициента Пуассона, ее положение такое же, как и в решениях Л.А.Галина и Спенса. Кроме того, во всех задачах производилось измельчение граничных элементов и шагов по погружению, а также увеличение количества итераций. Представленные результаты соответствуют стабилизации численных решений, т.е. дальнейшее увеличение указанных параметров процесса численного решения не приводит к заметным поправкам. Стабилизация нормального давления в центре области контакта и напряжения трения в точке, отстоящей на $0.5BC$ от центра иллюстрируется кривыми на Рис. 3. По горизонтальной оси откладывается номер итерации k , по вертикальной – значения $\sigma_N^{(k)}$ (сплошная кри-

вая) и $\sigma_r^{(k)} \cdot 5$ (пунктир; умножение на 5 производится для выравнивания масштабов). Видно, что стабилизация решения происходит при $k \approx 60-70$. Кроме того, стремление решений к стабильному значению является немонотонным.

4.2. *Пространственная задача.* Эта задача исследована не так подробно как плоская. Имеющиеся здесь результаты подтверждают выводы, сформулированные для случая плоской задачи. Приведем в качестве примера распределение квадрата модуля контактных напряжений для задачи о внедрении прямого кругового цилиндра конечной длины в линейно упругое изотропное полупространство – Рис. 4.

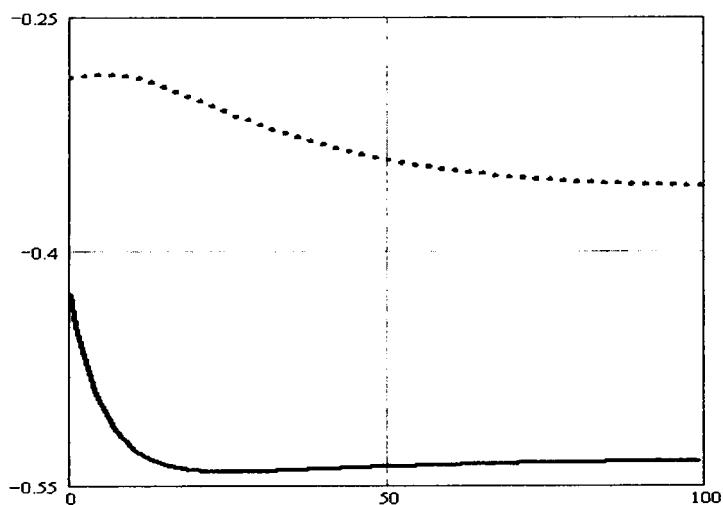


Рис.3

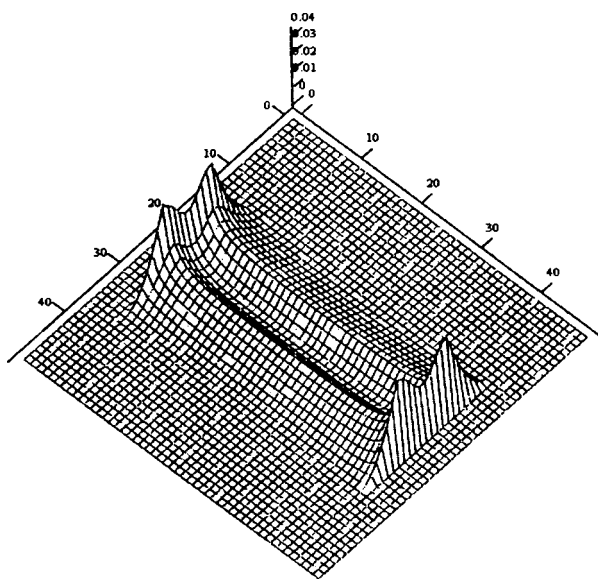


Рис.4

Видно, что напряжение трения имеет два максимума, наличие которых можно объяснить сложным взаимодействием процессов в областях сцепления и скольжения. Естественно, что точное решение содержит особенности вблизи острых кромок цилиндра. Полученное численное решение можно интерпретировать – как это обычно делают – как решение для цилиндра со скругленными краями, причем радиус скругления определяется размером элемента дискретизации. В рассматриваемом примере было использовано 10000 граничных элемен-

тов, длина стороны граничного элемента равнялась 0.01 длины стороны квадрата, в которую заключалась возможная область контакта.

Заключение. Таким образом, в результате выполнения данной работы развит метод решения контактных задач с учетом законов трения, содержащих скорости относительного скольжения и позволяющих учесть историю нагружения системы контактирующих тел. Решены плоские и пространственные задачи, из анализа решений которых сделаны важные для теории и приложений выводы об особенностях предложенной методики и распределений напряжений трения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 05-01-00591.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М: МИР, 1989. – 509 с.
2. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
3. Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости. – Киев: Наукова Думка, 1985. – 175 с.
4. Kalker J.L. Rolling with slip and spin in presence of dry friction//Wear.– 1966. V.9. – P. 20-31.
5. Гольдштейн Р.В. и др. Решение вариационными методами пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением// Успехи механики. – 1982. Т.5, №3/4. – С.61-102.
6. Остроградский М.В. Полное собрание трудов. Том 2. – Киев. АН УССР. С. 32-59.
7. Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica// Atti Soc. Ital. Progr. Sei. – 1933.– P. 513–533.
8. Signorini A. Questioni di elastostatica non linearizzata e semilinearizzata// Rend. Mat. Appl. 1959. – V. 18. N 1–2. – P.95–130.
9. Дюво Ж., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
10. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
11. Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикладная математика и механика. – 1980. Т. 44. Вып. 1. – С. 122–129.
12. Kravchuk A., Neittaanmaki Pekka. Dynamic Identification of the Deformed Body Parameters. In: Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation “Waves 2003”. Proceedings of the Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation “Waves 2003” held at Jyvaskyla, Finland, 30 June – 4 July 2003. Springer, ed. by G.C.Cohen, E.Heikkola, P.Joly, P.Neittaanmaki, 2003. – P.577–581.
13. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. –М.: МГАПИ, 1997. – 345 с.
14. Кравчук А.С. Решение некоторых трехмерных контактных задач с учетом трения// Трение и износ. – 1981. Т. II. № 4. – С. 589–595.
15. Кравчук А.С. , Нейтгаанмяки П. Решение контактных задач с использованием метода граничных элементов// Прикладная математика и механика. – 2006. Т. 70. №5.
16. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии сил трения и сцепления// Прикладная математика и механика. – 1945. Т. 9. Вып. 5. – С. 413–424.
17. Spence D.A. An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction//Proc. Camb.Phil.Soc.– 1973. Vol.73. – P. 249–268.

О ВОЗМОЖНЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ФОРМАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДЛИННЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Михасев Г.И.

Free localized vibrations of thin long non-homogeneous cylindrical shell under initial stress are studied. The Flügge type basic equations for a shell, including the effect of initial tensions due to axial compressive force and internal or external pressure, are employed, and by using the asymptotic method the solutions of the basic equations are constructed in the form of functions decreasing quickly far from some parallel on the shell surface.

Введение

Свободные колебания предварительно напряженных оболочек исследовались многими авторами [1–5]. Так в [1], Арменакас и Херманн изучили влияние кольцевых мембранных сил на свободные колебания бесконечной цилиндрической оболочки. С.Н. Кукуджанов рассмотрел влияние давления на собственные частоты цилиндрических оболочек средней длины [5]; им же установлено, что внешнее нормальное давление приводит к снижению нижнего спектра частот. Зависимость собственных частот колебаний цилиндрических оболочек от величины осевой силы изучено в [2–4]. В приведенных и других известных работах рассматривались, как правило, задачи о движении оболочек с постоянными геометрическими и физическими параметрами. Свободные колебания таких оболочек характеризуются тем, что волны покрывают всю поверхность оболочки.

В работе [6], по-видимому, впервые предложен метод, позволяющий исследовать свободные колебания цилиндрических оболочек средней длины, характеризующихся локализацией форм в окрестности так называемых «слабых» образующих (асимптотических линий). Наличие слабых образующих может быть вызвано неоднородностью как геометрических параметров (кривизны, толщины, длины образующей [7]), так и физических характеристик (модуля Юнга, плотности материала и т.п.). В данной работе на основе уравнений Флюгге исследуются свободные колебания длинной, неоднородной в осевом направлении цилиндрической оболочки с учетом действующих в срединной поверхности мембранных усилий. С использованием метода, развитого в [6, 8], решения уравнений построены в виде функций, быстро убывающих вдали от некоторой «слабой» параллели. Показано, что построение подобных собственных форм колебаний на основе уравнений Флюгге возможно лишь в случае сжимающих осевых сил.

Постановка задачи и исходные уравнения

Рассмотрим длинную упругую цилиндрическую оболочку радиуса R . Пусть x и φ – продольная и окружная координаты на срединной поверхности оболочки. Обозначим через $h^*(x)$, $E^*(x)$, $\nu(x)$, $\rho^*(x)$ соответственно толщину, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала, которые в общем случае являются функциями продольной координаты x . Считаем, что оболочка находится под действием внешних сил: сжимающей осевой силы T_1^0 , приложенной к торцам оболочки, и гидростатического давления q_n^0 , которое может быть как внешним, так и внутренним. Будем полагать, что внешнее (в общем случае комбинированное) нагружение оболочки не приводит к бифуркации начального безмоментного напряженного состояния, характеризующегося осевой и кольцевой усилиями T_1^0 и $T_2^0 = Rq_n^0$.

Поставим задачу об исследовании линейных собственных осесимметричных изгибных колебаний предварительно напряженной неоднородной цилиндрической оболочки. При этом, среди всех возможных видов колебаний будем исследовать такие, которые характеризуются локализацией форм в окрестности некоторой параллели, на которой переменные

толщина оболочки, модуль Юнга (или другие параметры) достигают своих экстремальных значений. В качестве исходных используем уравнения Флюгге, которые в случае осесимметричного движения имеют вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + T_1^\circ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \rho^* h^* \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{1}{R} T_2 - T_1^\circ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} T_2^\circ u_3 - \rho^* h^* \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Здесь t – время, u_1, u_3 – продольное и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки, а T_1, T_2, M_1 – дополнительные мембранные усилия и момент, вызванные колебанием оболочки. Для осесимметричного движения данные усилия определяются как

$$T_1 = \frac{E^* h^*}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\nu}{R} u_3 \right), \quad T_2 = \frac{E^* h^*}{1 - \nu^2} \left(\nu \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{R} u_3 \right), \quad M_1 = -\frac{E^* h^{*3}}{12(1 - \nu^2)} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Неизвестные перемещения ищем в виде

$$u_1 = RU(x) \cos \omega t, \quad u_3 = RW(x) \cos \omega t, \quad (4)$$

где ω – искомая частота колебаний. Перейдем к безразмерным величинам по формулам:

$$x = Rs, \quad E^* = E_0 E(s), \quad h^* = h_0 h(s), \quad \rho^* = \rho_0 \rho(s), \quad T_1^\circ = \mu^2 E_0 h_0 f_1, \quad T_2^\circ = E_0 h_0 f_2. \quad (5)$$

Здесь h_0, E_0, ρ_0 – характерные значения толщины, модуля Юнга и плотности материала соответственно, которые будут введены ниже (см. соотношения (19)), а $\mu^4 = h_0^2 / (12R^2)$ – естественный малый параметр, характеризующий тонкостенность оболочки.

Подстановка соотношений (4), (5) в (1)–(3), приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left[g(s) \left(\frac{\partial U}{\partial s} - \nu W \right) \right] + \mu^2 f_1 \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \lambda \gamma(s) U = 0, \\ \mu^4 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[d(s) \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right] - \nu g(s) \frac{\partial U}{\partial s} + g(s) + \mu^2 f_1 \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - f_2 W - \lambda \gamma(s) W = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$d = \frac{Eh^3}{1 - \nu^2}, \quad g = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad \gamma = \rho h, \quad \lambda = \frac{\rho_0 R^2}{E_0} \omega^2. \quad (7)$$

Среди всех возможных решений уравнений (6) будем искать решения, удовлетворяющие условиям затухания на бесконечности:

$$W, U \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \pm\infty. \quad (8)$$

Тогда, считая оболочку достаточно длинной, краевыми условиями на ее торцах можно пренебречь.

Задача заключается в определении положительного собственного значения λ и соответствующих собственных функций W, U задачи (6), (8).

Построение локализованных форм колебаний

Полученные уравнения являются сингулярно возмущенными, ибо содержат малый параметр при старшей производной. Классификация интегралов подобных уравнений была проведена в [9]. Среди всех возможных форм осесимметричных колебаний нас интересуют колебания, сопровождающиеся образованием большого количества волн в осевом направлении, для которых $\partial/\partial s \sim \mu^{-1}$ при $\mu \rightarrow 0$. Следуя [9], для исследования изгибных форм колебаний с большой изменчивостью в осевом направлении, положим

$$W = w \sim 1, \quad U = \mu u, \quad \text{где} \quad u \sim 1. \quad (8)$$

Пусть $s = s_0$ есть параллель на поверхности оболочки, в окрестности которой наблюдается локализация изгибных форм колебаний, удовлетворяющих условиям $w, u \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \pm\infty$. Выполним растяжение масштаба в окрестности параллели $s = s_0$:

$$s = s_0 + \mu^{1/2}\xi. \quad (9)$$

Функции $d(s), g(s), \gamma(s)$, входящие в уравнения (6), разложим в ряды по степеням малого параметра $\mu^{1/2}$ в окрестности параллели $s = s_0$.

Решение краевой задачи (6), (8) будем искать в виде [8]

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k/2} w_k(\xi) \exp\left\{i\left(\mu^{-1/2} p \xi + \frac{1}{2} b \xi^2\right)\right\}, \quad \text{Im} b > 0, \quad (10)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \mu \lambda_1 + \mu^2 \lambda_2 + \dots, \quad (11)$$

где $w_k(\xi)$ – полиномы аргумента ξ , число p характеризует изменяемость решения в осевом направлении, а параметр b , с учетом последнего неравенства в (10), определяет скорость затухания амплитуды волн при удалении от параллели $s = s_0$. Функция u ищется в том же виде (10), с заменой полиномов w_k на u_k .

Процедура отыскания неизвестных величин, входящих в разложения (10), (11), подробно описана в монографии [8] при исследовании потери устойчивости цилиндрических оболочек в окрестности «наиболее слабой» образующей. Опустим детали данного метода, а приведем лишь расчетные формулы, имеющие отношение к нашей задаче.

Подстановка (8)–(11) в уравнения (6) приводит к последовательности алгебраических уравнений

$$\mathbf{L}_0 \mathbf{X}_0 = 0, \quad \mathbf{L}_0 \mathbf{X}_1 + \mathbf{L}_1 \mathbf{X}_0 = 0, \quad \mathbf{L}_0 \mathbf{X}_2 + \mathbf{L}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{X}_0 = 0, \quad \dots, \quad (12)$$

где $\mathbf{X}_k = (u_k, w_k)^T$ – двухмерный вектор, \mathbf{L}_k – матрицы размерности 2×2 . Элементы матрицы \mathbf{L}_0 определяются как

$$l_{11} = -g(s_0), \quad l_{12} = -iv(s_0)g(s_0)p,$$

$$l_{21} = l_{12}, \quad l_{22} = d(s_0)p^4 + g(s_0) - f_1 p^2 - f_2 - \lambda_0 \gamma(s_0), \quad (13)$$

а матрицы \mathbf{L}_k при $k \geq 1$ определены в работе [10] (см. соотношения (2.6), в которых слагаемые, содержащие производные по времени, следует опустить).

Рассматривая первое из уравнений (12), находим

$$u_0 = -i \frac{v(s_0)}{p} w_0(\xi), \quad (14)$$

$$\lambda_0 = \lambda_0(p, s_0) = \frac{1}{\gamma(s_0)} \left\{ d(s_0)p^4 + [1 - v^2(s_0)]g(s_0) - f_2 - f_1 p^2 \right\}. \quad (15)$$

Из (15) следует, что собственное значение λ_0 есть функция параметров p и s_0 .

В [8] показано, что условие разрешимости неоднородной системы уравнений, возникающей во втором приближении (см. второе уравнение в (12)), эквивалентно условию стационарности функции $\lambda_0(p, s_0)$:

$$\lambda_p = 0, \quad \lambda_s = 0. \quad (16)$$

Индексы p и s в (16) и ниже означают дифференцирование функции $\lambda_0(p, s_0)$ по p и s_0 соответственно.

Подставляя (15) в (16), приходим к двум уравнениям

$$\gamma \left[\frac{1}{4} f_1^2 d_s d^{-2} - (v^2 g)_s \right] - \gamma_s \left[(1 - v^2)g - f_2 - \frac{1}{4} f_1^2 d^{-1} \right] = 0, \quad (17)$$

$$p^\circ = \sqrt{\frac{1}{2} f_1 / d(s_0^\circ)} \quad (18)$$

относительно чисел $p = p^\circ$, $s_0 = s_0^\circ$, доставляющих стационарное значение для функции (15). Уравнение (17) служит для определения параллели $s = s_0^\circ$, которую, следуя терминологии принятой в [8], будем называть «слабой».

После нахождения параллели $s = s_0^\circ$ можно ввести характерные значения геометрических и физических параметров задачи:

$$h_0 = h^*(s_0^\circ), \quad E_0 = E^*(s_0^\circ), \quad \rho_0 = \rho^*(s_0^\circ). \quad (19)$$

Подстановка (18) в (15) дает нулевое приближение параметра λ в разложении (11):

$$\lambda_0^\circ = \frac{1}{\gamma(s_0^\circ)} \left\{ [1 - v^2(s_0^\circ)] g(s_0^\circ) - f_2 - \frac{f_1^2}{4d(s_0^\circ)} \right\}. \quad (20)$$

Следует отметить, что кроме значения p° , определяемого в соответствии с (18), число $p = 0$ также является решением первого из уравнений (16). Однако, принимая во внимание соотношение (14), в качестве расчетного значения следует брать (18), где $f_1 > 0$. Таким образом, конструируемое здесь решение задачи (6), (8) в виде (10), (11) имеет место лишь при $f_1 > 0$, что соответствует случаю сжимающих осевых сил.

Из (20) следует, что безразмерные усилия f_1, f_2 должны удовлетворять неравенству $\lambda_0^\circ > 0$. Более того необходимо потребовать, чтобы f_1 и f_2 не превышали некоторых критических значений f_1^b и f_2^b , при которых имеет место потеря устойчивости оболочки. Ниже, для случая однопараметрического нагружения будут приведены условия, гарантирующие выполнение неравенств $\lambda_0^\circ > 0$, $f_j < f_j^b$.

Рассмотрим неоднородную систему уравнений (12), возникающую в третьем приближении. Условие совместности последней, с учетом (16), приводит к дифференциальному уравнению [8]

$$-\frac{1}{2} \lambda_{pp} w_0'' + a \xi w_0' + \left(\eta - \lambda_1 + \frac{1}{2} a + c \xi^2 \right) w_0 = 0 \quad (21)$$

относительно $w_0(\xi)$. Здесь

$$a = -i(b \lambda_{pp} + \lambda_{sp}), \quad 2c = b^2 \lambda_{pp} + 2b \lambda_{sp} + \lambda_{ss}, \quad \eta = \frac{2d_s(s_0^\circ) p^{\circ 3}}{\gamma(s_0^\circ)}. \quad (22)$$

Условие $c = 0$ необходимо для существования решения уравнения (21) в виде полинома. Обозначим через

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{pp} & \lambda_{sp} \\ \lambda_{sp} & \lambda_{ss} \end{vmatrix} \quad (23)$$

матрицу, составленную из вторых производных функции (15) при $p = p^\circ$, $s_0 = s_0^\circ$. Предположим, что Λ – положительно-определенная матрица. Тогда из квадратного уравнения $c = 0$ находим единственную величину b , такую, что $\text{Im} b > 0$. Отсюда, при

$$b^2 \lambda_{pp} + 2b \lambda_{sp} + \lambda_{ss} = 0, \quad \lambda_1 = \left(n + \frac{1}{2} \right) a + \eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

уравнение (21) имеет решение в виде полинома Эрмита $w_0 = H_n(\xi)$ степени n .

Неизвестные w_k, λ_k при $k \geq 1$ находятся из последующих приближений (см. подробнее в [8]).

Поправка (24) к собственной частоте колебаний учитывает степень неоднородности параметров задачи (толщины, модуля Юнга и т.д.) и зависит от порядка n полинома Эрмита. В случае однородной оболочки поправка (24) обращается в ноль.

Отделяя в (10) вещественную и мнимую части, получаем две собственные формы колебаний, локализованные вблизи параллели $s = s_0^\circ$. Таким образом, собственное значение (11) является асимптотически двукратным.

Примеры

В качестве первого примера рассмотрим цилиндрическую оболочку, у которой толщина $h(s)$ является переменной, а остальные параметры постоянны. Пусть $E \equiv 1$, $\rho \equiv 1$, $h(0) = 1$, $h'(0) = 0$, $h''(0) \sim 1$. Здесь уравнение (17) упрощается, принимая вид $h'(s) = 0$. Тогда $s_0^\circ = 0$, а условие $\Lambda > 0$ эквивалентно неравенству

$$[f_2 + (1 - \nu^2)f_1^2] h''(0) > 0. \quad (25)$$

В данном случае получаем

$$b = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{f_2 + (1 - \nu^2)f_1^2}{f_1}} h''(0), \quad (26)$$

$$\omega^2 = \frac{E_0 R^2}{\rho_0} \left\{ \left[1 - f_2 - \frac{(1 - \nu^2)f_1^2}{4} \right] + 2\mu \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{f_1 [f_2 + (1 - \nu^2)f_1^2] h''(0)} + O(\mu^2) \right\}. \quad (27)$$

Из неравенства (25) следует, что локализация форм колебаний возможна в двух случаях:

- 1) $h''(0) > 0$, $f_2 + (1 - \nu^2)f_1^2 > 0$,
- 2) $h''(0) < 0$, $f_2 + (1 - \nu^2)f_1^2 < 0$.

В первом случае колебания локализуются вблизи линии $s = 0$, где толщина минимальна; при этом безразмерное кольцевое усилие f_2 может быть как сжимающим (при внешнем давлении), так и растягивающим (при внутреннем давлении). Во втором случае колебания концентрируются в окрестности параллели, на которой толщина максимальна, однако усилие $f_2 < 0$ здесь является растягивающим.

Как уже отмечалось, безразмерные усилия f_j должны быть меньше своих бифуркационных значений f_j^b и удовлетворять неравенству

$$1 - f_2 - \frac{(1 - \nu^2)f_1^2}{4} > 0. \quad (28)$$

Рассмотрим частный случай, когда оболочка подвержена действию только сжимающих осевых сил ($f_1 > 0$, $f_2 = 0$). Переходя к размерным усилиям в соответствии с (5), нетрудно доказать (см. стр. 61 в [8]), что если

$$T_1^\circ < T_1^* = \frac{E_0 h_0^2}{\sqrt{3(1 - \nu^2)} R} \quad \text{и} \quad \frac{L^2}{R^2} < \frac{\pi^2 \sqrt{3(1 - \nu^2)} R}{2 h_0}, \quad (29)$$

то $T_1^\circ < T_1^b$, где $T_1^b = \frac{1}{2} \pi^2 R E_0 h_0 L^{-2}$ – критическое осевое усилие [8], при котором очень длинная оболочка длиной L теряет устойчивость как стержень. Первое из неравенств (29) гарантирует выполнение условия (28), а второе – сохранение докритического напряженного состояния оболочки.

Во втором примере рассмотрим оболочку с переменным модулем Юнга $E(s)$ и постоянными значениями остальных параметров. Здесь принимаем $h \equiv 1$, $\rho \equiv 1$, $E(0) = 1$, $E'(0) = 0$, $E''(0) \sim 1$. Уравнение (17) дает $E'(s) = 0$, то есть $s_0^\circ = 0$. А условие $\Lambda > 0$ эквивалентно нера-

венству $E''(0) > 0$. Таким образом, локализация колебаний имеет место на кривой, где модуль Юнга имеет локальный минимум. Получаем

$$b = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{4 + (1 - \nu^2) f_1^2}{6 f_1} E''(0)}, \quad (30)$$

$$\omega^2 = \frac{E_0 R^2}{\rho_0} \left\{ \left[1 - f_2 - \frac{(1 - \nu^2) f_1^2}{4} \right] + 3\mu \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{6} f_1 [4 + (1 - \nu^2) f_1^2] E''(0)} + O(\mu^2) \right\}. \quad (31)$$

Как видно, во втором примере параметр b , а также поправка к частоте, учитывающая неоднородность модуля Юнга, не зависят от величины кольцевых усилий f_2 .

Формулы (27) и (31) показывают, что увеличение сжимающих осевых усилий приводит, с одной стороны, к уменьшению частоты собственных колебаний (см. первое слагаемое в квадратных скобках), что хорошо согласуется с результатами работ [2–4], а с другой стороны – к увеличению относительной поправки, учитывающей степень неоднородности оболочки.

Выводы

Таким образом, в работе построены локализованные формы собственных колебаний и найдены соответствующие собственные частоты длинных, предварительно напряженных неоднородных цилиндрических оболочек. Показано, что используемые уравнения Флюгге, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява, допускают построение локализованных форм колебаний лишь в случае сжатой в осевом направлении неоднородной оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Armenakas, A.E. Vibrations of infinitely long cylindrical shells under initial stress / A.E. Armenakas // *AIAA journal*. – 1963. – Vol.1, № 1. – P.100–106.
2. Hermann, G. Vibrations of thin shells under initial stress / G. Hermann, J. Shaw // *Journal of the Engineering Mechanics Division: Proceedings of the American Society of Civil Engineers*. – 1965.–Vol.91, № EM5.–P.37–59.
3. Reismann, H. Dynamics of initially stressed hyperelastic solids / H. Reismann, P. Pawlik // *Solid Mechanics Archives*. – 1977.– Vol. 2, № 2. – 129–185.
4. Neu, W.L. Dynamics of the prestressed solid with application to thin shells / W.L. Neu, H. Reismann // *Solid Mechanics Archives*. –1982. –Vol.7.–P.97–129.
5. Кукуджанов, С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний цилиндрических оболочек / С.Н. Кукуджанов // *Изв. АН СССР. Механика тверд. тела*. – 1968. – № 3. – С. 140–144.
6. Товстик П.Е. Двумерные задачи устойчивости и колебаний оболочек нулевой гауссовой кривизны / П.Е. Товстик // *Докл. АН СССР*. – 1983. –Т. 271, № 1. –С.69–71.
7. Михасев Г.И. О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек / Г.И. Михасев // *Прикладная механика*. – 1992. – Т. 28, № 9. – С. 50–55.
8. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320с.
9. Mikhasev G.I. Travelling wave packets in an infinite thin cylindrical shell under internal pressure / G.I. Mikhasev // *J. Sound and Vibr.* – 1998. – V. 209, N. 4. – P. 543–559.
10. Михасев Г.И. О волновых формах движения бесконечной цилиндрической оболочки с переменными параметрами / Г.И. Михасев // *Изв. РАН. Механика тверд. тела*. – 1995. – № 6. – С. 129–137.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Поленов В.С., Чигарев А.В.

The non-uniform elastic porous environment in which three waves are distributed is considered: two longitudinal and one cross. Intensity of a cross wave is received.

Динамическому деформированию однородной пористой среды посвящен ряд работ. Среди них важное место занимают работы М.А. Био [1-3], в которых отражена теория распространения упругих стационарных волн в двухкомпонентной среде.

В данной работе изучаются нестационарные волны в неоднородной упругой пористой среде. Пористое тело представляет собой микрон неоднородную среду, физико-механические характеристики которой являются функциями координат. Предполагается, что размеры пор малы по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики движения. Это позволяет считать обе среды сплошными, и в каждой точке пространства в этом случае будет два вектора смещения: вектор смещения твердой фазы и вектор смещения газа, который заполняет полость в результате газовыделения или газопоглощения при литье.

Тогда полный тензор напряжений для неоднородной упругой пористой среды запишется в виде [4,5]

$$T_{ik} = \lambda u_{r,r}^{(1)} \delta_{ik} + \mu (u_{i,k}^{(1)} + u_{k,i}^{(1)}) + c \cdot \chi \cdot u_{r,r}^{(2)} \delta_{ik}, \quad (1)$$

а силу N , действующую на газ, отнесенную к единице поперечного сечения пористой среды запишем в виде

$$N = c \chi u_{k,k}^{(1)} + c R_0 u_{k,k}^{(2)}, \quad (2)$$
$$\chi = \frac{1-c}{c} \cdot R_0$$

Соотношения (1) и (2) вместе с уравнениями движения

$$\rho_{11} \ddot{u}_i^{(1)} + \rho_{12} \ddot{u}_i^{(2)} = T_{ik,k},$$
$$\rho_{11} - \rho_{12}, \rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12}, \quad (3)$$
$$\rho_{12} \ddot{u}_i^{(1)} + \rho_{22} \ddot{u}_i^{(2)} = N, i$$

представляют замкнутую систему уравнений для описания процесса динамического деформирования неоднородной бесконечной упругой среды с наличием пор.

В формулах (1)...(3) $c = c(x_i)$ – пористость; $\lambda = \lambda(x_i), \mu = \mu(x_i)$ – коэффициенты Ламе; $R_0 = R_0(x_i)$ – модуль сжимаемости фазы, заполненной газом; $\rho_{12} = \rho_{12}(x_i)$ – коэффициент динамической связи твердой фазы и газа в поре; $\rho_1 = \rho_1(x_i)$ и $\rho_2 = \rho_2(x_i)$ – плотность твердой фазы и газа в порах; δ_{mn} – символ Кронекера; $u_k^{(\alpha)}$ ($\alpha=1,2$) – компоненты перемещения фаз среды.

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам предполагается суммирование от единицы до трех, по греческим – от единицы до двух. Точка над буквой означает производную по времени.

Продифференцировав (1) и (2) по времени t и используя теорию разрывов [6] для основных соотношений с учетом разности значений величин на двух сторонах волновой поверхности $\Sigma(t)$, аналогично работе [5], получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu)\lambda_j^{(1)}v_jv_i + \mu\lambda^{(1)}_i + c\chi\lambda_j^{(2)}v_jv_i &= \rho_{11}G^2\lambda^{(1)}_i + \rho_{12}G^2\lambda_i^{(2)} \\
 c\chi\lambda_j^{(1)}v_jv_i + c\chi\lambda v_jv_i &= \rho_{12}G^2\lambda_i^{(1)} + \rho_{22}G^2\lambda_i^{(2)}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где G – нормальная скорость движения поверхности $\Sigma(t)$; v_i – компоненты единичной нормали к поверхности; $\lambda_i^{(\alpha)}$ ($\alpha=1,2$) – величина скачков компонент скоростей перемещений.

Предполагая, что $\lambda_i^{(\alpha)}v_i$ не обращаются в нуль на волновой поверхности $\Sigma(t)$, умножим (4) на v_i и просуммируем по повторяющемуся индексу i , получим однородную систему уравнений относительно

$$\omega_k = \lambda_i^{(\alpha)}v_i \quad (k=1,2),$$

решение которой имеет вид:

$$AG_1^4 - BG_1^2 + D = 0, \tag{5}$$

$$A = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2,$$

$$B = -2\rho_{12}c_2 + \rho_{11}c_3 + \rho_{22}c_1,$$

$$D = c_1c_3 - c_2^2,$$

$$c_1 = \lambda + 2\mu, c_2 = c\chi, c_3 = cR_0.$$

Из уравнения (5) следует:

$$G_1^2 = \frac{1}{2A}(B \pm \sqrt{B^2 - 4AD}) \tag{6}$$

Если $\lambda^{(\alpha)}_i \nu_i = 0$ на поверхности $\sum(t)$ при условии, что не все $\lambda^{(\alpha)}_i$ равны нулю одновременно, то из (4) получим:

$$\begin{aligned} (\mu - \rho_{11} G_t^2) \lambda_i^{(1)} - \rho_{12} G_t^2 \lambda_i^{(2)} &= 0 \\ \rho_{12} G_t^2 \lambda_i^{(1)} + \rho_{22} G_t^2 \lambda_i^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Из системы уравнений (7) следует, что скорость поперечной волны определяется равенством:

$$G_t^2 = \rho_{22} (A)^{-1} \quad (8)$$

Таким образом, в упругой неоднородной пористой среде распространяются две продольные и одна поперечная волны, скорости которых определяются по формулам (6) и (8).

Вычислим интенсивность поперечной волны. Для этого продифференцируем (1) и (2) дважды по t и x_j и, записав полученные соотношения в разрывах с учетом геометрических и кинематических условий совместности второго порядка [6] для поперечной волны после преобразований, получим дифференциальное уравнение, определяющее изменение интенсивности $W_t^{(1)}$ поперечной волны в процессе ее распространения в неоднородной упругой пористой среде:

$$\frac{dW_t^{(1)}}{ds} = \left(\Omega_t - \frac{1}{2} \frac{d(\ln G_t \mu)}{ds} \right) W_t^{(1)}, \quad (9)$$

где Ω_e – средняя кривизна поверхности $\sum(t)$, s – расстояние по нормали к поверхности $\sum(t_0)$.

При выводе уравнения (9) учитывалось, что

$$\frac{\delta \lambda_i^{(1)}}{\delta \mathbf{x}} = G_t \frac{d \lambda_i^{(1)}}{ds}.$$

Уравнение (9) не замкнуто, так как содержит среднюю кривизну Ω_t , являющуюся геометрической характеристикой распространяющегося фронта волны. Согласно [7,8] и формулам (8) получим уравнение для Ω_t в лучевой системе координат

$$\frac{d\Omega_t}{ds} = 2\Omega_t^2 - K_t + \frac{1}{2} Q_1, \quad (10)$$

где K – гауссова кривизна поверхности $\sum(t)$, которая определяется из уравнения:

$$\frac{dK_t}{ds} = 2\Omega_t K_t + \frac{1}{2} \Omega_t Q_1 - Q_2, \quad (11)$$

$$Q_1 = C_t^{-1} C_{t,\alpha\beta} q^{\alpha\beta},$$

$$Q_2 = C_t^{-1} C_{t,\alpha\beta} b^{\alpha\beta}$$

$$C_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_{11}}},$$

где $g^{\alpha\beta}$ – контравариантные коэффициенты первой фундаментальной квадратичной формы;
 $b^{\alpha\beta}$ – коэффициенты второй квадратичной формы.

Решения уравнений (10) и (11) приведены в работах [7,8].

Определим уровень амплитуды, удовлетворяющий уравнению (9) и начальным условиям:

$$W_t^{(0)}(0) = W_{0t}^{(0)},$$

$$W_t^{(i)}(0) = 0, \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots$$

Подставляя

$$W_t = \sum_{n=0}^{\infty} W_t^{(n)}$$

в уравнение (9) и решая методом последовательных приближений, получим:

$$\frac{dW_t^{(0)}}{ds} = \Omega_t^{(0)} W_t^{(0)}, \quad (13)$$

$$\Omega_t^{(0)} = \frac{\Omega_0 - K_0 s}{1 - 2\Omega_0 s + K_0 s};$$

$$\frac{dW_t^{(1)}}{ds} = \Omega_t^{(0)} W_t^{(1)} + (\Omega_t^{(1)} - f^{(1)}) W_t^{(0)}; \quad (14)$$

$$\frac{dW_t^{(2)}}{ds} = \Omega_t^{(0)} W_t^{(2)} + (\Omega_t^{(1)} - f^{(1)}) \Omega_t^{(1)} + \Omega_t^{(2)} W_t^{(0)} \quad (15)$$

Решения уравнений (13)...(15) при начальных условиях (12) в предположении, что в начале волна является плоской, то есть $\Omega^{(1)} = K^{(1)} = 0$, будут записаны в виде:

$$W_t^{(0)} = \frac{W_{t0}^1}{\sqrt{\psi}}, \quad (16)$$

$$\psi = 1 - 2\Omega_0 s + K_0 s^2;$$

$$W_r^{(1)} = -\frac{W_{r0}^{-1}}{\sqrt{\psi}} \int_0^s f^{(1)}(s) ds, \quad (17)$$

$$f^{(1)}(s) = \frac{1}{2} \frac{d(\ln G_r \mu)}{ds};$$

$$W_r^{(2)} = \frac{W_{r0}^{-1}}{\sqrt{\psi}} \int_0^s \int_0^s f^{(1)}(s_1) f^{(2)}(s_2) ds_1 ds_2 + \int_0^s \Omega_r^{(2)}(s_2) ds_2 \quad (18)$$

Тогда:

$$W_r^1 = \frac{W_{r0}^{-1}}{\sqrt{\psi}} \left(1 + \int_0^s f^{(1)}(s_1) ds_1 + \int_0^s \Omega_r^{(2)}(s_2) ds_2 + \int_0^s \int_0^s f^{(1)}(s_1) f^{(1)}(s_2) ds_1 ds_2 \right) \quad (19)$$

Из второго равенства (7) находим W_r^2

$$W_r^2 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} W_r^{(1)} \quad (20)$$

Формулы (19) и (20) дают выражения для определения интенсивности поперечной упругой волны в неоднородной пористой среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Био М.А. Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды. // Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. – 1956. №1.-С. 140-146.
2. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. // J.Appl. Phys. - 1953. V.26. №2. P. 182-185.
3. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. // J.Acoust. Soc. America. - 1956. V.28. №2. P.168-178.
4. Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах. // ПММ. - 1959. Т.23. Вып.6. - С. 1115-1123.
5. Масликова Т.И., Поленов В.С. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах. // МТТ. –2005. №1. – С. 104-108.
6. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – М.: Мир. 1964. – 308с.
7. Поленов В.С., Чигарев А.В. Распространение волн в неоднородной вязкоупругой среде с начальными напряжениями. // ПММ. - 1994. Т.58. №3. - С. 181-185.
8. Чигарев А.В. К геометрии волновых фронтов в неоднородных средах. // Акустический журнал. - 1980. Т. 26. Вып. 6. - С. 905-911.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБЩИХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ ВОЗДУХА НА КРОНЫ ДЕРЕВЬЕВ

Немцов В.Б., Борисевич С.А.

The expression for the air resistance force for the flow through the tree crown is obtained. Particular calculations are performed for the ellipsoid crown of a tree.

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди сил, действующих на дерево, важную роль играет сила сопротивления воздуха. Подобная сила возникает при действии на стоящее дерево сил давления ветра либо при движении кроны дерева при падении дерева. Упомянутые выше силы будем называть ветровой нагрузкой. Обычно в инженерных расчетах используют упрощенное представление о форме кроны дерева в виде конуса с треугольной площадью миделевого сечения и с центром тяжести, расположенным на $1/2$ высоты кроны от ее основания. Ветровая нагрузка на крону рассчитывается по формуле:

$$F_K = P_K \cdot P \quad (1)$$

где P_K - лобовая поверхность кроны, воспринимающая давление ветра, м^2 ;

P - давление ветра, Па.

Лобовую поверхность кроны выражают через площадь миделевого (продольного осевого) сечения кроны A_K и коэффициент ее заполнения сучьями, ветвями, листьями, хвойными лапками и хвоей K_3 :

$$P_K = A_K \cdot K_3 \quad (2)$$

Коэффициент заполнения K_3 различен для различных пород дерева, определяется опытным путем и очевидно связан с фрактальной размерностью кроны. В данной работе для расчета ветровой нагрузки используется общий подход, основанный на общих уравнениях механики сплошных сред.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения динамики сплошных сред можно установить на основе фундаментальных общих теорем динамики: теоремы об изменении импульса (количества движения) и теоремы об изменении кинетического момента [1]. Запишем первую теорему:

$$\frac{dQ}{dt} = R^e, \quad (3)$$

где Q - импульс сплошной среды, заключенной в движущемся объеме V , представляется в виде интеграла по этому объему $Q = \int_V \rho v dV$.

где ρ - плотность среды, v - вектор скорости среды.

Внешние силы, действующие на движущийся материальный объем V , принято подразделять на массовые и поверхностные.

$$R^e = R_{\text{мас}} + R_{\text{пов}} \quad (4)$$

Главный вектор массовых сил \mathbf{R}_{mac} представляется в виде интеграла по объему :

$$\mathbf{R}_{\text{mac}} = \int_V \rho \mathbf{f} dV, \quad (5)$$

где \mathbf{f} – массовая сила, отнесенная к единице массы.

Главный вектор поверхностных сил $\mathbf{R}_{\text{пов}}$ представляется в виде интеграла по поверхности

$$\mathbf{R}_{\text{пов}} = \int_S \mathbf{p} dS, \quad (6)$$

где \mathbf{p} – вектор напряжения, действующий на поверхность S рассматриваемого объема.

Уравнение (3) применимо не только для движущегося объема среды, но и для неподвижного объема пространства, сквозь который протекает среда [1, 2]. С помощью теоремы об изменении импульса для установившегося движения среды находим силу давления воздуха на крону дерева.

$$\mathbf{R} = - \int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности S , по которой выполняется интегрирование.

В нашем случае рассматриваемой средой является воздух. Проходя сквозь крону дерева скорость воздуха уменьшается при этом меняется его импульс и на крону дерева действует сила, что вытекает из уравнения (3). Эту силу сопротивления можно определять не только в случае движения кроны дерева (например, при падении дерева) но и определять ветровую нагрузку на крону неподвижного дерева.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Для определения силы сопротивления кроны дерева воспользуемся уравнением (7). Разложим вектор полной скорости по ортогональному базису, связанному с кроной:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}. \quad (8)$$

При этом направим ось z параллельно скорости воздушного потока протекающего сквозь крону. В этом случае вектор скорости будет иметь вид:

$$\mathbf{v} = v_z \mathbf{k}$$

Тогда уравнение (7) примет вид:

$$\mathbf{R} = - \int_S \rho v_z \mathbf{k} (v_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) ds, \quad (9)$$

или

$$\mathbf{R} = - \int_S \rho v_z^2 \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) ds \quad (10)$$

Скалярное произведение единичных векторов \mathbf{k} и \mathbf{n} есть по определению:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) = \cos(\mathbf{nk}). \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в (10) получаем:

$$\mathbf{R} = - \int_S \rho v_z^2 \mathbf{k} \cos(\mathbf{nk}) ds . \quad (12)$$

В дальнейшем будем пользоваться проекцией силы на ось z .

Перейдем от поверхностного интеграла в правой части выражения (12) к двойному ($\cos(\mathbf{nk}) ds = dxdy$). Так как поверхность кроны двухсторонняя (рис. 1) необходимо зафиксировать какую либо из ее сторон и принимать площадь проекции со знаком плюс, это равносильно выбору на поверхности определенной ориентации [4]. Поверхность, из которой выходит поток воздуха будем считать положительно ориентированной, поверхность, в которую входит поток будем считать отрицательно ориентированной. В каждой точке поверхности можно определить некоторую функцию скорости. Учитывая вышеперечисленное можем переписать уравнение (12) в следующем виде:

$$\mathbf{R}_e = \int_{D2} \rho v_{z0}^2 dxdy - \int_{D1} \rho v_z^2 dxdy . \quad (13)$$

где $D1$ и $D2$ – плоские фигуры – проекции поверхности кроны на плоскость xu , по которой выполняется интегрирование, v_{z0}, v_z – скорость на поверхности в которую входит и выходит поток. Форма проекции определяется формой кроны.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ПОТОКА ВОЗДУХА

В рассматриваемом случае скорость потока воздуха изменяется благодаря рассеянию частиц воздуха, а также вследствие потери импульса, затраченного на деформацию веток кроны. Детальное рассмотрение взаимодействия воздушного потока с кроной дерева затруднительно, поэтому в дальнейшем применим вероятностный подход. В результате задача прохождения воздушного потока может быть решена на основе вероятностных представлений, подобно тому, как это делается при анализе рассеяния частиц и поглощения излучения [3].

Пусть число неподвижных рассеивающих частиц в единице объема будет n . Заменим каждую рассеивающую частицу мишенью в виде кружка радиусом r и площадью σ , выбранной таким образом, что каждая движущаяся частица, которая пройдет внутри этой мишени испытает отклонение. Площадь σ называется «эффективным сечением» и, соответственно r радиусом эффективного сечения. Произведение $n\sigma$ называется макроскопическим сечением; оно представляет собой сумму эффективных сечений в единице объема.

Рассмотрим ослабление потока частиц при прохождении сквозь слой любой толщины, имея в виду, что каждая частица, испытавшая «соударение», выйдет из параллельного потока и не будет зарегистрирована. Разобьем весь слой на бесконечно тонкие слои dz . Число рассеивающих частиц, приходящихся на каждую единицу площади слоя dz , будет $n dz$. Сумма их эффективных сечений равна $\sigma n dz$.

Если на переднюю поверхность бесконечно тонкого слоя падает параллельный поток частиц плотностью N , то ослабление потока будет

$$-dN = N \sigma n dz , \quad (14)$$

откуда, интегрируя, получаем

$$N = N_0 e^{-n\sigma z} = N_0 e^{-kz} , \quad (15)$$

где N_0 – плотность потока частиц на входе в толстый слой. Произведение $n\sigma$ обозначено буквой k .

С другой стороны плотность потока частиц можем представить следующим образом:

$$N = \rho v \quad (16)$$

Сопоставляя выражения (15) и (16) принимаем, что скорость потока воздуха при прохождении его через крону меняется согласно закону:

$$v = v_0 e^{-kz}, \quad (17)$$

где v_0 – начальная скорость потока на входе в крону дерева, z – путь, пройденный выделенным элементом потока через крону.

5. РАСЧЕТ СИЛЫ

Теперь задача свелась к вычислению выражения (13) распространенного на внешнюю поверхность, аппроксимирующую форму кроны (обычно это сфера либо эллипсоид вращения, что зависит от породы дерева).

На поверхности, в которую входит поток, функция скорости постоянна и равна v_0 . На поверхности, из которой поток выходит скорость меняется согласно закону (17). Учитывая все вышеперечисленное, получаем:

$$R = \int_{D2} \rho v_0^2 dx dy - \int_{D1} \rho (v_0 e^{-kz})^2 dx dy. \quad (18)$$

где $D1$ и $D2$ – плоские фигуры – проекции поверхности кроны на плоскость xu , по которым выполняется интегрирование на входе и выходе потока. Будем считать их равными $D1 = D2 = D$.

Плотность воздуха и начальную скорость будем считать постоянными, поэтому вынесем их за знак интегрирования. Получаем:

$$R = \rho v_0^2 \int_D (1 - e^{-2kz}) dx dy \quad (19)$$

Примем $2k = K$ и перепишем выражение (19)

$$R = \rho v_0^2 \int_D (1 - e^{-Kz}) dx dy. \quad (20)$$

Рассмотрим частный случай когда форма кроны дерева трехосный эллипсоид (рис 1), уравнение которого следующее [4] :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1. \quad (21)$$

В этом случае область D ограничена координатными осями и эллипсом, уравнение которого в явном виде:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (22)$$

Уравнение поверхности эллипсоида в явном виде будет

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (23)$$

Следовательно, интеграл примет вид:

$$R = 4\rho v_0^2 \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(1 - e^{-Kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \right) dx dy \quad (24)$$

Интегрирование ведется для одной четверти эллипсоида, поэтому перед интегралом (24) появляется четверка.

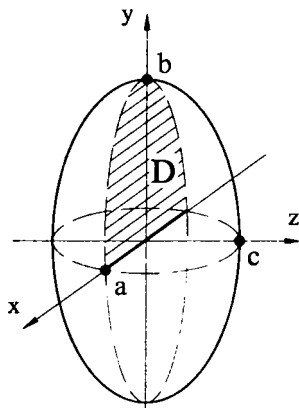


Рис.1. Модель кроны дерева в виде трехосного эллипсоида вращения.

Для решения интеграла (24) необходимо знать значение коэффициента K . Для оценки его величины построим зависимость $R(K)$. Вычислим интеграл (24) численно и получаем искомое значение силы сопротивления. Параметры кроны задаем исходя из реальных размеров кроны деревьев [5].

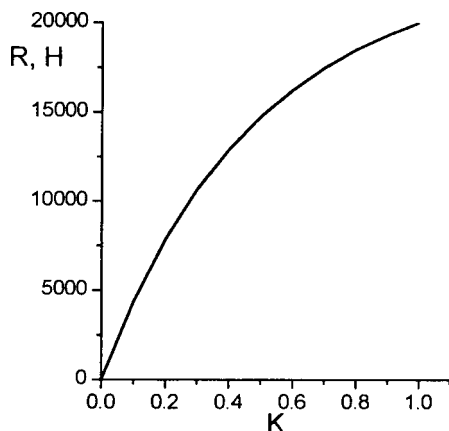


Рис 2. Зависимость силы действующей на крону дерева от коэффициента K (Размеры кроны приняты следующие $a = 3$ м, $b = 5$ м, $c = 3$ м, скорость $v_0 = 20$ м/с).

Значение K равное нулю соответствует абсолютно проницаемой кроне и поэтому сила сопротивления равна нулю. Интересно посмотреть зависимость силы от величины скорости на входе в крону (рис. 3). Значения коэффициента K определяются экспериментально. В качестве примера примем $K=0.9$.

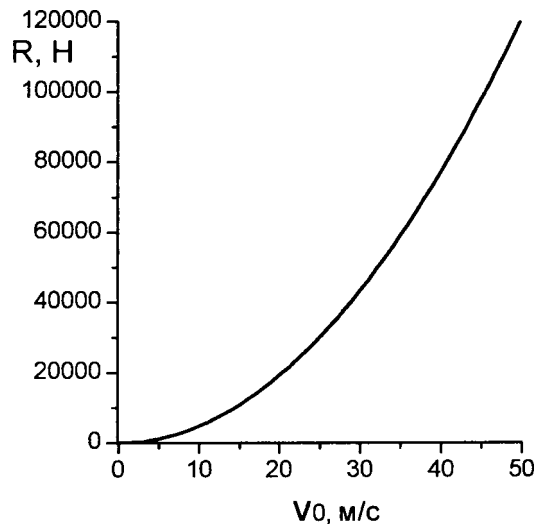


Рис 3. Зависимость силы от скорости движения воздуха на входе в крону ($K=0.9$).

Подобные расчеты можно привести для различных поверхностей, которые аппроксимируют кроны различных пород деревьев. Для этого нужно поменять пределы интегрирования и уравнение поверхности кроны в интеграле (24).

Коэффициент K очевидно связан с фрактальной размерностью кроны некоторой зависимостью. Установление данной зависимости будет являться темой последующих исследований. Таким образом, из приведенных выше рассуждений видно, что традиционные представления о квадратичном по скорости законе для силы сопротивления воздуха, протекающего через крону дерева, является приближенным. Наша теория позволяет уточнить упомянутый выше закон.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М., 1983. Т 2, – 640 с.
2. Немцов В. Б. Макаревич С. С. Учебно-методическое пособие по разделу «Механика сплошных сред». – Минск, 1980.
3. Шпольский Э.В. Атомная физика. – М., 1974. – 576 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М., 1969. Т 3, – 656 с.
5. Коротаяев Л.В. Параметры деревьев и хлыстов как объектов лесозаготовительного производства. – Ленинград: АЛТИ, 1982, – 80 с.

РАСЧЁТ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК.

Семыкина Т.Д., Лопырёва Е.В.

Calculation design is considered In work from transversal-izotropic material at condition elaborated theories such shell. At problems to theories shell on base of the classical theory does not manage to take into account the main particularities of the material, such possibility gives the elaborated theory a shell.

Is it Below offered to conduct the decision by variational method.

Многие элементы машино- и самолётостроения изготовлены из трансверсально изотропных материалов, которые обладают осью симметрии упругих свойств [1]. Использование классических гипотез Кирхгофа-Лява не позволяет учесть особенности этих материалов, поэтому при расчёте таких оболочек будем использовать гипотезы уточнённой теории [2].

Введём систему координат смешанного типа α, β, z (z – координата, отсчитываемая от срединной поверхности, α, β – сетка, связанная с линиями кривизны срединной поверхности).

Уточнённая теория основывается на следующих гипотезах:

а) при определении деформаций $e_{\alpha\alpha}, e_{\beta\beta}$ считаем, что касательные напряжения не отличаются от соответствующих напряжений, найденных по гипотезе недеформируемых нормалей, то есть от соответствующих напряжений классической теории;

б) нормальные к срединной поверхности перемещения не зависят от координаты z ;

в) нормальными напряжениями σ_z на площадках, параллельных срединной поверхности, можно пренебречь.

Принимая приведённые гипотезы, мы приближённо полагаем

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \varphi(\alpha, \beta), \quad \sigma_{\beta\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \psi(\alpha, \beta),$$

$$\varepsilon_z = 0, U_z = U_z(\alpha, \beta) = w(\alpha, \beta), \quad \sigma_z = 0, \quad (1)$$

где φ, ψ – функции, определяемые из решения задачи с учётом гипотез классической теории

$$\varphi(\alpha, \beta) = 12/h^3 Q_1; \quad \psi(\alpha, \beta) = 12/h^3 Q_2. \quad (2)$$

Запишем закон Гука для трансверсально-изотропного материала:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\alpha} + \nu\varepsilon_{\beta}); \quad \sigma_{\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\beta} + \nu\varepsilon_{\alpha}); \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{\alpha\beta};$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = G'e_{\alpha\alpha}; \quad \sigma_{\beta\beta} = G'e_{\beta\beta}. \quad (3)$$

Если рассматривается цилиндрическая оболочка, то деформации по толщине оболочки, с учётом (1) и (3), меняются согласно формулам:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\alpha &= \varepsilon_1 + z\chi_1 + \frac{h^2}{8G'} \left[\left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right]; \\
\varepsilon_\beta &= \varepsilon_2 + \left(z - \frac{z^2}{R} \right) \chi_2 + \frac{h^2}{8G'} \left(z - \frac{z^2}{2R} - \frac{4z^3}{3h^2} + \frac{z^4}{Rh^2} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \beta}; \\
\varepsilon_{\alpha\beta} &= \omega + \left(z - \frac{z^2}{2R} \right) \tau + \frac{h^2}{8G'} \left(z - \frac{z^2}{2R} + \frac{4z^3}{3h^2} + \frac{4z^4}{Rh^2} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \\
&+ \frac{h^2}{8G'} \left(z + \frac{z^2}{2R} - \frac{4z^3}{3h^2} - \frac{z^4}{3Rh^2} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь ε_α , ε_β , ω - деформации элементов срединной поверхности, χ_1 , χ_2 , τ - изменения кривизн и крутка срединной поверхности.

Рассмотрим осесимметричное нагружение цилиндрических оболочек. В этом случае $\psi = 0$ и напряженно-деформированное состояние будет характеризоваться тремя компонентами деформации: ε_α , ε_β , $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

С учетом сказанного внутренняя энергия примет вид:

$$U = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \varepsilon_\beta dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} dz. \tag{5}$$

Учитывая соотношения (3) и (5), получим после интегрирования выражение удельной внутренней энергии через обобщенные компоненты деформаций срединной поверхности, пренебрегая членами порядка h^7 ,

$$\begin{aligned}
U &= \frac{E}{1-\nu^2} \left((\varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2)h + (\chi_1^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2) \frac{h^3}{12} - \right. \\
&\left. - \frac{\nu h^3}{12R} (\varepsilon_1\chi_2 + 2\varepsilon_2\chi_2) + \frac{h^5}{80G'R^2} \chi_2^2 + \frac{h^5}{60G'} (\chi_1 + \nu\chi_2) \frac{d\varphi}{d\alpha} \right) + \frac{h^5}{120G'} \varphi^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Отметим, что деформации и кривизны выражаются через перемещения с помощью соотношений (4), а функция $\varphi(\alpha, \beta)$ определяется из решения задачи с использованием классической теории по формулам (2).

При расчете приближенными методами используем вариационное уравнение Лагранжа, согласно которому:

$$\delta V - \delta A_p = 0. \tag{7}$$

Здесь A_p - работа внешних заданных сил на допустимых перемещениях, V - внутренняя энергия оболочки:

$$V = \iint_{\Omega} U \, d\alpha \, d\beta \tag{8}$$

Решение уравнения (7) ищется среди всех кинематически допустимых перемещений. Последние должны быть непрерывными и дифференцируемыми в области решения и удовлетворять граничным условиям, заданным для перемещений.

Исходя из принятых гипотез, при варьировании внутренней энергии V функция $\varphi(\alpha, \beta)$ считается определённой, и последнее слагаемое в уравнении (6) можно опустить при варьировании. С учётом зависимости внутренней энергии от деформаций срединной поверхности U можно разбить на два варьируемых слагаемых:

$$U_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \left((\varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2)h + (\chi_1^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2)\frac{h^3}{12} + \frac{\nu h^3}{12R}(\varepsilon_1\chi_2 + 2\varepsilon_2\chi_2) + \frac{h^5}{80G'R^2}\chi_2^2 \right), \quad (9)$$

$$U_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^5}{60G'} (\chi_1 + \nu\chi_2) \frac{d\varphi}{d\alpha}. \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) определяют энергию V в виде:

$$V_1 = \iint_{\Omega} U_1 AB d\alpha d\beta + \iint_{\Omega} U_2 AB d\alpha d\beta. \quad (11)$$

Первое слагаемое даёт квадратичную относительно деформаций срединной поверхности функцию, второй – линейную. Таким образом, $\varphi(\alpha, \beta)$ войдёт наравне с внешними силами, и при применении вариационных методов, в дальнейшем можно в качестве интенсивности обобщённых усилий принимать $\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)G'} \frac{d\varphi}{d\alpha}$, а в качестве обобщённых перемещений $\frac{h}{5}(\chi_1 + \nu\chi_2)$. Введение таких фиктивных сил позволяет использовать разработанные для изотропных оболочек методы расчёта трансверсально изотропных оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
2. Родионова В.А. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек: Учебное пособие/ В.А. Родионова, Б.Ф. Титаев, К.Ф. Черных. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1996. – 280 с.

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУЛИСТНОГО КОЛЬЦА

Сильвестров В.В., Смирнов А.В.

The first basic boundary-value problem of elasticity theory for two-sheeted ring is solved in an explicit form using the power series method. The construction is formed from two identical rings, which are joined with one another along boundary circumferences. The Kolosov-Muskhelishvili complex potentials are found, and the stressed state of rings is investigated.

Методом степенных рядов решается первая краевая задача теории упругости для двулистного кольца, образованного из двух одинаковых колец путем наложения их друг на друга и соединения вдоль граничных окружностей. Находятся комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили, исследуется напряженное состояние колец.*

1. Постановка задачи. Пусть две тонкие упругие пластины S_1 и S_2 , занимающие на комплексной плоскости $z = x + iy$ одну и ту же область $R_1 \leq |z| \leq R_2$, наложены одна на другую и соединены друг с другом жестко вдоль окружностей $L_1 : |z| = R_1$ и $L_2 : |z| = R_2$. Пластины являются однородными, изотропными и имеют толщины, модули сдвига, коэффициенты Пуассона h_1, μ_1, ν_1 и h_2, μ_2, ν_2 соответственно. На линиях соединения пластин действуют расположенные в плоскостях пластин заданные внешние усилия

$$N_j(t) + iT_j(t) = p_j(t), \quad t \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (1.1)$$

где N_j – нормальная, а T_j – касательная компонента вектора внешних усилий, действующих на касательную площадку к линии L_j в точке t . Поверхности пластин касаются друг друга без трения, и передача усилий с одной пластины в другую происходит только через линии их соединения, на которых выполняются условия жесткого соединения:

$$u_1(t) + iv_1(t) = u_2(t) + iv_2(t), \quad t \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (1.2)$$

где $u_k + iv_k$ – вектор смещений точек пластины S_k ($k = 1, 2$).

Будем считать, что изгиб и пространственные эффекты концентрации напряжений на линиях соединения, а также в точках пластин пренебрежимо малы и в них реализуется обобщенное плоское напряженное состояние, определяемое по формулам Колосова–Мусхелишвили [1]

$$\begin{aligned} (\sigma_r + \sigma_\theta)_k(z) &= 4\operatorname{Re}\Phi_k(z), \\ (\sigma_r + i\tau_{r\theta})_k(z) &= \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} - z\overline{\Phi'_k(z)} - z^{-1}\overline{z\Psi'_k(z)}, \\ 2\mu_k \frac{\partial}{\partial\theta}(u + iv)_k(z) &= iz(\kappa_k\Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)} + z\overline{\Phi'_k(z)} + z^{-1}\overline{z\Psi'_k(z)}), \\ 2\mu_k \frac{\partial}{\partial r}(u + iv)_k(z) &= e^{i\theta}(\kappa_k\Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)}) - r\overline{\Phi'_k(z)} - e^{-i\theta}\overline{z\Psi'_k(z)}, \\ z \in S_k, \quad \kappa_k &= (3 - \nu_k)/(1 + \nu_k), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 04-01-00160.

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений в полярных координатах r, θ ($re^{i\theta} = x + iy$), функции и параметры с индексом $k=1$ соответствуют пластине S_1 , а с индексом $k=2$ – пластине S_2 . Все напряжения, здесь и далее, берутся в расчете на единицу толщины пластины, в то время, как внешние усилия в условиях (1.1) берутся в расчете на всю толщину линий соединения пластин, поэтому эти условия имеют вид

$$h_1(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_1(t) + h_2(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_2(t) = p_j(t), \quad t \in L_j, \quad j=1,2. \quad (1.4)$$

Функции $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$ (комплексные потенциалы) аналитичны и однозначны в области S_k ($k=1,2$). В силу формул (1.3) и условий (1.2), (1.4) они должны удовлетворять краевым условиям

$$\begin{aligned} \mu_2(\kappa_1\Phi_1(t) - \overline{\Phi_1(t)} + i\overline{\Phi_1'(t)} + t^{-1}\overline{t\Psi_1(t)}) &= \mu_1(\kappa_2\Phi_2(t) - \overline{\Phi_2(t)} + i\overline{\Phi_2'(t)} + t^{-1}\overline{t\Psi_2(t)}), \\ h_1(\Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)} - t\overline{\Phi_1'(t)} - t^{-1}\overline{t\Psi_1(t)}) &+ h_2(\Phi_2(t) + \overline{\Phi_2(t)} - t\overline{\Phi_2'(t)} - t^{-1}\overline{t\Psi_2(t)}) = p_j(t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$t = R_j e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad j=1,2.$$

Требуется найти комплексные потенциалы $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$ и напряжения в пластинах $S_k, k=1,2$.

2. Решение задачи. Запишем заданные функции $p_j(t), t \in L_j, j=1,2$, как функции от полярного угла θ :

$$p_j(t) = p_j(R_j e^{i\theta}) = g_j(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad j=1,2. \quad (2.1)$$

Как и при решении основных задач теории упругости для кольца [1], будем считать функции $g_k(\theta)$ непрерывно-дифференцируемыми на отрезке $[0, 2\pi]$, удовлетворяющими условиям $g_j(0) = g_j(2\pi), g_j'(0) = g_j'(2\pi), j=1,2$, и имеющими вторые производные, удовлетворяющие условию Дирихле. Тогда эти функции разлагаются в комплексные ряды Фурье:

$$g_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{n,j} e^{in\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad j=1,2, \quad (2.2)$$

$$A_{n,j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_j(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.3)$$

коэффициенты которых удовлетворяют неравенствам

$$|A_{n,j}| \leq M/|n|^3, \quad M = \text{const} > 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j=1,2. \quad (2.4)$$

Будем искать комплексные потенциалы в виде рядов Лорана

$$\Phi_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n,k} z^n, \quad \Psi_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{n,k} z^n, \quad z \in S_k, \quad k=1,2. \quad (2.5)$$

Однозначность смещений в пластинах S_1 и S_2 накладывает на коэффициенты этих рядов два условия

$$\kappa_k a_{-1,k} + \overline{b_{-1,k}} = 0, \quad k=1,2. \quad (2.6)$$

Предположим, что ряды (2.5) и ряды

$$\Phi_k'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_{n,k} z^{n-1}, \quad z \in S_k, \quad k=1,2 \quad (2.7)$$

сходятся равномерно в замкнутой области $R_1 \leq |z| \leq R_2$. Тогда, подставив выражения функций $\Phi_k(t), \Psi_k(t)$ и производных $\Phi_k'(t)$ в условия (1.5) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов (2.5), которая распадается на отдельные конечные сис-

темы относительно коэффициентов $a_{\pm n,1}, a_{\pm n,2}, b_{-2\pm n,1}, b_{-2\pm n,2}$ при каждом конкретном значении $n = 0, 1, \dots$

При $n = 0$ соответствующая система состоит из четырех уравнений

$$\begin{aligned} \kappa_1 a_{0,1} - \mu_* \kappa_2 a_{0,2} - \bar{a}_{0,1} + \mu_* \bar{a}_{0,2} + (\bar{b}_{-2,1} - \mu_* \bar{b}_{-2,2}) R_j^{-2} &= 0, \\ h_* a_{0,1} + a_{0,2} + h_* \bar{a}_{0,1} + \bar{a}_{0,2} - (h_* \bar{b}_{-2,1} + \bar{b}_{-2,2}) R_j^{-2} &= B_{0,j}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\mu_* = \mu_1/\mu_2$, $h_* = h_1/h_2$, $B_{0,j} = A_{0,j}/h_2$. Все коэффициенты системы (2.8) действительны, поэтому она в свою очередь распадается на две отдельные системы относительно действительных и мнимых частей неизвестных $a_{0,1}, a_{0,2}, b_{-2,1}, b_{-2,2}$ соответственно. Система относительно действительных частей этих неизвестных имеет ненулевой определитель, поэтому она разрешима однозначно, а определитель системы относительно мнимых частей указанных неизвестных равен нулю, в силу чего она разрешима тогда и только тогда, когда

$$R_1^2 \operatorname{Im} A_{0,1} = R_2^2 \operatorname{Im} A_{0,2}. \quad (2.9)$$

При выполнении условия (2.9) решение системы (2.8) находится по формулам

$$\begin{aligned} a_{0,1} &= \alpha_0 \mu_* (\kappa_2 - 1) + i\beta_0, \quad a_{0,2} = \alpha_0 (\kappa_1 - 1) + i\beta_0 \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_* (\kappa_2 + 1)}, \\ b_{-2,1} &= \mu_* (\alpha_1 + i\beta_1), \quad b_{-2,2} = \alpha_1 + i\beta_1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где β_0 - произвольная действительная постоянная и

$$\alpha_0 = \frac{R_1^2 \operatorname{Re} B_{0,1} - R_2^2 \operatorname{Re} B_{0,2}}{2(R_1^2 - R_2^2)(h_* \mu_* (\kappa_2 - 1) + \kappa_1 - 1)}, \quad \alpha_1 = \frac{R_1^2 R_2^2 (\operatorname{Re} B_{0,1} - \operatorname{Re} B_{0,2})}{(R_1^2 - R_2^2)(h_* \mu_* + 1)}, \quad \beta_1 = \frac{R_1^2 \operatorname{Im} B_{0,1} + R_2^2 \operatorname{Im} B_{0,2}}{2(h_* \mu_* + 1)}.$$

Из формул (1.3) и (2.5) видно, что значение постоянной β_0 на напряженное состояние пластин не влияет, поэтому, без ограничения общности, можно брать $\beta_0 = 0$.

Условие (2.9) согласно (2.3), (1.1) имеет вид

$$R_1 \int_{L_1} T_1(t) ds = R_2 \int_{L_2} T_2(t) ds$$

(ds - дифференциал длины дуги) и выражает равенство нулю главного момента (относительно начала координат) внешних усилий, приложенных к совокупности линий L_1, L_2 .

При $n = 1, 2, \dots$ система уравнений для нахождения восьми неизвестных $a_{\pm n,k}, b_{-2\pm n,k}$, $k = 1, 2$, состоит из четырех уравнений

$$\begin{aligned} (\kappa_1 a_{n,1} - \mu_* \kappa_2 a_{n,2}) R_j^n - (n+1)(\bar{a}_{-n,1} - \mu_* \bar{a}_{-n,2}) R_j^{-n} + (\bar{b}_{-n-2,1} - \mu_* \bar{b}_{-n-2,2}) R_j^{-n-2} &= 0, \\ (h_* a_{n,1} + a_{n,2}) R_j^n + (n+1)(h_* \bar{a}_{-n,1} + \bar{a}_{-n,2}) R_j^{-n} - (h_* \bar{b}_{-n-2,1} + \bar{b}_{-n-2,2}) R_j^{-n-2} &= B_{n,j}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

и уравнений, получаемых из приведенных заменой n на $-n$:

$$\begin{aligned} (\kappa_1 a_{-n,1} - \mu_* \kappa_2 a_{-n,2}) R_j^{-n} - (1-n)(\bar{a}_{n,1} - \mu_* \bar{a}_{n,2}) R_j^n + (\bar{b}_{n-2,1} - \mu_* \bar{b}_{n-2,2}) R_j^{n-2} &= 0, \\ (h_* a_{-n,1} + a_{-n,2}) R_j^{-n} + (1-n)(h_* \bar{a}_{n,1} + \bar{a}_{n,2}) R_j^n - (h_* \bar{b}_{n-2,1} + \bar{b}_{n-2,2}) R_j^{n-2} &= B_{-n,j}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $B_{n,j} = A_{n,j}/h_2$. Выделив у уравнений (2.11), (2.12) их вещественные и мнимые части, получим две вещественные системы относительно действительных и мнимых частей неизвестных соответственно. Обе эти системы имеют один и тот же определитель

$$\begin{aligned} \Delta_n &= R_*^{-4n-4} (h_* \mu_* + 1)^2 (R_*^2 (R_*^{2n-1} - 1)^2 - n^2 R_*^{2n} (R_*^2 - 1)^2) \left((R_*^{2n} - R_*^2) (R_*^{2n+2} - 1) (h_* \mu_* \kappa_2 + \kappa_1)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (n^2 - 1) R_*^{2n} (R_*^2 - 1)^2 (h_* \mu_* + 1)^2 \right), \quad R_* = R_1 R_2^{-1}, \end{aligned}$$

который при $n = 1$ обращается в нуль, а при остальных $n = 2, 3, \dots$ отличен от нуля. Следовательно, система (2.11), (2.12) при $n = 2, 3, \dots$ однозначно разрешима. В частности, если свободные члены $B_{n,j} = B_{-n,j} = 0$, $j = 1, 2$, что имеет место, например, при постоянных внешних нагрузках $p_j(t) \equiv \text{const}$, $j = 1, 2$, на линиях соединения пластин, то система (2.11), (2.12) при $n = 2, 3, \dots$ имеет лишь тривиальное решение.

При $n = 1$ система (2.11), (2.12) разрешима тогда и только тогда, когда

$$R_1 A_{-1,1} = R_2 A_{-1,2}, \quad (2.13)$$

что в силу (2.3), (1.1) равносильно условию

$$\int_{L_1} p_1(t) e^{i \arg t} ds = \int_{L_2} p_2(t) e^{i \arg t} ds,$$

выражающему равенство нулю главного вектора внешних усилий, приложенных к линиям соединения L_1, L_2 . При выполнении условия (2.13) решение системы зависит от двух комплексных постоянных C_1, C_2 и находится по формулам

$$a_{-1,1} = (R_1 B_{-1,1} + R_2 B_{-1,2}) (2h_* (1 + \kappa_1))^{-1} + \mu_* (1 + \kappa_2) C_1 + (1 + h_* \mu_*) C_2,$$

$$a_{-1,2} = (\kappa_1 - h_* \mu_*) C_1,$$

$$b_{-1,1} = -\kappa_1 (R_1 \bar{B}_{-1,1} + R_2 \bar{B}_{-1,2}) (2h_* (1 + \kappa_1))^{-1} + (h_* \mu_* - \kappa_1) \bar{C}_2,$$

$$b_{-1,2} = (\kappa_1 + h_* \mu_* \kappa_2) \bar{C}_1 + h_* (1 + \kappa_1) \bar{C}_2,$$

$$a_{1,1} = \frac{1}{(\kappa_1 + h_* \mu_* \kappa_2)(R_1^2 + R_2^2)} \left(\frac{\mu_* \kappa_2 (R_1^3 B_{1,1} - R_2^3 B_{1,2})}{R_1^2 - R_2^2} + \frac{(1 - h_* \mu_* \kappa_2)(R_1 \bar{B}_{-1,1} + R_2 \bar{B}_{-1,2})}{h_* (1 + \kappa_1)} + 2\mu_* (1 + \kappa_2) (h_* \mu_* (1 - \kappa_2) - \kappa_1 + 1) \bar{C}_1 + 2(1 - h_* \mu_* \kappa_2) (1 + h_* \mu_*) \bar{C}_2 \right),$$

$$a_{1,2} = \frac{1}{(\kappa_1 + h_* \mu_* \kappa_2)(R_1^2 + R_2^2)} \left(\frac{\kappa_1 (R_1^3 B_{1,1} - R_2^3 B_{1,2})}{R_1^2 - R_2^2} - (R_1 \bar{B}_{-1,1} + R_2 \bar{B}_{-1,2}) - 2(h_*^2 \mu_*^2 + h_* \mu_* (\kappa_1 \kappa_2 - \kappa_1 + \kappa_2 + 1) + \kappa_1^2) \bar{C}_1 - 2h_* (1 + h_* \mu_*) (1 + \kappa_1) \bar{C}_2 \right), \quad (2.14)$$

$$b_{-3,1} = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \left(\frac{\mu_* R_1 R_2 (R_2 \bar{B}_{1,1} - R_1 \bar{B}_{1,2})}{(1 + h_* \mu_*) (R_1^2 - R_2^2)} + \frac{R_1 B_{-1,1} + R_2 B_{-1,2}}{h_* (1 + \kappa_1)} + 2\mu_* (1 + \kappa_2) C_1 + 2(1 + h_* \mu_*) C_2 \right),$$

$$b_{-3,2} = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \left(\frac{R_1 R_2 (R_2 \bar{B}_{1,1} - R_1 \bar{B}_{1,2})}{(1 + h_* \mu_*) (R_1^2 - R_2^2)} + 2(\kappa_1 - h_* \mu_*) C_1 \right), \quad j = 1, 2.$$

Для нахождения постоянных C_1, C_2 воспользуемся одним из условий (2.6) (другое является следствием первого) и условием

$$\frac{1}{\mu_1} \int_{R_1}^{R_2} (\kappa_1 \Phi_1(r) - \overline{\Phi_1(r)} - r \overline{\Phi_1'(r)} - \overline{\Psi_1(r)}) dr = \frac{1}{\mu_2} \int_{R_1}^{R_2} (\kappa_2 \Phi_2(r) - \overline{\Phi_2(r)} - r \overline{\Phi_2'(r)} - \overline{\Psi_2(r)}) dr,$$

выражающим однозначность смещений при обходе замкнутого контура, составленного из двух отрезков $[R_1, R_2]$ действительной оси, расположенных в пластинах S_1 и S_2 соответственно. В силу (2.5), (2.6) и (2.11), (2.12) последнее условие имеет вид

$$(R_1^2 - R_2^2) (\bar{a}_{1,1} - \mu_* \bar{a}_{1,2}) + 2(\kappa_1 a_{-1,1} - \mu_* \kappa_2 a_{-1,2}) \ln(R_2/R_1) = 0. \quad (2.15)$$

Из уравнений (2.6) и (2.15) находим

$$\begin{aligned} C_1 &= -R_2 \left((R_*^3 \bar{B}_{1,1} - \bar{B}_{1,2}) \delta_1 + (R_* \bar{B}_{-1,1} + \bar{B}_{-1,2}) \delta_2 \right) \delta_0^{-1}, \\ C_2 &= R_2 \kappa_1 (1 + \kappa_2) \left((R_*^3 \bar{B}_{1,1} - \bar{B}_{1,2}) \delta_1 + (R_* \bar{B}_{-1,1} + \bar{B}_{-1,2}) \delta_2 \right) (\delta_0 h_* (1 + \kappa_1))^{-1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\delta_0 = 2(h_* \mu_* - \kappa_1) \left[(R_*^2 - 1) \left((1 + h_* \mu_*)^2 + (h_* \mu_* \kappa_1 + \kappa_2)(1 + h_* \mu_*) - h_* \mu_* (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \right) - (R_*^2 + 1) (\kappa_1 + h_* \mu_* \kappa_2) \left((1 + h_* \mu_*) \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 + h_* \mu_* \kappa_2 \right) \ln R_* \right],$$

$$\delta_1 = h_* \mu_* (\kappa_2 - \kappa_1 (\kappa_1 - \kappa_2 + 1)),$$

$$\delta_2 = (R_*^2 - 1)(h_* \mu_* (\kappa_1 - \kappa_2) + h_* \mu_* + 1) - (R_*^2 + 1) \kappa_1 (\kappa_1 + h_* \mu_* \kappa_2) \ln R_*, \quad R_* = R_1 R_2^{-1}.$$

Таким образом, все коэффициенты рядов (2.5) найдены. Анализ системы уравнений (2.10), (2.11) при больших положительных n с учетом неравенств (2.4) показывает, что

$$\begin{aligned} |a_{n,k}| &\leq M_1 R_2^{-n} n^{-3}, \quad |b_{n,k}| \leq M_1 R_2^{-n} n^{-3}, \quad M_1 = \text{const} > 0, \\ |a_{-n,k}| &\leq M_2 R_1^n n^{-3}, \quad |b_{-n,k}| \leq M_2 R_1^n n^{-3}, \quad M_2 = \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из последних неравенств следует, что ряды (2.5) и (2.7) в области $R_1 \leq |z| \leq R_2$ сходятся абсолютно и равномерно, чем обеспечивается правомерность всех произведенных выше операций над ними.

3. Напряженное состояние в случае постоянной внешней нагрузки. Пусть к внутренней границе L_1 двулестного кольца приложено постоянное внешнее нормальное усилие $N_1(t) = (h_1 + h_2)\sigma_1$, а к внешней границе L_2 – постоянное усилие $N_2(t) = (h_1 + h_2)\sigma_2$. Касательные усилия на обеих линиях отсутствуют. В этом случае $p_j(t) = (h_1 + h_2)\sigma_j$, $j = 1, 2$, и все коэффициенты рядов (2.2) равны нулю, кроме $A_{0,j} = (h_1 + h_2)\sigma_j$, $j = 1, 2$, поэтому условия разрешимости задачи (2.9), (2.13) выполнены. Так как системы (2.11), (2.12) при всех $n = 1, 2, \dots$ являются однородными, то они имеют лишь тривиальное решение. Следовательно, согласно (2.5), (2.10) комплексные потенциалы

$$\Phi_1(z) = \mu_* (\kappa_2 - 1) \alpha_0, \quad \Phi_2(z) = (\kappa_1 - 1) \alpha_0, \quad \Psi_1(z) = \mu_* \alpha_1 z^{-2}, \quad \Psi_2(z) = \alpha_1 z^{-2},$$

где

$$\alpha_0 = \frac{(1 + h_*) (R_1^2 \sigma_1 - R_2^2 \sigma_2)}{2(R_1^2 - R_2^2) (h_* \mu_* (\kappa_2 - 1) + \kappa_1 - 1)}, \quad \alpha_1 = \frac{(1 + h_*) R_1^2 R_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)}{(R_1^2 - R_2^2) (1 + h_* \mu_*)}, \quad h_* = \frac{h_1}{h_2}, \quad \mu_* = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

и на основании формул (1.3) находим напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= 2\mu_* (\kappa_2 - 1) \alpha_0 - \mu_* \alpha_1 |z|^{-2}, \quad \sigma_{\theta 1} = 2\mu_* (\kappa_2 - 1) \alpha_0 + \mu_* \alpha_1 |z|^{-2}, \quad \tau_{r\theta 1} = 0, \\ \sigma_{r2} &= 2(\kappa_1 - 1) \alpha_0 - \alpha_1 |z|^{-2}, \quad \sigma_{\theta 2} = 2(\kappa_1 - 1) \alpha_0 + \alpha_1 |z|^{-2}, \quad \tau_{r\theta 2} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

откуда видно, что напряжения зависят лишь от полярного радиуса r точки $z = r e^{i\theta}$. Анализ формул (3.1) показывает, что с ростом r при $\sigma_1 < \sigma_2$ напряжения σ_{r1}, σ_{r2} монотонно возрастают, а напряжения $\sigma_{\theta 1}, \sigma_{\theta 2}$ монотонно убывают; при $\sigma_1 > \sigma_2$ напряжения σ_{r1}, σ_{r2} убывают, а напряжения $\sigma_{\theta 1}, \sigma_{\theta 2}$ возрастают; при $\sigma_1 = \sigma_2$ все напряжения постоянны. На рис. 1 приведены графики напряжений $\sigma_{r1}, \sigma_{\theta 1}$ и $\sigma_{r2}, \sigma_{\theta 2}$ (кривые 1 и 2 соответственно) в зависимости от r для случая $N_1 = (h_1 + h_2)\sigma$, $N_2 = 0.5(h_1 + h_2)\sigma$ ($\sigma > 0$), когда пластины S_1 и S_2 , имеющие упругие постоянные и толщины $\nu_1 = 0.37$, $\mu_1 = 40$ МПа, $h_1 = 0.5h$ и $\nu_2 = 0.22$, $\mu_2 = 174$ МПа, $h_2 = h$ ($h > 0$) соответственно, соединены друг с другом вдоль окружностей $L_1: |z| = 0.5R$ и $L_2: |z| = R$ ($R > 0$). Пунктирными линиями 3 на этих рисунках изображены графики напряжений в одной из пластин, когда второй пластины нет, и на граничных линиях

L_1, L_2 действуют постоянные внешние нормальные усилия $N_1 = (h_1 + h_2)\sigma$, $N_2 = 0.5(h_1 + h_2)\sigma$.

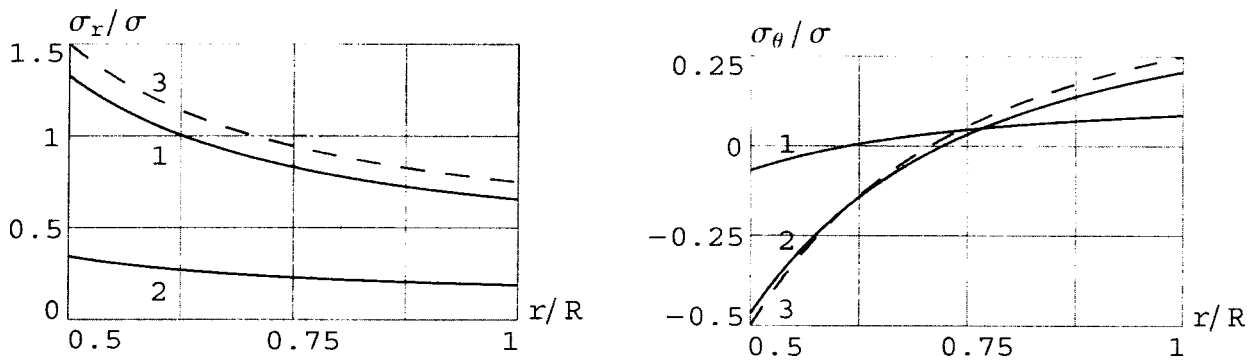


Рис. 1.

Пусть к линиям соединения L_1 и L_2 пластин приложены постоянные внешние касательные усилия $T_1(t) = (h_1 + h_2)\tau$ и $T_2(t) = (h_1 + h_2)R_1^2 R_2^{-2}\tau$ ($\tau = \text{const}$) соответственно, а нормальные усилия отсутствуют. Тогда функции $p_j(t) = iT_j(t)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют условиям (2.9), (2.13) и аналогично предыдущему случаю находим

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = \Phi_2(z) = 0, \quad \Psi_1(z) = i\mu_*\alpha_2 z^{-2}, \quad \Psi_2(z) = i\alpha_2 z^{-2}, \\ \tau_{r\theta 1} = \mu_*\alpha_2 |z|^{-2}, \quad \tau_{r\theta 2} = \alpha_2 |z|^{-2}, \quad \sigma_{rk} = 0, \quad \sigma_{\theta k} = 0, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\alpha_2 = R_1^2(1 + h_*)(1 + h_*\mu_*)^{-1}\tau$. В данном случае нормальные напряжения σ_r, σ_θ во всех точках области отсутствуют, а касательные напряжения $\tau_{r\theta 1}, \tau_{r\theta 2}$ снова зависят только от полярного радиуса r , и с ростом r они монотонно убывают по модулю.

4. Зависимость напряжений от упругих и геометрических параметров. Пусть пластины S_1 и S_2 имеют упругие постоянные и толщины $\nu_1 = 0.37$, $\mu_1 = 40$ МПа, $h_1 = 0.5h$ и $\nu_2 = 0.22$, $\mu_2 = 174$ МПа, $h_2 = h$ ($h > 0$) соответственно. Их внутренняя линия соединения $L_1: |z| = 0.5R$ свободна от внешних усилий, а на внешней линии соединения $L_1: t = R e^{i\theta}$ ($R = \text{const} > 0$) действует нормальное внешнее усилие $N_2 = \sigma(h_1 + h_2)(1 - \cos 2\theta)$, $\sigma = \text{const}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, в то время, как внешнее касательное усилие отсутствует. В этом случае напряжения в пластинах зависят как от полярного радиуса r , так и от полярного угла θ . Их графики на окружностях L_1 и L_2 приведены на рис. 2. Кривые 1, здесь и далее, соответствуют напряжениям в пластине S_1 , кривые 2 – напряжениям в пластине S_2 , а пунктирные линии 3 соответствуют напряжениям в одной из пластин S_1 или S_2 при отсутствии другой, когда на внешней границе L_2 действует то же нормальное усилие $N_2 = \sigma(h_1 + h_2)(1 - \cos 2\theta)$, $\sigma = \text{const}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

На рис. 3 приведены графики напряжений, когда внутренняя граница L_1 свободна от внешних усилий, а на внешней границе L_2 действует касательное внешнее усилие $T_2 = \tau(h_1 + h_2)\sin 2\theta$, $\tau = \text{const}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Нормальное внешнее усилие на L_2 в данном случае отсутствует.

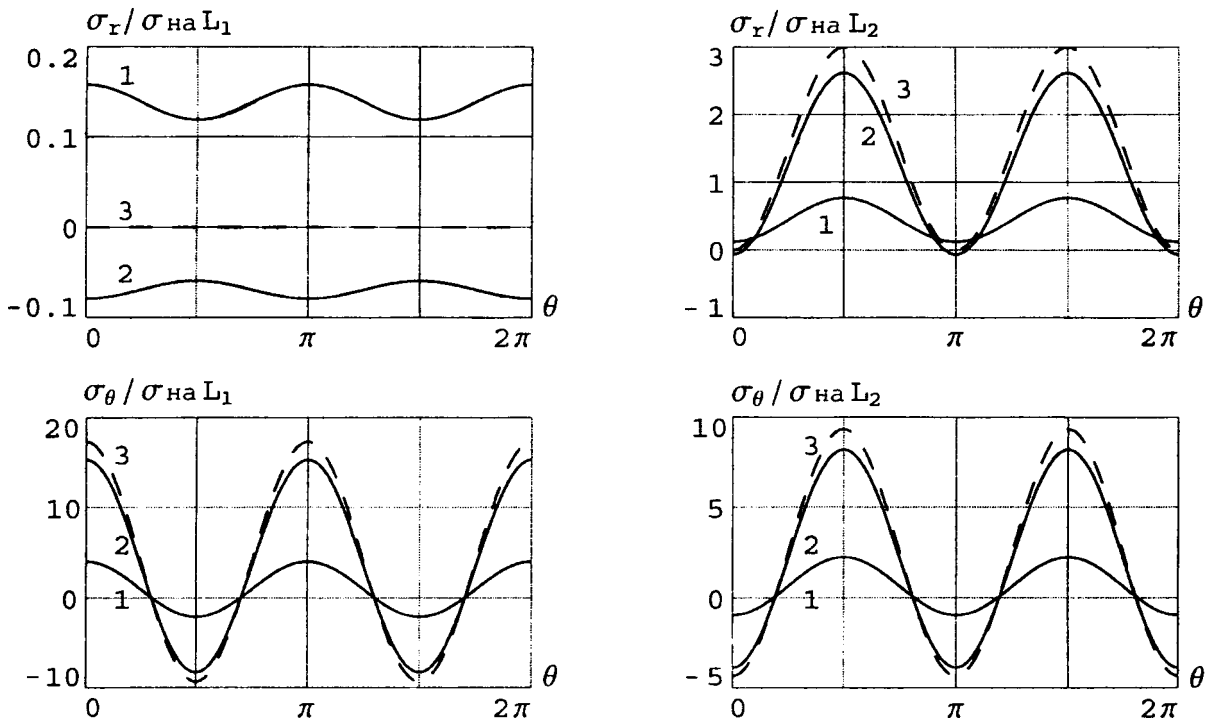


Рис. 2.

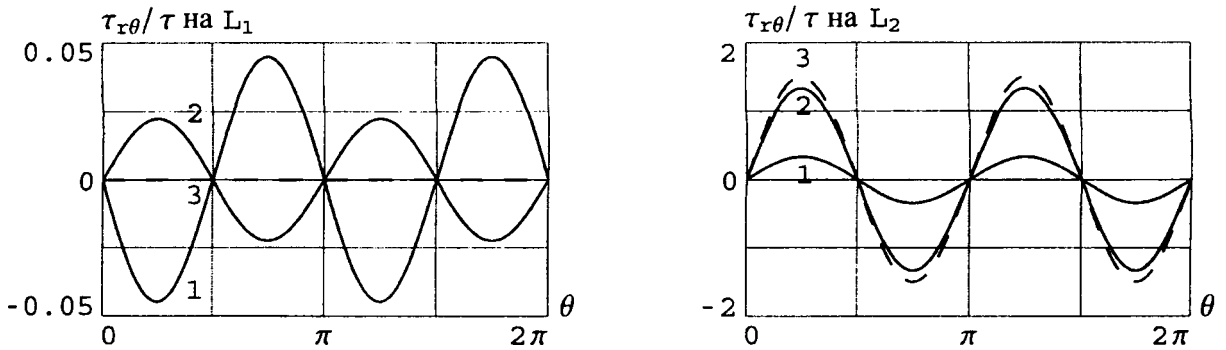


Рис. 3.

На примере двулистной пластины $S_1 \cup S_2$ и одной отдельной пластины S_1 или S_2 , внутренние границы L_1 которых свободны от внешних усилий, а на внешних L_2 действует лишь нормальное внешнее усилие $N_2 = \sigma(h_1 + h_2)(1 - \cos 2\theta)$, $\sigma = \text{const}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, рассмотрим зависимость напряжений на L_1 , L_2 от отношений $R_* = R_1/R_2$, $h_* = h_1/h_2$, $\mu_* = \mu_1/\mu_2$ и коэффициента Пуассона ν_1 . При этом все параметры, кроме изменяемых, берутся те же, что и выше. Анализ решения задачи показал, что при такой нагрузке напряжения σ_r , σ_θ по модулю достигают своих максимумов на L_1 при $\theta = \pi n$, $n = 0, 1$, а на L_2 при $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$. Максимум $|\tau_{x\theta}|$ как на L_1 , так и на L_2 достигается при $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n = 0, 1, 2, 3$. Графики зависимостей модулей некоторых напряжений от R_* , h_* , μ_* , ν_1 приведены на рис. 4.

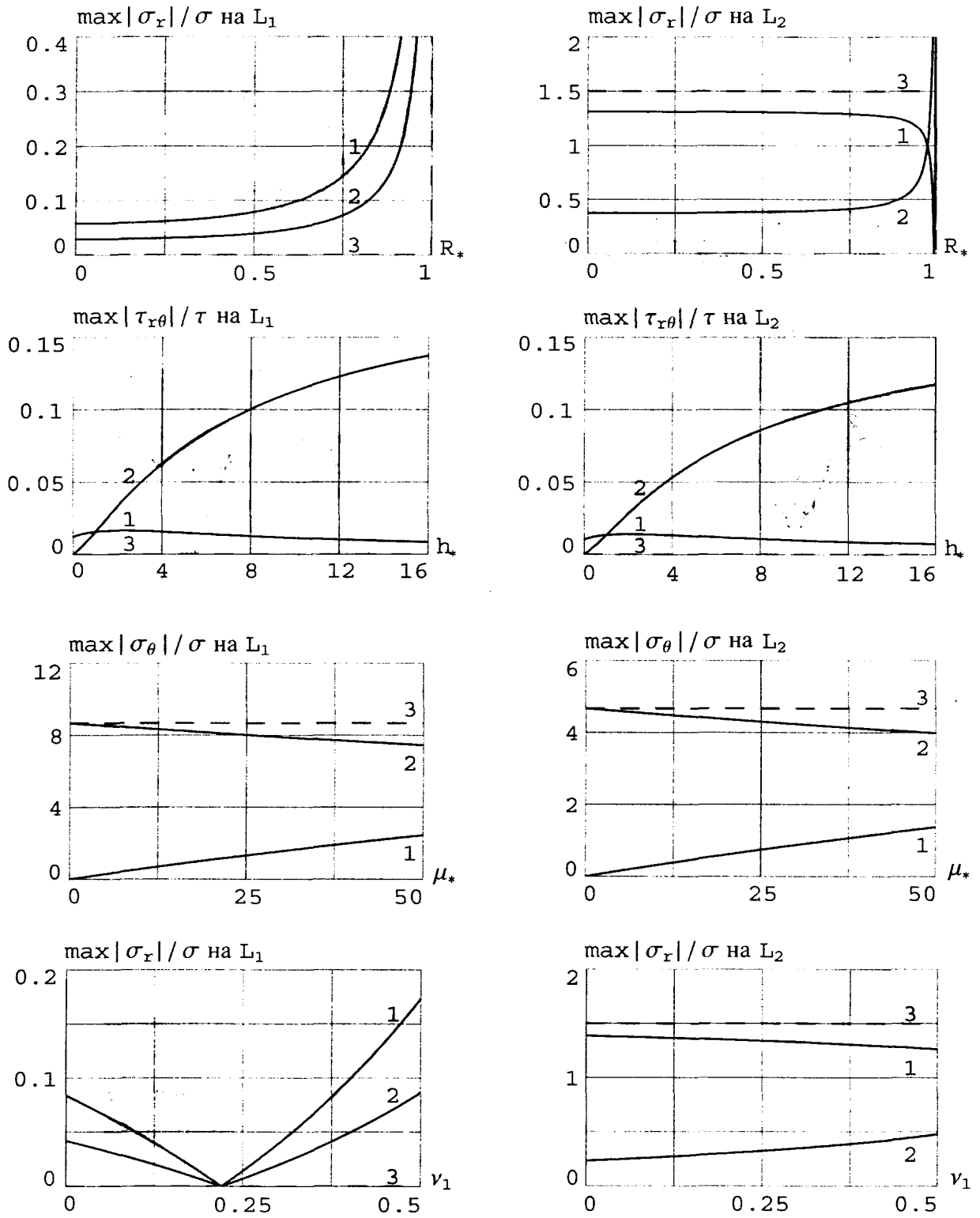


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966.

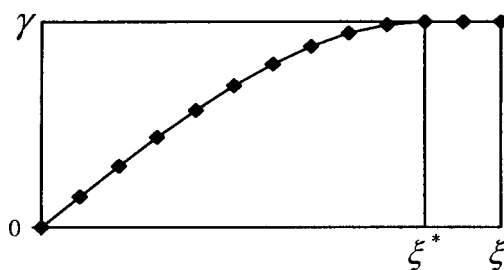


Рис. 1. Экспериментальная полувариограмма

Полувариограмма представляет собой график зависимости функции $\gamma(\xi)$ от смещения ξ и показывает, как полудисперсия разности значений ПЭС в двух точках изменяется с расстоянием между ними. Если расстояние между точками измерений величины ПЭС равно Δ , то полудисперсия может быть вычислена для расстояний, кратных Δ , по следующей формуле:

$$\gamma_{\xi} = \frac{1}{2(n-\xi)} \sum_{i=1}^{n-\xi} (\psi_i - \psi_{i+\xi})^2, \quad (3)$$

где ψ_i – значение ПЭС в точке i ; $\psi_{i+\xi}$ значение ПЭС, взятой в точке через ξ интервалов от точки i ; n – количество контрольных точек; $n-\xi$ – количество пар сравниваемых точек.

Пример экспериментальной полувариограммы $\gamma(\xi)$, рассчитанной по формуле (3) для различных значений ξ приведен на рис. 1. По ней видно, что при нулевом расстоянии между точками измерения полудисперсия равна нулю. Расстояние ξ^* , при котором полудисперсия достигает максимума, определяет окрестность, в пределах которой величина ПЭС взаимно коррелирована. Метод кригинга применим только при $\xi \leq \xi^*$.

На практике экспериментальную полувариограмму обычно аппроксимируют близкой по виду функциональной зависимостью. Для аппроксимации непрерывных полувариограмм обычно используют сферическую, линейную с изломом, экспоненциальную и линейную модели [2].

В моделях с негетт-эффектом полувариограмма испытывает разрыв на границе раздела двух различных сред. Негетт-эффект показывает сильную изменчивость регионализованной переменной при расстояниях, меньших, чем интервал опробования.

Решая систему уравнений (2), определяют неизвестные веса W_i . После этого значение переменной ПЭС в оцениваемой точке p можно вычислить с помощью формулы (1).

Метод кригинга является оптимальным методом оценки прогнозных значений ПЭС, так как: во-первых, дисперсия и стандартная ошибка интерполируемой величины ПЭС являются минимальными; во-вторых, дисперсия и стандартная ошибка могут быть оценены априори; в-третьих, оценки интерполируемых значений ПЭС являются несмещенными по отношению к среднему арифметическому за счет наложения ограничения на весовые коэффициенты в системе (2).

Изложенная математическая модель кригинга может быть распространена и на случай негетт-эффекта. При этом важно с достаточной точностью рассчитать полувариограмму. Примем какую-либо точку O на поверхности агрофона 1, находящуюся на расстоянии a от границы с агрофоном 2, за точку отсчета ($\xi_0=0$). Полувариограмма величины ПЭС для агрофона 1 $\gamma(\xi)$ может быть описана одной из моделей непрерывных полувариограмм (рис. 2). Зададим направление оси ξ от точки O так, чтобы она пересекала границу между агрофонами при $\xi=a$. При этом в граничной точке полувариограмма совершает скачок на величину δ_2 (которая также может быть определена). Полувариограмма будет иметь вид, изображенный на рис. 2.

Тогда полувариограмма на рис. 2 может быть описана формулой

$$y(\xi) = \begin{cases} \gamma_1(\xi), & \xi < a, \\ \gamma_1(a) + \delta_{12} + \gamma_2(\xi - a), & \xi \geq a, \end{cases} \quad (4)$$

где $\gamma_2(\xi - a)$ – полувариограмма агрофона 2.

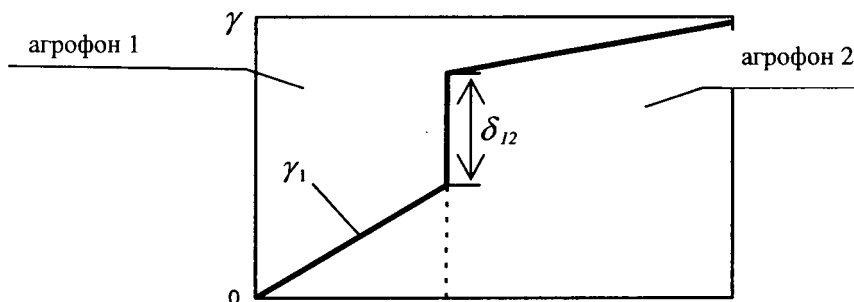


Рис. 2. Полувариограмма с негетт-эффектом на границе агрофонов.

При $\xi > a$ влияние точки O на точки агрофона 2 может быть утрачено, и полувариограмма принимает постоянное значение. В этом случае полувариограмма может быть описана формулой:

$$y(\xi) = \begin{cases} \gamma_1(\xi), & \xi < a, \\ \gamma_1(a) + \delta_{12}, & \xi \geq a. \end{cases} \quad (5)$$

Величину скачка полувариограммы δ_{12} можно рассчитать по формуле:

$$\delta_{12} = \frac{(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)^2}{2}, \quad (6)$$

где $\bar{\psi}_1 = \sum_{i=1}^n \psi_{i1}$ и $\bar{\psi}_2 = \sum_{i=1}^n \psi_{i2}$ – средние арифметические значения ПЭС на агрофонах 1 и 2 соответственно, n – количество точек измерения ПЭС на границе между агрофонами 1 и 2; i – номер точки измерения ($i = \overline{1, n}$); ψ_{i1} и ψ_{i2} – значения ПЭС в граничной точке i на агрофонах 1 и 2 соответственно.

Согласно теории метода кригинга [3], среднее значение ошибки оценки прогнозируемой величины должно быть равно нулю. В этом случае условие, которому должны отвечать веса W_i для однородного агрофона записывается в виде:

$$\sum_{i=1}^k W_i = 1. \quad (7)$$

В случае оценки величины ПЭС в какой-либо точке агрофона 2 исключительно по k точкам измерений на агрофоне 1 на основе полувариограммы (4) условие для весов W_i представится в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^k W_i = \frac{\bar{\psi}_2}{\psi_1}. \quad (8)$$

Если же оценивать величину ПЭС в какой-либо точке агрофона 2 по значениям k_1 точек измерений на агрофоне 1 и k_2 точек измерений на агрофоне 2 условие для весов W_i представится в следующем виде:

$$\frac{\bar{\psi}_1}{\bar{\psi}_2} \sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} + \sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} = 1. \quad (9)$$

При рассмотрении случая количества m соседствующих агрофонов оценка величины ПЭС в какой-либо точке агрофона q по значениям k_1, k_2, \dots, k_m точек измерений на соответствующих агрофонах условие для весов W_i представится в следующем виде:

$$\frac{\overline{\psi}_1}{\overline{\psi}_q} \sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} + \frac{\overline{\psi}_2}{\overline{\psi}_q} \sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} + \dots + \frac{\overline{\psi}_m}{\overline{\psi}_q} \sum_{i=1}^{k_m} W_{mi} = 1. \quad (10)$$

Скачок полувариограммы на границе агрофонов j и q ($j = \overline{1, m}, j \neq q$) δ_{jq} можно рассчитать по формуле:

$$\delta_{jq} = \frac{(\overline{\psi}_j - \overline{\psi}_q)^2}{2}. \quad (11)$$

Введем в формулы (8) и (9) коэффициент

$$\beta_{12} = \frac{\overline{\psi}_1}{\overline{\psi}_2}, \quad (12)$$

а в формулу (11) – коэффициенты

$$\beta_{jq} = \frac{\overline{\psi}_j}{\overline{\psi}_q}, \quad (13)$$

где $j = \overline{1, m}, j \neq q$.

Тогда формулы (8), (9), (10) примут соответственно следующий вид:

$$\beta_{12} \sum_{i=1}^k W_{1i} = 1, \quad (14)$$

$$\beta_{12} \sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} + \sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} = 1, \quad (15)$$

$$\beta_{1q} \sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} + \beta_{2q} \sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} + \dots + \beta_{mq} \sum_{i=1}^{k_m} W_{mi} = 1. \quad (16)$$

Дисперсия оценки среднего значения величины ПЭС стационарного агрофона представится формулой:

$$D(\overline{\psi} - \psi^*) = \frac{\sum_{j=1}^n (\overline{\psi} - \psi^*)^2}{n} = \frac{\sum_{j=1}^n ((\overline{\psi} - \psi_j) - (\psi^* - \psi_j))^2}{n}, \quad (17)$$

где $\psi^* = \sum_{i=1}^k W_i \psi_i$ – оценка среднего значения величины ПЭС стационарного агрофона по k

точкам измерений на данном агрофоне. При этом $\sum_{i=1}^k W_i = 1$.

Следовательно,

$$D(\overline{\psi} - \psi^*) = \frac{\sum_{j=1}^n ((\overline{\psi} - \psi_j) - \sum_{i=1}^k W_i (\psi_i - \psi_j))^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^n (\bar{\psi} - \psi_j)^2 - 2 \sum_{i=1}^k W_i \sum_{j=1}^n (\bar{\psi} - \psi_j)(\psi_i - \psi_j) + (\sum_{i=1}^k W_i \sum_{j=1}^n (\psi_i - \psi_j))^2}{n} \quad (18)$$

В результате получается формула дисперсии оценки ПЭС, аналогичная формуле Матерона [3]:

$$D(\bar{\psi} - \psi^*) = D_{\bar{\psi}} - 2 \sum_{i=1}^k W_i K_{\bar{\psi}\psi_i} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k W_i W_j K_{ij}, \quad (19)$$

где $D_{\bar{\psi}}$ – дисперсия ПЭС относительно ее среднего значения; $K_{\bar{\psi}\psi_i}$ – ковариация среднего значения $\bar{\psi}$ и значения ψ_i ; K_{ij} – ковариация значений ψ_i и ψ_j .

Для случая оценки величины ПЭС в какой-либо точке агрофона 2 исключительно по k точкам измерений на агрофоне 1 формула дисперсии оценки ПЭС с учетом условия (14) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} D(\bar{\psi}_2 - \psi_2^*) &= \frac{\sum_{j=1}^n ((\bar{\psi}_2 - \psi_{2j}) - (\sum_{i=1}^k W_{1i} \psi_{1i} - \psi_{2j}))^2}{n} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n ((\bar{\psi}_2 - \psi_{2j}) - \sum_{i=1}^k W_{1i} (\psi_{1i} - \beta_{12} \psi_{2j}))^2}{n} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n ((\bar{\psi}_2 - \psi_{2j}) - \beta_{12} \sum_{i=1}^k W_{1i} (\beta_{21} \psi_{1i} - \psi_{2j}))^2}{n} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n (\bar{\psi}_2 - \psi_{2j})^2 - 2\beta_{12} \sum_{i=1}^k W_{1i} \sum_{j=1}^n (\bar{\psi}_2 - \psi_{2j})(\beta_{21} \psi_{1i} - \psi_{2j})}{n} + \\ &+ \frac{(\beta_{12} \sum_{i=1}^k W_{1i} \sum_{j=1}^n (\beta_{21} \psi_{1i} - \psi_{2j}))^2}{n} \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\beta_{21} = \frac{1}{\beta_{12}} = \frac{\bar{\psi}_2}{\bar{\psi}_1} \quad (21)$$

Таким образом, получается следующая формула дисперсии оценки ПЭС на агрофоне 2 по точкам агрофона 1:

$$D(\bar{\psi}_2 - \psi_2^*) = D_{\bar{\psi}_2} - 2\beta_{12} \sum_{i=1}^k W_{1i} K_{\bar{\psi}_2 \psi_{1(2)i}} + \beta_{12}^2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k W_{1i} W_{1j} K_{1(2)ij}, \quad (22)$$

где $D_{\bar{\psi}_2}$ – дисперсия ПЭС агрофона 2 относительно ее среднего значения; $K_{\bar{\psi}_2 \psi_{1(2)i}}$ – ковариация среднего значения $\bar{\psi}_2$ и значения $\beta_{21} \psi_{1i}$; $K_{1(2)ij}$ – ковариация значений $\beta_{21} \psi_{1i}$ и $\beta_{21} \psi_{1j}$.

Из условия минимума дисперсии оценки ПЭС (с учетом условия несмещенности оценки (14)) следует:

$$\frac{\partial D(\bar{\psi}_2 - \psi_2^*)}{\partial W_{1i}} - \lambda \frac{\partial (\beta_{12} \sum_{i=1}^k W_{1i} - 1)}{\partial W_{1i}} = 0, \quad (23)$$

где λ – множитель Лагранжа.

После дифференцирования выражения (23) получается система уравнений кригинга для данного случая следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{12} \sum_{j=1}^k W_{1j} K_{1(2)ij} - \lambda &= K_{\psi_2 \psi_{1(2)i}}^-, \\ \beta_{12} \sum_{i=1}^k W_{1i} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

При подстановке уравнений системы (24) в формулу дисперсии оценки ПЭС (22) получается формула:

$$D_K(\bar{\psi}_2 - \psi_2^*) = D_{\bar{\psi}_2}^- - \beta_{12} \sum_{i=1}^k W_{1i} K_{\psi_2 \psi_{1(2)i}}^- + \lambda = \beta_{12} \sum_{i=1}^k W_{1i} (D_{\bar{\psi}_2}^- - K_{\psi_2 \psi_{1(2)i}}^-) + \lambda. \quad (25)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Так как полувариограмма $\gamma(\xi_{ip})$ представляет собой в данном случае разность дисперсии $D_{\bar{\psi}_2}^-$ и ковариации $K_{\psi_2 \psi_{1(2)i}}^-$ [3], то получается формула минимальной дисперсии оценки (дисперсии кригинга) при оценке ПЭС на агрофоне 2 только по точкам агрофона 1:

$$D_K(\bar{\psi}_2 - \psi_2^*) = \beta_{12} \sum_{i=1}^k W_{1i} \gamma(\xi_{ip}) + \lambda. \quad (26)$$

Также выполнив переход к полувариограммам в системе (24), можно получить для случая оценки ПЭС на агрофоне 2 только по точкам агрофона 1 систему уравнений кригинга:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{12} \sum_{j=1}^k W_{1j} \gamma(\xi_{ij}) + \lambda &= \gamma(\xi_{ip}), \\ \beta_{12} \sum_{i=1}^k W_{1i} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Аналогичным образом выводится формула дисперсии кригинга при оценке ПЭС в точке агрофона 2 по значениям k_1 точек измерений на агрофоне 1 и k_2 точек измерений на агрофоне 2:

$$D_K(\bar{\psi}_2 - \psi_2^*) = \beta_{12} \sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} \gamma(\xi_{ip}) + \sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} \gamma(\xi_{ip}) + \lambda. \quad (28)$$

Система уравнений кригинга в этом случае имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{12} \sum_{j=1}^{k_1} W_{1j} \gamma(\xi_{ij}) + \sum_{j=1}^{k_2} W_{2j} \gamma(\xi_{ij}) + \lambda &= \gamma(\xi_{ip}), \\ \beta_{12} \sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} + \sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

При оценке величины ПЭС в точке агрофона q по значениям k_1, k_2, \dots, k_m точек измерений на соответствующих m агрофонах формула дисперсии кригинга представится в следующем виде:

$$D_K(\bar{\psi}_q - \psi_q^*) = \beta_{1q} \sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} \gamma(\xi_{ip}) + \beta_{2q} \sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} \gamma(\xi_{ip}) + \dots + \beta_{mq} \sum_{i=1}^{k_m} W_{mi} \gamma(\xi_{ip}) + \lambda. \quad (30)$$

Система уравнений кригинга в данном общем случае имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1q} \sum_{j=1}^{k_1} W_{1j} \gamma(\xi_{ij}) + \beta_{2q} \sum_{j=1}^{k_2} W_{2j} \gamma(\xi_{ij}) + \dots + \beta_{mq} \sum_{j=1}^{k_m} W_{mj} \gamma(\xi_{ij}) + \lambda &= \gamma(\xi_{ip}), \\ \beta_{1q} \sum_{i=1}^{k_1} W_{1i} + \beta_{2q} \sum_{i=1}^{k_2} W_{2i} + \dots + \beta_{mq} \sum_{i=1}^{k_m} W_{mi} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ВЫВОДЫ

Как показали расчеты, использование выведенных формул несколько снижает точность оценки ПЭС, что объясняется различием эрозионных свойств соседствующих агрофонов. Тем не менее, они могут быть применены в случаях недостаточного количества экспериментальных точек ПЭС, неудобства выполнения измерений в пределах одного и того же агрофона, малых размеров агрофона.

Используя на основе полученных формул метод кригинга в сочетании с методами сетей и кубических сплайн-функций, можно построить прогнозные карты пространственного распределения ПЭС в изолиниях с учетом негет-эффекта. Указанный метод можно применять для определения линий рубежей при проектировании противоэрозионных технологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малов А. А. Разработка математических моделей прогноза эрозионных процессов и проектирование противоэрозионных технологий на склоновых землях: Дисс. ... к. т. н. – Чебоксары, 2000. – 176 с.
2. Дэвис Дж. С. Статистический анализ данных в геологии. Пер. с англ. В 2 кн. Пер. В.А. Голубевой; Под ред. Д.А. Родионова. Кн. 1. – М.: Недра, 1990. – 319 с; Кн. 2. – М.: Недра, 1990. – 427 с.
3. Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики. – М.: Мир, 1968. – 408с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПНЕВМОКОЛЕСНЫХ ДВИЖИТЕЛЕЙ С ПОЧВОЙ В ВИДЕ ОДНО- И ДВУХМАССОВОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Чигарев Ю.В., Романюк Н.Н., Рутковский И.Г.

ВВЕДЕНИЕ

Передвижение машинно-тракторных агрегатов (МТА) по полям породило проблему переуплотнения почв. Эта проблема непосредственно связана с массой МТА, скоростью их передвижения, рельефом опорной поверхности.

Повышение скорости движения, проезд тракторов поперек периодически повторяющихся борозд поля, которые имеют волнообразный профиль, приводит к увеличению амплитуд колебаний, ускорений различных точек МТА и динамических нагрузок, действующих на них со стороны опорной поверхности, которые передаются через движители на почву.

Мгновенное значение вертикальной нагрузки $G_{дин}(t)$, приходящейся на ось колеса, можно определить по зависимости:

$$G_{дин}(t) = M(g \pm \xi), \quad (1)$$

где M – масса, нагруженная ось колеса, кг;

g, ξ – ускорение свободного падения и оси колеса соответственно.

Анализ формулы (1) показывает, что снизить динамические нагрузки можно за счет уменьшения:

- массы МТА (что весьма проблематично),
- ускорения колебаний оси колеса ξ .

Аналитическое исследование колебательных систем заключается в составлении и решении дифференциальных уравнений. Такой способ удобен тем, что он позволяет получить количественное решение практически с любой точностью и качественную оценку после несложного анализа, но при этом необходимо выполнить значительный объем вычислений.

Методы решения

Рассмотрим взаимодействие одиночного пневмоколесного движителя, передвигающегося по опорной поверхности, в виде двухмассовой эквивалентной колебательной системы в случае наличия подвески (рисунок 1, а) и одномассовой – без подвески (рисунок 1, б). Влиянием тракториста на колебания пренебрегаем, так как оно мало.

Примем, что силы сопротивления в подвеске пропорциональны скорости колебаний остова трактора.

Пусть уравнение продольного профиля пути имеет вид:

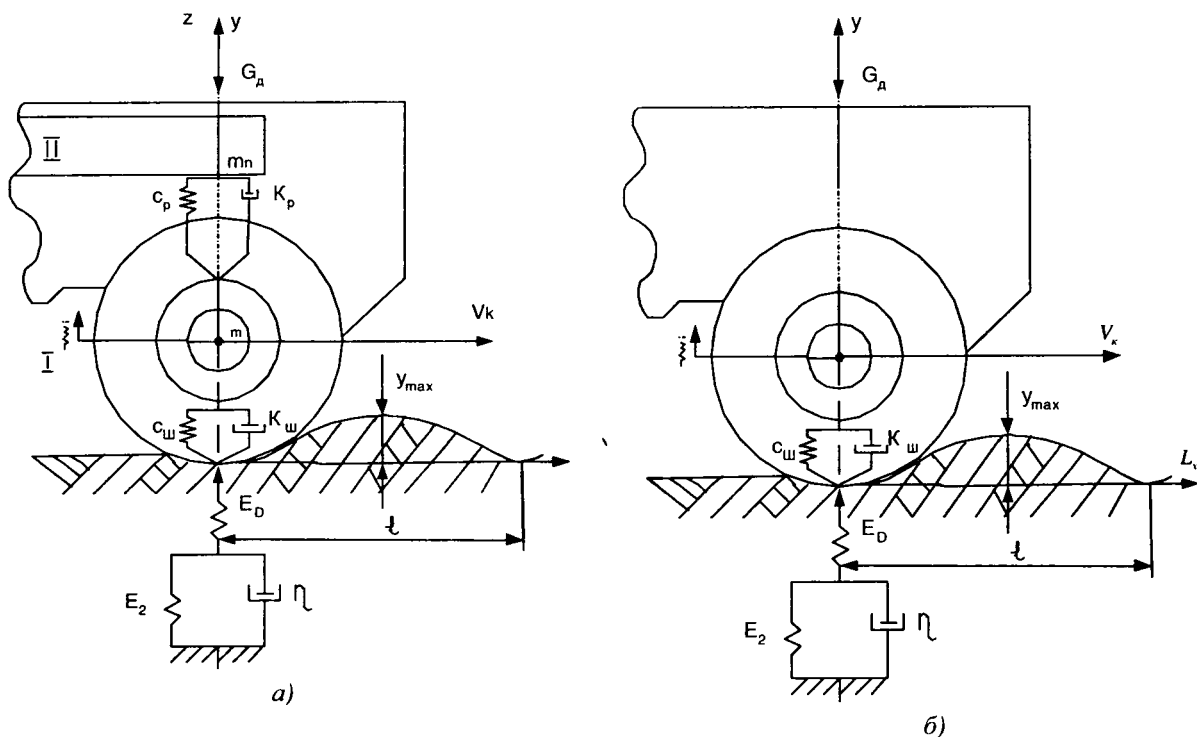


Рисунок 1. Схема взаимодействия одиночного пневмоколесного движителя с опорной поверхностью в виде эквивалентной колебательной системы: а) – двухмассовой, б) – одномассовой

$$y = y_{\max} \sin \lambda t, \quad (2)$$

где y_{\max} – максимальная высота неровности поверхности;

$\lambda = \frac{2\pi V_K}{l}$ – частота вынужденных колебаний, создаваемая неровностями поверхности;

V_K – скорость движения колеса;

l – длина волны неровности поверхности.

Уравнения колебаний одиночного пневмоколесного движителя в случае наличия подвески в вертикальной плоскости, выраженные через вертикальное перемещение z подрессоренной массы и вертикальное перемещение оси колеса ξ (рисунок 1, а) при движении по опорной поверхности, задаваемой уравнением 2, аналогично [1, с. 210], будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{z} + 2h_n \dot{z} + \omega_n^2 z - 2h_n \dot{\xi} - \omega_n^2 \xi = 0, \\ \ddot{\xi} + 2h_w \dot{\xi} + \omega_w^2 \xi - 2h_{no} \dot{z} - \omega_{no}^2 z = Q_y / m = 2h_w \dot{y} + \omega_w^2 y, \end{cases} \quad (3)$$

где z, \dot{z}, \ddot{z} – соответственно амплитуда, скорость и ускорение подрессоренной массы;

$\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$ – соответственно амплитуда, скорость и ускорение колебаний оси колеса;

$h_n = \frac{K_p}{2m_n}$ – коэффициент затухания вертикальных колебаний подрессоренной массы;

K_p – коэффициент демпфирования (сопротивления) подвески;

$\omega_n = \sqrt{\frac{C_p}{m_n}}$ – частота вертикальных колебаний подрессоренной массы;

C_p – коэффициент жесткости подвески;

$h_n = \frac{K_p + K_{ш}}{2m}$ – коэффициент затухания вертикальных колебаний

неподрессоренной массы;

$K_{ш}$ – коэффициент демпфирования (сопротивления) шины;

$\omega_H = \sqrt{\frac{C_p + C_{ш}}{m}}$ – частота вертикальных колебаний неподрессоренной массы;

$C_{ш}$ – коэффициент жесткости шины;

m_n – подрессоренная масса остова;

m – неподрессоренная масса;

$M = m_n + m$ – масса, нагружающая ось колеса;

$h_{но} = \frac{K_p}{2m}$ – коэффициент затухания, c^{-1} ;

$\omega_{но} = \sqrt{\frac{C_p}{m}}$ – частота колебаний, c^{-1} ;

Q_y – сила, являющаяся следствием кинематического возбуждения со стороны поля, формирующегося за счет движения движителя по неровностям;

$h_{ш} = \frac{K_{ш}}{2m}$ – коэффициент затухания вертикальных колебаний шины;

$\omega_{ш} = \sqrt{\frac{C_{ш}}{m}}$ – частота вертикальных колебаний шины.

Для решения приведенной системы уравнений (3) воспользуемся системой *MATLAB*. Пакет *Simulink* входит в состав системы *MATLAB* и предназначен для математического моделирования динамических систем, представленных своей функциональной блок-схемой, именуемой моделью. Для построения функциональной блок-схемы моделируемых устройств *Simulink* имеет библиотеку блочных компонентов и редактор блок-схем [2].

В *Simulink* собирается блок-схема, приведенная на рисунке 2. Для моделирования первое уравнение системы 3 приведем к виду:

$$\ddot{z} = -2h_n \dot{z} - \omega_n^2 z + 2h_n \dot{\xi} + \omega_n^2 \xi. \quad (4)$$

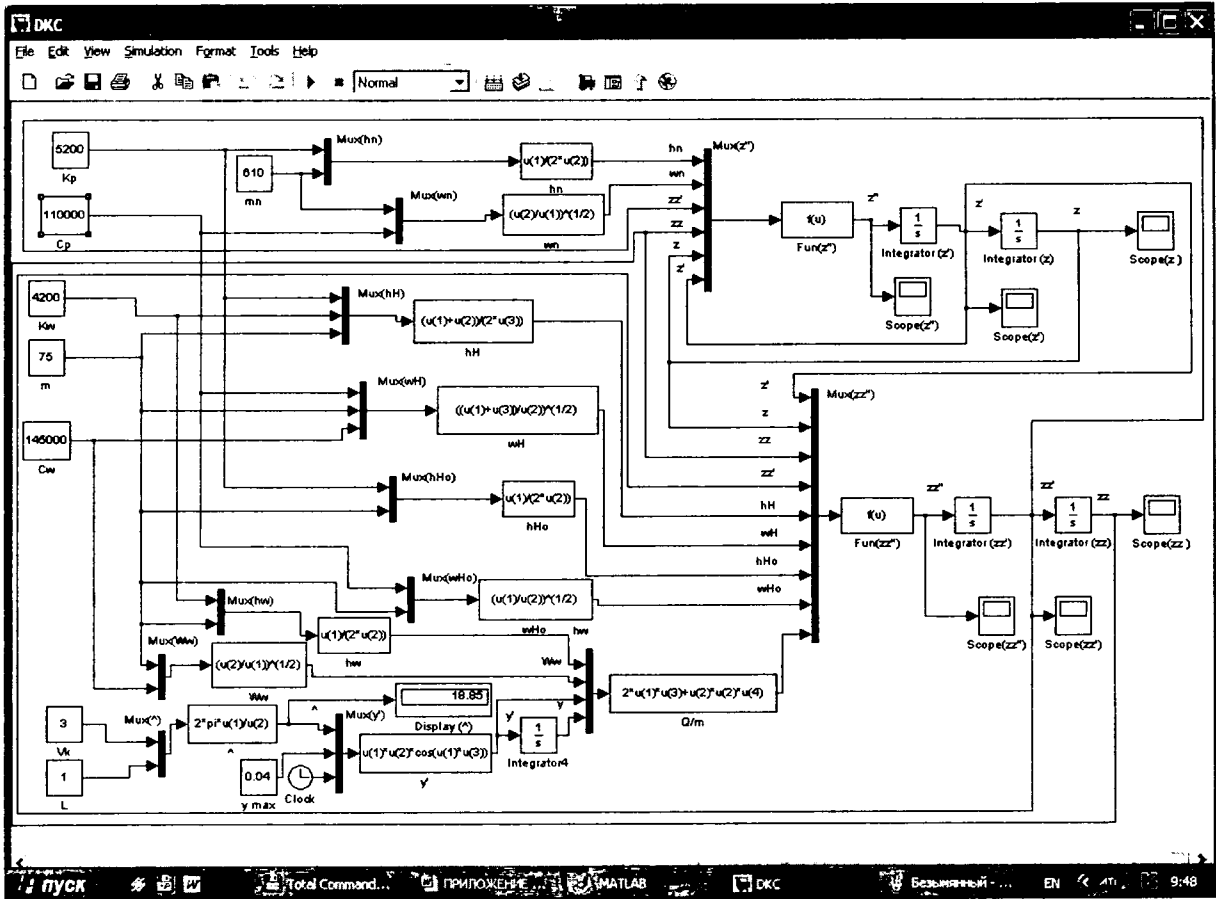


Рисунок 2. Блок-схема для двухмассовой эквивалентной колебательной системы

В блок $\text{Fun}(z'')$ /соответствует физической величине ускорения подпрессоренной массы \ddot{z} / записывается уравнение:

$$-2 * u(1) * u(6) - u(2) * u(2) * u(5) + 2 * u(1) * u(3) + u(2) * u(2) * u(4), \quad (5)$$

где $u(1) - h_n / h_n /$, $u(2) - w_n / \omega_n /$, $u(3) - z z' / \xi /$, $u(4) - z z / \xi /$, $u(5) - z / z /$,

$u(6) - z' / \dot{z} /$ – компоненты вектора входного сигнала и их соответствие физическим величинам.

Начальное значение амплитуды колебаний подпрессоренной массы z :

$$z = 0. \quad (6)$$

Это значение записывается в блок $\text{Integrator } z$, в поле *Initial condition*.

Начальное значение скорости колебаний подпрессоренной массы \dot{z} в вертикальной плоскости записывается в блок $\text{Integrator}(z')$:

$$\dot{z} = 0. \quad (7)$$

В блок $h_n / h_n /$ записывается уравнение:

$$u(1) / (2 * u(2)), \quad (8)$$

где $u(1) - K_p / K_p /$, $u(2) - m_n / m_n /$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок $w_n / \omega_n /$ записывается уравнение:

$$(u(2) / u(1))^{(1/2)}, \quad (9)$$

где $u(1) - m_n / m_n /$, $u(2) - C_p / C_p /$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

Второе уравнение системы (2.43) приведем к виду:

$$\ddot{\xi} = -2h_n \dot{\xi} - \omega_n^2 \xi + 2h_{n0} \dot{z} + \omega_{n0}^2 z + Q_y / m. \quad (10)$$

В блок Fun (zz'') / $\ddot{\xi}$ / оно запишется в виде:

$$- 2 * u(5) * u(4) - u(6) * u(6) * u(3) + 2u(7) * u(1) + u(8) * u(8) * u(2) + u(9), \quad (11)$$

где $u(1) - z' / \dot{z}$, $u(2) - z$, $u(3) - zz / \xi$, $u(4) - zz' / \dot{\xi}$, $u(5) - hN / h_n$, $u(6) - wN / \omega_n$, $u(7) - hN_0 / h_{n0}$, $u(8) - wN_0 / \omega_{n0}$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

На девятый вход $u(9)$ объединителя *Mux* (zz'') / $\ddot{\xi}$ / подается $Q/m - \frac{Q_y}{m}$.

Начальное значение амплитуды колебаний оси колеса ξ записывается в блок *Integrator*(zz):

$$\xi = 0. \quad (12)$$

Начальное значение скорости колебаний оси колеса $\dot{\xi}$ в вертикальной плоскости записывается в блок *Integrator*(zz'):

$$\dot{\xi} = 0. \quad (13)$$

В блок hN / h_n / записывается уравнение:

$$(u(1) + u(2)) / (2 * u(3)), \quad (14)$$

где $u(1) - K_p / K_p$, $u(2) - Kw / K_u$, $u(3) - m$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок wN / ω_n / записывается уравнение:

$$((u(1) + u(3)) / u(2))^{(1/2)}, \quad (15)$$

где $u(1) - C_p / C_p$, $u(2) - m$, $u(3) - Cw / C_u$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок hN_0 / h_{n0} / записывается уравнение:

$$u(1) / (2 * u(2)), \quad (16)$$

где $u(1) - K_p / K_p$, $u(2) - m$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок wN_0 / ω_{n0} / записывается уравнение:

$$(u(1) / u(2))^{(1/2)}, \quad (17)$$

где $u(1) - C_p / C_p$, $u(2) - m$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок Q/m параметр Q_y / m записывается в виде:

$$2 * u(1) * u(3) + u(2) * u(2) * u(4), \quad (18)$$

где $u(1) - hw / h_u$, $u(2) - Ww / \omega_u$, $u(3) - y' / \dot{y}$, $u(4) - y$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок hw/h_u записывается уравнение:

$$u(1)/(2*u(2)), \quad (19)$$

где $u(1) = Kw/K_u$, $u(2) = t$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок Ww/ω_u записывается уравнение:

$$(u(2)/(u(1))^{1/2}), \quad (20)$$

где $u(1) = t$, $u(2) = Cw/C_u$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок y'/\dot{y} записывается уравнение:

$$u(1)*u(2)*\cos(u(1)*u(3)), \quad (21)$$

где $u(1) = \lambda$, $u(2) = y_{\max}$, $u(3) = t$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок λ записывается уравнение:

$$2*\pi*u(1)/u(2), \quad (22)$$

где $u(1) = V_k/V_k$, $u(2) = L(l)$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

Чтобы на вход 3 объединителя сигнала Mux y'/\dot{y} подать время t используется блок $Clock$.

При отсутствии подвески, уравнение колебаний одиночного пневмоколесного движителя в вертикальной плоскости, заданного в виде эквивалентной одномассовой колебательной системы (рисунок 1, б) будет иметь вид:

$$\ddot{\xi} + 2h_{ш}\dot{\xi} + \omega_{ш}^2\xi = 2h_{ш}\dot{y} + \omega_{ш}^2y. \quad (23)$$

Приведем уравнение (23) к виду:

$$\ddot{\xi} = -2h_{ш}\dot{\xi} - \omega_{ш}^2\xi + Q_y/M. \quad (24)$$

На рисунке 3 приведена блок-схема, собранная в *Simulink* для уравнения (24) колебаний одиночного пневмоколесного движителя в вертикальной плоскости, заданного в виде эквивалентной одномассовой колебательной системы.

В блок $Fun(zz'')/\ddot{\xi}$ оно запишется в виде:

$$-2*u(3)*u(2) - u(4)*u(4)*u(1) + u(5), \quad (25)$$

где $u(1) = zz(\xi)$, $u(2) = zz'(\dot{\xi})$, $u(3) = hw/h_u$, $u(4) = Ww/\omega_u$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

На пятый вход $u(5)$ объединителя Mux $(zz'')/\ddot{\xi}$ подается $Q/M - \frac{Q_y}{M}$.

Начальное значение амплитуды колебаний оси колеса ξ записывается в блок $Integrator(zz)$:

$$\xi = 0. \quad (26)$$

Начальное значение скорости колебаний оси колеса $\dot{\xi}$ в вертикальной плоскости записывается в блок $Integrator(zz')$:

$$\dot{\xi} = 0. \quad (27)$$

В блок hw / h_u записывается уравнение:

$$u(1)/(2*u(2)), \quad (28)$$

где $u(1) - Kw / K_u$, $u(2) = M$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок Ww / ω_u записывается уравнение:

$$(u(2)/(u(1))^{1/2}), \quad (29)$$

где $u(1) = M$, $u(2) - Cw / C_u$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок Q/M параметр Q_y / M записывается в виде:

$$2*u(1)*u(3) + u(2)*u(2)*u(4), \quad (30)$$

где $u(1) - hw / h_u$, $u(2) - Ww / \omega_u$, $u(3) - y' / \dot{y}$, $u(4) - y$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

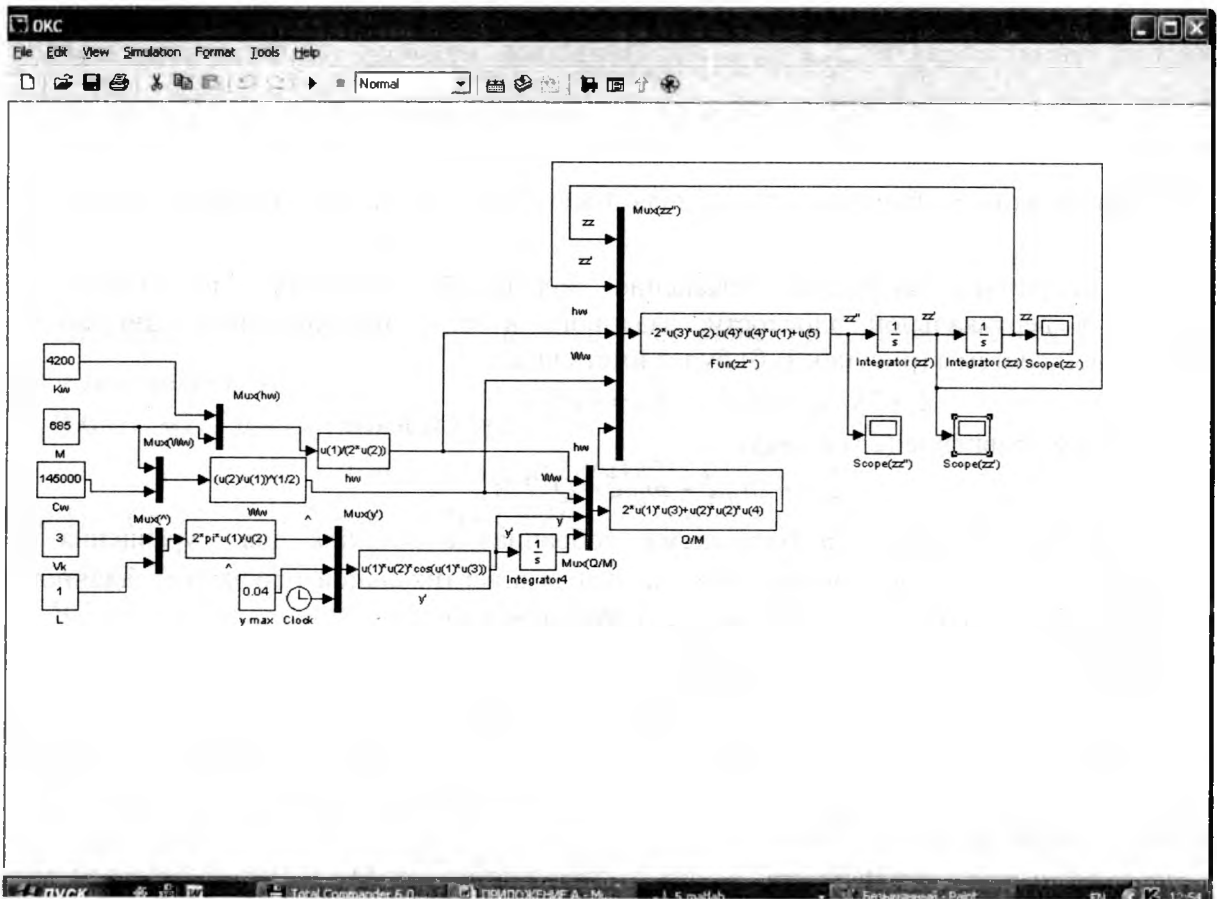


Рисунок 3. Блок-схема для одномассовой эквивалентной колебательной системы

В блок y' / \dot{y} записывается уравнение:

$$u(1)*u(2)*\cos(u(1)*u(3)), \quad (31)$$

где $u(1) - \lambda$, $u(2) = y_{\max}$, $u(3) -$ время t – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

В блок $\wedge(\lambda)$ записывается уравнение:

$$2 * \pi * u(1) / u(2), \quad (32)$$

где $u(1) - V_k / V_k l$, $u(2) - L(l)$ – компоненты вектора входного сигнала и их физические величины.

Блок *Clock* используется для подачи времени t на вход 3 объединителя сигнала $Mux \ y' / \dot{y}$.

Для ввода исходных данных следует использовать блоки *Constant*, для просмотра результатов расчета – *Display* и *Scope*. Причем в блоке *Display* отображают результат расчета в численном виде, а в блоке – *Scope* в графическом виде.

Для настройки режима моделирования в верхнем меню *Simulation* используется пункт *Simulation Parameters...* При решении дифференциальных уравнений в разделе *Solver options* выбираем *ode 15s (stiff/NDF)*. Этот метод больше подходит для решения дифференциальных уравнений в частных производных, чем установленный по умолчанию *ode 45*, который реализует алгоритм метода Рунге–Кутты. Время моделирования устанавливается в окне *Stop time*.

Для запуска процесса моделирования используется *Start simulation*. Просмотр результатов моделирования осуществляется по двум щелчкам мышью по соответствующему блоку *Scope*. Автоматическое масштабирование графика в окне *Scope* производится при помощи кнопки *Auto scale*.

При моделировании использовались два типа шин: диагональные и радиальные, для двухмассовой эквивалентной колебательной системы задавались различные параметры подвески. Характеристики шин задавались согласно исследований, проведенных В.П. Бойковым [3, рисунок 17, с.45; рисунок 44, б, с.84] и учетом опорной жесткости почвы C_{on}

$$\text{при } \kappa_0 = 1,3 \cdot 10^{-7} \frac{M^3}{H}.$$

Результаты моделирования двухмассовой эквивалентной колебательной системы показаны на рисунке 4, одномассовой – на рисунке 5.

ВЫВОДЫ

1 Двухмассовая эквивалентная колебательная система имеет преимущества по сравнению с одномассовой, так как при наличии подвески, значение ускорений колебаний оси колеса $\ddot{\xi}$ меньше.

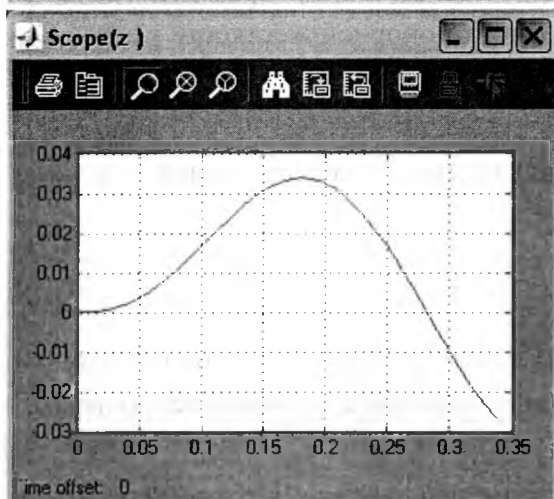
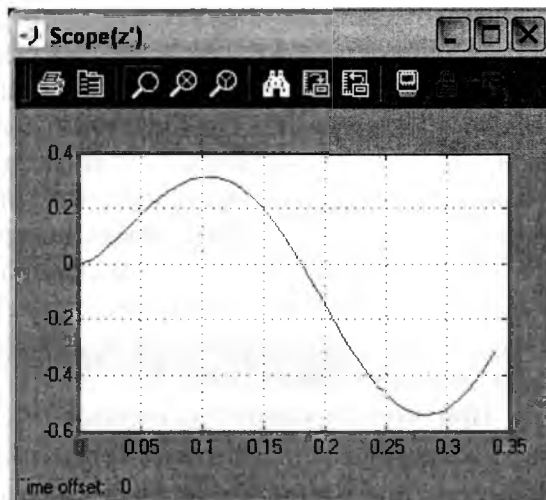
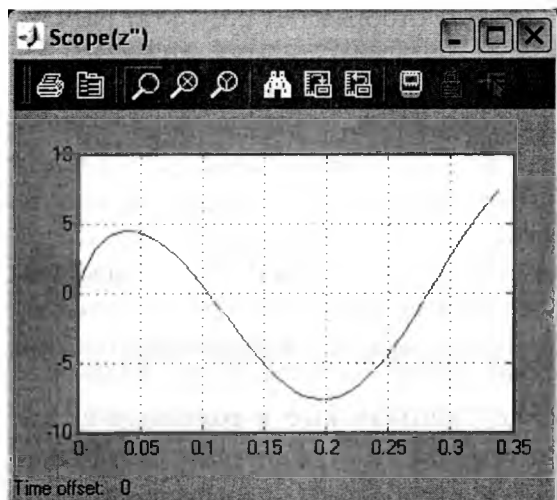
2 К повышению ускорений колебаний оси колеса $\ddot{\xi}$ ведут увеличение: высоты неровности поверхности y_{\max} , скорости движения V_k , внутришинного давления p_w ; уменьшение длины волны неровности поверхности l .

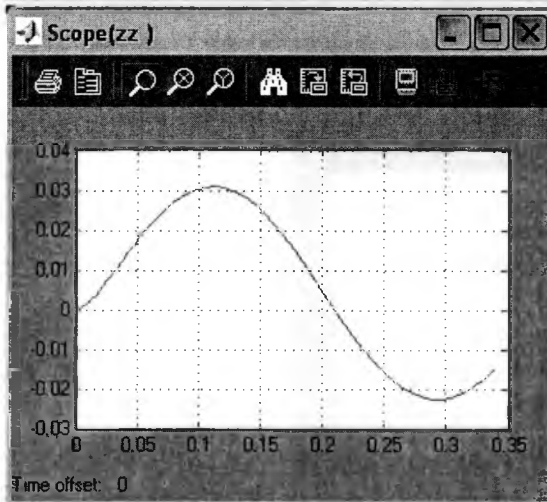
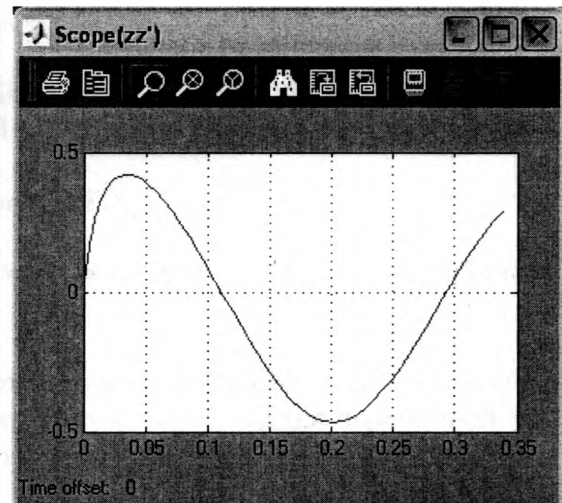
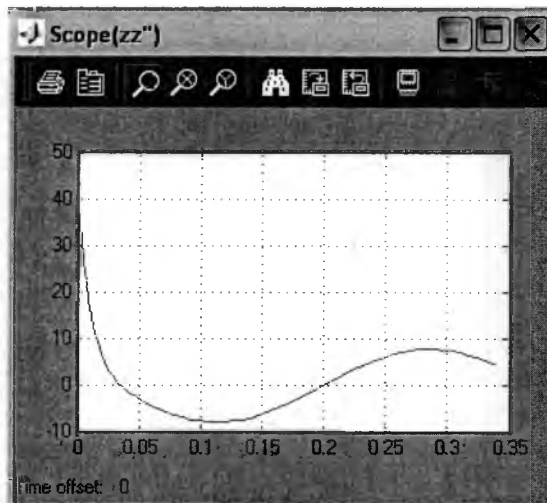
3 Значение ускорений колебаний оси колеса $\ddot{\xi}$ у радиальных шин меньше, чем у диагональных.

Снизить ускорение колебаний оси колеса можно за счет:

- выравнивания поверхности поля (уменьшения максимальной высоты y_{\max} и увеличения длины волны l неровности поверхности);
- снижения внутришинного давления до 80 кПа ;
- скорость движения при выполнении сельскохозяйственных операций не должна превышать 3 м/с ;

- для одномассовой эквивалентной колебательной системы – использовать специальные шины с повышенной демпфирующей способностью и увеличенным статическим прогибом;
- для двухмассовой эквивалентной колебательной системы – параметры системы подрессоривания должны иметь значения: $C_p = 110...220 \frac{\kappa H}{M}$ и $K_p = 5,2...7 \frac{\kappa H \cdot c}{M}$.



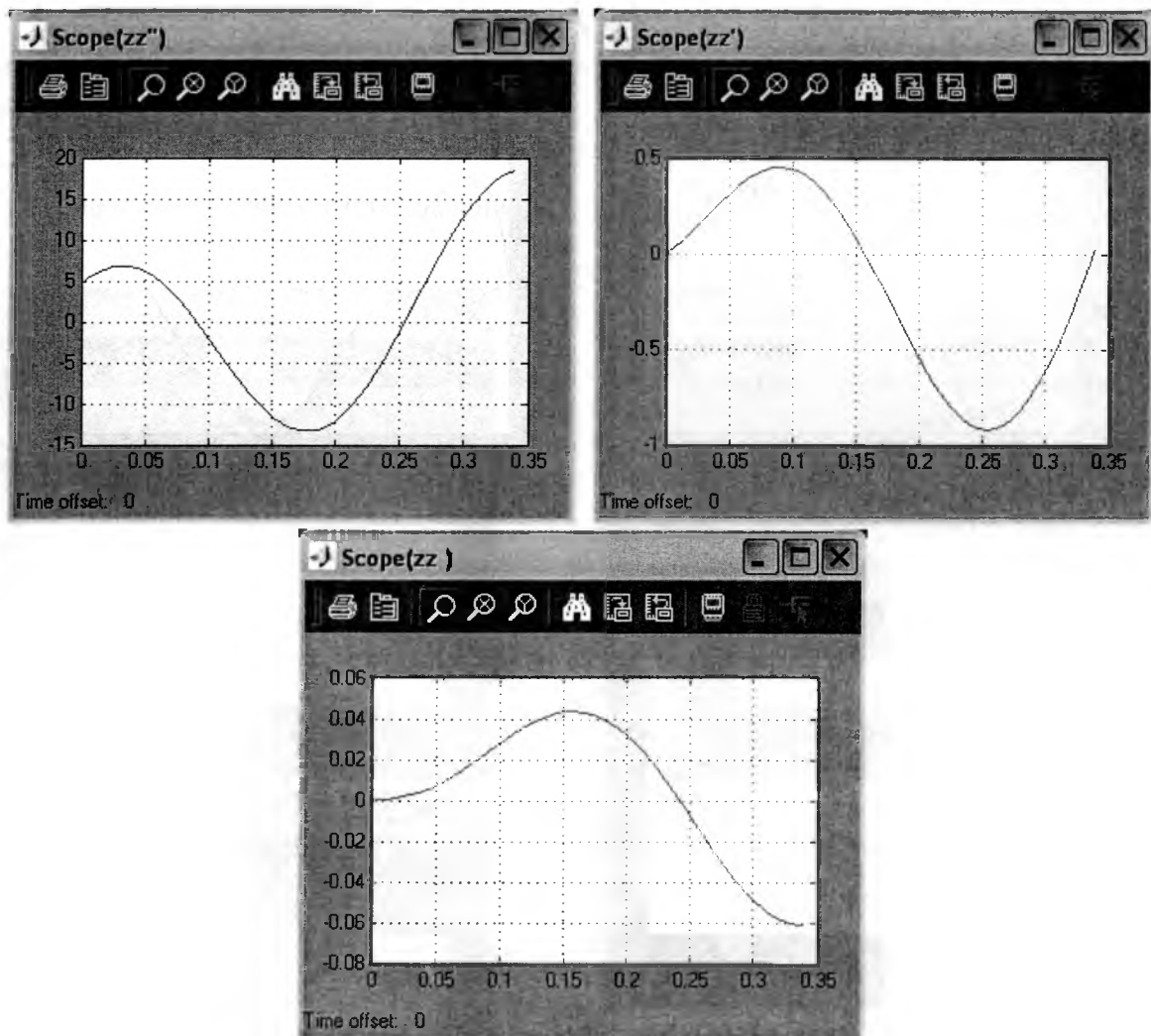


$$C_{Ш} = 145 \frac{\kappa H}{M}, K_{Ш} = 4,2 \frac{\kappa H \cdot c}{M}, C_P = 110 \frac{\kappa H}{M}, K_P = 5,2 \frac{\kappa H \cdot c}{M}, V_K = 3 \frac{M}{c}, l = 1M, y_{\max} = 0,04M, m_n = 610\text{кг}, m = 75\text{кг};$$

$z''(\ddot{z}), z'(\dot{z}), z$ - соответственно ускорение, скорость, амплитуда колебаний поддрессорной массы;

$z z''(\ddot{\xi}), z z'(\dot{\xi}), z z(\xi)$ - соответственно ускорение, скорость, амплитуда колебаний оси колеса

Рисунок 4. Результаты моделирования блок-схемы двухмассовой эквивалентной колебательной системы



$$C_{ш} = 145 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, K_{ш} = 4,2 \frac{\text{кН} \cdot \text{с}}{\text{м}}, V_K = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}, l = 1\text{м}, y_{\text{max}} = 0,04\text{м}, M = 685\text{кг};$$

$$zz''(\xi), zz'(\xi), zz(\xi) - \text{соответственно ускорение, скорость, амплитуда колебаний оси}$$

колеса

Рисунок 5. Результаты моделирования блок-схемы одномассовой эквивалентной колебательной системы

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов, Г.А. Теория движения колесных машин / Г.А. Смирнов. – 2-е изд., доп. и перераб. – Москва: Машиностроение, 1990. – 352с.
2. Черных, И.В. Simulink. Среда создания инженерных приложений / И.В. Черных; под общей редакцией В.Г. Потемкина. – Москва: Диалог – МИФИ, 2004. – 491с.
3. Бойков, В.П. Шины для тракторов и сельскохозяйственных машин / В.П. Бойков, В.Н. Белковский. – Москва: Агропромиздат, 1988. – 240с.

УРАВНЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ
ОБОЛОЧЕК С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.

Ботогова М.Г.

The governing equations of free vibrations of thin composite laminated cylindrical shell with variable parameters are obtained.

Постановка задачи и основные гипотезы. Будем считать, что оболочка полая и составлена из N изотропных вязкоупругих слоев, характеризующихся переменной толщиной $h_k(\alpha_1, \alpha_2)$, модулем Юнга E_k , плотностью ρ_k , коэффициентом Пуассона ν_k , модулем поперечного сдвига G_k .

В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-то слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1 = Rs$, $\alpha_2 = R\theta$. Здесь R – радиус цилиндра исходной поверхности, θ , s – окружная и продольная координаты соответственно.

Введем следующие обозначения:

безразмерные жесткостные характеристики k -го слоя:

$$\gamma_k = \sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k(\alpha_1, \alpha_2) \tilde{c}_k}{1 - \nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k(\alpha_1, \alpha_2) \tilde{c}_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1}, \quad (1)$$

$$\tilde{c}_k = 1 - c_k, \quad c_k = \int_0^{+\infty} K_k(s) e^{-i\Omega s} ds,$$

где $K_k(s)$ – ядро релаксаций напряжений материала для k -го слоя;

приведенный коэффициент Пуассона

$$\nu(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\nu_k E_k h_k(\alpha_1, \alpha_2) \tilde{c}_k}{1 - \nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k(\alpha_1, \alpha_2) \tilde{c}_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1}; \quad (2)$$

осредненный модуль упругости

$$E(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1 - \nu^2}{h(\alpha_1, \alpha_2)} \left(\sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k(\alpha_1, \alpha_2) \tilde{c}_k}{1 - \nu_k^2} \right), \quad h(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=1}^N h_k(\alpha_1, \alpha_2). \quad (3)$$

Тогда из равенств (1)-(3) имеем

$$\frac{E_k h_k(\alpha_1, \alpha_2) \tilde{c}_k}{1 - \nu_k^2} = \frac{E(\alpha_1, \alpha_2) h(\alpha_1, \alpha_2)}{1 - \nu(\alpha_1, \alpha_2)^2} \gamma_k. \quad (4)$$

Будем считать, что выполняются гипотезы теории слоистых оболочек, сформулированные Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [1]:

1. Поперечные касательные напряжения изменяются по толщине k -ого слоя оболочки по заданному закону $\sigma^{(k)}_{i3} = f_0(z)\mu_i^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2) + f_k(z)\mu_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2)$, где

$$f_0(z) = \frac{1}{h^2(\alpha_1, \alpha_2)}(z - \delta_0(\alpha_1, \alpha_2))(\delta_N(\alpha_1, \alpha_2) - z), \quad z \in [\delta_0(\alpha_1, \alpha_2), \delta_N(\alpha_1, \alpha_2)];$$

$$f_k(z) = \frac{1}{h_k^2(\alpha_1, \alpha_2)}(z - \delta_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2))(\delta_k(\alpha_1, \alpha_2) - z); z \in [\delta_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2), \delta_k(\alpha_1, \alpha_2)].$$

Здесь $\delta_k(\alpha_1, \alpha_2)$ – расстояние между исходной поверхностью и верхней границей k -ого слоя.

2. Нормальные напряжения, действующие на площадках, параллельных исходной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с другими компонентами тензора напряжений.

3. Тангенциальные перемещения распределены по толщине пакета слоев согласно обобщенной кинематической гипотезе Тимошенко:

$$u_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, z) = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + z\Theta_i(\alpha_1, \alpha_2) + g(z)\Psi_i(\alpha_1, \alpha_2).$$

Функции $\mu_i^{(0)}$, $\mu_i^{(k)}$, Ψ_i определены в монографии [1].

4. Прогиб не зависит от поперечной координаты α_3 .

Вывод уравнения: Принимая во внимание принятые выше гипотезы, перемещения запишем в следующем виде [1]

$$u_i^{(k)} = u_i - zw_{,i} + g(z)\Psi_i,$$

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + z\kappa_{ij} + g(z)\psi_{ij}; \quad \varepsilon_{i3} = f_0(z)\psi_i, \quad (5)$$

где

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + k_{ij}w,$$

$$\psi_{ij} = \frac{1}{2}(\Psi_{i,j} + \Psi_{j,i}), \quad \kappa_{ij} = -w_{,ij}, \quad i, j = 1, 2. \quad (6)$$

Здесь дифференцирование по координате α_i обозначено нижним индексом после запятой.

В теории упругих оболочек уравнения состояния имеют вид [1]:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k(\alpha_1, \alpha_2)}{1 - \nu_k^2} \Xi \varepsilon_{ij}, \quad (7)$$

$$\Xi \varepsilon_{ij} = (1 - \nu(\alpha_1, \alpha_2)) \varepsilon_{ij} + \nu(\alpha_1, \alpha_2) \delta_{ij} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}),$$

δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ii} = 1$; $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$).

Принимая во внимание вязкоупругие свойства материала, уравнения (7) могут быть переписаны в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k}{1-v_k^2} \Xi J_k(\varepsilon_{ij}), \quad (8)$$

$$J_k(z) = z - \int_0^t K_k(t-s)z(s)ds. \quad (9)$$

Удельные мембранные усилия и изгибающие моменты определяются стандартным способом [1]:

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{\delta_k(\alpha_1, \alpha_2)}{\delta_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int \sigma_{ij} dz, \quad M_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{\delta_k(\alpha_1, \alpha_2)}{\delta_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int z \sigma_{ij} dz. \quad (10)$$

В дополнение к классическим силам и моментам изотропной теории оболочек, обобщенные удельные силы Q_i и моменты L_{ij} можно представить следующим образом [1]:

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \frac{\delta_k(\alpha_1, \alpha_2)}{\delta_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int f_0(z) \sigma_{i3} dz, \quad L_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{\delta_k(\alpha_1, \alpha_2)}{\delta_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int g(z) \sigma_{ij} dz. \quad (11)$$

Для исследования свободных колебаний положим $(T_{ij}, M_{ij}, L_{ij}, Q_i, \kappa_{ij}, \psi_{ij}) = e^{i\Omega t} (T'_{ij}, M'_{ij}, L'_{ij}, Q'_i, \kappa'_{ij}, \psi'_{ij})$. Далее штрих будет опущен.

Принимая во внимания уравнения (4), (5), (8), (10), (11), получим следующие выражения для усилий и моментов

$$T_{ij} = \frac{E(\alpha_1, \alpha_2) h(\alpha_1, \alpha_2)}{1-v^2(\alpha_1, \alpha_2)} \Xi e_{ij} + \frac{E(\alpha_1, \alpha_2) h^2(\alpha_1, \alpha_2)}{2(1-v^2(\alpha_1, \alpha_2))} (c_{13} \Xi \kappa_{ij} + c_{12} \Xi \psi_{ij}), \quad (12)$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2} h c_{13} T_{ij} + \frac{E(\alpha_1, \alpha_2) h^3(\alpha_1, \alpha_2)}{12(1-v^2(\alpha_1, \alpha_2))} (\eta_3 \Xi \kappa_{ij} + \eta_2 \Xi \psi_{ij}), \quad (13)$$

$$L_{ij} = \frac{1}{2} h c_{12} T_{ij} + \frac{E(\alpha_1, \alpha_2) h^3(\alpha_1, \alpha_2)}{12(1-v^2(\alpha_1, \alpha_2))} (\eta_2 \Xi \kappa_{ij} + \eta_1 \Xi \psi_{ij}), \quad (14)$$

где

$$\frac{1}{12} h^3(\alpha_1, \alpha_2) \pi_{1k} = \frac{\delta_k(\alpha_1, \alpha_2)}{\delta_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int g^2(z) dz, \quad \frac{1}{12} h^3(\alpha_1, \alpha_2) \pi_{2k} = \frac{\delta_k(\alpha_1, \alpha_2)}{\delta_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int z g(z) dz,$$

$$\frac{1}{2} h^2(\alpha_1, \alpha_2) \pi_{3k} = \frac{\delta_k(\alpha_1, \alpha_2)}{\delta_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int g(z) dz, \quad h(\alpha_1, \alpha_2) \xi_k = h_k(\alpha_1, \alpha_2), \quad h(\alpha_1, \alpha_2) \zeta_n = \delta_n(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$c_{13} = \sum_{k=1}^N (\zeta_{k-1} + \zeta_k) \gamma_k, \quad c_{12} = \sum_{k=1}^N \xi_k^{-1} \pi_{3k} \gamma_k,$$

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^N \xi_k^{-1} \pi_{1k} \gamma_k - 3c_{12}^2, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^N \xi_k^{-1} \pi_{2k} \gamma_k - 3c_{13}c_{12}, \quad \eta_3 = 4 \sum_{k=1}^N (\xi_k^2 + 3\zeta_{k-1}\zeta_k) \gamma_k - 3c_{13}^2.$$

Здесь $\pi_{1k}, \pi_{2k}, \pi_{3k}, c_{13}, c_{12}, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ - функции, зависящие от α_1, α_2 .

Следуя [1], введем обобщенные перемещения \hat{u}_i и деформации \hat{e}_{ij}

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \hat{e}_{ij} - \frac{1}{2}hc_{13}\kappa_{ij} - \frac{1}{2}hc_{12}\Psi_{ij}, \\ u_i &= \hat{u}_i - \frac{1}{2}hc_{13}w_{,i} - \frac{1}{2}hc_{12}\Psi_i. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда уравнение (12) можно переписать в виде

$$T_{ij} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \Xi \hat{e}_{ij}. \quad (16)$$

Рассмотрим следующее преобразование [1]:

$$\hat{M}_{ij} = M_{ij} - \frac{1}{2}hc_{13}T_{ij}, \quad \hat{L}_{ij} = L_{ij} - \frac{1}{2}hc_{12}T_{ij}. \quad (17)$$

Из соотношений (12)-(14), (18) следуют формулы для приведенных удельных моментов

$$\hat{M}_{ij} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\eta_3 \Xi \kappa_{ij} + \eta_2 \Xi \Psi_{ij}), \quad (18)$$

$$\hat{L}_{ij} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\eta_2 \Xi \kappa_{ij} + \eta_1 \Xi \Psi_{ij}),$$

Уравнение для поперечных удельных сил может быть переписано как

$$Q_i = G\Psi_i, \quad (19)$$

$$G = \frac{\left[\sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) \right]^2}{\sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) \tilde{G}_k^{-1}} + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \tilde{G}_k,$$

$$\lambda_k = \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1, \alpha_2)} f_0^2(z) dz, \quad \lambda_{kn} = \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1, \alpha_2)} f_k(z) f_n(z) dz \quad (n=0, k),$$

$$\tilde{G}_k = G_k \tilde{c}_k. \quad (20)$$

Величина $G_k = E_k / [2(1+\nu_k)]$ является модулем сдвига k -ого слоя.

Для вывода уравнений свободных колебаний воспользуемся вариационным принципом

$$\text{Гамильтона} \quad \int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T) dt = 0. \quad (21)$$

$\delta U, \delta T$ являются вариациями потенциальной и кинетической энергии соответственно. Выполняя обычную процедуру вычисления вариаций в (21) можно получить уравнения в терминах удельных напряжений и приведенных моментов:

$$T_{1i,1} + T_{2i,2} = 0, \quad (22)$$

$$\hat{L}_{1i,1} + \hat{L}_{2i,2} = Q_i, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

$$\hat{M}_{11,11} + 2\hat{M}_{12,12} + \hat{M}_{22,22} - \frac{1}{R_2(\alpha_2)} T_{22} + \Omega^2 \left(\sum_{k=1}^N \rho_k h_k \right) w = 0. \quad (24)$$

Используя выражения (5), (15) получим уравнения совместности деформаций

$$\hat{e}_{11,22} - 2\hat{e}_{12,12} + \hat{e}_{22,11} = R_2^{-1} w_{,11}. \quad (25)$$

Представим силовую функцию F таким образом, чтобы

$$T_{ij} = \delta_{ij} \Delta F - F_{,ij}. \quad (26)$$

Выражая обобщенные деформации \hat{e}_{ij} посредством силовой функции и подставив их в уравнение (25), получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Eh} \Delta \Delta F + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_2^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \left(\frac{1}{Eh} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \left(\frac{\nu}{Eh} \right) \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \left(\frac{1}{Eh} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \left(\frac{\nu}{Eh} \right) \right) + \\ & + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} \left(\frac{1-\nu}{Eh} \right) = R_2^{-1} w_{,11}. \end{aligned} \quad (27)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 287 с.
2. Матяш В.И. Колебания изотропных упруго-вязких оболочек//Механика полимеров. – 1971. – №1 – С. 157 – 163.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО СЖИМАЕМОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Яровая А.В.

Bending of elastic sandwich beam on deformed foundation under the action surface loads is considered. For the kinematics description of carryings layers accepted the hypotheses Bernoulli. filler is hard, compressible. The foundation is described by model Winkler. Received analytical deciding a problem and conducted their numeric analysis.

Введение. В монографиях [1–3] рассмотрено деформирование трехслойных элементов конструкций, не связанных с основанием. Изгиб трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем исследован в статье [4]. Работы [5, 6] посвящены деформированию трёхслойных пластин на упругом основании. Контактное взаимодействие тел с круговыми границами исследовано в [7]. Здесь рассматривается изгиб несимметричного по толщине упругого трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем, покоящегося на деформируемом основании.

Постановка задачи. Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли. В жестком сжимаемом по толщине заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На склейках слоёв используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, деформации малые.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1). На стержень действует вертикальная поверхностная нагрузка $q(x)$. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв, h_k – толщина k -го слоя, $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), b_0 – ширина стержня. Все перемещения и линейные размеры отнесены к длине стержня l .

Перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ выражаются через четыре искомые функции $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$ и $u_2(x)$:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}; & w^{(1)} &= w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ u^{(2)} &= u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}; & w^{(2)} &= w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \\ u^{(3)} &= \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right); \\ w^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

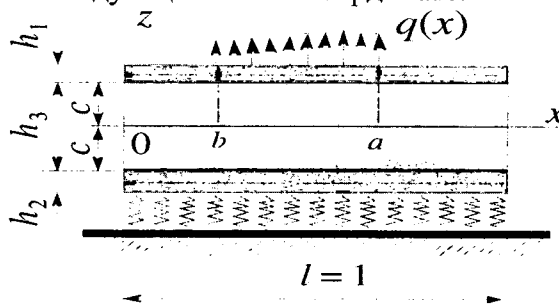


Рис. 1. Расчетная схема стержня на упругом основании

Компоненты тензора деформаций в слоях следуют из (1) с помощью соотношений Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(1)} &= u_{1,x} - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_{1,xx}, \quad \varepsilon_{xz}^{(1)} = 0 \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ \varepsilon_x^{(3)} &= \left(1 + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2} u_{1,x} + \frac{h_1}{4} w_{1,xx}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2} u_{2,x} - \frac{h_2}{4} w_{2,xx}\right), \\ \varepsilon_{xz}^{(3)} &= \left(\frac{2z + h_1}{8c} + \frac{1}{4}\right) w_{1,xx} + \left(\frac{-2z + h_2}{8c} + \frac{1}{4}\right) w_{2,xx} + \frac{u_1 - u_2}{4c}, \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{1}{2c} (w_1 - w_2) \quad (-c \leq z \leq c), \\ \varepsilon_x^{(2)} &= u_{2,x} - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_{2,xx}, \quad \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c).\end{aligned}\quad (2)$$

Введем внутренние силы и моменты:

$$\begin{aligned}N_x^{(k)} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, \\ N_z^{(3)} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} dz, \quad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz,\end{aligned}\quad (3)$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_z^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений.

Напряжения σ_{ij} после этого определяются из закона Гука. Уравнения равновесия следуют из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A - \delta A_i = 0, \quad (4)$$

где δA – вариация работы внешних сил; δA_i – вариация работы внутренних сил упругости;

$$\delta A = b_0 \int_0^l (q \delta w_1 - q_R \delta w_2) dx;$$

$$\delta A_i = b \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} \delta \varepsilon_z^{(3)} dz \right] dx. \quad (5)$$

В зависимости от свойств деформируемого основания связь между реакцией и прогибом может быть различной. В практике часто используют известную модель Винклера, согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w, \quad (6)$$

где κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели), причем реакция основания всегда направлена в сторону, противоположную прогибу.

Подставив реакцию (6) и выражения вариаций работ (5) в (4), используя закон Гука, получим систему дифференциальных уравнений в усилиях для рассматриваемого упругого трехслойного стержня, связанного с упругим основанием:

$$\begin{cases} H_1 - P_{1,x} = b_0 p, \\ H_1 + P_{2,x} = 0, \\ S_{1,xx} + H_2 - T_{1,x} = b_0 \left(q + \frac{p_x h_1}{2}\right), \\ S_{2,xx} - H_2 - T_{2,x} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

и силовые граничные условия при $x = 0, l$:

$$P_1 = N_p^{(1)}, \quad P_2 = N_p^{(2)}, \quad T_1 - S_{1,x} = Q_p^{(1)}, \quad T_2 - S_{2,x} = Q_p^{(2)}, \quad S_1 = M_p^{(1)}, \quad S_2 = M_p^{(2)}.$$

Здесь $N_p^{(1)}$, $Q_p^{(1)}$, $M_p^{(1)}$, $N_p^{(2)}$, $Q_p^{(2)}$, $M_p^{(2)}$ – заданные усилия на торцах стержня в несущих слоях; индекс $p = 0, l$ указывает, на каком конце стержня они приложены; обобщенные усилия, входящие в (7), выражаются через внутренние силы и моменты

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{Q^{(3)}}{2c}, \quad H_2 = \frac{N_z^{(3)}}{2c}, \quad P_1 = \frac{N_x^{(3)}}{2} + \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(1)}, \quad P_2 = \frac{N_x^{(3)}}{2} - \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(2)}, \\
T_1 &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q^{(3)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, \quad S_1 = \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_x^{(1)} - M_x^{(1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)}, \\
T_2 &= \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q^{(3)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, \quad S_2 = -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_x^{(2)} - M_x^{(2)} + \frac{h_2}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)}.
\end{aligned}$$

Для связи напряжений и деформаций в слоях используются соотношения закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (i, j = x, y, z). \quad (8)$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций, G_k , K_k – модули сдвиговой и объемной деформации.

Используя соотношения (8), (2) и (3), выразим внутренние усилия и моменты через искомые функции u_1, w_1, u_2, w_2 :

$$\begin{aligned}
N_x^{(1)0} &= b_0 \int_c^{c+h_1} \sigma_x^{(1)} dz = b_0 h_1 K_1^+ u_{1,x}, \quad N_x^{(2)0} = b_0 \int_{-c-h_1}^{-c} \sigma_x^{(2)} dz = b_0 h_2 K_2^+ u_{2,x}, \\
N_x^{(3)0} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)} dz = b_0 K_3^- (w_1 - w_2) + b_0 c K_3^+ \left(u_{1,x} + u_{2,x} + \frac{h_1}{2} w_{1,xx} - \frac{h_2}{2} w_{2,xx} \right), \\
N_z^{(3)0} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)} dz = b_0 K_3^+ (w_1 - w_2) + b_0 c K_3^- \left(u_{1,x} + u_{2,x} + \frac{h_1}{2} w_{1,xx} - \frac{h_2}{2} w_{2,xx} \right), \\
M_x^{(1)0} &= b_0 \int_c^{c+h_1} \sigma_x^{(1)} z dz = b_0 K_1^+ \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) u_{1,x} - \frac{h_1^3}{12} w_{1,xx} \right], \\
M_x^{(2)0} &= b_0 \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_x^{(2)} z dz = b_0 K_2^+ \left[-h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) u_{2,x} - \frac{h_2^3}{12} w_{2,xx} \right], \\
M_x^{(3)0} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)} z dz = b_0 c^2 K_3^+ \left[\frac{1}{3} u_{1,x} - \frac{1}{3} u_{2,x} - \frac{h_1}{6} w_{1,xx} + \frac{h_2}{6} w_{2,xx} \right], \\
M_{xz}^{(3)0} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)} z dz = \frac{b_0 c G_3}{3} [w_{1,x} - w_{2,x}], \\
Q^{(3)0} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)} dz = b_0 G_3 \left[u_1 - u_2 + \left(c + \frac{h_1}{2} \right) w_{1,xx} + \left(c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,xx} \right]. \quad (9)
\end{aligned}$$

Подставив реакцию (6) и выражения внутренних усилий через перемещения (9) в (7), получим систему дифференциальных уравнений, описывающую перемещения в рассматриваемом упругом трехслойном стержне, находящемся на упругом основании:

$$\begin{aligned}
a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} &= 0, \\
-a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} &= 0, \\
-a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\
+a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 &= q, \\
-a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\
-a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + (a_8 + \kappa_0) w_2 &= 0. \quad (10)
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты a_n

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{G_3}{2c}; \quad a_2 = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}; \quad a_3 = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2}; \quad a_4 = K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \\
a_5 &= \frac{K_3^+ c}{3}; \quad a_6 = \frac{K_3^+ c h_1}{6}; \quad a_7 = \frac{K_3^+ c h_2}{6}; \quad a_8 = \frac{K_3^+}{2c}; \quad a_9 = K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \\
a_{10} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2}; \quad a_{11} = \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; \\
a_{12} &= \frac{K_3^- (h_1 + h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{G_3 c}{6}; \quad a_{13} = \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6}; \\
a_{14} &= \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; \quad a_{15} = \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6}; \quad a_{16} = \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12}; \\
a_{17} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}, \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k,
\end{aligned}$$

где K_k и G_k – объемный и сдвиговой модули упругости материалов.

Отметим, что коэффициент жесткости упругого основания добавился к коэффициенту a_8 только в четвертом уравнении системы (10).

Примем условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Граничные условия в сечениях $x = 0, l$ в перемещениях принимают следующий вид:

$$w^k = u^k,_{,x} = w^k,_{,xx} = 0 \quad (k=1, 2). \quad (11)$$

Для решение системы дифференциальных уравнений (10) искомые функции представим в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (11):

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \\
w_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right).
\end{aligned} \quad (12)$$

где $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ – искомые амплитуды перемещений.

Нагрузку $q(x)$ также разложим в ряд по синусам:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\frac{\pi m x}{l} dx. \quad (13)$$

Если интенсивность поверхностной нагрузки постоянна, то из (13) следуют коэффициенты

$$q_m = \frac{2q}{\pi m} (1 - \cos(\pi m)).$$

После подстановки выражений для перемещений (12) и нагрузки (13) в уравнения равновесия (10) и соответствующих преобразований, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$:

$$\begin{cases}
b_1 U_{1m} + b_2 U_{2m} + b_3 W_{1m} + b_4 W_{2m} = 0, \\
b_2 U_{1m} + b_5 U_{2m} + b_6 W_{1m} - b_7 W_{2m} = 0, \\
b_3 U_{1m} + b_6 U_{2m} + b_8 W_{1m} + b_9 W_{2m} = q_m, \\
b_4 U_{1m} - b_7 U_{2m} + b_9 W_{1m} + b_{10} W_{2m} = 0,
\end{cases} \quad (14)$$

где коэффициенты b_i зависят от параметров m, κ_0 и вычисляются через величины a_n .

Решение системы (14) можно выписать в определителях

$$U_{1m} = \frac{\Delta_{1m}}{\Delta}, \quad U_{2m} = \frac{\Delta_{2m}}{\Delta}, \quad W_{1m} = \frac{\Delta_{3m}}{\Delta}, \quad W_{2m} = \frac{\Delta_{4m}}{\Delta}, \quad (15)$$

где определители

$$\Delta = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ b_3 & b_6 & b_8 & b_9 \\ b_4 & -b_7 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix}; \quad \Delta_{1m} = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ q_m & b_6 & b_8 & b_9 \\ 0 & -b_7 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix};$$

$$\Delta_{2m} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_3 & b_4 \\ b_2 & 0 & b_6 & -b_7 \\ b_3 & q_m & b_8 & b_9 \\ b_4 & 0 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix}; \quad \Delta_{3m} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & 0 & b_4 \\ b_2 & b_5 & 0 & -b_7 \\ b_3 & b_6 & q_m & b_9 \\ b_4 & -b_7 & 0 & b_{10} \end{bmatrix}; \quad \Delta_{4m} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_2 & b_5 & b_6 & 0 \\ b_3 & b_6 & b_8 & q_m \\ b_4 & -b_7 & b_9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисляя определители (15), получим амплитуды перемещений $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$. Далее по формулам (12) находим искомые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (1), напряжения – из закона Гука (8).

Численное исследование. Принимается, что пакет трехслойного стержня составлен из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Нагрузка равномерно распределена по всей длине стержня и прижимает его к упругому основанию. Расчетные коэффициенты жесткости соответствуют слабым ($\kappa_0 = 1$), средним ($\kappa_0 = 100$) и весьма жестким ($\kappa_0 = 10^5$ МПа/м) упругим основаниям. Интенсивность распределенной нагрузки $q = -10$ МПа. Относительные толщины слоев $h_1 = 0,04, h_2 = 0,02, h_3 = 0,18$.

Соответствующие основанию средней жесткости изменения прогибов w_i и продольных перемещений u_i в несущих слоях вдоль оси рассматриваемого стержня приведены на рис. 2, а, б. Номер кривой совпадает с номером слоя. Продольные перемещения по середине стержня равны нулю и меняют свой знак, а у торцов – принимают экстремальные значения. Разность прогибов дает величину полной деформации заполнителя. Здесь везде выполняется условие $|w_1| > |w_2|$, что соответствует обжатию заполнителя по всей длине стержня.

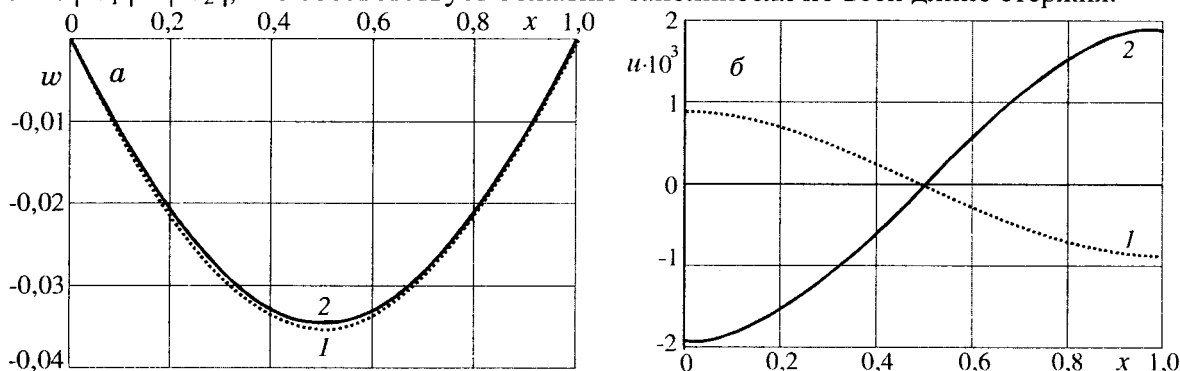


Рис. 2. Изменения прогибов – а и продольных перемещений в несущих слоях – б вдоль оси стержня при основании средней жесткости (номер кривой совпадает с номером слоя)

При коэффициенте постели $\kappa_0 = 10^5$ МПа / м, что соответствует весьма жестким упругим основаниям, перемещения показаны на рис. 3, а, б. Прогибы здесь резко уменьшаются по величине и перестают быть максимальными в центре стержня, где возникает обратное выпучивание, характерное при деформировании и однородных элементов конструкций на упругом основании высокой жесткости. Экстремумы сдвигаются к сечениям с координатами $x = 0,22$ и $x = 0,78$. Продольные перемещения в несущих слоях уменьшаются на порядок. Номер кривой совпадает с номером слоя.

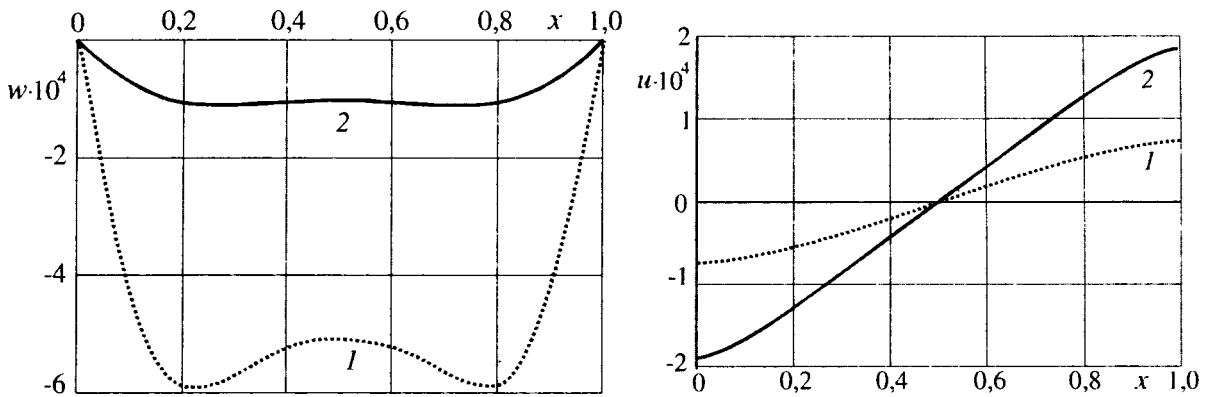


Рис. 3. Прогибы – а и продольные перемещения – б в слоях стержня при основании высокой жесткости (номер кривой совпадает с номером слоя)

Зависимость деформации обжатия заполнителя ϵ_{zz} от коэффициента постели (МПа / м) иллюстрирует рис. 4: 1 – $\kappa_0 = 0$, 2 – $\kappa_0 = 1$, 3 – $\kappa_0 = 100$, 4 – $\kappa_0 = 10^5$. С увеличением жесткости основания обжатие заполнителя уменьшается по величине. При основании большой жесткости экстремум из центра стержня сдвигается к опорам, как и прогибы несущих слоев. Малое отличие деформаций обжатия заполнителя стержней, не скрепленного с упругим основанием (1) и покоящегося на основании слабой жесткости (2), указывает на возможность отдельных инженерных расчетов без учета влияния основания.

Зависимость величины относительной деформации обжатия заполнителя ϵ_{zz} от толщины заполнителя h_3 при различных коэффициентах жесткости упругого основания иллюстрирует рис. 2: 1 – $\kappa_0 = 1$, 2 – $\kappa_0 = 100$, 3 – $\kappa_0 = 10^5$ МПа / м. При слабых и жестких основаниях с ростом толщины заполнителя величина относительной деформации уменьшается, если основание средней жесткости – растет. Здесь $h_1 = h_2 = 0,03$.

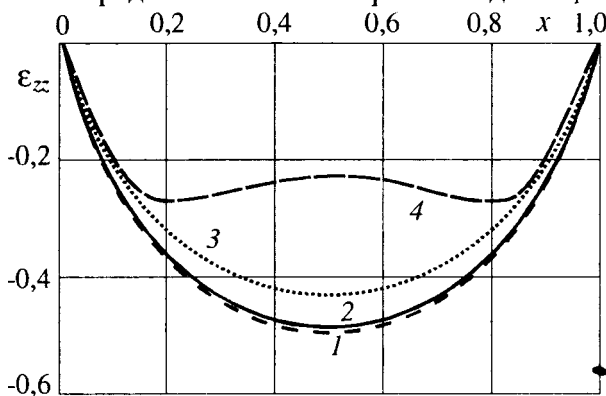


Рис. 4. Деформация обжатия заполнителя ϵ_{zz} при различных коэффициентах постели

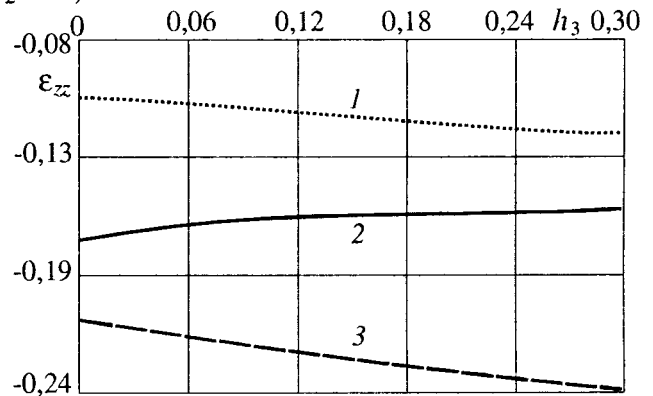


Рис. 5. Зависимость величины деформации обжатия заполнителя ϵ_{zz} от толщины заполнителя

На рис. 6 показано изменение нормальных продольных напряжений по толщине стержня при различных коэффициентах постели (МПа / м): 1 – $\kappa_0 = 0$, 2 – $\kappa_0 = 1$, 3 – $\kappa_0 = 100$, 4 – $\kappa_0 = 10^5$. Значения напряжений во внешних слоях отнесены к $q_1 = 10^9$ МПа, в заполнителе – к $q_3 = 10^7$ МПа. Увеличение жесткости основания приводит к уменьшению величины напряжений в несущих слоях. В заполнителе они также уменьшаются, и при основании большой жесткости меняют знак.

Рис. 7 иллюстрируют изменение поперечных напряжений $\sigma_{zz}^{(3)}$ в заполнителе вдоль его оси при различных коэффициентах постели (МПа / м): 1 – $\kappa_0 = 1$ (пунктир), 2 – $\kappa_0 = 100$ (сплошная), 3 – $\kappa_0 = 10^5$ (штриховая). Кривые без штриха соответствуют напряжениям в склейке со вторым слоем $z = -c$, со штрихом – напряжения в склейке с первым слоем $z = c$.

Увеличение жесткости основания до средней величины приводит к существенному уменьшению продольных и поперечных напряжений в заполнителе на склейке с первым слоем. При основании высокой жесткости эти напряжения меняют знак, экстремумы остаются сдвинутыми к опорам. Во второй склейке увеличение жесткости основания приводит к незначительному росту продольных и поперечных напряжений.

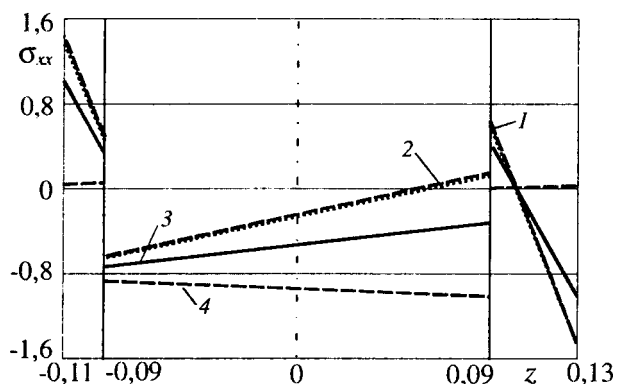


Рис. 6. Изменение нормальных продольных напряжений по толщине стержня

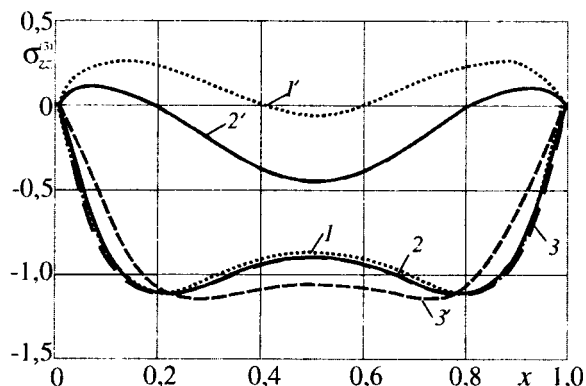


Рис. 7. Изменение нормальных продольных напряжений по толщине стержня

Выводы. Сжимаемость заполнителя, структура трехслойного пакета и жесткость упругого основания приводят к существенному изменению напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом стержне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
2. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Деформирование металлополимерных систем. – Мн.: Бел. наука, 2004. – 342 с.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
4. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Гу Юй. Деформирование трехслойного упругопластического стержня со сжимаемым заполнителем // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – № 19. – С. 67–75.
5. Яровая А.В. Изгиб трехслойной круговой пластины на упругом основании // Проблемы прочности. – 2005. – № 6. – С. 68–78.
6. Яровая А.В. Термоупругий изгиб трехслойной пластины на деформируемом основании // Прикл. механика. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 96–103.
7. Кравчук А.С, Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия. – Мн.: Технопринт, 2000. – 196 с.

ВНУТРИМОЛЕКУЛЯРНОЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Вихренко В.С., Кандраценка А.В., Шварцер Д.

The pathways of vibrational energy of an excited molecule are investigated through consideration of time derivatives of different energy constituents: vibrational, rotational and the Coriolis coupling energies. It is shown that intermode energy exchange between two particular vibrational modes can proceed through direct nonlinear intermode interactions as well as due to the Coriolis coupling. Vibration to rotation energy exchange is elucidated, too. The expressions for the intensities of intra- and intermolecular energy exchange channels are derived.

Релаксация энергии колебательно возбужденных молекул (ее уменьшение вследствие взаимодействия с окружающими молекулами) играет важную роль в химических реакциях, стабилизации продуктов реакции, и поэтому изучению этого процесса уделяется много внимания как с экспериментальной, так и теоретической точек зрения [1–3]. При исследовании колебательной релаксации многоатомных молекул важную роль играет внутримолекулярное перераспределение энергии, поскольку хорошо известно, что, как правило, лишь низкочастотные моды обеспечивают достаточно эффективный обмен энергией между колебательными степенями свободы данной молекулы и ее окружением [4–6]. Поэтому при возбуждении высокочастотных мод часто оптимальные процессы передачи энергии включают ее предварительное внутримолекулярное перераспределение.

Натурные эксперименты по исследованию путей передачи колебательной энергии, основанные на лазерных технологиях, сложны, и не в состоянии дать полную картину потоков энергии, тем более что эти процессы развиваются на экстремально коротких пикосекундных или субпикосекундных интервалах времени [7–9]. Поэтому в настоящее время общепринятым является молекулярно-динамическое моделирование (МДМ) энергообменных процессов в молекулах. Однако для интерпретации результатов МДМ необходимо использовать соответствующий теоретический базис. Ниже, используя динамические уравнения эволюции соответствующих степеней свободы молекулы, выявлены каналы передачи энергии и получены выражения, позволяющие по результатам МДМ оценивать их значимость для внутри- и межмолекулярного энергообмена.

Механическая энергия молекулы

$$E = K + U, \quad (1)$$

состоит из кинетической и потенциальной энергий, причем последнюю удобно представить как сумму трех слагаемых

$$U = U_1 + U_2 + U_n, \quad (2)$$

зависящих от одной (U_1), двух (U_2), или большего числа (U_n) обобщенных колебательных координат Q_j , в качестве которых используются нормальные координаты, введенные для гармонической части потенциальной энергии молекулы в приближении малых колебаний:

$$U_1 = \sum_{j=1}^s (k_{jj}Q_j^2 + k_{jjj}Q_j^3 + \dots), \quad (3)$$

$$U_2 = \sum_{1 \leq i < j}^s (k_{ijj}Q_i Q_j^2 + k_{iij}Q_i^2 Q_j^2 + k_{iiij}Q_i^2 Q_j^3 + \dots), \quad (4)$$

$$U_n = \sum_{1=i < j < k < \dots}^s (k_{ijk} Q_i Q_j Q_k + k_{ijkk} Q_i Q_j Q_k^2 + k_{ijkl} Q_i Q_j Q_k Q_l + \dots), \quad (5)$$

где $k_{ijk\dots}$ – внутримолекулярные константы междумодового взаимодействия, s – число колебательных степеней свободы.

Кинетическая энергия молекулы, за исключением энергии ее поступательного движения вместе с центром масс, может быть представлена в виде [10,11]

$$K = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \dot{Q}_k^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{k,l} \zeta_{kl} Q_k \dot{Q}_l. \quad (6)$$

Первый член в правой части уравнения (6) представляет кинетическую энергию колебательных степеней свободы в системе координат, связанной с молекулой; второй член учитывает вращательную энергию ($\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости молекулы, \mathbf{I} – тензор ее центральных моментов инерции); последний член обусловлен кориолисовым взаимодействием между вращательными и колебательными степенями свободы (кориолисова энергия, ζ_{kl} – коэффициенты кориолисова взаимодействия). Это последнее слагаемое отражает невозможность разделения динамики вращательных и колебательных степеней свободы (в отличие от поступательных, которые описываются в рамках теоремы о движении центра масс), интенсивность взаимосвязи между которыми существенно зависит от выбора подвижной (молекулярной) системы координат.

Для кинематического разделения вращательных и колебательных степеней свободы используется система координат Экарта [12,13], минимизирующая колебательно-вращательное взаимодействие. В этом случае [10]

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \sum_k \mathbf{B}_k Q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \mathbf{D}_{kl} Q_k Q_l, \quad (7)$$

$$\mathbf{B}_k = 2 \sum_a m_a^{1/2} (\mathbf{a}_a \cdot \mathbf{L}_{ak} \mathbf{E} - \mathbf{a}_a \mathbf{L}_{ak}), \quad (8)$$

$$\mathbf{D}_{kl} = \sum_a (2 \mathbf{L}_{ak} \cdot \mathbf{L}_{al} \mathbf{E} - \mathbf{L}_{ak} \mathbf{L}_{al} - \mathbf{L}_{al} \mathbf{L}_{ak}), \quad (9)$$

коэффициенты кориолисова взаимодействия выражаются через нормальные векторы \mathbf{L}_{ak} молекулы

$$\zeta_{kl} = \sum_a \mathbf{L}_{ak} \times \mathbf{L}_{al}, \quad (10)$$

нижние индексы $k, l, m, n\dots$ относятся к нормальным координатам, тогда как a, b, c обозначают атомы молекулы, m_a – массы атомов; суммирование выполняется по всем нормальным координатам или по всем атомам молекулы. Векторы \mathbf{a}_a обозначают равновесные положения атомов в молекулы в экартовой системе координат.

Тензор моментов инерции молекулы в равновесной конфигурации

$$\mathbf{I}_0 = \sum_a m_a (a_a^2 \mathbf{E} - \mathbf{a}_a \mathbf{a}_a), \quad (11)$$

где \mathbf{E} – трехмерный единичный тензор.

Нормальные векторы \mathbf{L}_{ak} позволяют выразить текущие положения атомов через нормальные координаты

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{a}_a + m_a^{-1/2} \sum_k \mathbf{L}_{ak} Q_k. \quad (12)$$

Условия ортогональности нормальных координат налагают связи на нормальные векторы [10]:

$$\sum_a \mathbf{L}_{ak} \cdot \mathbf{L}_{al} = \delta_{kl}, \quad (13)$$

$$\sum_a m_a^{1/2} \mathbf{L}_{ak} = 0, \quad (14)$$

$$\sum_a m_a^{1/2} \mathbf{a}_a \times \mathbf{L}_{ak} = 0. \quad (15)$$

Точка над символом (\dot{Q}_k) обозначает производную по времени, а точка между векторами ($\mathbf{a}_a \cdot \mathbf{L}_{ak}$) обозначает их скалярное произведение. Векторное произведение обозначается косым крестом (\times).

Импульс P_k , сопряженный нормальной координате Q_k , определяется дифференцированием кинетической энергии по соответствующей обобщенной скорости

$$P_k = \frac{\partial K}{\partial \dot{Q}_k} = \dot{Q}_k + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_l \zeta_{lk} Q_l. \quad (16)$$

Динамические уравнения эволюции нормальных координат следуют из уравнений Лагранжа

$$\dot{P}_k - \frac{\partial K}{\partial Q_k} = - \frac{\partial(U + U_e)}{\partial Q_k}, \quad (17)$$

где U_e – энергия взаимодействия рассматриваемой молекулы с окружением.

Дифференцируя по времени уравнение (16) получим

$$\dot{P}_k = \ddot{Q}_k + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_l \zeta_{lk} \dot{Q}_l + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \sum_l \zeta_{kl} Q_l, \quad (18)$$

а из уравнения (6) найдем

$$\frac{\partial K}{\partial Q_k} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial Q_k} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_l \zeta_{kl} \dot{Q}_l. \quad (19)$$

В результате динамические уравнения для нормальных координат приобретают вид

$$\ddot{Q}_k = F_k - 2\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_l \zeta_{lk} \dot{Q}_l + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial Q_k} \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \sum_l \zeta_{kl} Q_l, \quad (20)$$

где

$$F_k = - \frac{\partial(U + U_e)}{\partial Q_k}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial Q_k} = \mathbf{B}_k + \sum_l \mathbf{D}_{kl} Q_l. \quad (22)$$

Получим дифференциальные уравнения вращательного движения молекулы. Кинетический момент молекулы относительно центра масс

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + \sum_{k,l} \zeta_{kl} Q_k \dot{Q}_l, \quad (23)$$

где первое слагаемое является обычным кинетическим моментом при вращении твердого тела, тогда как последнее слагаемое определяет вклад колебательного движения в кинетический момент [10].

Теорема об изменении собственного кинетического момента молекулы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{M}_C^{(e)}, \quad (24)$$

где $\mathbf{M}_C^{(e)}$ – момент внешних сил, действующих со стороны окружающих молекул.

Оператор (d/dt) используется для обозначения производной по времени в лабораторной системе координат, тогда точка над символом обозначает производную по времени в молекулярной, экартовой системе координат. В уравнениях (16)–(20) точка над символом может также рассматриваться как обозначающая производную по времени в молекулярной системе координат, поскольку производная по времени от скалярной функции не зависит от выбора системы отсчета. Для произвольного вектора связь между производными по времени в лабораторной и молекулярной системах координат определяется формулой Бура [14]

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \dot{\mathbf{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}. \quad (25)$$

Отсюда следует, что производные по времени вектора угловой скорости молекулы в обеих системах координат равны. Более того, член $\boldsymbol{\omega} \cdot (d\zeta_{kl}/dt) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \zeta_{kl}) = 0$ не входит в уравнение (18), поскольку векторы ζ_{kl} постоянны в молекулярной системе отсчета.

Уравнение (24) может быть записано в виде

$$\dot{\mathbf{L}}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_C = \mathbf{M}_C^{(e)}. \quad (26)$$

Производные в молекулярной (экартовой) системе координат легко вычисляются:

$$\dot{\mathbf{L}}_C = \dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_{k,l} \zeta_{kl} Q_k \ddot{Q}_l. \quad (27)$$

Здесь принято во внимание, что векторы ζ_{kl} антисимметричны по отношению к перестановке индексов: $\zeta_{lk} = -\zeta_{kl}$.

Производная по времени тензора моментов инерции с учетом выражения (7)

$$\dot{\mathbf{I}} = \sum_l \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial Q_l} \dot{Q}_l = \sum_l \mathbf{B}_l \dot{Q}_l + \sum_{l,m} \mathbf{D}_{lm} Q_m \dot{Q}_l, \quad (28)$$

так что окончательно выражение (24) приобретает вид

$$\mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}_C^{(e)} - \dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} \times \sum_{k,l} \zeta_{kl} Q_k \dot{Q}_l - \sum_{k,l} \zeta_{kl} Q_k \ddot{Q}_l. \quad (29)$$

Уравнения (20) и (29) взаимосвязаны и определяют динамику вращательных и колебательных степеней свободы молекулы, находящейся в окружении других молекул.

Уравнения для \ddot{Q}_k и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ могут быть получены в виде, не содержащем перекрестных членов. Используя уравнение (20) в уравнении (29), запишем уравнение для углового ускорения, в которое не входит вторая производная обобщенных координат:

$$\mathbf{I}' \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\mathbf{M}}_C^{(e)} - \dot{\mathbf{I}}' \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \sum_{k,l} \zeta_{kl} Q_k \dot{Q}_l - \frac{1}{2} \sum_{k,l} \zeta_{kl} Q_k \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{I}'}{\partial Q_l} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (30)$$

Здесь появился модифицированный тензор моментов инерции

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I} - \sum_{l,k,m} \zeta_{lk} \zeta_{mk} Q_l \dot{Q}_m \quad (31)$$

и момент внешних сил, действующих на равновесную конфигурацию молекулы

$$\tilde{\mathbf{M}}_C^{(e)} = \mathbf{M}_C^{(0)}. \quad (32)$$

Для упрощения последующих вычислений можно воспользоваться представлением [10] модифицированного тензора моментов инерции в виде произведения

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I}'' \cdot \mathbf{I}_0^{-1} \cdot \mathbf{I}'', \quad (33)$$

где тензор

$$\mathbf{I}'' = \mathbf{I}_0 + \frac{1}{2} \sum_k \mathbf{B}_k Q_k \quad (34)$$

линеен по обобщенным координатам.

После подстановки уравнения (30), разрешенного относительно $\dot{\omega}$, в уравнение (20) получим уравнение для \ddot{Q}_k , не содержащее $\dot{\omega}$.

Сформулированные динамические уравнения (20) и (29) или (30) позволяют выявить и исследовать пути передачи энергии.

Хотя при выборе нормальных координат использовалось гармоническое приближение, нелинейные слагаемые, входящие в потенциальную энергию молекулы и зависящие лишь от одной обобщенной координаты, удобно включить в определение энергии данной моды

$$E_k = K_k + U_{1k} = \frac{1}{2} \dot{Q}_k^2 + k_{kk} Q_k^2 + k_{kkk} Q_k^3 + \dots \quad (35)$$

Производная по времени этой энергии

$$\frac{dE_k}{dt} = \ddot{Q}_k \dot{Q}_k + (2k_{kk} Q_k + 3k_{kkk} Q_k^2 + \dots) \dot{Q}_k. \quad (36)$$

Подставляя в полученное выражение уравнение (10), производную по времени колебательной энергии k -й моды представим в виде суммы слагаемых, каждое из которых имеет определенный физический смысл:

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} = & F_k^{(e)} \dot{Q}_k - \frac{\partial U_2}{\partial Q_k} \dot{Q}_k - \frac{\partial U_n}{\partial Q_k} \dot{Q}_k - 2\omega \cdot \sum_l \zeta_{kl} \dot{Q}_l \dot{Q}_k + \\ & + \frac{1}{2} \omega \cdot \frac{\partial \mathbf{I}'}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \cdot \omega + \dot{\omega} \cdot \sum_l \zeta_{kl} Q_l \dot{Q}_k. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь $F_k^{(e)}$ – проекция внешней силы на k -ю колебательную моду. Следовательно, первый член в правой части уравнения (37) описывает прямую передачу энергии k -й колебательной моды окружающим молекулам.

Второе слагаемое в правой определяется нелинейными константами взаимодействия двух определенных мод и описывает прямой обмен энергией между этими двумя модами:

$$\frac{\partial U_2}{\partial Q_k} = \sum_l (k_{kll} Q_l^2 + k_{klll} Q_l^3 + \dots + 2k_{kkl} Q_k Q_l + \dots). \quad (38)$$

Третий член учитывает многомодовый обмен энергией, когда в процессе участвуют более двух мод.

Четвертый член отражает важность кинематических нелинейностей и учитывает кориолисово взаимодействие между двумя определенными модами, обусловленное вращением молекулы. Смысл двух последних слагаемых в правой части уравнения (37) может быть установлен после дополнительных вычислений, выполненных ниже.

Производная по времени кинетической энергии вращательного движения

$$\frac{dK_{\text{rot}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (39)$$

после использования уравнения (30) приобретает вид

$$\frac{dK_{\text{rot}}}{dt} = \mathbf{M}_C^{(e)} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{k,l} \zeta_{kl} Q_k \ddot{Q}_l. \quad (40)$$

Производная по времени энергии Кориолиса

$$\frac{dK_{\text{Cor}}}{dt} = \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{k,l} \zeta_{kl} Q_k \dot{Q}_l] = \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{k,l} \zeta_{kl} Q_k \ddot{Q}_l - \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \sum_{k,l} \zeta_{kl} Q_l \dot{Q}_k. \quad (41)$$

Прежде, чем переходить к анализу правых частей уравнений (40) и (41), полезно записать выражение для производной по времени полной колебательной энергии молекулы. Суммируя уравнения (37) по k , получим

$$\frac{dE_{\text{vibr}}}{dt} = \sum_k F_k^{(e)} \dot{Q}_k + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{k,l} \zeta_{kl} Q_l \dot{Q}_k. \quad (42)$$

Сейчас очевидно, что последние слагаемые в уравнениях (41) и (42) описывают обмен между колебательной и кориолисовой составляющими энергии, тогда как последний член в уравнении (37) соответствует обмену конкретной k -й колебательной моды с кориолисовой энергией. Этот обмен зависит от углового ускорения молекулы.

Далее, вторые слагаемые в правых частях уравнений (40) и (42) ответственны за обмен энергией между колебательными и вращательными степенями свободы, а первое слагаемое в правой части уравнения (41) и последнее слагаемое в уравнении (40) ответственны за обмен между вращательной и кориолисовой составляющими энергии.

Вследствие взаимного сокращения слагаемых после суммирования уравнений (40), (41) и (42) уравнение для изменения энергии молекулы приобретает вид

$$\frac{dE}{dt} = \sum_k F_k^{(e)} \dot{Q}_k + \mathbf{M}_C^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (43)$$

которое показывает, что, как и должно быть в соответствии с законом сохранения механической энергии системы, возможен либо прямой обмен энергией между колебательными степенями свободы молекулы и ее окружением, либо через вращательные степени свободы. Все

остальные из рассмотренных выше слагаемых определяют внутримолекулярное перераспределение энергии.

Обмен энергией между колебательными и вращательными степенями свободы определяется центробежным слагаемым

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left[\sum_k \mathbf{B}_k \dot{Q}_k + \frac{1}{4} \sum_{k,l} \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{I}_0^{-1} \cdot \mathbf{B}_l (Q_k \dot{Q}_l + \dot{Q}_k Q_l) \right] \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (44)$$

которое не равно мощности центробежных сил. Силы Кориолиса обеспечивают прямой и косвенный междумодовый обмен энергией, а также обмен между колебательными и вращательными степенями свободы.

Для плоских молекул (например, H_2O) некоторые из записанных выше выражений могут быть упрощены. В этом случае векторы ζ_{ab} , определяющие кориолисовы взаимодействия, перпендикулярны к плоскости молекулы и, следовательно, лишь перпендикулярные к плоскости молекулы составляющие угловой скорости и углового ускорения дают вклад в обмен энергией с кориолисовым членом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hippler H., Troe J. *Bimolecular Collisions* / M.N.R. Ashfold and J. Baggot, Eds. – London: Royal Soc. of Chem., 1989.
2. Flinn G., Parmenter C., Wodtke A.M. // *J. Chem. Phys.* – 1996. V. 100. P. 12817.
3. Вихренко В.С. // *Теоретическая и прикладная механика. Межвед. сб. научно-метод. статей.* – Мн.: Технопринт, 2004. Вып. 17. С. 14.
4. Bagchi B., Biswas R. // *Adv. Chem. Phys.* – 1999. V. 109. P. 207.
5. Heidelberg C., Vikhrenko V.S., Schwarzer D., Schroeder J. // *J. Chem. Phys.* – 1999. V. 110. P. 5286.
6. Kandratsenka A., Schroeder J., Schwarzer D., Vikhrenko V.S. // *Phys. Chem. Chem. Phys.* – 2005. V. 7. P. 1205.
7. Laenen R., Rauscher C., Laubereau A. // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. V. 80. P. 2622.
8. L.K. Iwaki, J.C. Deak, S.T. Rhea, D.D. Dlott, in *Ultrafast Infrared and Raman Spectroscopy* / M.D. Fayer, Ed. – New York: Marcel Dekker, 2001.
9. Schwarzer D., Lindner J., Voehringer P. // *J. Chem. Phys.* – 2005. V. 123. Article # 161105.
10. Watson J.K.G. // *Molecular Physics.* – 1968. V. 15. P. 479.
11. Wilson E.B., Jr., Decius J.C., Cross P.C. *Molecular vibrations.* – New York: McGraw-Hill, 1955.
12. Eckart C. // *Phys. Rev.* – 1935. V. 47. P. 522.
13. Bunker P.R. *Molecular Symmetry and Spectroscopy.* – New York: Academic, 1979.
14. Курс теоретической механики / К.С. Колесников – ред. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗА ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗРЫВОВ ДЕФОРМАЦИЙ

Буренин А.А., Рагозина В.Е.

In the context of nonlinear dynamic elastic theory the peculiarities of constructing boundary –value problems solutions in vicinity of the wave front by expanding into the ray series behind the deformations discontinuity surfaces are discussed. In constructing ray series being the approximate boundary-value problems solutions it is suggested to use front curvature dependences of discontinuity intensities.

Метод исследования переходных процессов, называемый лучевым, широко используется в геометрической оптике, акустике, динамике деформирования. По своему существу он является асимптотическим методом [1]. В настоящей статье остановимся на разновидности этого метода, связанной с построением приближенных решений краевых задач нелинейной динамической теории упругости в форме разложений решений по лучевой координате за поверхностями разрывов деформаций. Следует заметить, что в своей основе этот метод опирается на теорию рекуррентных условий совместности разрывов, вытекающих из геометрии и кинематики движущихся поверхностей разрывов, которая включает в себя условия совместности Адамара, обобщение последних, данное Т. Томасом [2], полную систему таких соотношений, впервые записанную Г.И. Быковцевым [3] для параметрического задания движения в прямоугольной декартовой системе координат и обобщенную на случай изначально криволинейной системы координат сравнительно недавно [4]. Если поверхность разрывов является характеристической, что справедливо в случае линейных сред или в случае поверхностей разрывов ускорений (слабых волн), то теория рекуррентных условий совместности предоставляет возможность для коэффициентов лучевых рядов, следуя законам сохранения, выписать обыкновенные дифференциальные уравнения (уравнения затухания), последовательным интегрированием которых осуществляется построение приближенного решения. Такой способ был предложен в [5,6] и с его помощью были получены решения краевых задач теории упругости [7,8], теории пластичности [9], гиперболической термоупругости [10]. Обзор работ данного направления содержится в статье [11]. Отдельно следует отметить осуществленную возможность переноса этого метода на случай неоднородных сред, осуществленный Анатолием Власовичем Чигаревым [12]. Именно на такой методической основе были получены А.В. Чигаревым классические теперь уже результаты по распространению волн в деформируемых средах, включая поверхностные волны.

При исследовании поверхностей разрывов деформаций в нелинейных средах складывается принципиально иная ситуация. Отличие скоростей ударных волн от характеристических не позволяет, следуя законам сохранения, кинематическим и геометрическим условиям совместности разрывов, получить уравнения затухания. Способ избегания данной математической сложности был предложен в [14,15]. Здесь развивается данный подход с целью учета на каждом шаге последовательного построения решения изменения интенсивности разрыва за счет изменяющейся кривизны фронтальной поверхности [13].

I. Общие модельные соотношения.

Для описания движения нелинейно-упругой среды остановимся на представлении Эйлера, где x^1, x^2, x^3 – пространственная криволинейная система координат, $t \geq 0$ – время. В этом случае общая система уравнений имеет вид:

$$\rho = \rho_0 \det(\delta_j^i - u_{,j}^i), \quad v^i = \dot{u}^i + u_{,j}^i v^j,$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{,j}^k), \quad \sigma_j^i = \rho(v^i + v_{,j}^i v^j), \quad (1.1)$$

$$\sigma_j^i = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_i^k} (\delta_j^k - 2\alpha_j^k), \quad \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

В (1.1) ρ и ρ_0 – плотность среды в текущем и свободном состоянии; u^i и u_i – контр- и ковариантные компоненты вектора перемещений; α_{ij} – ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси; σ^{ij} и σ_j^i – контравариантные и смешанные компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши; v^i – контравариантные компоненты вектора скорости; W – функция упругого потенциала, вид которой определяет свойства среды; точкой над символом обозначена частная производная по времени; латинский индекс после запятой означает ковариантное дифференцирование по пространственной координате. Для рассматриваемых в дальнейшем процессов ударного деформирования примем гипотезу адиабатического приближения, т.е. остановимся на чисто механических эффектах деформирования. Будем считать среду изотропной, так что $W = W(I_1, I_2, I_3)$. Считаем, что упругий потенциал зависит от линейного, квадратичного и кубического инвариантов тензора деформаций. Представим W его разложением в ряд Тейлора в окрестности свободного состояния. Для сжимаемых сред это разложение вида

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \xi I_2^2 + \eta I_1^2 I_2 + \kappa I_1 I_3 + \chi I_1^4 + \dots \quad (1.2)$$

$$I_1 = \alpha_i^i, \quad I_2 = \alpha_j^i \alpha_i^j, \quad I_3 = \alpha_j^i \alpha_k^j \alpha_i^k,$$

где λ, μ – параметры Ламе, $l, m, n, \xi, \eta, \kappa, \chi$ – упругие модули третьего и четвертого порядка. Для изучения процесса распространения поперечных ударных волн в чистом виде без влияния предварительных объемных деформаций более удобна модель несжимаемой нелинейно-упругой среды. Наличие геометрической связи $\rho = \rho_0 = const$ позволяет уменьшить число независимых переменных для W , так что $W = W(I_1, I_2)$. В этом случае принимаем представление

$$W = (a - \mu) I_1 + a I_2 + b I_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + c I_1^4 + d I_2^2 + k I_1^2 I_2 + \dots \quad (1.3)$$

В (1.3) перед некоторыми слагаемыми взят знак «-», т.к. $I_1 \leq 0, I_2 \geq 0$ для несжимаемых сред. Также необходимо внести поправку на добавочное гидростатическое давление в формуле Мурнагана в (1.1):

$$\sigma_j^i = -p \delta_j^i + \frac{\partial W}{\partial \alpha_i^k} (\delta_j^k - 2\alpha_j^k). \quad (1.4)$$

В рядах (1.3) и (1.4) дальше ограничимся выписанными членами ввиду малой информации о величинах упругих модулей более высоких порядков. Система (1.1) наряду с (1.2) или (1.3), (1.4) оказывается замкнутой относительно определяемых полей.

II. Типы и особенности движения ударных волн.

Если рассматриваемая краевая задача включает большие изменения краевых условий за малое время, то ее решение можно строить в обобщенном виде, считая, что эти изменения задаются скачкообразными изменениями первых и вторых производных поля перемещений –

разрывами производных. Созданные в начальный момент времени на границе, они распространяются посредством фронтальных поверхностей разрывов. Движение поверхностей разрывов в нелинейно-упругих средах подчинено определенным закономерностям. Прежде всего, считается, что разрывы на них являются регулярными, т.е. для них выполняются геометрические и кинематические условия совместности:

$$[f_{,i}] = \left[\frac{\partial f}{\partial v} \right] v_i + a^{\alpha\beta} [f]_{,\alpha} g_{ij} x_{,\beta}^j, \quad [\dot{f}] = -G \left[\frac{\partial f}{\partial v} \right] + \frac{\delta [f]}{\delta t}, \quad (2.1)$$

$$[f] = f^+ - f^-, \quad f^+ = \lim_{x^i \rightarrow x_{\Sigma}^i} f, \quad f^- = \lim_{x^i \rightarrow x_{\Sigma}^i} f,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = f_{,i} v^i, \quad g_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial z^k}{\partial x^j}, \quad a^{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta},$$

где $y^\alpha (\alpha = 1, 2)$ – внутренние координаты на поверхности разрывов Σ ; греческие индексы и здесь, и всюду в дальнейшем принимают значения 1, 2; g_{ij} и $a_{\alpha\beta}$ – пространственный и поверхностный метрический тензор соответственно; буквой f обозначены компоненты любого пространственного тензора, который может рваться на Σ вместе со своими производными; $\frac{\delta}{\delta t}$ – обозначение производной по времени в данной подвижной точке поверхности Σ ,

для этой точки в процессе движения постоянными будут только $y^\alpha = y_0^\alpha$; индексами «+» и «-» выделены значения величин перед Σ и сразу за ней; v_j – компоненты единичного вектора внешней нормали, направленной в сторону движения Σ ; G – скорость Σ в направлении нормали; греческим индексом после запятой обозначается тензорная производная по поверхности в смысле определения [16].

Решения, содержащие поверхности разрывов, носят название обобщенных, т.к. на них (1.1) не имеет места. Но (1.1) является дифференциальным следствием общих законов сохранения массы, импульса и энергии. Из этих же законов на Σ вытекает связанность разрывов искомых величин между собой динамическими условиями совместности:

$$[\rho(v^i v_i - G)] = 0,$$

$$[\sigma^{ij}] v_j = \rho^+ (v^{j+} v_j - G) [v^i], \quad (2.2)$$

$$\sigma^{ij+} [v_i] v_j = \rho^+ (v^{j+} v_j - G) \left(\frac{[v^i] [v_i]}{2} + [E] \right) - [q^j] v_j,$$

первое из которых – следствие закона сохранения массы; второе следует из закона сохранения импульса; третье – из закона сохранения энергии, причем в нем E – плотность внутренней энергии, q_i – вектор теплового потока. Из (2.1), (2.2) для сжимаемых сред следует наличие трех возможных ударных волн, квазипродольной и двух квазипоперечных [17]. Приставка квази- означает, что наряду с основной составляющей разрыва (продольной или поперечной) волна может нести на себе дополнительную составляющую разрыва. Скорость волны является сложной функцией предварительных деформаций и характеристик разрыва. Если даже считать поле предварительных деформаций известным наряду с геометрией волны, продольный и поперечный скачок остаются неизвестными и могут быть определены только в процессе решения краевой задачи. Это приводит к включению скорости G в число неизвестных задачи, поэтому ряд из краевых условий оказывается связан с поверхностью Σ , по-

ложение которой заранее неизвестно. Это приводит к дополнительному усложнению задачи, исходно уже нелинейной, и тем самым к логически обоснованному построению их решения с помощью приближенных, в частности аналитических методов. Что касается несжимаемой среды, здесь также возникают две поперечные волны, зависящие от предварительных деформаций и скачков на волне и различные по своим свойствам и назначению [18].

III. Один вариант лучевого метода решения задачи о нормальном ударе по упругому полупространству.

Рассмотрим задачу, в которой поле перемещений сводится к компоненте $u_1(x_1, t)$, возникающей в результате нормального удара в момент $t = 0$ по границе упругого полупространства $x_1 \geq 0$. Следствием (1.1) буде нелинейный аналог уравнения Навье:

$$u_{1,11}(1 + \alpha u_{1,1}) + \dots = \frac{1}{C_1^2} (\ddot{u}_1(1 - 2u_{1,1}) + 2\dot{u}_1\dot{u}_{1,1} + \dots); \quad (3.1)$$

$$u_{1,1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \alpha = -9 + 6 \frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}; \quad C_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}.$$

Под действием удара граница полупространства $x_1 = 0$ начинает движение, которое может быть представлено рядом Тейлора в окрестности нуля:

$$u_1|_{x_1=f(t)} = f(t); \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dt^k} \Big|_0 t^k \approx v_0 t + \frac{at^2}{2} + \dots; \quad v_0 > 0. \quad (3.2)$$

В (3.2) ограничимся квадратичными слагаемыми ряда. Этого вполне достаточно для отражения сути метода и особенностей задач рассматриваемого типа. Для скорости v_0 важным является выписанное строгое неравенство; его выполнение приводит к мгновенному формированию ударной волны $\Sigma(t)$, причем $\Sigma(0)$ занимает положение $x_1 = 0$. На $\Sigma(t)$ необходимо поставить следующие краевые условия:

$$u_1|_{\Sigma(t)} = 0; \quad \kappa_1|_{\Sigma(t)} = [\dot{u}_1]_{\Sigma(t)};$$

$$x_{\Sigma} = \int_0^t G(\xi) d\xi; \quad G = C_1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{\kappa_1}{C_1} \right)^k \right); \quad (3.3)$$

$$\beta_1 = -\frac{9}{4} + \frac{3}{2} \frac{l+m+n}{\lambda+2\mu} = \frac{\alpha}{4}; \quad \beta_2 = -3\beta_1^2 - \frac{3}{2} \frac{l+m+n}{\lambda+2\mu} + \frac{7}{4}.$$

В основе применяемого далее лучевого метода лежит идея о замене точного решения краевой задачи (3.1-3.3) его приближенным прифронтным разложением вида

$$u_1'(x_1, t) = u_1^0(x_1, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k u_1}{\partial t^k} \right]_{t_{\Sigma}} (t - t_{\Sigma})^k, \quad (3.4)$$

$$t_{\Sigma} = \int_0^{x_1} \frac{d\xi}{G(\xi)}, \quad t \geq t_{\Sigma}.$$

Представление (3.4) включает $u_1^0(x_1, t)$ - поле перемещений, созданное в области перед волной (в нашем случае $u_1^0(x_1, t) = 0$); $u_1^i(x_1, t)$ - перемещения за волной. Скачки производных по времени до произвольного порядка означают, что в окрестности волны требуется большая гладкость решения, чем для исходной краевой задачи, что позволяет заменить точное решение на приближенное (3.4) в некоторой области. Ее протяженность зависит от конкретной задачи. К примеру, для линейризованной задачи (3.1–3.3) два первых слагаемых лучевого ряда (3.4) совпадают с точным решением во всей области задачи. Если считать, что нелинейность задачи слабая, то аналогичный ряд должен дать хорошее приближение к решению. Отметим, что название «лучевой» связано с тем, что в общем случае ряд строится вдоль линий, проходимых каждой точкой $\Sigma(y^\alpha, t)$ - лучей. Их геометрия задается уравнениями

$$x^i = x_0^i + \int_0^t G(y^\alpha, \xi) v^i(y^\alpha, \xi) d\xi \quad (3.5)$$

и в общем случае определяется совместно с решением. В нашем простейшем случае лучевое направление задается декартовой координатой x_1 . Чтобы построить ряд (3.4), необходимо

знать его коэффициенты, $\kappa_k = \left[\frac{\partial^k u_1}{\partial t^k} \right]_{t_{\Sigma}}$. Для их определения можно применить (3.1), или

следствия его частного дифференцирования по времени, причем все полученные уравнения записываются в разрывах на $\Sigma(t)$. В результате на k -ом шаге метода ($k = 0, 1, 2, \dots, K$) получаем рекуррентные уравнения вида

$$\frac{\delta \kappa_{k+1}}{\delta t} = F_k(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_k, \kappa_{k+1}, \kappa_{k+2}), \quad (3.6)$$

где значение κ_{k+2} не позволяет проинтегрировать эту цепочку уравнений, последовательно определяя искомые разрывы, что отличает ударные волны от слабых волн. Это обстоятельство, как правило, считается исключаящим для применения лучевого метода. Как вариант изменения метода для ударных волн в работах [13, 14, 18] применяется дополнительное разложение разрывов в ряды по δ -производным в окрестности нуля, так что

$$\kappa_1 \approx \kappa_{10} + \frac{\delta \kappa_{10}}{\delta t} t + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \kappa_{10}}{\delta t^2} t^2 + \dots, \quad (3.7)$$

$$\kappa_2 \approx \kappa_{20} + \frac{\delta \kappa_{20}}{\delta t} t + \dots, \quad \frac{\delta \kappa_{10}}{\delta t} = \left. \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} \right|_{t=0}$$

и т.д.

На (3.6) в этом случае смотрят, как на алгебраическое соотношение в нуле. К примеру, если в нашей задаче ограничится нулевым шагом метода, то (3.6) переходят в одно уравнение $\frac{\delta \kappa_1}{\delta t} = F_0(\kappa_1, \kappa_2)$; в (3.7) считаем $\kappa_1 \approx \kappa_{10} + \frac{\delta \kappa_{10}}{\delta t} t$, $\kappa_2 \approx \kappa_{20}$. Вместе с краевым условием

(3.2) получаем замкнутую задачу относительно κ_{10} , κ_{20} , $\frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}$. Сразу отметим, что если для плоской задачи линейная по времени структура разрывов в принципе хорошо согласуется с характером движения волны, то при наличии кривизны волнового фронта, что рассматривается далее, линейное приближение имеет малую допустимую область.

Предлагаемый вариант лучевого метода основан на включении в (3.6) величины κ_{k+2} , определенной из решения соответствующей линеаризованной задачи. Тогда (3.6) относительно κ_1 , $\kappa_2, \dots, \kappa_{k+1}$ становится замкнутой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Иногда их можно проинтегрировать точно; если это невозможно из-за их сложной нелинейной структуры, то их можно решить приближенно аналитически, либо численно.

Если в нашей задаче ограничиться нулевым шагом метода, то из уравнения движения, записанного в разрывах, следует

$$\frac{\delta\kappa_1}{\delta t} = \frac{\kappa_2\kappa_1}{C_1} \frac{A_0 + A_1 \frac{\kappa_1}{C_1} + \dots}{B_0 + B_1 \frac{\kappa_1}{C_1} + \dots}; \quad \frac{\kappa_1}{C_1} \ll 1; \quad (3.8)$$

$$A_0 = -2\beta_1; \quad A_1 = 5\beta_1^2 + 2\beta_2 - \alpha\beta_1; \quad B_0 = -2; \quad B_1 = -3\beta_1 - 2\alpha + 2,$$

где многоточием обозначены слагаемые более высокой степени малости по степеням $\kappa_1 C_1^{-1}$. Приближенно можно считать

$$\frac{\delta\kappa_1}{\delta t} = \beta_1 \frac{\kappa_2\kappa_1}{C_1}. \quad (3.9)$$

Для сходной линейной задачи $\kappa_2 = \kappa_{20} = const$. Подставляя это приближение в (3.9), получим

$$\kappa_1 \approx \kappa_{10} \exp\left(\frac{\beta_1}{C_1} \kappa_{20} t\right), \quad (3.10)$$

откуда следует экспоненциальный, а не линейный характер изменения κ_1 , величина исходной интенсивности волны может как увеличиваться, так и уменьшаться в зависимости от κ_{20} , т.к. $\beta_1 < 0$ для известных модулей материалов. Подставляя найденную величину $\kappa_1(t)$ в уравнение эйконала, получим на волновом фронте

$$t_\Sigma = \frac{x_1}{C_1} - \frac{C_1}{\beta_1 \kappa_{20}} \ln \left\{ 1 + \frac{\beta_1 \kappa_{10}}{C_1} \left[\exp\left(\frac{\beta_1}{C_1^2} \kappa_{20} x_1\right) - 1 \right] \right\}, \quad (3.11)$$

или же обратную зависимость

$$x_\Sigma(t) = C_1 \left\{ t + \frac{\kappa_{10}}{\kappa_{20}} \left[\exp \frac{\beta_1 \kappa_{20} t}{C_1} - 1 \right] + \frac{\beta_2}{2\beta_1} \frac{\kappa_{10}^2}{\kappa_{20} C_1} \left[\exp \frac{2\beta_1 \kappa_{20} t}{C_1} - 1 \right] + \dots \right\} \quad (3.12)$$

С учетом (3.11), (3.12) из (3.4) получаем приближенное представление для поля перемещений:

$$u(x_1, t) = -\frac{\kappa_{10} \exp\left(\frac{\beta_1 \kappa_{20} x_1}{C_1^2}\right)}{1 + \frac{\beta_1 \kappa_{10}}{C_1} \left[\exp\left(\frac{\beta_1 \kappa_{20} x_1}{C_1^2}\right) - 1 \right]} \cdot \left\{ t - \frac{x_1}{C_1} + \frac{C_1}{\beta_1 \kappa_{20}} \ln \left\{ 1 + \frac{\beta_1 \kappa_{10}}{C_1} \left[\exp\left(\frac{\beta_1 \kappa_{20} x_1}{C_1^2}\right) - 1 \right] \right\} \right\} - \frac{\kappa_{20}}{2} \left\{ t - \frac{x_1}{C_1} + \frac{C_1}{\beta_1 \kappa_{20}} \ln \left\{ 1 + \frac{\beta_1 \kappa_{10}}{C_1} \left[\exp\left(\frac{\beta_1 \kappa_{20} x_1}{C_1^2}\right) - 1 \right] \right\} \right\}^2 - \dots \quad (3.13)$$

В (3.13) κ_{10} , κ_{20} - неизвестные константы. Для их определения используем краевое условие (3.2). Приравнявая коэффициенты рядов с одинаковыми степенями по времени, получим

$$\frac{\kappa_{10}}{C_1} \approx -\frac{v_0}{C_1} - \left(\frac{v_0}{C_1}\right)^2 + \dots \quad (3.14)$$

$$\kappa_{20} \approx -\frac{a \left\{ 1 + \frac{v_0}{C_1} + (1 + \beta_1) \left(\frac{v_0}{C_1}\right)^2 + \dots \right\}}{1 - 2\frac{v_0}{C_1} + (1 - 4\beta_1) \left(\frac{v_0}{C_1}\right)^2 + \dots}$$

Если бы в краевом условии (3.2) учитывались более высокие степени времени, то решение не ограничивалось бы нулевым шагом метода. Отметим, что краевое условие (3.3), ставящееся на $\Sigma(t)$, в этом методе выполняется автоматически. Далее рассмотрим, какие изменения в решение вносятся присутствием кривизны волнового фронта.

IV. Нормальный удар по цилиндрической полости в упругом пространстве

В нелинейно упругом пространстве присутствует цилиндрическая полость радиуса r_0 , неограниченная по образующим. А начальный момент времени изнутри по всей поверхности полости создается ударное нагружение в направлении нормали. Следствием нагрузки в цилиндрической системе координат r, ϕ, z будет поле напряжений $u_r(r, t)$, $u_\phi = u_z = 0$. Передним фронтом распространяющихся деформаций будет ударная волна (предварительные деформации в среде отсутствуют). В системе координат r, ϕ, z уравнения движения сводятся к одному уравнению:

$$u_{r,rr} \left(1 + \alpha_1 u_{r,r} + \alpha_2 \frac{u_r}{r} \right) + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} + \alpha_3 \frac{u_r^2}{r^3} + \alpha_4 \frac{u_{r,r}^2}{r} + \alpha_5 \frac{u_r u_{r,r}}{r^2} + \dots = \frac{1}{C_1^2} \left\{ \ddot{u}_r \left(1 - 2u_{r,r} - \frac{u_r}{r} \right) + 2\dot{u}_r \dot{u}_{r,r} + \dots \right\} \quad (4.1)$$

$$u_{r,r} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \dot{u}_r = \frac{\partial u_r}{\partial t};$$

$$\alpha_1 = -9 + 6 \frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}; \quad \alpha_2 = -\frac{4\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} + \frac{2l+6m}{\lambda+2\mu};$$

$$\alpha_3 = \frac{5\lambda+7\mu}{\lambda+2\mu} - \frac{4l+6m+3n}{\lambda+2\mu}; \quad \alpha_4 = -\frac{8\lambda+13\mu}{\lambda+2\mu} + \frac{4l+6m+3n}{\lambda+2\mu}; \quad \alpha_5 = 3.$$

На границе полости $L(t)$ поле перемещений известно:

$$u_r|_{r_L} = g(t); \quad r_L = r_0 + g(t); \quad g(t) \approx v_0 t + \frac{at^2}{2}; \quad v_0 \neq 0; \quad t \geq 0. \quad (4.2)$$

Положение волнового фронта $\Sigma(t)$ определено уравнением

$$r_\Sigma = r_0 + \int_0^t G(\xi) d\xi, \quad (4.3)$$

где $G(t)$ вычисляется по формуле (3.3).

Первоначально рассмотрим решение лучевым методом соответствующей линейной задачи до второго порядка включительно. Для нее получим

$$\frac{\delta\kappa_1}{\delta t} = -\frac{1}{2r_\Sigma} C\kappa_1;$$

$$\frac{\delta\kappa_2}{\delta t} = -\frac{C\kappa_2}{2r_\Sigma} - \frac{3}{8} \frac{C^2\kappa_1}{r_\Sigma^2}; \quad (4.4)$$

$$r_\Sigma = r_0 + Ct,$$

откуда следует

$$\kappa_1 = \frac{\kappa_{10}}{\sqrt{1 + \frac{Ct}{r_0}}}; \quad \kappa_2 = \frac{\kappa_{20}}{\sqrt{1 + \frac{Ct}{r_0}}} - \frac{3}{8} \frac{C^2\kappa_{10}t}{r_0^2 \left(1 + \frac{Ct}{r_0}\right)^{3/2}};$$

$$u_r = -\frac{\kappa_{10}\sqrt{r_0}}{\sqrt{r}} \left(1 - \frac{r-r_0}{C}\right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\kappa_{20}\sqrt{r_0}}{\sqrt{r}} - \frac{3\kappa_{10}}{8\sqrt{rr}^{3/2}} (r-r_0) \right] \left(t - \frac{r-r_0}{C}\right)^2 - \dots \quad (4.5)$$

$$\kappa_{10} = -v_0; \quad \kappa_{20} = -a.$$

Отметим, что если бы точное решение (4.4) заменили приближенным вида

$$\kappa_1 \approx \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} t, \quad \kappa_2 \approx \kappa_{20}, \quad \text{то для } \kappa_1 \text{ получили бы:}$$

$$\kappa_1 \approx \kappa_{10} \left(1 - \frac{Ct}{2r_0}\right).$$

Следовательно, уже на расстояниях $Ct = 2r_0$ получаем $\kappa_1 = 0$, тогда как точное решение должно только асимптотически приближаться к нулю. Сравнение $\kappa_2(t)$ из (4.5) и $\kappa_2 \approx \kappa_{20}$ показывает, что это приближение (в отличие от плоской задачи) имеет серьезную погреш-

ность, связанную с быстрым изменением на волне ее кривизны, которое существенно изменяет искомое решение.

Теперь остановимся на решении основной нелинейной задачи. Ограничимся в лучевом ряде (3.4) первыми двумя слагаемыми. Это позволяет рассмотреть только нулевой шаг метода, т.е. уравнение затухания, следующее из (4.1), записанного в разрывах. С учетом геометрических и кинематических условий совместности из (4.1) получим

$$\frac{\delta \kappa_1}{\delta t} = \frac{\beta_1 \kappa_2 \frac{\kappa_1}{C_1} - \frac{G \kappa_1}{2r_\Sigma} - \frac{\alpha_4 \kappa_1^2}{2r_\Sigma} + \dots}{1 - \gamma \frac{\kappa_1}{C_1}}, \quad (4.6)$$

$$2\gamma = 2 - 7\beta_1,$$

где многоточием обозначены невыписанные слагаемые более высокого порядка относительно малой величины $\kappa_1 C_1^{-1}$. Если даже в (4.6) использовать для κ_2 приближенную формулу (4.5), относительно κ_1 (4.6) будет интегро-дифференциальным нелинейным уравнением, т.к. r_Σ определяется из (4.3). Вообще, если не сводить решение к одному уравнению, то (4.6) можно дополнить уравнением

$$\frac{\delta r_\Sigma}{\delta t} = G(t) = C_1 \left(1 + \beta_1 \frac{\kappa_1}{C_1} + \dots \right). \quad (4.7)$$

Таким образом, можно решать (4.6, 4.7) совместно относительно двух неизвестных функций κ_1 и r_Σ . Отметим, что хотя кривизна волнового фронта явным образом не содержится в формулах для скоростей волн, она все-таки входит в уравнения затухания, определяя скорость изменения интенсивности волны и через нее влияя на скорость самой волны. Полученную систему уравнений ввиду ее сложной зависимости от искомых функций можно решать численно, либо аналитически, на основании приближенных методов. Темой статьи является прежде всего аналитические методы, на которых и остановимся. По своим данным задача содержит величину, которую практически всегда можно считать малым параметром:

$\varepsilon = \frac{\kappa_{10}}{C_1}$. Введем безразмерные переменные:

$$s = \frac{C_1 t}{r_0}; \quad w(s) = \frac{\kappa_1}{\kappa_{10}}. \quad (4.8)$$

Из (4.6), считая, что κ_2 приближенно задается решением линейной задачи (4.5), получим в новых переменных:

$$\frac{\delta w}{\delta s} = \frac{\beta_1 \frac{\kappa_2 r_0}{\kappa_{10} C_1} \varepsilon w - (1 + \beta_1 \varepsilon w + \dots) \frac{r_0}{2r_\Sigma} w - \frac{\alpha_4 r_0}{2r_\Sigma} \varepsilon w^2}{1 - \gamma \varepsilon w};$$

$$\frac{\kappa_2 r_0}{\kappa_{10} C_1} = \frac{\kappa_{20} r_0}{\kappa_{10} C_1 \sqrt{1+s}} - \frac{3s}{8(1+s)^{3/2}}; \quad (4.9)$$

$$r_\Sigma = r(t) = r_0 + \int_0^t G_1(\xi) d\xi = r_0 + \int_0^t C_1 (1 + \beta_1 \varepsilon w + \beta_2 \varepsilon^2 w^2 + \dots) d\xi.$$

Величина $\kappa_{20}r_0\kappa_{10}^{-1}C_1^{-1}$ по своему смыслу может считаться константой, сопоставимой с единицей, так что в дальнейшем $A = \kappa_{20}r_0\kappa_{10}^{-1}C_1^{-1}$. Если считать, что все решение сводится к определению одной неизвестной функции w , то относительно нее (4.9) – уравнение интегродифференциального типа. Неизвестную функцию $w(s)$ представим асимптотическим рядом

$$w(s) = w_0(s) + \varepsilon w_1(s) + \varepsilon_2 w_2(s) + \dots \quad (4.10)$$

Решение (4.9) проведем последовательно для $w_0(s)$, $w_1(s)$, ограничившись этими функциями. Это ограничение не является принципиальным, построение решения для $w(s)$ можно продолжить до любой требуемой степени точности. В нашем случае

$$w(s) \approx \frac{1}{\sqrt{1+s}} + \varepsilon \left\{ \frac{\beta_1 A s}{\sqrt{1+s}} - \frac{\varphi}{1+s} + \frac{\beta_1}{(1+s)^{3/2}} - \frac{\gamma + \alpha_4}{\sqrt{1+s}} \right\} + \dots \quad (4.11)$$

Положение волнового фронта определяется приближенной зависимостью

$$r_\Sigma \approx r_0 + C_1 t + 2\varepsilon r_0 \beta_1 (\sqrt{1+s} - 1) = r_0 + C_1 t + 2 \frac{\kappa_{10}}{C_1} r_0 \beta_1 \left(\sqrt{1 + \frac{C_1 t}{r_0}} - 1 \right) \quad (4.12)$$

Укажем на следующую особенность построенного решения: если реальная величина κ_2 отличается от приближения линейной задачи незначительно, так что поправка имеет порядок ε , то учет этого отклонения не скажется на решении для w_0 , w_1 , а лишь на приближениях более высоких порядков. Найденная в (4.11) $w(s)$ отличается от своего линейного аналога и отражает основные особенности нелинейной задачи. Обращение (4.12) приводит к соотношению

$$t_\Sigma = t(r) = \frac{1}{C_1} \left(r - r_0 + 2r_0 \beta_1 \frac{\kappa_{10}}{C_1} \left(1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right) \right) + \dots \quad (4.13)$$

Если ограничиться расстояниями, проходимыми волной, для которых $C_1 t \sim r_0$, то можно рассматривать в качестве прямого разложения решения только (4.11, 4.12, 4.13). Переход в удаленную от r_0 область связан с нарушением регулярности прямого разложения и требует построения дополнительных асимптотических разложений. В представляемой статье основное внимание уделяется особенностям метода лучевых рядов, поэтому удаленную от r_0 область оставим без дальнейшего исследования. Переходя к исходным переменным r, t , ряд типа (3.4) возможно переписать в виде:

$$u_r(r; t) = -\kappa_{10} \left\{ \frac{1}{\sqrt{H(r)}} + \frac{\kappa_{10}}{C_1} \left[\frac{\beta_1 \kappa_{20} r_0}{\kappa_{10} C_1} \frac{H(r) - 1}{\sqrt{H(r)}} - \frac{\varphi}{H(r)} + \frac{\beta_1}{H^{3/2}(r)} - \frac{\gamma + \alpha_4}{\sqrt{H(r)}} \right] \right\} \left(t - \frac{r_0(H(r) - 1)}{C_1} \right) - \frac{\kappa_{20}}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{H(r)}} - \frac{3C_1 \kappa_{10}}{8r_0 \kappa_{20}} \frac{H(r) - 1}{H^{3/2}(r)} \right\} \left(t - \frac{r_0(H(r) - 1)}{C_1} \right)^2 - \dots \quad (4.14)$$

$$H(r) = \frac{r}{r_0} + 2\beta_1 \frac{\kappa_{10}}{C_1} \left(1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right).$$

Подстановка найденного решения в (4.2) позволяет определить неизвестные κ_{10} и κ_{20} :

$$\kappa_{10} = -\frac{v_0}{1 - \frac{v_0}{C_1}};$$

$$\kappa_{20} = \left\{ -a - \frac{v_0^2}{1 - \frac{v_0}{C_1}} + \frac{v_0}{C_1 \left(1 - \frac{v_0}{C_1}\right)} \left(-\frac{a}{2} - \frac{v_0^2}{2r_0 C_1 \left(1 - \frac{v_0}{C_1}\right)} (-1 + \gamma + \alpha_4) \right) \right\} \frac{1}{1 + \frac{2v_0}{C_1 \left(1 - \frac{v_0}{C_1}\right)}}. \quad (4.15)$$

Как видно из (4.15), учет нелинейности и ненулевая кривизна волнового фронта вместе приводят к большему влиянию на κ_{20} значения начальной скорости, чем в сходной плоской задаче, где κ_{20} определяется прежде всего величиной ускорения (3.14). Решение, подобное приведенному здесь, может быть получено для сходных по типу задач с известной заранее геометрией волнового фронта (к примеру, для сферической продольной волны). Также легко могут быть получены решения для сходящихся к $r = 0$ от границы r_0 ударных волн, распространяющихся по сферически и цилиндрически симметричным телам.

V. Задача об одномерной поперечной ударной волне.

Для сравнительного анализа продольных и поперечных ударных волн рассмотрим задачу об одномерной поперечной цилиндрической волне, распространяющейся по несжимаемому нелинейно-упругому пространству от цилиндрической полости радиуса r_0 . Считаем предварительные деформации отсутствующими. На r_0 с момента $t = 0$ действует нагрузка, приводящая к одновременному появлению антиплоских перемещений и скручивания среды, при этом каждая точка среды движется по своей винтовой линии. В линейном приближении такое движение задается компонентами $u_z(r; t)$, $u_\varphi(r; t)$, а $u_r = 0$. Нелинейная постановка задачи связана с учетом всех трех компонент перемещений, для них выполняется:

$$\begin{cases} u_r = r(1 - \cos \Psi); \\ u_\varphi = r \sin \Psi; \\ u_z = u_z(r; t); \\ \Psi = \Psi(r; t), \end{cases} \quad (5.1)$$

откуда следует, что u_r имеет второй порядок малости по отношению к u_φ . Но если эту составляющую перемещений не принимать в расчет, получим некорректное решение уже на уровне выполнения условия несжимаемости $\rho = \rho_0 = \text{const}$. В (5.1) $\Psi(r; t)$ - угол поворота точек среды. Связь напряжения-деформации в этой задаче задается на основании (1.3, 1.4). Ее решение определяется из уравнений движений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}_{,r} + \beta u_{z,r} u_{z,rr} + \beta r^2 \Psi_{,r} \Psi_{,rr} + (1 + \beta) r \Psi_{,r}^2 + (1 + \gamma) \frac{u_{z,r}^2}{r} = \frac{r \dot{\Psi}^2}{C_2^2} + \dots \\ \Psi_{,rr} [1 + 3\alpha r^2 \Psi_{,r}^2 + \alpha u_{z,r}^2] + \frac{\Psi_{,r}}{r} [3 + 5\alpha r^2 \Psi_{,r}^2 + 3\alpha u_{z,r}^2] + 2\alpha \Psi_{,r} u_{z,r} u_{z,rr} = \frac{\ddot{\Psi}}{C_2^2} + \dots = \frac{\ddot{u}_z}{C_2^2} + \dots \\ u_{z,rr} [1 + 3\alpha u_{z,r}^2 + \alpha r^2 \Psi_{,r}^2] + \frac{u_{z,r}}{r} [1 + 3\alpha r^2 \Psi_{,r}^2 + \alpha u_{z,r}^2] + 2\alpha u_{z,r} r^2 \Psi_{,r} \Psi_{,rr} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\mu}; \quad \alpha = \frac{a+b+\kappa+d}{\mu}; \quad \beta = \frac{2a+2b+2\mu+\kappa}{\mu}; \quad \gamma = \frac{a}{\mu}; \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho_0};$$

$$\Psi_{,r} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad \dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Для описанного воздействия зададим краевые условия на r_0 в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi|_{r_0} = \chi t + \frac{\eta t^2}{2}; \\ u_z|_{r_0} = v_0 t + \frac{a t^2}{2}; \quad (\chi r_0)^2 + v_0^2 \neq 0; \quad t \geq 0. \end{array} \right. \quad (5.3)$$

При отсутствии предварительных деформаций условия совместности приводят к существованию единственной ударной волны, поперечной по типу. Ее скорость может быть представлена рядом:

$$G = C_2 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \left(\frac{r^2 \kappa_1^2 + w_1^2}{C_2^2} \right)^i \right); \quad \gamma_1 = \frac{\alpha}{2}; \quad \kappa_1 = [\dot{\Psi}]; \quad w_1 = [\dot{u}_z] \quad (5.4)$$

В (5.4) приведено значение только γ_1 , остальные коэффициенты ряда также зависят только от упругих модулей среды. Из (5.4) следует, если ограничиться только первым слагаемым ряда, что волна движется быстрее, если за ней есть деформации обоих типов. На Σ можно поставить условия:

$$\left. \begin{array}{l} u_z|_{\Sigma} = u_{\varphi}|_{\Sigma} = u_r|_{\Sigma} = 0; \\ [\dot{\Psi}]_{\Sigma} = -\dot{\Psi}^-|_{\Sigma} = \kappa_1; \quad [\dot{u}_z]_{\Sigma} = -\dot{u}_z^-|_{\Sigma} = w_1. \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

Они приведены здесь для законченности постановки краевой задачи. Для лучевого метода они выполняются автоматически. В системе (5.2) последние два уравнения задают поведение поля перемещений, тогда как первое определяет функцию добавочного гидростатического давления по найденным перемещениям. Основной задачей, таким образом, становится определение функций Ψ и u_z . Для этого, как и раньше, применим лучевой метод. На его нулевом шаге из (5.2), записанных в разрывах, получим

$$\begin{cases} \frac{\delta \kappa_1}{\delta \alpha} = \alpha \frac{\kappa_2 r_\Sigma^2 \kappa_1^2}{C_2^2} + \alpha \frac{w_2 \kappa_1 w_1}{C_2^2} + \frac{\kappa_1 C_2}{r_\Sigma} \left\{ -\frac{3}{2} + \alpha \frac{r_\Sigma^2 \kappa_1^2}{C_2^2} \right\} + \dots \\ \frac{\delta w_1}{\delta \alpha} = \alpha \frac{w_2 w_1^2}{C_2^2} + \alpha \frac{\kappa_2 \kappa_1 w_1 r_\Sigma^2}{C_2^2} + \frac{w_1 C_2}{r_\Sigma} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\alpha w_1^2}{2 C_2^2} + \frac{3\alpha r_\Sigma^2 \kappa_1^2}{2 C_2^2} \right\} + \dots \end{cases} \quad (5.6)$$

$$r_\Sigma = r_0 + \int_0^t G_2(\xi) d\xi.$$

Из (5.6) следует, что характеристики интенсивности волны κ_1 и w_1 влияют друг на друга и антиплоское деформирование и кручение за волной взаимозависимы. Насколько сильна эта зависимость, можно ответить в процессе решения (5.6) с применением метода разложения по малому параметру. Будем считать, что порядок малости для антиплоского деформирования и кручения одинаков. В этом случае можно принять

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\kappa_{10} r_0}{C_2}; \quad \frac{\kappa_{10} r_0}{w_{10}} \sim 1; \quad \frac{w_{10}}{\kappa_{10} r_0} = B; \quad s = \frac{C_2 t}{r_0}; \\ f &= \frac{\kappa_1}{\kappa_{10}}; \quad g = \frac{w_1}{w_{10}}; \quad \kappa_1|_{t=0} = \kappa_{10}; \quad w_1|_{t=0} = w_{10}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Решая вспомогательную линеаризованную задачу, получим

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\kappa_{10}}{\left(1 + \frac{C_2 t}{r_0}\right)^{3/2}}; \quad \kappa_2 = \frac{\kappa_{20}}{\left(1 + \frac{C_2 t}{r_0}\right)^{3/2}} - \frac{3C_2^2 r_0^{1/2} \kappa_{10} t}{8(r_0 + C_2 t)^{5/2}}; \\ w_1 &= \frac{w_{10}}{\sqrt{1 + \frac{C_2 t}{r_0}}}; \quad w_2 = \frac{w_{20}}{\sqrt{1 + \frac{C_2 t}{r_0}}} - \frac{w_{10} C_2^2 t}{8r_0^2 \left(1 + \frac{C_2 t}{r_0}\right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Далее считаем, что κ_2, w_2 приближенно задаются (5.8). Тогда, записывая (5.6) в переменных (5.7), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta \alpha} &= \alpha f^2 \varepsilon^2 \left[\frac{A}{(1+s)^{3/2}} - \frac{3s}{8(1+s)^{5/2}} \right] (1+s+\dots)^2 + \alpha DB^2 \varepsilon^2 fg \left[\frac{1}{\sqrt{1+s}} - \frac{s}{8D(1+s)^{3/2}} \right] + \\ &+ \frac{f}{1+s+\dots} \left[-\frac{3}{2} + (1+s+\dots)^2 \varepsilon^2 f^2 \right] + \dots \\ \frac{\delta g}{\delta \alpha} &= \alpha D \left[\frac{1}{\sqrt{1+s}} - \frac{s}{8D(1+s)^{3/2}} \right] \varepsilon^2 g^2 B^2 + \alpha A \varepsilon^2 (1+s+\dots)^2 gf \left[\frac{1}{(1+s)^{3/2}} - \frac{3s}{8A(1+s)^{5/2}} \right] + \\ &+ \frac{g}{1+s+\dots} \left[-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \varepsilon^2 g^2 B^2 + \frac{3\alpha}{2} (1+s+\dots)^2 \varepsilon^2 f^2 \right] + \dots \\ A &= \frac{\kappa_{20} r_0}{\kappa_{10} C_2} \sim 1; \quad D = \frac{w_{20} r_0}{w_{10} C_2} \sim 1. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Искомые функции представим асимптотическими рядами

$$\begin{aligned} f(s) &= f_0(s) + \varepsilon^2 f_1(s) + \dots \\ g(s) &= g_0(s) + \varepsilon^2 g_1(s) + \dots, \end{aligned} \quad (5.10)$$

в которые, как и в (5.9), малый параметр входит только в четных степенях. Для приближения $f \approx f_0$, $g \approx g_0$ получаем разделенное решение, соответствующее линеаризованной задаче:

$$f_0 = (1+s)^{-3/2}; \quad g_0 = (1+s)^{-1/2}. \quad (5.11)$$

Это показывает, что на расстояниях $St \sim r_0$ кручение и антиплоское движение мало влияют друг на друга. Их влияние проявляется на решении для f_1, g_1 . Для положения волнового фронта находим поправку к линейной задаче:

$$r = r_0 \left\{ 1 + s + \gamma_1 \varepsilon^2 (1 + B^2) \ln(1 + s) \right\} + \dots \quad (5.12)$$

Не останавливаясь на простой, но трудоемкой процедуре получения f_1, g_1 , приведем окончательный результат для функций Ψ и u_z :

$$\begin{aligned} \Psi &= -\kappa_{10} \left\{ \frac{1}{H^{3/2}} + \left(\frac{\kappa_{10} r_0}{C_2} \right)^2 \left[\alpha \left(A + B^2 D - \frac{3 + B^2}{8} \right) \frac{\ln H}{H^{3/2}} - \left(1 + \alpha \frac{3 + B^2}{8} \right) \frac{1}{H^{5/2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3\alpha}{4} (1 + B^2) \left(\frac{\ln H}{H^{5/2}} + \frac{1}{H^{5/2}} \right) + \left(1 + \alpha \frac{9 + 7B^2}{8} \right) \frac{1}{H^{3/2}} \right] + \dots \right\} \left(t - \frac{r_0}{C_2} (H - 1) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\kappa_{20}}{H^{3/2}} - \frac{3C_2 \kappa_{10} (H - 1)}{8r_0 H^{5/2}} \right\} \left(t - \frac{r_0}{C_2} (H - 1) \right)^2 + \dots \\ u_z &= -w_{10} \left\{ \frac{1}{H^{1/2}} + \left(\frac{\kappa_{10} r_0}{C_2} \right)^2 \left[\alpha \left(A + B^2 D - \frac{3 + B^2}{8} \right) \frac{\ln H}{H^{1/2}} - (B^2 + 3) \frac{5\alpha}{8H^{3/2}} + \frac{R_0}{H^{1/2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha}{4H^{1/2}} (1 + B^2) \left(\frac{\ln H}{H} - \frac{1}{H} \right) \right] \right\} \left(t - \frac{r_0}{C_2} (H - 1) \right)^2 + \dots \\ R_0 &= \frac{\alpha}{8} (17 + 7B^2); \quad H(r) = \frac{r}{r_0} - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\kappa_{10} r_0}{C_2} \right)^2 (1 + B^2) \ln \frac{r}{r_0}; \quad t_2 = \frac{r_0}{C_2} (H(r) - 1). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Подстановка (5.13) в (5.3) приводит к выполнению точного условия:

$$\kappa_{10} = -\chi; \quad \kappa_{20} = -\eta; \quad w_{10} = -v_0; \quad w_{20} = -a, \quad (5.14)$$

что, по всей видимости, является характерным отличием случая поперечного деформирования от рассмотренного ранее продольного. Если в решаемой задаче есть только антиплоское движение или скручивание, то ее поле перемещений может быть также получено из (5.13).

В заключении отметим, что проведенный анализ показал, что предложенный способ построения приближенных решений в [13, 14] содержит в себе непоправимые погрешности в тех случаях, когда кривизна поверхности разрывов значительна и быстро меняется. Предложенное видоизменение в подходе к построению прифронтных разложений решения позволяет исключить отмечаемое несоответствие.

Другое замечание связано с тем, что при изначальном использовании криволинейных систем координат (как в рассмотренном случае) следует пользоваться соответствующим обобщением [4] теории рекуррентных условий совместности [3] разрывов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-01-96005).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. – М.: Наука, 1972. – 456 с.
2. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – М.: Мир, 1964. – 308 с.
3. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука, 1971. – 232 с.
4. Герасименко Е.А., Рагозина В.Е. Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях.// Дальневосточный матем. сб. – Владивосток: Дальнаука. – 2004. Т.5. №1. С. 100–109.
5. Ахенбах Дж. Задачи о распространении упругих волн при неразрушающих испытаниях.// В кн.: Механика деформируемых твердых тел. – М.: Мир, 1983. – 346 с.
6. Бабичева Л.А., Быковцев Г.И., Вервейко Н.Д. Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязко-пластических телах.// Прикл. матем. и механика. – 1973. Т. 37, вып. 1. – С. 145–155.
7. Россихин Ю.А. Удар жесткого шара по упругому полупространству.// Прикл. механика. 1986. Т. 22, № 5. – С. 15–21.
8. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Применение метода лучевых рядов для исследования осесимметрических нестационарных задач динамической теории упругости.// Прикл. механика. – 1986. Т. 22, № 3. – С. 3–9.
9. Быковцев Г.И., Власова И.А. Лучевой метод пространственных задач теории идеальной пластичности.// Механика деформируемого твердого тела. – Новосибирск.: Наука, 1979. – С. 31–36.
10. Шаталов А.Г. Разрывные решения в связанной задаче термоупругости.// Механика деформ. сред. Кубышевский ун-т. – 1979. – С. 85–90.
11. Rossichin Yu.A., Shitikova M.V. On the structure of waves in a nonlinear elastic medium.// Facta Univ. Ser. Mech., Autom Contr. and Rob./ Univ. Nis. – 1994. – 1, № 4. – P. 437-449.
12. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. – Минск.: УП «Технопринт», 2000. – 426 с.
13. Бестужева Н.П., Чигарев А.В. К применению марковского приближения в динамическостохастических сред.// ПММ. – 1977. – Т. 41, вып. 6. – С. 1099–1106.
14. Burenin A.A., Rossichin Yu.A., Shitikova M.V. A ray method for solving boundary value problems connected with the propagation of finite amplitude shock waves / Proc. 1993 Int. Symp. On Nonlinear Theory and its Applications. – Hawaii, December 5 – 10, 1993. – V. 3. – P. 1085–1088.
15. Буренин А.А., Россихин Ю.А. К решению одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости со структурной ударной волной.// Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 103–108.
16. Мак-Конелл А. Дж. Введение в тензорный анализ. – М.: Физматгиз, 1963. – 412 с.
17. Буренин А.А., Чернышев А.Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве.// Прикл. матем. и механика. – 1978. – Т. 42, вып. 4. – С. 711–717.
18. Буренин А.А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства.// Прикл. механика. – 1985. Т. 21, № 5. – С. 3–8.
19. Буренин А.А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях.// Дальневосточный матем. сб. – Владивосток: Дальнаука. – 1999. вып.8. – С. 49–72.

К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ВНЕШНЕЙ И МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТЕЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Хвисевич В.М.

On the basis of the theory of potential and of a source function are constructed the singular integrated equations of a flat regional problem of thermoelasticity for external and multicoherent internal area. It has developed algorithm of numerical realization of the integrated equations by means of Gauss square formulas. Reliability of the received equations is confirmed by the decision of test problems. Comparison of the received results with analytical decisions has shown high accuracy of algorithm.

Рассмотрим плоскую внешнюю D^- или внутреннюю D^+ многосвязную область, на границе которой L заданы значения механических усилий $p_i = f_i(x_L)$ и температуры $T = F(x_L)$ (т.е. для T имеем задачу Дирихле).

Предполагается, что деформирование механическими усилиями не приводит к изменению температуры в области. Температура T определяется как решение независимого интегрального уравнения краевой задачи теплопроводности.

Большинство авторов решает температурную задачу Дирихле по методу ньютоновского потенциала так называемым прямым или непрямым способом. Как известно, в прямом способе решение для T берется в виде формулы Грина, а в непрямом способе представляется потенциалом двойного слоя [1].

$$T(x) = \int_L \chi(y) \frac{\cos \varphi}{r} dl_y. \quad (1)$$

Здесь φ - угол между вектором $\vec{r} = |y - x|$ и внешней нормалью $n_i(y)$ проведенной к L в точке интегрирования y , x - параметрическая точка, $\chi(y)$ - плотность потенциала двойного слоя.

Формула Грина позволяет представить температуру в области D^- или D^+ , однако присутствие потенциалов простого и двойного слоев создает некоторые сложности при численном решении задачи.

Решение (1) можно применять только в случае внутренней односвязной области. Это объясняется тем, что потенциал двойного слоя представляет температуру внешней или внутренней многосвязной области лишь частично, т.е. им не учитывается влияние средней температуры (случай J по Н.М. Гюнтеру [1]).

Недостаток решения устраняем, дополнив (1) точечными источниками определенной мощности [2].

$$T(x) = \int_L \chi(y) \frac{\cos \varphi}{r} dl_y + \sum_{k=1}^m A_k \ln \frac{1}{r_{Ak}}, \quad (2)$$

где A_k - мощность источников, расположенных во внутренних контурах L_k , r_{Ak} - расстояние от точки x до источника.

Через L_c обозначим охватывающий контур $k+1$ - связанной области.

Такой прием известен в теории гармонических функций, однако, практического применения для решения краевых задач термоупругости методом потенциала он не находил.

Константы A_k определяются через среднее значение температур на L_k , которое легко вычислить из граничного условия.

$$T^{(m)} = \int_L F \cdot dl . \quad (3)$$

В граничных точках контуров L_k потребуем, чтобы было

$$T_k^{(m)} = \frac{1}{L_{k+1}} \sum_{i=1}^n A_i \int_{L_i} \ln \frac{1}{r_{Ai}} dl_y + 2\pi\chi^{(m)} . \quad (4)$$

Это предлагает условие Дирихле для $T^{(m)}$, т.к. потенциал двойного слоя в (2) равен нулю.

На основе (2) получается интегральное уравнение краевой задачи Дирихле для многосвязной (внешней) области и после его решения определяется плотность $\chi(y)$.

Решение дифференциальных уравнений плоской задачи квазистационарной термоупругости разыскиваем с помощью градиента некоторой бигармонической функции. Выполнив преобразования, получим формулу бигармонической функции, которая представлена контурным интегралом и алгебраической суммой

$$W = -\frac{a}{4} \left\{ \int_L \chi(y) \cdot \cos\varphi (1 - 2\ln r) dl_y + \sum_{i=1}^n A_k [r_{A_k} (1 - \ln r_{A_k})] \right\}, \quad (5)$$

где $a = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu}$, α - коэффициент линейного расширения, ν - коэффициент Пуассона.

Используя (5) получаем новые интегральные представления температурных перемещений и напряжений для $\chi \in l$

$$u_i^T = -\frac{a}{4} \left\{ \int_L \chi(y) [n_i(y)(2\ln r - 1) + 2\beta_i \cos\varphi] dl_y + \sum_{k=1}^n A_k [\beta^{(A_k)} r_{A_k} (2\ln r_{A_k} - 1)] \right\}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^T = a\mu \left\{ 2\pi\chi(x_L) [n_i(x_i) - \delta_{ij}] + \vartheta.p. \int_L \frac{\chi(y)}{r} [n_i(y)\beta_j + n_j(y)\beta_i - 2(\beta_i\beta_j - \delta_{ij})\cos\varphi] dl_y + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n A_k \left[\beta_{A_i}^{(k)} \beta_{A_j}^{(k)} - \left(\frac{1}{2} + \ln r_{A_k} \right) \delta_{ij} \right] \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

где μ - модуль сдвига, β_i - направляющие косинусы вектора r .

Полные перемещения и напряжения определяются как

$$u_i = u_i^0 + u_i^T; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^T . \quad (8)$$

здесь σ_{ij}^0 - соответствуют решению σ_i^0 дифференциальных уравнений теории упругости и их интегральные представления приведены в работе [3].

Подставляя σ_{ij} в граничные условия второй краевой задачи получаем систему сингулярных уравнений плоской краевой задачи квазистационарной термоупругости.

$$v_i(x) + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_L^1 \frac{1}{r} (v_i(y) [(1-2\nu) - 2\beta_i^2] \cos\psi + \{n_k(y)\beta_i - n_i(y)\beta_k\} (1-2\nu) + 2\beta_i\beta_k \cos\psi) v_k(y) dl_y = f_i(x_L) + f_i^T(x_L), \quad (9)$$

где $v_i(y)$ - плотность потенциала простого слоя [1],

$$f_i^T(x_L) = \sigma_{ij}^T \cdot n_j \quad (10)$$

Последовательность решения рассматриваемой задачи следующая: сначала решается интегральное уравнение краевой задачи теплопроводности относительно плотности $\chi(y)$, после чего вычисляются (6) и (7). Затем с учетом (10) решается система СИУ (9), в результате решения которой находим $v_i(y)$. Напряжения $\sigma_i(y)$ и перемещения u_i определяем по формулам (8).

Проведенные выкладки относятся для области D^+ . Если рассматриваемая область D^- , то в (4) вместо слагаемого $2\pi\chi_e^m$ записывается температура в бесконечности T_∞ , а в (7) добавляются напряжения σ_{ij}^∞ .

Для численного решения СИУ с учетом методик работы [4], разработан алгоритм и программа для ЭВМ. Рассматриваемая область может быть кусочно-гладкой. Неизвестная плотность потенциала интерполируется полиномом Лагранжа. Сингулярные интегралы в (6), (7), (9) вычисляются при помощи квадратурных формул Гаусса с четным числом узлов.

Достоверность полученных формул подтверждена решением тестовых примеров: краевые задачи для СИУ- а) во внутренней кольцеобразной области (рис. 1); б) во внешней односвязной области (рис. 2). С учетом симметрии и нагружения достаточно рассмотреть $1/4$ часть областей.

Внешний контур области а) был разбит на 7, в внутренний на 5 отрезков интегрирования. Контур области (б) аппроксимирован 7 отрезками. Сравнение результатов численного решения этих задач с известными аналитическими решениями показало высокую точность алгоритма (погрешность составила сотые доли процента).

Таким образом, с помощью дополнения решения (1) простыми источниками определенной мощности получены новые СИУ плоской краевой задачи квазистационарной термоупругости для внешней и многосвязной областей. В отличие от прямого способа полученные на основе (5) формулы проще и их легче реализовать численно.

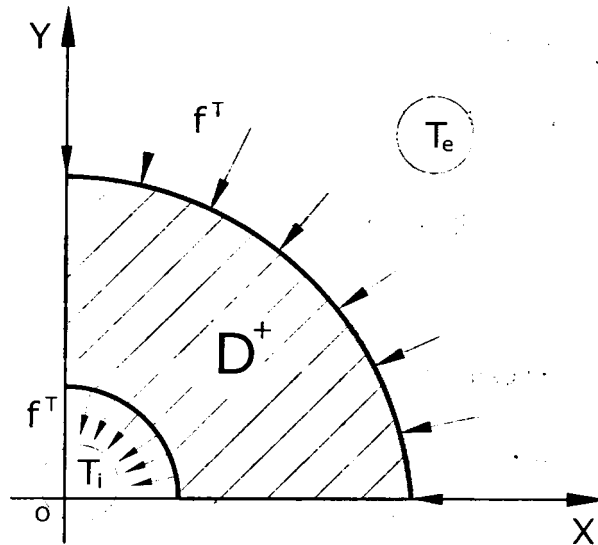


Рис. 1 Расчетная схема задачи «А».

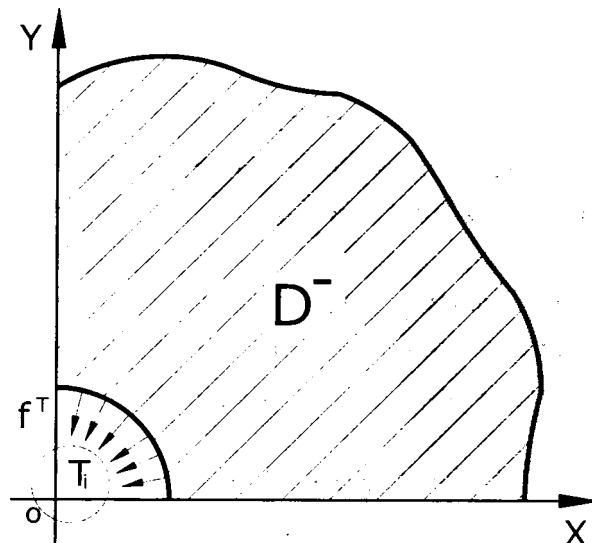


Рис. 2 Расчетная схема задачи «Б».

ЛИТЕРАТУРА

1. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М.: Гос. Издательство техн. – теоретической литературы. – 1953. - 414 с.
2. Хвисевич В.М. О решении температурной внешней и внутренней задачи Дирихле теории потенциала в многосвязной области //ИФЖ.-Мн, 1991.т.61.№5 – С.858-862.
3. Копейкин Ю.Д, Применение бигармонических потенциалов в краевых задачах статики упругого тела// Диссертация на соискание уч.ст.докт.физ.-мат. Наук. М. 1969, -280 с.
4. Бормот Ю.Л. Численное решение СИУ плоской задачи теории упругости// Проектирование металлических конструкций. Реферативный сборник. Сер. 7. – М.: ЦИНИС Госстроя СССР. 1974. –Вып.4.(51).-С.17-19.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ И РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ ПОДВИЖНОСТИ

Локтионов А.В.

In work the methods of account kinematics of parameters of the cutting tool of the executive mechanisms and robots-manipulators with three degrees of mobility are analysed. The analytical dependences for account kinematics of corners of cutters are offered during cutting. The matrix method of account kinematics of parameters multilink of the executive mechanisms is recommended at definition of projections of absolute speed and acceleration of the centre of griper of the robot as on mobile, and motionless axes of coordinates.

В процессе резания расчет задних углов, выражающих реальную величину зазора между поверхностью инструмента и поверхностью резания, непосредственно связан с изучением перемещения инструмента и обрабатываемого объекта. Задний угол движения α_d измеряется между вектором относительной скорости резания и касательной к траектории сложного пространственного движения инструмента в заданной точке [1, 2].

На чертежах резцов указываются геометрические параметры, полученные при заточке. При работе механизма приходится изменять положение режущего лезвия относительно обрабатываемого массива, а в зависимости от положения вершины резца изменяются направления вектора скорости и геометрические параметры резцов в состоянии движения, которыми определяется процесс резания и износ инструментов.

Для использования закономерностей движения резцов при разработке исполнительных механизмов определяются следующие расчетные зависимости: скорость движения инструмента, его ориентация относительно траектории движения и вытекающие из требований кинематики углы заточки (или установки) инструмента.

При обработке массива кинематические углы резцов не должны превышать их геометрические значения. Иначе массив разрушается боковыми и задними гранями резцов, увеличиваются расход режущего инструмента, усилия и мощность резания, что является одной из причин малоэффективной работы машин.

Аналитическому расчету кинематических параметров резцовых исполнительных механизмов посвящены исследования А.С. Архангельского, В.Г. Унгефуга, Л.Б. Глатмана, Е.К. Губенкова, Г.И. Грановского, Н.П. Юдина, Б.Н. Толстых [1-7].

В работе В.Г. Унгефуга получены общие параметрические уравнения движения резца в пространственной системе координат и найдена скорость его движения [5]. Кинематические углы Ψ_1 и Ψ_2 вектора абсолютной скорости движения инструмента определяются как линейные углы, образуемые вектором \vec{V} абсолютной скорости и его проекцией на плоскость вращения инструмента (угол Ψ_1) и на плоскость, нормальную к радиусу вращения инструмента (угол Ψ_2) (рис. 1). В работе даны рекомендации по проектированию режущего инструмента, предложена конструкция резца, углы заточки которого обеспечивают рациональные условия резания с учетом Ψ_1 и Ψ_2 . Аналитические выражения для определения углов ψ_1 и ψ_2 имеют вид

$$\sin \psi_1 = -\sin \gamma (\lambda \cos \xi + \cos i \varphi) / \dot{I}^{\frac{1}{2}},$$
$$\sin \psi_2 = \lambda (\sin i \varphi \cdot \cos \xi \cdot \cos \gamma + \cos i \varphi \cdot \sin \xi) / \dot{I}^{\frac{1}{2}},$$

где γ , ξ - углы установки диска в пространстве, характеризующие положение плоскости относительно вращения резцов диска; $\varphi = \omega_d t$ - угол поворота исполнительного механизма

(води́ла); $\lambda = R/r$ - отношение радиусов водила и диска; $i = \omega_d/\omega_r$ - отношение угловых скоростей диска и водила; Π – планетарная функция основных параметров, определяемая в зависимости от основных параметров планетарного диска $\gamma, \xi, \lambda, r, i, \varphi$ из выражения

$$\ddot{I} = \lambda^2 + 2[\cos i\varphi(1 + i \cos \gamma) \cos \xi - \sin i\varphi(i + \cos \gamma)] + (i + \cos \gamma)^2 + \cos^2 i\varphi \sin \gamma.$$

Она подробно исследована А.С. Архангельским в работе [3]. Частные случаи исследования данного уравнения приведены в работе [5]. Для общего случая оно не решается элементарными способами.

В работе Е.К. Губенкова исследование основных закономерностей движения резцового инструмента переносится в область планетарных исполнительных органов с иным расположением осей [4]. Автором выполнен расчет необходимых по условиям кинематики углов заточки инструмента. Для исключения внедрения задней и боковой граней в разрушаемый массив определяются угол движения α_d , угол наклона ξ и угол поворота Ψ инструмента. Угол α_d определяется как угол между плоскостями. Расчетные формулы с помощью аналитической геометрии получить достаточно сложно, так как требуется пространственное изображение расчетной схемы исполнительного органа. Поэтому при выводе уравнений автор не учитывал поступательное перемещение исполнительного органа, которое полагал пренебрежимо малым по сравнению с другими составляющими планетарного движения инструмента.

Работа Н.П. Юдина включает в себя определение и исследование абсолютной скорости движения резцов и ее частных значений, в которых определена зависимость между скоростью вращения водила и углом установки резцов на рабочих дисках [6]. Б.Н. Толстых предложил для комбайна «Караганда 7/15», предназначенного для проведения подготовительных выработок и разработки угольных и калийных месторождений, расчетные зависимости между скоростью вращения водила и углом установки резцов на рабочих дисках. Автором предложена пространственная расчетная схема, в которой векторы скорости резания \vec{V}_p и относительного перемещения \vec{V}_n заданы направляющими косинусами и определен угол θ между этими векторами. По углу θ и абсолютным значениям скоростей \vec{V}_p и \vec{V}_n определяется угол ψ , образуемый вектором \vec{V}_p и вектором \vec{V} абсолютной скорости движения резца. Предельные значения угла ρ установки резцов определяются в зависимости от угла ψ и бокового λ резца. В.Н. Толстых упростил методику аналитического исследования кинематики резцов и конечные расчетные формулы. Исследования выполнены без учета подачи исполнительного механизма, а расчетные зависимости применимы только для рассматриваемого исполнительного органа [7].

При кинематическом исследовании шнеко-планетарного исполнительного органа В.Б. Санкин определил угол между осью резца и вектором абсолютной скорости и вывел расчетные формулы для определения углов, при которых исключается внедрение задней и боковых граней в разрушаемый массив [8]. Однако полученные зависимости довольно громоздки, основаны на поочередном сложении скоростей, требуют пространственных изображений положения резца и построения косоугольного параллелепипеда. Кроме того, вряд ли целесообразно вычисление косинуса угла между вектором абсолютной скорости и осью резца. Найденные зависимости достаточно сложны и применимы только для шнеко-планетарного исполнительного органа.

Для упрощения расчета α_d движение подачи можно разложить на продольное (вдоль оси исполнительного механизма) и поперечное. При поперечной подаче резец движется по траектории, представляющей собой удлиненную сферическую циклоиду, и происходит основное разрушение массива. С целью упрощения расчетов поперечное перемещение исполнительного механизма принимается соответствующим кинематической схеме резания при

фрезеровании, когда главное вращательное и вспомогательное поступательное движения происходят в одной плоскости, совпадающей с плоскостью вращения. Все точки могут перемещаться при этом при удлиненной циклоиде или трахоиде. Тогда $\alpha_s = \varphi - \beta$, где φ - угол качения; угол β определяется по величине направляющего косинуса. При продольной подаче вдоль оси исполнительного механизма каждая точка режущей кромки резца движется по винтовой линии с шагом, равным осевой подаче S'_o режущей головки за один оборот. В этом случае угол движения α_d равен углу подъема винтовой линии и определяется из равенства $\alpha'_d = \arctg(S'_o / \pi D)$, где D - диаметр головки по резцам [9].

Разработанные на основе аналитической геометрии указанные выше расчетные зависимости и пространственные схемы громоздки и трудоемки для составления применительно к сложному движению разрушающего исполнительного механизма. Его поступательная подача не учитывается, так как математическое описание перемещающихся плоскостей и определение угла между ними значительно усложняют расчетную схему и кинематический расчет в целом. Кинематические углы в процессе резания не соответствуют геометрическим углам режущего инструмента. Для сравнения геометрии резца с его кинематическими углами необходим дополнительный перерасчет полученных зависимостей. Их трактовка у каждого автора различна, отличаются также методы и методика их определения.

Для того, чтобы геометрические углы резцов соответствовали кинематическим углам Ψ_1 и Ψ_2 , необходимо знать углы φ и τ (см. рис. 1): $\operatorname{tg} \Psi_1 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \tau$, $\operatorname{tg} \Psi_2 = \operatorname{tg} \tau \cdot \cos \varphi$. Подставляя в данные выражения соответствующие значения углов, получаем

$$V_z / V_{xy} = (V_z / V_y) \cdot (V_y / V_{xy}), \quad V_x / V_{yz} = (V_x / V_y) \cdot (V_y / V_{yz}).$$

Следовательно, для обеспечения в процессе разрушения массива необходимых кинематических углов Ψ_1 и Ψ_2 боковые и задний углы резца в статике следует определять из выражений

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \Psi_1 / \cos \tau = V_z / V_y, \quad \operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \Psi_2 / \cos \varphi = V_x / V_y.$$

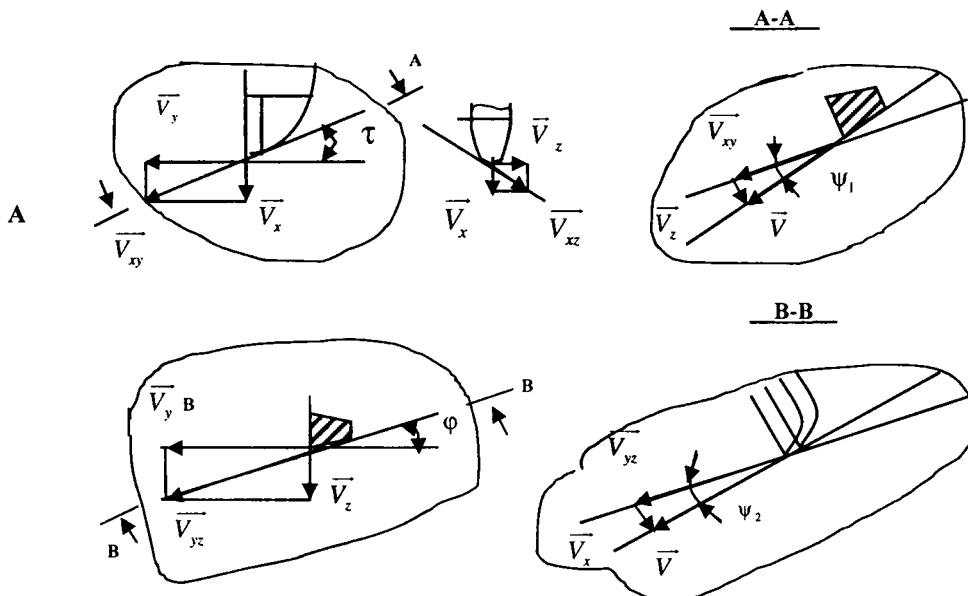


Рис. 1. Кинематические углы (ψ_2, ψ_1) вектора абсолютной скорости движения резца для боковой и задней поверхности инструмента

Углы φ и τ являются кинематическими углами резца в процессе резания. Чтобы оценить эффективность резцов, а, следовательно, и исполнительного механизма достаточно знать отдельные составляющие вектора абсолютной скорости, которые устанавливаются необходимыми углами их заточки. Для определения угла φ необходимо знать V_z и V_y , а для определения угла τ - V_x и V_y . Кинематический угол ξ для передней грани находится по формуле $\operatorname{tg} \xi/2 = V_z/V_x$. Ось X направлена вдоль оси резца, ось Y - перпендикулярно оси X в плоскости симметрии резца, ось Z - перпендикулярно плоскости симметрии резца.

Существующие методики и расчетные зависимости применимы только для одной конструкции исполнительного механизма, их нельзя использовать для совокупности органов. Исходные данные при расчетах различны и представлены в виде соотношений, не выделены основные конструктивные и кинематические параметры. Отсутствуют и расчетные формулы для общего случая движения исполнительных механизмов. При постановке задач следует использовать теорию кинематики точки и твердого тела [9]. Пространственные расчетные схемы должны быть компактны, достаточно просты и при сложном движении режущего инструмента.

Большая компактность записи достигается при решении задач матричным методом [10]. Разработка матричных уравнений расчета кинематических параметров пространственных исполнительных механизмов представляет определенный научный и практический интерес. Составными частями методологии их вывода должны являться разработка методик и матричных уравнений, сравнительная оценка различных методов и практические рекомендации по их использованию, расчет кинематических параметров на ЭВМ и рекомендации по оптимальной установке режущего инструмента. При решении проблемы необходим системный подход, каждый отдельный метод по методике изложения и по исходным параметрам должен отвечать требованиям системы в целом.

Исходные конструктивные параметры должны быть едины для исполнительных механизмов любой конфигурации: выполненных в виде конуса, сферы, цилиндра, овального корпуса, диска. Для всех конструкций исходными расчетными конструктивными параметрами будут расстояние от оси поворота исполнительного механизма до плоскости вращения или до центра диска (R) и текущий радиус (r) вращения резца [9-14]. Угловые скорости вращения и перемещение режущей головки должны соответствовать сумме элементарных движений резца в процессе резания [9, 14]. Методика расчета кинематических параметров режущего инструмента исполнительных механизмов матричным методом в общем случае подробно рассмотрена и проанализирована в работах [9-14]. При определении скорости и ускорения центра схвата роботов-манипуляторов также следует использовать матричный метод. Оценка целесообразности применения данного метода должна первоначально осуществляться на примере простейших схем исполнительных механизмов, как, например, в работе [15].

Существуют различные методы расчетов геометрических, кинематических и силовых параметров исполнительных механизмов роботов-манипуляторов. Анализом установлено, что наиболее простые методы расчета следует использовать для роботов, работающих в плоских системах координат. Векторный метод расчета следует применять для роботов-манипуляторов, звенья которых расположены в одной плоскости [16, 17]. В работах [18, 19] скорость \bar{v} и ускорение \bar{a} в сферической системе координат определяются как частный случай их расчета в ортогональных криволинейных координатах. Для расчета скорости определяются частные производные от декартовых координат x , y , z по соответствующим криволинейным скоростям q_1 , q_2 , q_3 и находятся коэффициенты Ляме H_1 , H_2 , H_3 . Модуль скорости v точки определяется из выражения $v^2 = \dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2$. Для расчета ускорения также используются коэффициенты Ляме, определяются соответственно частные производные от квадрата скорости по обобщенным криволинейным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ и координатам q_1, q_2, q_3 и полные производные по времени от полученных соответствующих разностей част-

ных производных по \dot{q} и q . Такая методика расчета кинематических параметров достаточно трудоемка. Искомые \bar{v} и \bar{a} определяются только в проекциях на подвижные сферические оси координат R, φ, θ , связанные с движущейся точкой M . В работах [20, 21] скорость \bar{v} и ускорение \bar{a} получены с использованием векторного анализа. Матричное исчисление использовано в работах [22, 23] для преобразования от прямоугольной и цилиндрической к сферической системе координат. Матричный метод расчета кинематических параметров применим к роботу-манипулятору с тремя степенями подвижности. При его использовании проекции абсолютной скорости и ускорения точки следует определять как на неподвижные оси координат, так и на подвижные оси координат.

Методика расчета кинематических параметров матричным методом заключается в том, что координаты точки рассматриваются в неподвижной системе и выражаются через координаты этой точки, например, в цилиндрической или сферической системах координат. Дифференцированием текущих координат определяются проекции скорости точки на неподвижные оси. С использованием транспонированной матрицы определяются проекции скорости точки на подвижные цилиндрические или сферические оси координат. Векторным дифференцированием текущих координат определяются проекции ускорения точки на неподвижные оси. Аналогично определяются проекции ускорения точки на подвижные цилиндрические или сферические оси координат. Модули скорости и ускорения рассчитываются по известным формулам, а их направления определяются направляющими косинусами. Получаемые расчетные формулы позволяют определить скорость и ускорение точки матричным методом. Для численного расчета можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ. Они применимы для определения скорости и ускорения центра схватки робота-манипулятора с тремя степенями подвижности, работающего в цилиндрической и сферической системах координат [22, 23]. Рассмотрим матричный метод расчета кинематических параметров на примере двухзвенного исполнительного механизма с тремя степенями подвижности [15, 17].

Расчётная схема исполнительного механизма представлена на рис. 2. Механизм состоит из поворотного устройства с вертикальной осью вращения (на рисунке не показанной, угол поворота – φ) и двух звеньев l_1, l_2 , расположенных в вертикальной плоскости Y_1OZ_1 (углы поворота звеньев – θ_1 и θ_2). Координаты точки M в неподвижной системе XYZ в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой точки в системе $X_5Y_5Z_5$ следующим образом. Система XYZ поворотом на угол φ переводится в подвижную систему $X_1Y_1Z_1$, таким образом, что механизм размещается в вертикальную плоскость Y_1OZ_1 . Следующим преобразованием переводим систему координат $X_1Y_1Z_1$ в систему $X_2Y_2Z_2$ поворотом вокруг оси OX_1 на угол θ_1 . Затем, перемещая начало координат $X_2Y_2Z_2$ на длину l_1 , получим систему координат $X_3Y_3Z_3$. Поворотом системы $X_3Y_3Z_3$ вокруг оси OX_3 на угол θ_2 получим систему координат $X_4Y_4Z_4$, которую перемещаем на длину l_2 и окончательно получим систему $X_5Y_5Z_5$. Для каждого поворота определяются матрицы $A_\theta, A_{\theta_1}, A_\varphi$, с помощью которых определяют координаты точки M . Анализом установлено, что при других способах преобразования координат усложняются матрицы перехода и, следовательно, в целом весь расчёт.

Координаты точки M в неподвижной системе XYZ в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой точки в системе $X_5Y_5Z_5$ следующим образом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_\varphi A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + A_\varphi A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Принимаем, что $x_5, y_5, z_5=0$ и получаем новое равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_\varphi A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Из формулы (2) определяются проекции вектора точки M на неподвижные оси координат XYZ, которые имеют вид

$$\begin{aligned} x_M &= -l_1 \sin \varphi \sin \theta_1 - l_2 \sin \varphi \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ y_M &= l_1 \cos \varphi \sin \theta_1 + l_2 \cos \varphi \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ z_M &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (3)$$

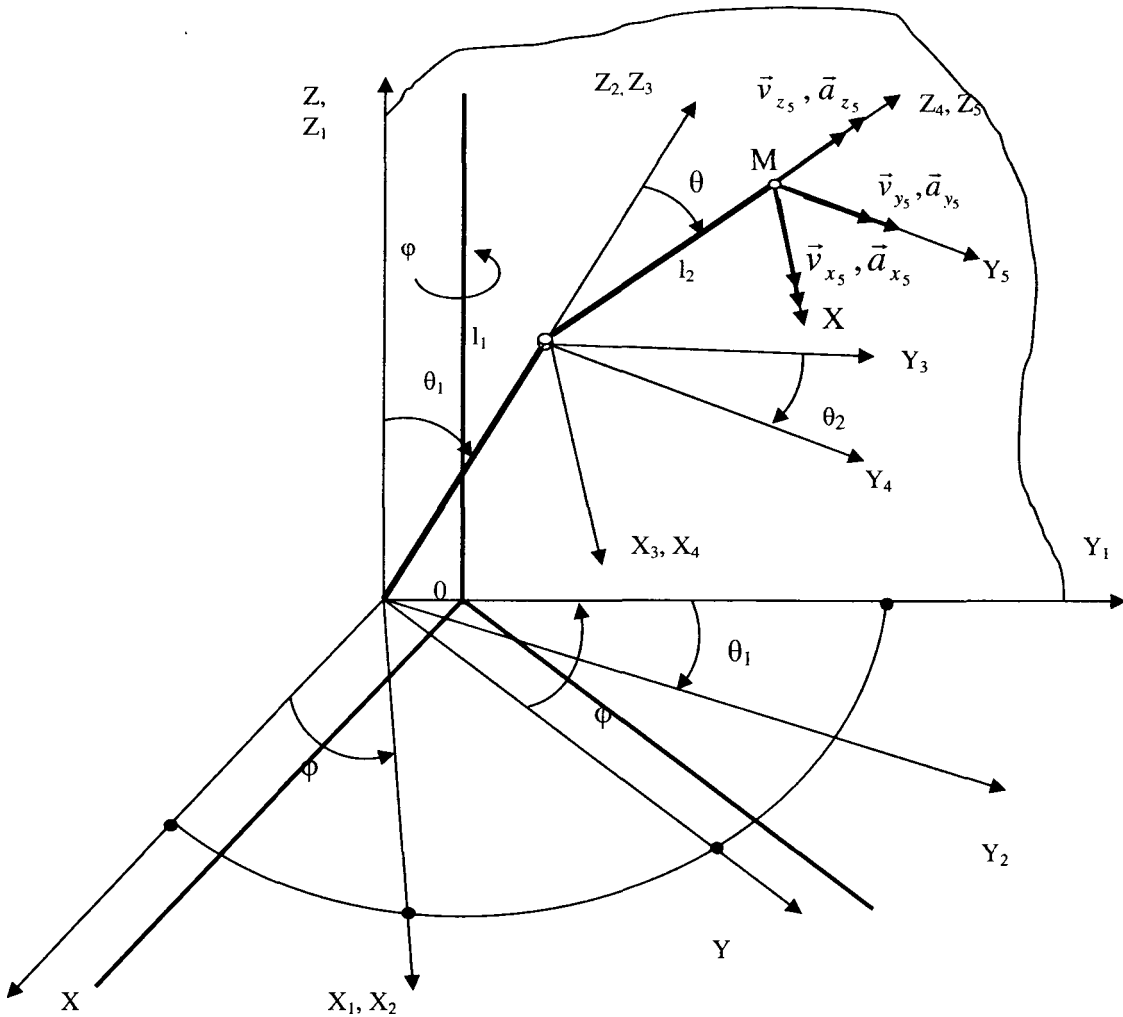


Рис. 2. Расчетная схема двухзвенного исполнительного механизма

Вектор скорости \vec{v} точки M в системе XYZ определяется дифференцированием текущих координат равенства (2) из выражения

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{A}_\varphi A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_\varphi \dot{A}_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \left(A_\varphi \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\theta}_1 + A_\varphi A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + \dot{A}_\varphi A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\varphi} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Из формулы (4) определяются проекции вектора скорости точки М на неподвижные оси координат XYZ , которые имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x &= -l_1 \left(\cos \varphi \sin \theta_1 \dot{\varphi} + \sin \varphi \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \right) - l_2 \left(\cos \varphi \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\varphi} + \sin \varphi \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right), \\ \dot{y} = v_y &= l_1 \left(-\sin \varphi \sin \theta_1 \dot{\varphi} + \cos \varphi \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \right) + l_2 \left(-\sin \varphi \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\varphi} + \cos \varphi \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right), \\ \dot{z} = v_z &= -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \left(-\sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Модуль скорости точки М найдётся из равенств (5) по формуле

$$v = \sqrt{l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + (l_1 \dot{\varphi} \sin \theta_1 + l_2 \dot{\varphi} \sin(\theta_1 + \theta_2))^2}. \quad (6)$$

В свою очередь вектор скорости \vec{v}_M точки М в системе $X_5 Y_5 Z_5$

$$\vec{v}_M = A^T \vec{v}, \quad (7)$$

где A^T – транспонированная матрица, равная произведению транспонированных матриц-множителей, взятых в обратном порядке: $A^T = A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \cdot A_{\varphi}^T$.

Векторы \vec{v} и \vec{v}_M в равенствах (4) и (7) представляют разложение одного и того же вектора \vec{v} по разным базисам систем координат XYZ и $X_5 Y_5 Z_5$. С учётом (4) равенство (7) будет иметь вид

$$\vec{v}_M = A^T \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_1} \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A^T A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A^T \left(A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_2} A_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + A_{\varphi} A_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} A_{\theta_2} \dot{\varphi} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Из формулы (8) определяются проекции вектора скорости точки М на подвижные оси координат $X_5 Y_5 Z_5$, которые имеют вид

$$\dot{x}_5 = v_{x_5} = 0, \quad \dot{y}_5 = v_{y_5} = l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2, \quad \dot{z}_5 = v_{z_5} = l_1 \dot{\varphi} \sin \theta_1 + l_2 \dot{\varphi} \sin(\theta_1 + \theta_2)^2 \quad (9)$$

Модуль скорости точки М определяется из равенств (9) формулой (6), а направление скорости – направляющими косинусами.

Определим ускорение точки М в системе координат XYZ матричным методом. Вектор ускорения \vec{a} точки М определится дифференцированием равенства (4)

$$\begin{aligned} \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \ddot{A}_{\varphi} A_{\theta_1} \dot{\varphi}^2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_1} \ddot{\varphi} + 2\dot{A}_{\varphi} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi} + A_{\varphi} \ddot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1^2 + A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{A}_{\varphi} A_{\theta_1} \dot{\theta}_1^2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + 2\dot{A}_{\varphi} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + A_{\varphi} \ddot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1^2 + A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} \dot{\theta}_2^2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + 2\dot{A}_{\varphi} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 + A_{\varphi} \ddot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2^2 + A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} \dot{\varphi}^2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} \ddot{\varphi} + 2\dot{A}_{\varphi} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi} + A_{\varphi} \ddot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2^2 + A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \\ &+ (2\dot{A}_{\varphi} \dot{A}_{\theta_2} A_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi} + 2A_{\varphi} \ddot{A}_{\theta_2} A_{\theta_2} \dot{\theta}_2^2 + 2A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 + A_{\varphi} \ddot{A}_{\theta_2} A_{\theta_2} \dot{\theta}_1 + A_{\varphi} A_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_1 + \\ &+ A_{\varphi} A_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + \ddot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} A_{\theta_2} \dot{\varphi}^2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\varphi} \dot{\theta}_2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} A_{\theta_2} \ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из формулы (10) определяются проекции вектора ускорения точки М на неподвижные оси координат XYZ . Модуль ускорения точки М определяется из равенств (10) по формуле

$$a = \sqrt{\ddot{x}_5^2 + \ddot{y}_5^2 + \ddot{z}_5^2} = \sqrt{a_{x_5}^2 + a_{y_5}^2 + a_{z_5}^2}. \quad (11)$$

Значения $a_{x_5}, a_{y_5}, a_{z_5}$ приведены ниже в (13).

Вектор ускорения \vec{a}_M точки М в системе $X_5 Y_5 Z_5$ (см. рис. 2)

$$\vec{a}_M = A^T \vec{a}. \quad (12)$$

С учётом (10) из равенства (12) получим проекции вектора ускорения точки М на подвижные оси координат $X_5 Y_5 Z_5$, которые имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_5 &= a_{x_5} = 0, \\ \ddot{y}_5 &= a_{y_5} = l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2, \\ \ddot{z}_5 &= a_{z_5} = l_1 \dot{\varphi} \sin \theta_1 + l_1 \dot{\varphi} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\varphi} \sin (\theta_1 + \theta_2) + l_2 \dot{\varphi} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin 2(\theta_1 + \theta_2).\end{aligned}\quad (13)$$

Искомые кинематические параметры (9) и (13) показаны на рис. 2. Модуль ускорения точки М определяется формулой (11), а направление ускорения – направляющими косинусами.

Полученные расчётные формулы позволяют определить скорость и ускорение точки М двухзвенного исполнительного механизма с тремя степенями подвижности матричным методом. Для численного расчёта можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ.

При заданных $\varphi = \varphi(t)$, $\theta_1 = \theta_1(t)$, $\theta_2 = \theta_2(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме получим из формулы (3), где роль параметра играет t . Используя транспонированную матрицу A^T , при заданных $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ получим траекторию центра схвата в подвижных координатных осях $X_5 Y_5 Z_5$.

Изложенную методику расчета скорости и ускорения матричным методом можно использовать для двухзвенных и многозвенных исполнительных механизмов с тремя и более степенями подвижности, имеющие исходные расчетные кинематические и конструктивные параметры роботов-манипуляторов в виде $\varphi = \varphi(t)$, l_1, l_2, \dots, l_k , $\theta_1 = \theta_1(t)$, $\theta_2 = \theta_2(t)$, ..., $\theta_k = \theta_k(t)$.

Предлагаемая методика расчета кинематики роботов изложена в учебном пособии по теоретической механике [24]. При рассмотрении кинематики роботов в пособии представлены: расчет кинематических параметров трехзвенного робота-манипулятора с тремя степенями подвижности при координатном способе задания движения; расчет кинематических параметров в цилиндрических координатах матричным методом; расчет кинематических параметров в сферических координатах матричным методом; расчет кинематических параметров двухзвенного механизма с тремя степенями подвижности матричным методом; оценка методов расчета кинематических параметров пространственных исполнительных механизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грановский Г.И. Кинематика резания. – М.: Машгиз, 1947. – 200 с.
2. Грановский Г.И., Грановский В.Г. Резание металлов: Учебник для студентов машиностроительных и приборостроительных спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с., ил.
3. Ключников И.И., Архангельский А.С. Проходческие комбайны ПКГ-3 и ПКГ-4. – М.: Госгортехиздат, 1961. – 176 с.
4. Барон Л.И., Глатман Л.Б., Губенков Е.К. Разрушение горных пород проходческими комбайнами. – М.: Наука, 1968. – 216 с.
5. Унгефуг В.Г. К теории аналитического расчета кинематических и геометрических параметров отделения стружки от массива инструментом резцовых дисковых исполнительных органов горных машин // Вопросы механизации и автоматизации в горной промышленности: Сб. науч. тр. КНИУИ. – М.: Недра, 1962. Вып. № 11. С. 35-81.
6. Юдин Н.П. Изыскание рациональной конструкции и исследование режимов работы дисковых исполнительных органов (на примере проходческих комбайнов «Караганда»): Дис. ... канд. техн. наук. – М., 1963. – 320 с.
7. Толстых Б.Н. Исследование кинематики планетарных исполнительных органов проходческих комбайнов «Караганда» // Вопросы механизации и автоматизации в горной промышленности: Сб. науч. тр. КНИУИ. – М.: Недра, 1967. – Вып. 20. – С. 87-102.

8. Санкин В.Б. Некоторые вопросы определения параметров шнеко-планетарного исполнительного органа очистного узкозахватного комбайна// Механизация горных пород на угольных шахтах: Сб. науч. тр. ТПИ. – Тула, 1973. – С. 55-64.
9. Локтионов А.В. К методике аналитического расчета кинематических параметров исполнительного механизма //Пути совершенствования технологических процессов в машиностроении. – Мн.: «Университетское», 1990. – С. 150-155.
10. Локтионов А.В. К матричной записи кинематических параметров режущего инструмента горной машины // Изв. Вузов. Машиностроение. М., 1979. №7 – С. 138-141.
11. Локтионов А.В. Методика расчета кинематических параметров корончатых исполнительных органов матричным методом//Механизация горных работ на угольных шахтах. Тула: ТПИ, 1986. – С. 125-132.
12. Локтионов А.В. Расчет кинематических параметров режущего инструмента исполнительных органов проходческих комбайнов. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. Новосибирск, «Наука», 1989. №4. – С. 69-72.
13. Локтионов А.В. Расчет кинематических параметров режущего инструмента исполнительных органов проходческих комбайнов с продольной режущей головкой//Изв. вузов. Горный журнал. 1990. №1. – С. 74-76.
14. Локтионов А.В., Богданов В.Б., Яцков Б. И. Расчет и эффективность исполнительных органов проходческих комбайнов. – Мн.: «Университетское», 1995.- 170 с.
15. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1986.
16. Фролов К.В., Воробьев Е.И. Механика промышленных роботов. Ч. 1. Кинематика и динамика. – М.: Высшая школа, 1988.– 304 с.
17. Локтионов А.В., Гусаков А.В. Оценка методов расчета кинематических параметров исполнительного механизма // Современные методы проектирования машин: Республ. межведомств. сб. науч. тр. Вып. 2: В 7 т. Т. 2. Качество изделий машиностроения. Проектирование материалов и конструкций/ Под общ. ред. П.А. Витязя. – М.: Технопринт, 2004. – С. 132-136.
18. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 1. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
19. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. –М.: Наука, 1972. – 468 с.
20. Халфман Р.Л. Динамика. – М.: Наука, 1972. – 568 с.
21. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
22. Локтионов А.В. К вопросу расчета кинематических параметров в цилиндрических координатах. Теоретическая и прикладная механика: Сб. науч. трудов. Под ред. И.П. Филонова. – Мн.: УП «Технопринт», 2002. – 252 с.
23. Локтионов А.В. Расчет кинематических параметров в сферических координатах матричным методом // Теоретическая и прикладная механика: Межведомств. сб. науч.-метод. Ст. – Мн.: Технопринт, 2004. – С.115-118.
24. Теоретическая механика, статика и кинематика: учебное пособие / Локтионов А.В., Крыгина Л.Г.; УО «ВГТУ». – Витебск, 2005. – 171 с.

ИНФОРМАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДАННЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ КАК ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ СВЯЗИ

В. М. Романчак, П. С. Серенков

The algorithm of information modeling as a basis of mechanism of acquisition and analysis of manufacturing processes quality data of a typical industrial enterprise was defined. Requirements and constraints to the model of process quality indexes as function of influencing factors in real process operation were determined. Universal method of approximation of passively registered quality data as an algorithm of approximation by superposition of wavelets in the form of delta-shaped functions was offered.

Математическую модель аппроксимации функции связи представим в виде:

$$\varphi = f(x_1, x_2 \dots x_m, a_1, a_2, \dots a_n) \quad (1)$$

где φ - оцениваемый показатель результативности продукции и (или) процесса (показатель качества), $x_1, x_2 \dots x_m$ - факторы, влияющие на показатель качества, f - аналитическая функция связи, $a_1, a_2, \dots a_n$ - параметры аналитической функции связи, подлежащие определению.

С позиций задач информационного моделирования производственных процессов мы предлагаем следующую классификацию моделей:

- модель с фиксированным количеством параметров;
- модель с нефиксированным количеством параметров.

К первой группе относятся математические модели, у которых число параметров n фиксировано и не зависит от количества s случаев (зарегистрированных наборов значений факторов $x_{1s}, x_{2s}, \dots x_{ms}$).

Типичными представителями моделей с фиксированным количеством параметров являются классические параметрические регрессионные модели, ряды с фиксированным числом слагаемых и т.п.

Ко второй группе относятся математические модели, у которых число параметров n не фиксировано и определяется количеством s случаев (зарегистрированных наборов значений факторов $x_{1s}, x_{2s}, \dots x_{ms}$).

Типичными представителями моделей с нефиксированным количеством параметров являются оценки типа Парзена - Розенблата, оценивание по методу потенциалов, а также полиномы Бернштейна [4 - 6].

Модели с фиксированным количеством параметров, не всегда позволяют адекватно описать реальные производственные процессы. Их применение для построения аналитической функции связи неизбежно вносит методическую ошибку при аппроксимации входных данных. Сущность методической ошибки заключается в том, что фактическую, априорно неизвестную зависимость оцениваемого показателя качества от влияющих факторов инженер - аналитик представляет в виде заранее выбранной им модели конкретного типа. Например, если фактическую нелинейную зависимость аппроксимировать линейной регрессионной моделью, появляется методическая ошибка аппроксимации, причем значение ее может быть соизмеримо не только со случайными составляющими ошибки, но и с самим значением показателя качества.

Для решения сложных задач анализа данных и принятия решений в условиях существенной априорной неопределенности наиболее перспективными, на наш взгляд, являются модели с нефиксированным количеством параметров. Использование такого рода моделей для решения данного класса задач позволяет свести к минимуму методическую ошибку аппроксимации.

Один и тот же алгоритм математического моделирования функции связи должен обеспечивать решение двух задач:

1. приближенное восстановление функции - поиск гладких кривых или поверхностей, проходящих через множество заданных точек или линий;
2. сглаживание функции.

Можно считать, что показателем качества, разрабатываемой математической модели аппроксимации функции связи является комплексная характеристика, которая показывает, насколько данная модель пригодна для решения поставленных задач с учетом конкретных ограничений, и насколько точно она решает эти задачи.

Для того, чтобы обеспечить точность решения задач, модель должна удовлетворять ряду требований (принципов). Руководствуясь практическим опытом, мы предлагаем оценить показатель качества разрабатываемой модели аппроксимации функции связи соблюдением трех принципов:

1. принцип несмещенности (асимптотической несмещенности);
2. принцип состоятельности;
3. принцип интерполяционной устойчивости алгоритма порядка k .

Для анализа соответствия различных классов аналитических моделей сформулированным принципам и ограничениям, были рассмотрены модели:

- аппроксимация алгебраическими многочленами [7];
- регрессионное оценивание типа Парзена – Розенבלата [5];
- полиномы Бернштейна [6];
- метод потенциалов (неортогональных разложений) [4];

Во всех случаях имели место несоответствие моделей определенным выше принципам и ограничениям предметной области.

Прежде всего, это ограничения, вызываемые реальными условиями осуществления производственных процессов и функционирования систем менеджмента качества, для которых решается данная задача:

- неупорядоченный (пассивный) механизм сбора и накапливания исходной информации, что приводит к неравномерности заполнения факторного пространства и пропускам входных данных;
- сложная иерархическая структура входных данных, привязанная к организационной структуре предприятия; представление данных как в явном так и неявном виде, как в количественной, так и в качественной форме;
- стохастичность и зашумленность - входных данных (характеристик продукции и параметров процессов), их низкая воспроизводимость;
- нестационарность входных данных во времени;
- недостаточный уровень подготовленности инженеров и менеджеров в области качества для проведения на постоянной основе квалифицированного информационного моделирования, недостаточные мотивация и профессиональный интерес к применению предлагаемых подходов для решения всего комплекса задач менеджмента качества.

Поиск модели аппроксимации функции связи показателя качества производственного процесса от влияющих факторов предлагается искать среди методов «точного» восстановления функции связи. К таковым, например, можно отнести, например, разложение в ряд Фурье или интегрального преобразования Фурье [8].

В свою очередь обозначим Vf , как изображение функции $f(t)$ при преобразовании Фурье:

$$Vf = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt = \hat{f}(x) \quad (2)$$

В теории сигналов в последнее время активно развивается теория двухпараметрических интегральных преобразований или вейвлет - преобразований [8]. Идея состоит в разложении функции по двухпараметрическому базису.

Интегральным вейвлет - преобразованием функции $f(t)$ называется выражение:

$$W_{\psi}(f)(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (3)$$

Входящая в выражение функция $\psi(t)$ - называется вейвлетом и должна удовлетворять условию допустимости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (4)$$

При этом обеспечивается обратимость вейвлет - преобразования с помощью формулы:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}(f)(b, a) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right) \frac{db da}{a^2} \quad (5)$$

где $C_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\psi}(\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega)}}{\omega} d\omega < \infty$, $\hat{\psi}(\omega)$ - преобразование Фурье функции $\psi(\omega)$.

Недостатком вейвлет – преобразования для определенного нами класса задач является тот факт, что функции, которые могут выступать в роли вейвлета, должны удовлетворять условию допустимости (4). Это значительно сужает класс функций, которые могут использоваться в качестве вейвлета и соответственно снижает функциональные возможности информационного моделирования производственных процессов.

Нами рассматриваются некоторые новые подходы к построению модели аппроксимации функции связи.

Предлагаемый подход предполагает, что аналитическая функция связи представлена вейвлет – преобразованием, причем в качестве вейвлета используются дельта – образные функции [4, 5, 7, 8].

Используя обозначения для интегрального вейвлет – преобразования, рассмотрим теперь аппроксимацию с помощью дельта – образных функций.

Пусть оцениваемая функция $f(t)$ непрерывна в точке b . Тогда ее значение $f(b)$ можно представить в виде:

$$f(b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-b) dt \quad (6)$$

где $\delta(t)$ - дельта - образная функция.

Равенство (6) можно приближенно записать в виде:

$$f(b) \approx \frac{1}{\sqrt{a}} W(b, a) \quad (7)$$

$$\text{где } W_{\psi}(f)(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (8)$$

Функция $\psi(t)$ - дельта - образная функция, которая должна при этом удовлетворять условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 1 \quad (9)$$

При этом $\psi(t)$ должна стремиться к $\delta(t)$ при $a \rightarrow \infty$.

Примечание. Метод дельта – образных функций нашел широкое применение при оценивании плотностей распределения и регрессионных зависимостей [4].

Введем определение сингулярного вейвлет - преобразования. Предположим, что $\psi \in L^2(R)$. Образует из ψ двухпараметрическое семейство вейвлетов с помощью сдвигов и растяжений [8]:

$$\psi^{(a,b)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \tag{10}$$

где $a, b \in R, a \neq 0$

Нормирование выберем так, чтобы $\|\psi^{(a,b)}\| = \|\psi\| = 1$

Непрерывное сингулярное вейвлет - преобразование на этом семействе вейвлетов мы предлагаем определить как

$$W_\psi (f - f(b))(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(b)) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \tag{11}$$

В частном случае, когда для функции $\psi(t)$ выполняется условие допустимости (4) сингулярное интегральное вейвлет – преобразование совпадает с интегральным вейвлет - преобразованием:

$$W_\psi (f - f(b))(b, a) = W_\psi(f) (b, a) \tag{12}$$

ДОКАЖЕМ ТЕОРЕМУ. Пусть ψ - базисный сингулярный вейвлет, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi (f - f(b))(b, a) \overline{W_\psi g(b, a)} \frac{da}{a^2} = C_\psi (f, g) , \tag{13}$$

где $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt, \tilde{N}_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{(\hat{\psi}(y) - \hat{\psi}(0))} \hat{\psi}(y)}{y} dy < \infty.$

Действительно,

$$V(W_\psi f(b, a)) = \frac{a}{\sqrt{a}} \hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} \tag{14}$$

$$V(W_\psi g(b, a)) = \frac{a}{\sqrt{a}} \hat{g}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} \tag{15}$$

Кроме того

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi (f - f(b))(b, a) \overline{W_\psi g(b, a)} db = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(b, a) \overline{W_\psi g(b, a)} db - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\sqrt{a}} f(b) \overline{\hat{\psi}(0)} \overline{W_\psi g(b, a)} db \end{aligned} \tag{16}$$

Применяя обобщенные равенства Парсеваля к каждому из интегралов в правой части равенства (16) с учетом (14), (15) получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}(f - f(b))(b, a) \overline{W_{\psi} g(b, a)} db = \\ & = \frac{a^2}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} (\hat{\psi}(ax) - \hat{\psi}(0)) \hat{\psi}(ax) dx \end{aligned} \quad (17)$$

Умножив на $\frac{da}{a^2}$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(b, a) \overline{W_{\psi} g(b, a)} \frac{da}{a^2} db = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} \frac{(\hat{\psi}(ax) - \hat{\psi}(0)) \hat{\psi}(ax)}{a} da dx = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\hat{\psi}(y) - \hat{\psi}(0)) \hat{\psi}(y)}{y} dy dx = C_{\psi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь аналогично подходу, изложенному в [8], можно получить формулу обращения для сингулярного интегрального вейвлет – преобразования:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}(f - f(b))(b, a) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right) \frac{db da}{a^2}, \quad (19)$$

где $\tilde{N}_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\hat{\psi}(y) - \hat{\psi}(0)) \hat{\psi}(y)}{y} dy < \infty$, $\hat{\psi}(\omega)$ - преобразование Фурье функции $\psi(t)$.

Формула (19) показывает, что любую $f(t)$ из $L^2(R)$ можно с произвольной точностью аппроксимировать суперпозицией вейвлетов в виде дельта - образных функций.

Из формулы (13) следует равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\tilde{N}_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}(f - f(b))(b, a) \overline{W_{\psi}(f)(b, a)} \frac{db da}{a^2}, \quad (20)$$

которое представляет собой аналог равенства Парсеваля. Последнее предполагает, что математическая модель функции связи в виде сингулярного интегрального преобразования обладает дополнительными качественными свойствами [8].

В дискретном случае можно воспользоваться следующим рядом:

$$f(t) = \sum_{k=0}^K \frac{\sum_{m=1}^M g_k(b_m) \psi\left(\frac{t-b_m}{a_k}\right)}{\sum_{m=1}^M \psi\left(\frac{t-b_m}{a_k}\right)}, \quad (21)$$

где $g_{k+1}(b_m) = W_{\psi}(g_k - g_k(b_m))(b_m, a_k)$, $g_0(b_m) = f(b_m)$, $a_k = \frac{a}{2^k}$.

В частном случае, когда $k = 0$, ряд совпадает с оценкой Парзена - Розенблата .

Нами был реализован численный эксперимент по оцениванию комплексного показателя качества различных моделей аппроксимации, рассмотренных в данной статье. Сущность эксперимента заключалась в том, что в качестве объекта моделирования задавалась теоретическая функция, например, $y = |x|$, $y = \exp(x)$, $y = \sin(x)$, $y = x^2$. Для заданной теоретической функции связи генерировался случайным образом массив точек $(x_i, y_i \pm \delta_i)$, где δ_i – случайным образом заданная ошибка. При этом, $\delta_i \leq [\delta]$, x_i представляет собой неравномерный ряд значений аргументов.

Массив точек рассматривался как совокупность данных о результативности производственного процесса, зафиксированных в условиях его реализации, близких к реальным, по крайней мере, с позиций выявленных нами ограничений. Далее массив точек аппроксимировался различными методами, приведенными выше. На рис. 1 приведен фрагмент численного эксперимента по оцениванию комплексного показателя качества различных моделей аппроксимации функции связи $y = |x|$.

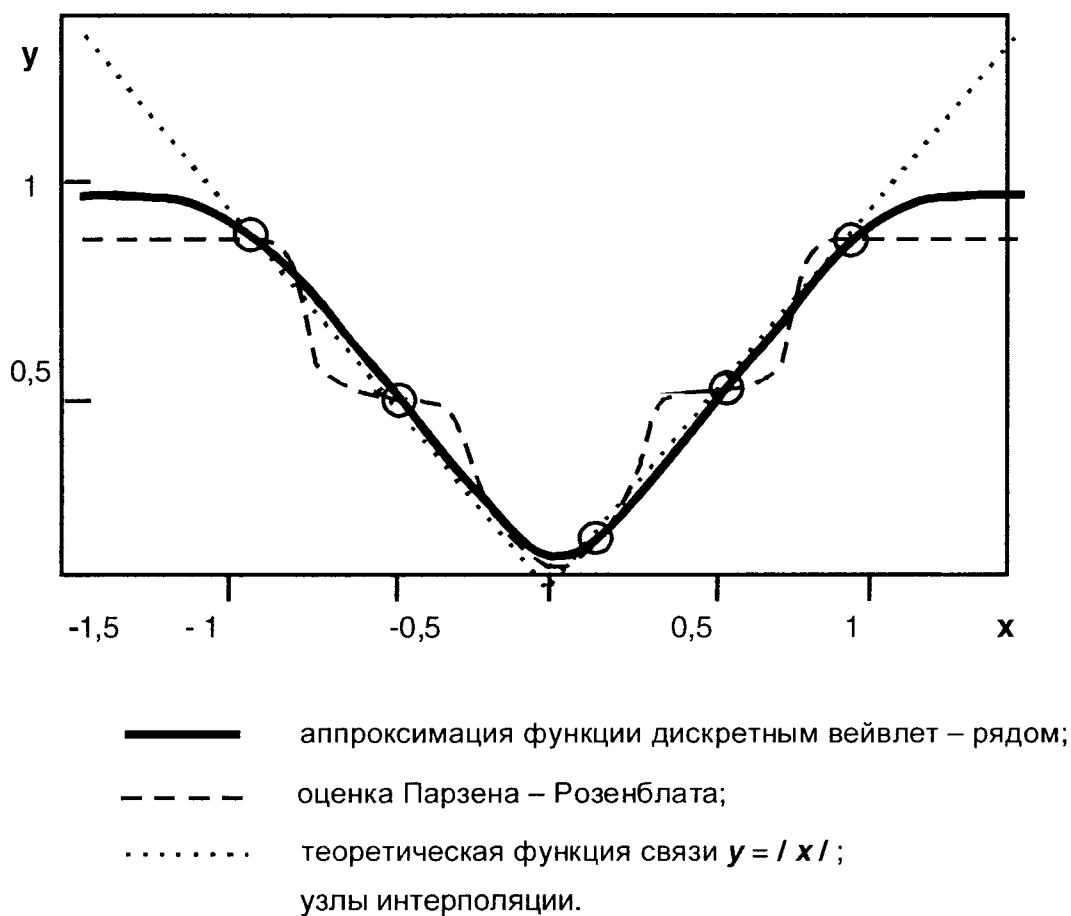


Рис.1. Аппроксимация теоретической функции связи $y = |x|$ различными методами для неравномерного распределения узловых точек.

Примечание. Вопросы, связанные с обоснованием оценки (21), выходят за рамки данной статьи.

Результаты численного эксперимента показали, что предлагаемый подход для данного круга модельных задач соответствует установленным требованиям:

- алгоритм аппроксимации суперпозицией вейвлетов в виде дельта - образных функций по несистематизированным исходным данным восстанавливает и сглаживает функцию связи, обеспечивая выполнение принципа интерполяционной устойчивости алгоритма не менее первого порядка;
- пригоден для решения поставленных задач менеджмента качества производственных процессов с учетом конкретных ограничений.

Заключение

Для реализации принципа менеджмента качества «управление, основанное на фактах», сформулирован алгоритм информационного моделирования как основа механизма сбора и анализа данных о качестве производственных процессов типового промышленного предприятия. Сформулированы требования и ограничения к модели функции связи показателей качества процесса с влияющими факторами для реальных условий его осуществления. На доказательной основе предложен универсальный метод аппроксимации пассивно регистрируемых данных о качестве как алгоритм аппроксимации суперпозицией вейвлетов в виде дельта - образных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Окрепилов В.В. Управление качеством. М.: Экономика, 2000.
2. П.С. Серенков, В.Л. Соломахо К вопросу о методах и инструментах эффективного менеджмента качества. // Новости. Стандартизация и сертификация. 2002. №2. – С.57 – 60.
3. V.N. Koreshkov, P. S. Serenkov etc. Conception of Complex Methodology of “Cycled-Through” Quality Management. // Quality: The Way to Sustainability: Proceedings of 49th EOQ Annual Congress (25-27 April 2005, Antalya – Turkey) – 18 p.
4. Э.А. Надарая Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности и кривой регрессии. Тбилиси: ТГУ, 1983.
5. Wolfgang Hardle. Applied Nonparametric Regression. Berlin, 1994.
6. Farouki R.T. and Rajan V.T. Algorithms for polynomials in Bernstein form //Computer Aided Geometric Design. 1988. № 5. – P.1-26.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.:Наука, 1978.
8. И. Добеши. Десять лекций по вейвлетам. Москва–Ижевск. 2004

МЕТОД ПОДОБИЯ В ОЦЕНКЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ПОЧВУ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ДВИЖИТЕЛЕЙ

Чигарев Ю.В., Романюк Н.Н.

1. Планирование эксперимента

Моделирование процессов, происходящих при взаимодействии колесных движителей с почвой, лучше всего проводить при помощи теории подобия, которая значительно сокращает сроки испытаний и существенно снижает материальные затраты.

Моделирование заключается в исследовании моделируемого объекта на специально сформированной модели, которая подобна оригиналу. При помощи масштабных соотношений можно определить степень влияния проектируемых движителей на почву при известных показателях модели.

В [1] дано уравнение регрессии, связывающее изменение плотности почвы от вибродинамических нагрузок, с основными параметрами колесной ходовой системы.

На уплотнение почвы наибольшее влияние оказывают: нагрузка на ось, давление воздуха в шине, скорость движения, частота колебаний. С учетом [1] зависимость изменения плотности почвы от факторов в критериальном виде примет вид:

$$\frac{\rho_k}{\rho_n} = \varphi \left(\frac{G}{E_c l^2}; \frac{p_w}{E_c}; \frac{\eta V}{l E_c}; \frac{f \eta}{E_c} \right). \quad (1)$$

где ρ_n, ρ_k – соответственно плотность почвы до воздействия деформатора (начальная) и после воздействия (конечная);

E_c – статический модуль упругости почвы;

η – коэффициент вязкости почвы;

V – скорость движения трактора;

l – определяющий линейный размер системы;

G – нагрузка, действующая на ось колеса;

p_w – давление воздуха в шине;

f – частота колебаний оси колеса, c^{-1} .

Уровни варьирования управляемых факторов были определены из следующих соображений.

Нагрузка G , приходящаяся на ось колеса, выбиралась из ТУ 38.10421 - 85 на шину 4,5 – 90 в зависимости от внутреннего давления в ней. Величина нагрузки на ось натурального образца найдется с учетом зависимости [1, с.72].

Пределы изменения давления воздуха в шине p_w определены исходя из требований, предъявляемых к шинам для выполнения различных операций. Согласно [1, с.72] давление воздуха в натурном и модельном образце одинаково.

Скорость движения колеса V_k определялась согласно данным [2, с.14] о рабочих скоростях по полям сельскохозяйственной техники при выполнении различных операций, которая находится в пределах 3...12 км/ч (1...3 м/с). Согласно [1, с.72] скорость движения колеса модельного образца должна быть в K_l раз меньше, чем у натурального.

Частоты колебаний модели (установки) и натурального образца должны быть одинаковыми [1, с.72]. Согласно исследований, проведенных Е. Я. Улицким и Б. Д. Цвиком [3] доминирующие частоты колебаний тракторов находятся в диапазоне 3-5 Гц, притом наиболее часто встречающиеся 4-5 Гц.

Как показал теоретический анализ, влияние данных факторов на уплотнение почвы носит нелинейный характер, поэтому для более точной формализации используется план второго порядка - полный центральный композиционный ротatableльный эксперимент типа 2^4 , при котором варьирование факторов осуществляется на двух уровнях.

Соответствуя требованиям ортогональности для четырех переменных, устанавливаем значения уровней в принятом масштабе и заносим в таблицу 1 основные уровни изменения факторов. Центр эксперимента (нулевую точку) определяем согласно рекомендаций [4].

Таблица 1 – Значение факторов в кодированном и натуральном виде

Показатели	Кодированное значение	Факторы в натуральном виде			
		нагрузка на ось, кН, [G]; X1	давление воздуха в шине, кПа [p _w]; X2	скорость движения, м/с, [V _к]; X3	частота колебаний, Гц [f]; X4
Верхний уровень	+1	1,80	120	1,4	5
Основной уровень (X0)	0	1,45	100	1,1	4
Нижний уровень	-1	1,10	80	0,8	3
Интервал варьирования	ϵ_e	0,35	20	0,3	1
Верхнее звездное плечо	+2	2,15	140	1,7	6
Нижнее звездное плечо	-2	0,75	60	0,5	2

Интервалы и уровни варьирования факторов в критериальном виде представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Интервалы и уровни варьирования факторов в критериальном виде

Показатели	Кодированное значение	Факторы в критериальном виде			
		X1, $\left(\frac{G}{E_c l^2}\right)$	X2, $\left(\frac{p_w}{E_c}\right)$	X3, $\left(\frac{\eta V}{l E_c}\right)$	X4, $\left(\frac{f \eta}{E_c}\right)$
Верхний уровень	+1	0,0428	0,1714	0,0694	0,0607
Основной уровень X ₀	0	0,0345	0,1428	0,0545	0,0486
Нижний уровень	-1	0,0262	0,1142	0,0396	0,0365
Интервал варьирования	ϵ_e	0,0083	0,0286	0,0149	0,0121
Верхнее звездное плечо	+2	0,0511	0,2000	0,0843	0,0728
Нижнее звездное плечо	-2	0,0179	0,0856	0,0247	0,0244

2. Описание и конструкция лабораторного стенда

Параметры и конструкция экспериментальной лабораторной установки по исследованию уплотнения почвы от действующих вибрационных нагрузок выбирались исходя из требований, предъявляемых методикой эксперимента и критериями подобия процессов деформации почвы.

Согласно исследованиям В.И. Баловнева [5, с.368] критический размер l_0 должен находиться в пределах 20-100мм в зависимости от типа почвогрунта и величины прикладываемой нагрузки.

Ю.А. Брянский и Е.Д. Каран [6, с.66] указывают на возможность испытания натурального (оригинального) колеса и модели на одинаковых почвенных поверхностях при условии $K_l < 4 \div 5$, потому что результаты испытания модели при соблюдении геометрического подобия шин дают в этих условиях хорошую количественную сходимость с результатами испытания натурной машины. Исходя из этих соображений, принимаем колесо 4.50-9.

Поскольку, на уплотнение почвы влияет не только наружный диаметр D , но и ширина профиля шины $B_{ш}$, согласно [7, с.162] в качестве параметра линейного размера следует принимать выражение:

$$l_0 = \sqrt{D \cdot B} \quad (2)$$

Для исследования процессов взаимодействия колеса с почвой под действием вибродинамических нагрузок, используется лабораторный стенд (рисунок 1), конструкция которого защищена патентом на полезную модель [8].

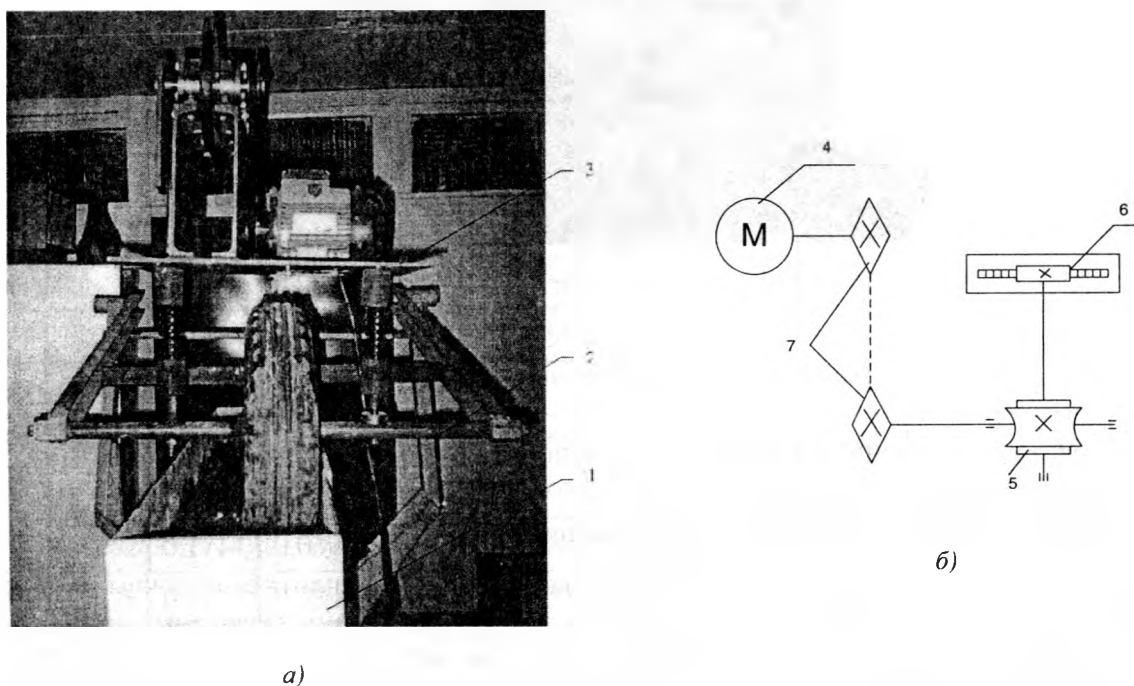


Рисунок 1. Стенд для исследования взаимодействия колес с почвой при вибродинамическом нагружении:
а) общий вид; б) привод колеса

Стенд содержит контейнер для почвы 1, имеющий возможность горизонтального перемещения, ось 2 с колесом на которой установлена площадка с вибратором 3. При перемеще-

нии контейнера 1, почва, находящаяся в нем воздействует на колесо, преобразуя поступательное движение почвы во вращательное движение колеса. Привод контейнера 1 осуществляется от электродвигателя 4 через червячный редуктор 5 и зубчато реечное зацепление 6. Скорость передвижения контейнера 1 регулируется за счет изменения передаточного отношения цепной передачи 7.

Вибродинамические нагрузки создаются при помощи вибратора направленного действия (рисунок 2).

Вибратор установлен на площадку 1. Два вала 2 с одинаковыми эксцентриками 5 вращаются в противоположных направлениях синхронно и синфазно, что обеспечивается двумя дисками 4, представляющими собой фрикционную передачу. Горизонтальные составляющие центробежных сил каждого из эксцентриков в любом положении взаимно уравниваются, а вертикальные – складываются, давая суммарную вертикальную направленную периодическую возмущающую силу [9, с.8]. Вращение вибратора осуществляется от электродвигателя 7 через ременную передачу 6, имеющую сменные шкивы 3. Частота колебаний вибратора зависит от числа оборотов вала вибратора. Изменение оборотов вала вибратора осуществляется при помощи сменных шкивов 3 различного диаметра. Требуемая нагрузка на колесо

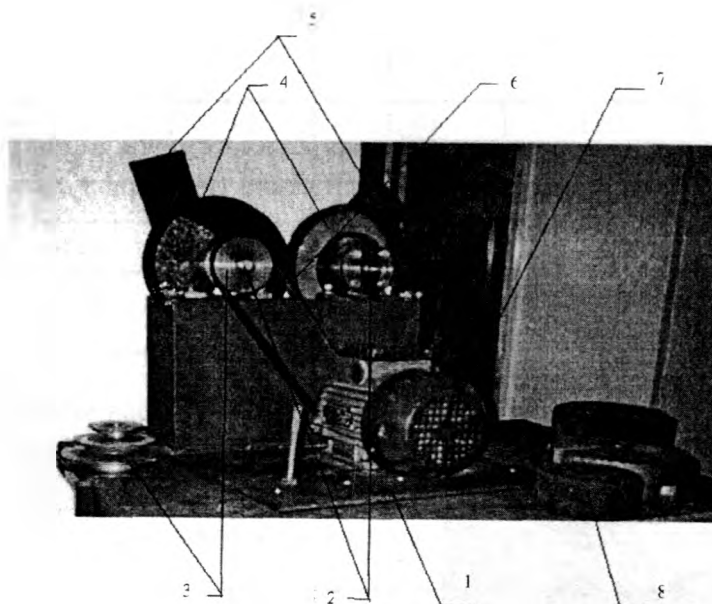


Рисунок 2. Вибровозбудитель направленных действий

создается при помощи сменных грузов 8, устанавливаемых на площадку 1 или ось колеса.

3. Результаты экспериментальных исследований

Как отмечалось выше, при исследовании закономерностей уплотнения почвы от вибродинамических нагрузок основными детерминирующими факторами выявлены: нагрузка на ось колеса, давление воздуха в шине, скорость движения колеса и частота колебаний. Интервалы и уровни варьирования факторов в натуральном виде приведены в таблице 1, в критерииальном – в таблице 2.

Опыты проводились на дерново-подзолистой супесчаной почве. В первом случае при плотности $\rho_n = 1126 \text{ кг/м}^3$ и влажности $W = 12\%$, при этих показателях статический модуль упругости и коэффициент вязкости составили соответственно $E_c = 700 \text{ кПа}$, $\eta = 8,5 \text{ кПа} \cdot \text{с}$.

В соответствии со схемой проведено двадцать пять опытов: шестнадцать точек с варьированием факторов на уровнях (+1; -1) сочетаются с девятью точками, из которых восемь звездных точек с плечами (+2; -2) и одна центральная (0). Для оценки кривизны поверхности отклика добавляем шесть параллельных точек в центре плана.

Все эксперименты проведены в четырехкратной повторности. Полученные результаты усреднены и округлены. Опыт в центре плана проведен с шестикратной повторностью.

С целью обеспечения равномерного внесения элемента случайности влияния неуправляемых и неконтролируемых факторов на отклик был использован принцип рандомизации, который предусматривал случайный порядок реализации опытов. Для чего использовались таблицы случайных чисел [4, с.159].

Результаты опытов и расчетные значения по критерию $y\left(\frac{\rho_K}{\rho_H}\right)$ приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты опытов и расчетные значения по критерию $y\left(\frac{\rho_K}{\rho_H}\right)$

№ п/п	Значения				Результаты				Расчет		
	$\left(\frac{G}{E_c l^2}\right)$	$\left(\frac{p_w}{E_c}\right)$	$\left(\frac{\eta v}{l E_c}\right)$	$\left(\frac{f \eta}{E_c}\right)$	Y1	Y2	Y3	Y4	Ys	YR	YR0
1	0,0262	0,1142	0,0396	0,0365	1,1421	1,1794	1,1581	1,1741	1,1634	1,2695	1,2769
2	0,0428	0,1142	0,0396	0,0365	1,1545	1,1936	1,1687	1,1794	1,1741	1,2820	1,2769
3	0,0262	0,1714	0,0396	0,0365	1,2629	1,2336	1,2496	1,2274	1,2434	1,3507	1,3598
4	0,0428	0,1714	0,0396	0,0365	1,2735	1,2416	1,2629	1,2522	1,2575	1,3658	1,3598
5	0,0262	0,1142	0,0694	0,0365	1,1545	1,1332	1,1456	1,1705	1,1510	1,2589	1,2769
6	0,0428	0,1142	0,0694	0,0365	1,1350	1,1670	1,1794	1,1723	1,1634	1,2722	1,2769
7	0,0262	0,1714	0,0694	0,0365	1,2398	1,2114	1,2451	1,2060	1,2256	1,3373	1,3598
8	0,0428	0,1714	0,0694	0,0365	1,2611	1,2345	1,2238	1,2540	1,2434	1,3533	1,3598
9	0,0262	0,1142	0,0396	0,0607	1,1456	1,1794	1,1892	1,1821	1,1741	1,2820	1,2769
10	0,0428	0,1142	0,0396	0,0607	1,1599	1,1989	1,2025	1,1847	1,1865	1,2926	1,2769
11	0,0262	0,1714	0,0396	0,0607	1,2380	1,2806	1,2664	1,2451	1,2575	1,3666	1,3598
12	0,0428	0,1714	0,0396	0,0607	1,2433	1,2780	1,2904	1,2682	1,2700	1,3799	1,3598
13	0,0262	0,1142	0,0694	0,0607	1,1936	1,1421	1,1687	1,1492	1,1634	1,2731	1,2769
14	0,0428	0,1142	0,0694	0,0607	1,1945	1,1696	1,1545	1,1776	1,1740	1,2846	1,2769
15	0,0262	0,1714	0,0694	0,0607	1,2327	1,2380	1,2611	1,2487	1,2451	1,3551	1,3598
16	0,0428	0,1714	0,0694	0,0607	1,2380	1,2433	1,2842	1,2647	1,2576	1,3693	1,3598
17	0,0179	0,1428	0,0545	0,0486	1,1687	1,1758	1,2078	1,2149	1,1918	1,3059	1,3192

18	0,0511	0,1428	0,0545	0,0486	1,1936	1,2211	1,2398	1,2265	1,2203	1,3325	1,3192
19	0,0345	0,0856	0,0545	0,0486	1,0959	1,1545	1,1368	1,1243	1,1279	1,2443	1,2443
20	0,0345	0,2000	0,0545	0,0486	1,3321	1,3011	1,2922	1,2753	1,3002	1,4101	1,4101
21	0,0345	0,1428	0,0247	0,0486	1,2167	1,2291	1,1794	1,1989	1,2060	1,3236	1,3130
22	0,0345	0,1428	0,0843	0,0486	1,1750	1,1865	1,1918	1,2211	1,1936	1,3023	1,3130
23	0,0345	0,1428	0,0545	0,0244	1,1599	1,1972	1,2060	1,1758	1,1847	1,2997	1,3139
24	0,0345	0,1428	0,0545	0,0728	1,2398	1,2256	1,2149	1,1865	1,2167	1,3281	1,3139
25	0,0345	0,1428	0,0545	0,0486	1,1599	1,2300	1,1892	1,2345	1,2034	1,2025	1,2025
26	0,0345	0,1428	0,0545	0,0486	1,1519				1,2034	1,2025	1,2025
27	0,0345	0,1428	0,0545	0,0486	1,2416				1,2034	1,2025	1,2025
28	0,0345	0,1428	0,0545	0,0486	1,2487				1,2034	1,2025	1,2025
29	0,0345	0,1428	0,0545	0,0486	1,1519				1,2034	1,2025	1,2025
30	0,0345	0,1428	0,0545	0,0486	1,1847				1,2034	1,2025	1,2025
31	0,0345	0,1428	0,0545	0,0486	1,2416				1,2034	1,2025	1,2025

Математическую модель изменение критерия отклика $y \left(\frac{\rho_K}{\rho_H} \right)$ можно записать в следующем виде [4, с.97]:

$$y = b_0 + \sum_1^K b_i \cdot x_i + \sum_{i < j}^K b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_1^K b_{ii} \cdot x_i^2, \quad (3)$$

где y - критерий оптимизации (отклик);

b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii} - коэффициенты уравнения регрессии;

x_i, x_j - независимые переменные факторы;

K - число независимых переменных факторов.

Уравнение второго порядка (3) в случае четырехфакторного эксперимента примет следующий вид:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{11} \cdot x_1^2 + b_{22} \cdot x_2^2 + b_{33} \cdot x_3^2 + b_{44} \cdot x_4^2 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \quad (4)$$

$$+ b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + b_{34} \cdot x_3 \cdot x_4.$$

Коэффициенты регрессии определяются по формулам 63-66 [4, с.102]:

$$b_0 = a_1 \sum_{u=1}^N \bar{y}_u - a_2 \sum_{i=1}^K \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 \cdot \bar{y}_u; \quad (5)$$

$$b_i = a_3 \sum_{u=1}^N x_{iu} \cdot \bar{y}_u; \quad (6)$$

$$b_{ij} = a_4 \sum_{u=1}^N x_{iu} \cdot x_{ju} \cdot \bar{y}_u; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, K; \quad (7)$$

$$b_{ii} = a_5 \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 \cdot \bar{y}_u + a_6 \sum_{i=1}^K \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 \cdot \bar{y}_u - a_7 \sum_{u=1}^N \bar{y}_u, \quad (8)$$

где a_1, \dots, a_7 - коэффициенты, определенные по [4, с.103]:

$$a_1 = 0.14285; \quad a_2 = 0.03572; \quad a_3 = 0.04167; \quad a_4 = 0.06250;$$

$$a_5 = 0.03125; \quad a_6 = 0.00372; \quad a_7 = 0.03497;$$

\bar{y}_u - среднее значение коэффициента оптимизации, полученное в u -ом опыте;

N - число строк в матрице эксперимента (количество опытов).

Для расчета коэффициентов регрессии применим компьютерную программу [10], измененную для нашего случая и получим их значения:

$$b_0 = 1.202470, b_1 = 0.006663, b_2 = 0.041451, b_3 = -0.005330, b_4 = 0.007103, \\ b_{11} = 0.029180, b_{22} = 0.031180, b_{33} = 0.027627, b_{44} = 0.027852, b_{12} = 0.000666, \\ b_{13} = 0.000228, b_{14} = -0.000444, b_{23} = -0.000662, b_{24} = 0.000884, b_{34} = 0.000447.$$

С учетом коэффициентов регрессии математическая модель (4) примет следующий вид:

$$y_1 = 1.202470 + 0.006663 \cdot x_1 + 0.041451 \cdot x_2 - 0.005330 \cdot x_3 + 0.007103 \cdot x_4 + 0.029180 \cdot x_1^2 + \\ + 0.031180 \cdot x_2^2 + 0.027627 \cdot x_3^2 + 0.027852 \cdot x_4^2 + 0.000666 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0.000228 \cdot x_1 \cdot x_3 - \\ - 0.000444 \cdot x_1 \cdot x_4 - 0.000662 \cdot x_2 \cdot x_3 + 0.000884 \cdot x_2 \cdot x_4 + 0.000447 \cdot x_3 \cdot x_4. \quad (9)$$

Для оценки точности математического описания, значения параметра оптимизации определены во всех экспериментальных точках (таблица 3).

Проверка соответствия экспериментальных данных с расчетными показала, что отклонение между Y_s и Y_R доходит в некоторых случаях до 9,75 %.

Дисперсия неадекватности математической модели, описывающей изменение критерия отклика, и дисперсия ошибки эксперимента по данным шести опытов в центре плана соответственно равны: $S_{LF}^2 = 0.00306$ и $S_y^2 = 0.002$.

Критерий Фишера будет равен: $F=1.53$.

Чтобы принять гипотезу об адекватности, полученное значение критерия Фишера F должно быть меньше табличного. По табличным данным [4] значение критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости и числе степеней свободы 20 и 75 составляет $F_{0.05} = 1.72$.

Так как $F_{\text{экс}} = 1,53 < F_{0.05} = 1.72$, гипотезу об адекватности описания уравнением (9) результатов эксперимента можно считать верной с 95 %-ой вероятностью.

Выполним проверку значимости коэффициентов регрессии, которая осуществляется путем вычисления доверительных интервалов, в пределах которых должна находиться истинная величина коэффициентов регрессии.

На основе результатов расчета, при помощи компьютерной программы [10], получаем, что коэффициенты регрессии (9) $b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24}, b_{34}$ незначимы, а знак перед значением коэффициента указывает в какую сторону изменится критерий оптимизации при соответственном изменении x_i .

С помощью компьютерной программы [10] делаем пересчет значения параметра оптимизации Y_{R0} (таблица 3).

Проверка соответствия экспериментальных данных с расчетными показала, что отклонение между Y_s и Y_{R0} увеличилось и составляет в некоторых случаях $\approx 11\%$.

Расчетное значение критерия Фишера будет: $F=1.54$.

По табличным данным значение критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости и числе степеней свободы 20 и 75 составляет $F_{0.05} = 1.72$.

Так как $F=1,54 < F_{0,05}=1,72$, то гипотеза адекватности принимается.

Уравнение регрессии, описывающее процесс уплотнения почвы от вибродинамических нагрузок в критериальной форме будет иметь вид:

$$\frac{\rho_k}{\rho_n} = 3.0960 - 29.2267 \cdot \left(\frac{G}{E_c l^2} \right) - 9.4376 \cdot \left(\frac{p_w}{E_c} \right) - 13.5640 \cdot \left(\frac{\eta V}{l E_c} \right) - 18.4907 \cdot \left(\frac{f \eta}{E_c} \right) +$$

$$+ 423.5759 \cdot \left(\frac{G}{E_c l^2} \right)^2 + 38.1194 \cdot \left(\frac{p_w}{E_c} \right)^2 + 124.4404 \cdot \left(\frac{\eta V}{l E_c} \right)^2 + 190.2330 \cdot \left(\frac{f \eta}{E_c} \right)^2. \quad (10)$$

На рисунке 3 показана зависимость изменения критерия отклика от влияния основных критериев подобия.

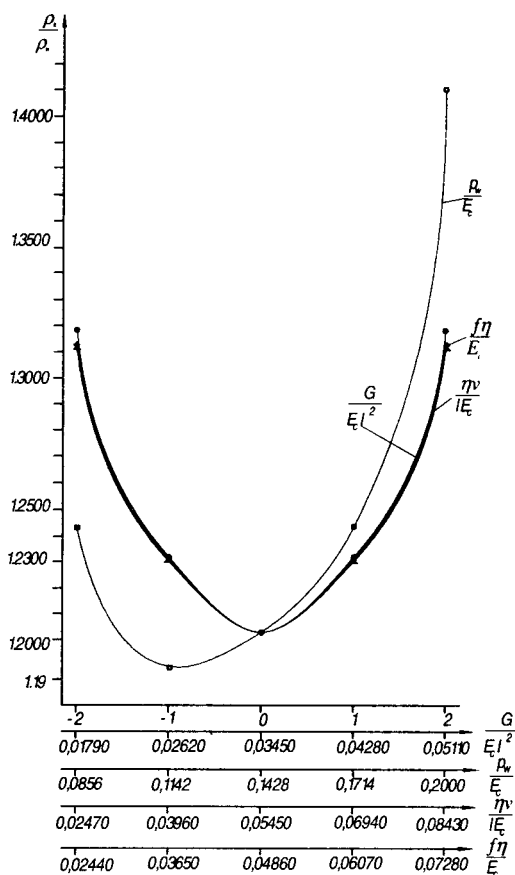


Рисунок 3. Зависимость изменения критерия отклика $y \left(\frac{\rho_k}{\rho_n} \right)$ от влияния основных критериев подобия

$$\left(\frac{G}{E_c l^2} \right), \left(\frac{p_w}{E_c} \right), \left(\frac{\eta V}{l E_c} \right), \left(\frac{f \eta}{E_c} \right)$$

Выводы

1 Исследования, проведенные на лабораторном стенде, конструкция которого, защищена патентом на полезную модель, позволили изучить влияние одних факторов при варьировании других на изменение плотности почвы в критериальном виде с помощью теории подобия и анализа размерностей.

2 По результатам исследований получено уравнение регрессии (10) связывающие между собой в критериальном виде критерий отклика от критериев подобия.

3 Коэффициенты регрессии b_{12} , b_{13} , b_{14} , b_{23} , b_{24} , b_{34} выбыли из уравнения (9), это говорит о том, что при совместном действии двух факторов на результат эксперимента происходит их простое математическое сложение.

4 Подтверждена адекватность экспериментальных результатов исследований по критерию Фишера при 5%-ном уровне значимости.

5 Из рисунка 3 видно, что при увеличении нагрузки на ось колеса, повышении давления воздуха в шине, увеличении скорости движения и частоты колебаний значение плотности почвы увеличивается (значение факторов X_1 , X_3 , на уровнях от -2 до 0, а фактора X_2 от -2 до -1 находятся в виртуальной области условий работы сельскохозяйственной техники, поэтому ими можно пренебречь).

6 Наименьшее уплотнение почвы наблюдается тогда, когда все критерии подобия находятся на основном (нулевом) уровне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Czigarew, J.W. Badania wibro-udarowego oddziaływania kol ciągnica na glebe metoda modeli fizycznych / J.W. Czigarew, N.N. Romaniuk, W.M. Mikula // Ekologiczne aspekty mechanizacji produkcji roślinnej: XI Międzynarodowe sympozjum, Warszawa, 13–14 wrzesnia 2005r. / Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Wydział Inżynierii produkcji. – Warszawa, 2005. – P.67–73.

2. Бойков, В.П. Шины для тракторов и сельскохозяйственных машин / В.П. Бойков, В.Н. Белковский. – Москва: Агропромиздат, 1988. – 240с.

3. Улицкий, Е.Я. Влияние колебаний на работу колёсного трактора / Е.Я. Улицкий, Б.Д. Цвик, В.Е. Степанов // Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства. – 1980. – № 9. – С. 33 – 36.

4. Мельников, С.В. Планирование эксперимента в исследованиях сельскохозяйственных процессов / С.В. Мельников, В.Р. Алешкин, П.М. Рощин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Ленинград: Колос, 1980. – 168с.

5. Баловнев, В.И. Моделирование процессов взаимодействия со средой рабочих органов дорожно-строительных машин / В.И. Баловнев. – Москва: Машиностроение, 1994. – 432с.

6. Брянский, Ю.А. Взаимодействие пневматических колес с деформируемыми опорными поверхностями / Ю.А. Брянский, Е.Д. Каран. – Москва: ЦНИИТЭстроймаш, 1971. – 71с.

7. Орда, А.Н. Эколого-энергетические основы формирования машинно-тракторных агрегатов: дис. д-ра техн. наук: 05.20.03/ А.Н. Орда. – Минск, 1997. – 269с.

8. Стенд для исследования взаимодействия колес с почвой при статическом и вибродинамическом характере нагружения: пат. Респ. Беларусь, МПК G 01M17/00 / Н.Н. Романюк [и др.]; заявитель Учрежд. Образ. «Белорус. гос. аграр. техн. ун-т. – № u ; заявл. . .06; опубл. . .06// Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2006. – № . – С.

9. Быховский, И.И. Центробежный вибрационный привод строительных и дорожных машин / И.И. Быховский, А.М. Виленкин. – Москва: ЦНИИТЭстроймаш, 1968. – 58с.

10. Научное обоснование технологии получения белково-витаминного концентрата из сока бобовых трав с применением ультрафильтрации: отчет о НИР / БГАТУ; рук. темы К.Ф. Терпиловский. – Минск, 1998. – 82 с. – № ГР 19982469.

MODELOWANIE ODDZIAŁYWANIA GRUNTU NA MASZYNY ROBOCZE

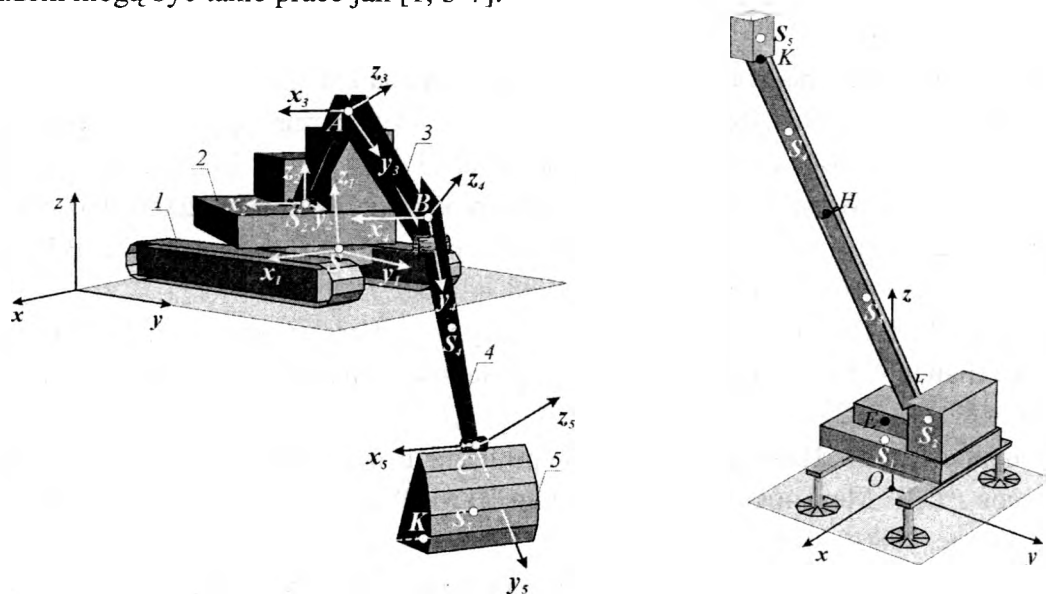
Grabski J., Strzałko J., Pronkevich S.A.

In the paper some remarks concerning mechanical modelling of engineering machine including soil-machine interaction are presented. A more adequate model of ground-excavator interaction than the model presented in the recently published paper is proposed. Analysis of dynamics of a caterpillar model with unilateral soil-caterpillar interaction allows establish a stability region of machine during the operation.

1. Wprowadzenie

Celem pracy jest przedstawienie sposobu modelowania maszyn roboczych z uwzględnieniem wzajemnego oddziaływania podłoża i maszyny.

Modelowanie maszyn roboczych takich jak koparki, żurawie, podnośniki za pomocą układu odpowiednio połączonych ze sobą sztywnych brył (rys. 1) nie jest zagadnieniem nowym; przykładem mogą być takie prace jak [1, 3-7].



Rys. 1 Przykładowe modele maszyn roboczych (koparka, podnośnik koszowy)

W analizowanych w pracach [1, 3, 4, 5] modelach maszyn, złożonych z łańcucha ciał sztywnych, zakładano, że układ spoczywa na sztywnym podłożu. Wpływ podatności podłoża na dynamikę koparki przedstawiony był w pracach [6, 7]. Jednakże, przyjęty w tych pracach model oddziaływania podłoża na maszynę wymaga – naszym zdaniem – pewnej modyfikacji.

Proponowane tu modele oddziaływania grunt-maszyna różnią się tym od używanych w pracach [6, 7], że dwustronne oddziaływanie podłoża na maszynę zostało zastąpione przez oddziaływanie jednostronne. Dzięki temu możliwe było uwzględnienie zmiany charakteru oddziaływania w przypadku odrywania się części powierzchni gaśienic od podłoża.

W tej pracy rozpatrywane są dwa sposoby modelowania oddziaływania gruntu. Pierwszy polega na wprowadzeniu dyskretnych elementów sprężysto tłumiących w miejscach kontaktu sztywnej gaśienicy z podłożem (rys. 2). Taki model oddziaływania jest wykorzystywany przy analizie dynamiki modelu maszyny złożonego ze sztywnych brył.

Drugim modelem gruntu jest ciało sprężysto-plastyczne; taki model jest używany do analizy dynamiki maszyn z wykorzystaniem metody elementów skończonych (systemy ANSYS, LS-DYNA).

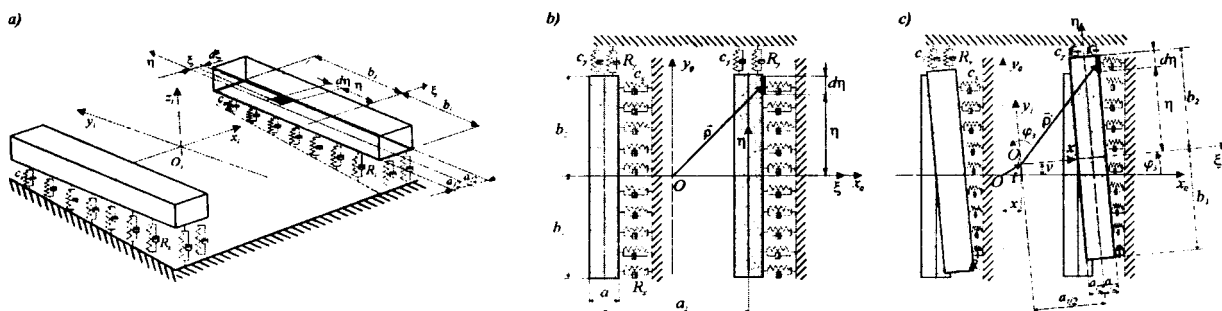
2. Opis modelu złożonego ze sztywnych brył

We wcześniej publikowanych pracach równania ruchu modelu maszyny wyprowadzane były w tradycyjny sposób – "ręcznie". Taka metoda generowania równań dynamiki sprawdza się w przypadku prostych układów, ale przy modelowaniu wieloczłonowych układów przestrzennych prowadzi do licznych błędów. W tej pracy do generowania równań dynamiki wykorzystywany był komputer i oprogramowanie *Mathematica 5.2* [8].

Równania dynamiki modelu złożonego z łańcucha ciał sztywnych były generowane na podstawie równań Lagrange'a. Wszystkie wielkości wektorowe określające ruch układu i wykonywane na nich działania zostały przedstawione w zapisie macierzowym. Do określenia energii kinetycznej, potencjalnej konieczne jest wyznaczenie położenia i prędkości środka masy każdego z ciał układu w zależności od współrzędnych uogólnionych i prędkości uogólnionych. Należy zaznaczyć, że dla nadwozia, wysięgnika, a także łyżki koparki i kosza podnośnika macierze masowych momentów bezwładności – występujące we wzorach na energię kinetyczną ciała – nie są diagonalne.

2.1. Modelowanie oddziaływania gruntu

Jak wspomniano, w pierwszym modelu – w przypadku koparki – gąsienice są traktowane jak ciała sztywne. Przyjęto, że oddziaływanie gruntu jest opisane reologicznym modelem jest Kelvina-Voigta. Przy takim założeniu oddziaływanie podłoża na gąsienice można przedstawić za pomocą elementów sprężysto-tłumiących pokazanych na rys. 2.



Rys. 2 Modelowanie oddziaływania podłoża na gąsienice: a) w kierunku z_1 – prostopadłym do płaszczyzny podłoża; b), c) w płaszczyźnie x_1y_1

Odształcenia elementów sprężysto-tłumiących ($\lambda = [\lambda_x \ \lambda_y \ \lambda_z]^T$), modelujących oddziaływanie gruntu, wyznacza się na podstawie zależności

$$\lambda = \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \mathbf{A}_{1/0}\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho} , \quad (1)$$

przy czym $\boldsymbol{\rho}$ oznacza wektor położenia elementu sprężysto-tłumiącego, $\mathbf{A}_{1/0}$ jest macierzą transformacji współrzędnych. Dla małych kątów obrotu ($\mathbf{A}_{1/0} \cong \boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{I}$) otrzymuje się

$$\lambda \cong \mathbf{r} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\rho} . \quad (2)$$

Energię odkształcenia elementów sprężystych (umieszczonych pod jedną gaśienicą) można wyznaczyć jako

$$V_s = \int_{-b_1}^{b_2} \frac{1}{2} c_x \lambda_x^2 d\eta + \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} c_y \lambda_y^2 d\xi + \int_{-b_1}^{b_2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} c_z \lambda_z^2 d\xi d\eta, \quad (3)$$

gdzie: c_x, c_y, c_z oznaczają współczynniki sztywności elementów sprężystych w kierunkach osi x_1, y_1 i z_1 . Całkowita energia odkształcenia gruntu jest określona (inaczej niż w pracach [6, 7]) wzorem

$$V_s = \frac{1}{12} \left[12ac_y y^2 + (b_1 + b_2)(12c_x x^2 + ac_z(12z^2 - 12(b_1 - b_2)z\varphi_1 + 4(b_1^2 - b_1b_2 + b_2^2)\varphi_1^2 + (3a_1^2 + a^2)\varphi_2^2)) + 12(b_1 - b_2)(b_1 + b_2)c_x x\varphi_3 + \right. \\ \left. + (4(b_1^3 + b_2^3)c_x + a(3a_1^2 + a^2)c_y)\varphi_3^2 \right], \quad (4)$$

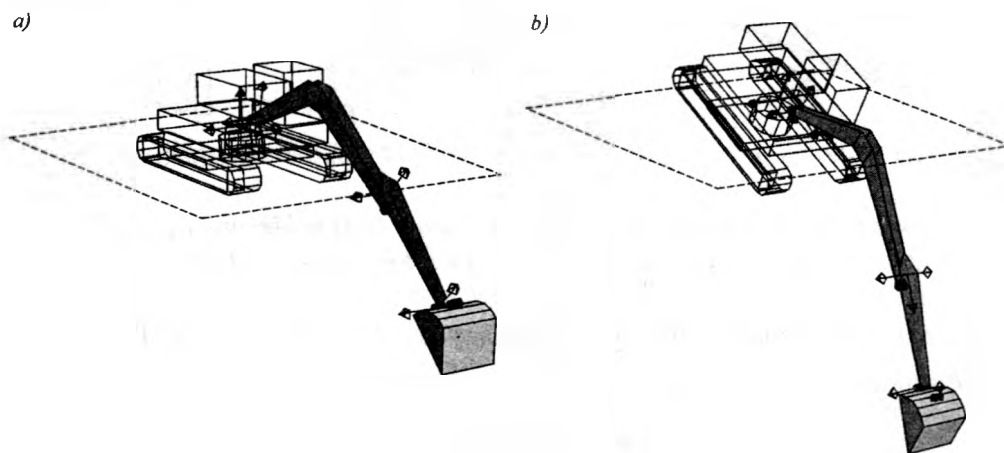
przy czym: x, y i z są współrzędnymi opisującymi ruch środka masy podwozia, φ_1, φ_2 i φ_3 oznaczają kąty obrotu podwozia wokół osi x_1, y_1 i z_1 . Pozostałe wielkości (wymiaru) są zaznaczone na rys. 2.

W podobny sposób wyznaczona została funkcja opisująca dyssypację energii w gruncie.

Różniczkowe równania ruchu były generowane w sposób automatyczny – przez komputer, a następnie rozwiązywane numerycznie, również przy użyciu systemu *Mathematica 5.2*.

2.2. Wyniki rozwiązań numerycznych dla modelu złożonego ze sztywnych brył

Wyniki obliczeń przeprowadzonych dla koparki przy założeniu jednostronnego i dwustronnego oddziaływania podłoża są pokazane na rys. 3. Przedstawione zostały na nim położenia równowagi koparki dla modelu o dwustronnym oddziaływaniu (a) oraz dla modelu o jednostronnym oddziaływaniu podłoża (b). Jak wynika z rysunku dobór modelu ma istotny wpływ na otrzymane rezultaty.



Rys. 3 Porównanie wyników obliczeń dla modelu podłoża:
a) o dwustronnym oddziaływaniu, b) o jednostronnym oddziaływaniu

Przykładowe wyniki rozwiązania zadania polegającego na analizie ruchu koparki w przypadku sterowania ruchem roboczym łyżki są pokazane na rys. 4. Zostały na nim przedstawione obszary kontaktu powierzchni gaśienic (zaznaczone jaśniejszym kolorem) oraz

obszary, które są uniesione nad powierzchnią gruntu (ciemniejsze) w przypadku, gdy osprzęt koparki wraz z urobkiem obraca się względem podwozia. Zamieszczone wyniki dotyczą przypadku, w którym sterowanie kątem obrotu nadwozia koparki (kątem α) odbywało się według następującego programu:

$$\alpha = 0.1116t^2$$

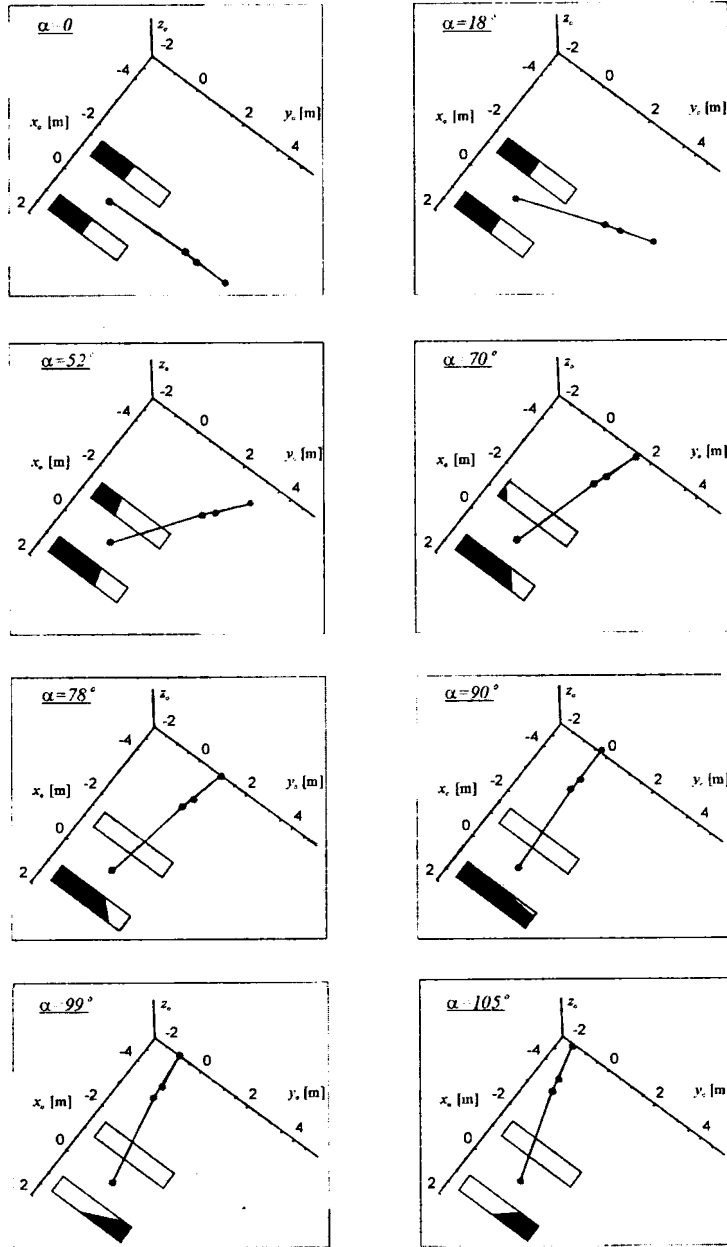
$$\alpha = 0.6977 + 0.558(t - 2.5)$$

$$\alpha = 1.3083 + 0.558(t - 3.6) - 0.1487(t - 3.6)^2$$

$$\text{dla } t \in [0, 2.5]$$

$$\text{dla } t \in (2.5, 3.6]$$

$$\text{dla } t \in (3.6, 5.5]$$



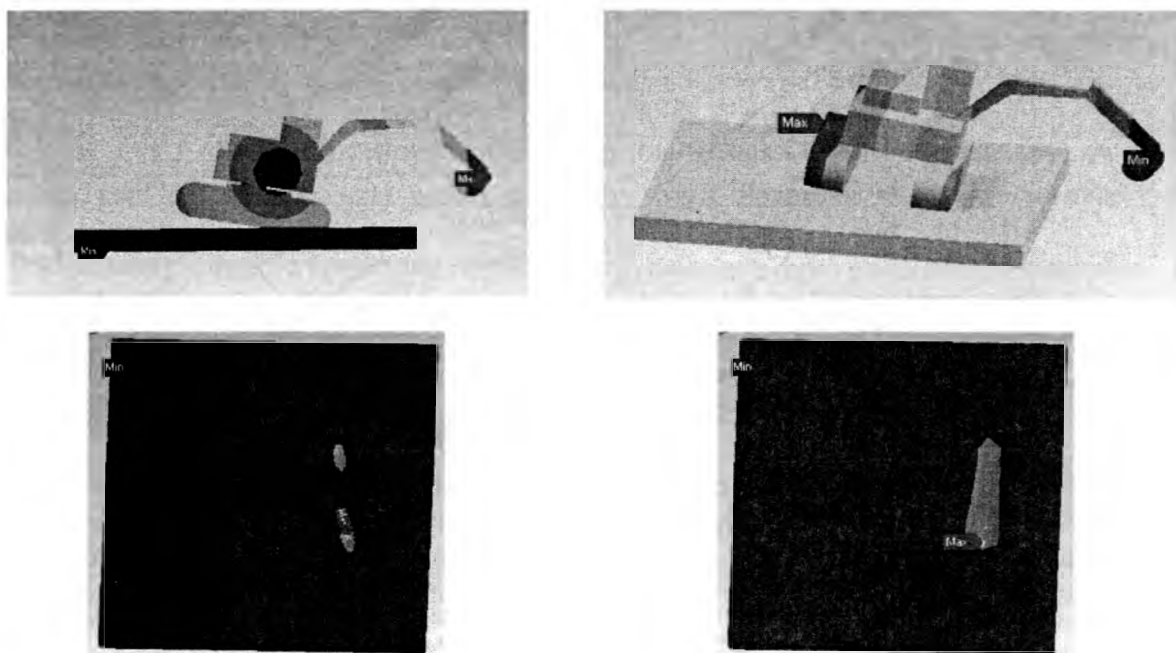
Rys. 4 Zmiany wielkości czynnej i biernej powierzchni gąsienic w kolejnych fazach obrotu koparki (powierzchnia kontaktu jest na rysunku jaśniejsza)

Z rysunku wynika, że dla $\alpha=90^\circ$ prawie cała powierzchnia jednej gaśienicy odrywa się od podłoża.

3. Model MES

Oddziaływanie pomiędzy maszyną a podłożem można określać wykorzystując metodę elementów skończonych. Model rozpatrywanej model maszyny został zbudowany w systemie ANSYS Workbench 9. Analizowane były dwa przypadki: model maszyny złożony ze sztywnych brył oraz sprężysty model maszyny. W obu przypadkach podłoże traktowano jako sprężyste.

Wyniki rozwiązań numerycznych otrzymanych z metody elementów skończonych dla maszyny złożonej ze sztywnych ciał zostały pokazane na rys. 5. Otrzymane rezultaty odpowiadają wynikom otrzymanym z rozwiązania analitycznego.



Rys. 5 Wyniki obliczeń z programu ANSYS dla sprężystego modelu podłoża i nieodkształcalnego modelu koparki

4. Wnioski

Przedstawione w pracy uwagi dotyczące modelowania koparki i opisu oddziaływania podłoża na gaśienice oraz otrzymane rezultaty obliczeń numerycznych pozwalają na następujące stwierdzenia:

- matematyczny model oddziaływania podłoża na gaśienice, wykorzystywany w pracach [6, 7] do analizy dynamiki koparki, jest niewłaściwy – jego najistotniejszą wadą jest dwustronne oddziaływanie,
- zaproponowane alternatywne sposoby modelowania oddziaływania gruntu są pozbawione podstawowej wady krytykowanego modelu – dwustronne oddziaływanie podłoża na gaśienicę zostaje zastąpione przez oddziaływanie jednostronne,
- rezultaty otrzymane dla zaproponowanego modelu znacząco różnią się od tych, które uzyskuje się dla modelu o dwustronnym oddziaływaniu,

- przedstawione rezultaty obliczeń numerycznych są ważnym argumentem przeciwko stosowaniu modelu o dwustronnym oddziaływaniu pomiędzy podłożem a gaśienicą.

Literatura

1. Grabski J. Analiza dynamiki maszyn roboczych z wykorzystaniem macierzowych metod mechaniki. Zeszyty Naukowe Nr 804, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej 1998.
2. Kane T.R., Levinson D.A. A Method for Testing Numerical Integrations of Equations of Motion of Mechanical Systems. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 55 (1988), s. 711-715.
3. Koivo A.J., Thoma M., Kocaoglan E., Andrade-Cetto J. Modeling and control of excavator during digging operation. *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 9, No. 1, 1996.
4. Strzałko J. Energetyczne kryterium poprawności równań ruchu i weryfikacja ich rozwiązań w zagadnieniach dynamiki maszyn. Zeszyty Naukowe Nr 795, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej 1998.
5. Strzałko J., Grabski J. Dynamic analysis of model with time-varying mass. *Acta Mechanica* 112/1-4, 1995, s. 173-186.
6. Towarek Z. Dynamics of a single-bucket excavator on a deformable soil foundation during the digging of ground. *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume 45, Issues 6-7, June-July 2003, 1053-1076.
7. Towarek Z. Dynamics of a Single Bucket Excavator During the Rotation of the Body with Regard to Flexibility of a Soil Foundation. *Machine Dynamics Problems*, 2005, Vol. 29, No 3, 73-90.
8. Wolfram S. *The Mathematica Book*, 4th ed. Wolfram Media / Cambridge University Press, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ

А.В. ЧИГАРЕВУ – 65!	3
Высоцкий М.С., Альгин В.Б. Механика — основа для разработки конкурентоспособных машин и их компонентов	5
Шемякин Е. И. Проблемы прочности твердых тел и горных пород	14
Ивлев Д.Д. Геометрические представления в механике сплошной среды	34
Плескачевский Ю. М., Кубенко В. Д., Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Динамические нагружения трёхслойного стержня, скрепленного с упругим безынерционным основанием	39
Каминский Э., Чигарев А.В. Идентификация неоднородных сред на основе нейросетевого моделирования	47
Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины со свободным внутренним отверстием или жесткой шайбой.....	60
Альгин В.Б., Дробышевская О.В., Ломоносов С.В., Максимов С.А., Сорочан В.М., Широков Б.Н. Кинематический и динамический расчет трансмиссионных систем на основе регулярных структурных компонентов	67
Карпович С.Е., Скачко Д.Г., Голдын Л., Алехнович Г.Н. Компьютерная модель интерактивного исследования динамических систем	78
Босяков С.М., Журавков М.А., Медведев Д.Г. Функции пользователя для формулировкисчетных уравнений теории упругостив различных системах ортогональных координат	83
Куликов И.С. О прогнозировании ресурса активных зон ядерных реакторов на стадии проектирования	87
Крушевский А. Е. Биомеханика одноопорного протеза	91
Колешко В.М., Дейнак Д.А., Хмурович Н.В. Электронный язык на поверхностных акустических волнах	104
Кравчук А.С. О расчете контактных напряжений с учетом трения	110
Михасев Г. И. О возможных локализованных формах собственных колебаний длинных предварительно напряженных неоднородных цилиндрических оболочек	117
Поленов В.С., Чигарев А.В. О распространении упругих волн в неоднородной пористой среде	123

Немцов В.Б., Борисевич С.А. Использование общих теорем динамики для отыскания силы давления воздуха на кроны деревьев	128
Семыкина Т.Д., Лопырёва Е.В. Расчёт трансверсально изотропных оболочек	134
Сильвестров В.В., Смирнов А.В. Первая основная краевая задача теории упругости для двулистного кольца	137
Каминьски Ян Р.¹, Малов А.², Максимов И.² Прогнозирование эрозионных процессов с учетом неггет-эффекта	145
Чигарев Ю.В., Романюк Н.Н., Рутковский И.Г. Моделирование динамического взаимодействия пневмоколесных движителей с почвой в виде одно- и двухмассовой колебательной системы	152
Ботогова М.Г. Уравнения технической теории движения слоистых композитных оболочек с переменными параметрами	163
Яровая А. В. Деформирование трехслойного сжимаемого стержня на упругом основании	168
Вихренко В.С., Кандраценка А.В., Шварцер Д. Внутримолекулярное перераспределение колебательной энергии	175
Буренин А.А., Рагозина В.Е. Лучевой метод построения приближенных решений за поверхностями разрывов деформаций	182
Хвисевич В. М. К решению плоской краевой задачи квазистационарной термоупругости для внешней и многосвязной областей на основе теории потенциала.....	197
Локтионов А.В. Теоретические основы расчета кинематических параметров режущего инструмента исполнительных механизмов и роботов-манипуляторов с тремя степенями подвижности	201
Романчак В. М., Серенков П. С. Информационное моделирование данных производственных процессов как задача аппроксимации функции связи	210
Чигарев Ю.В., Романюк Н.Н. Метод подобия в оценке динамического воздействия на почву сельскохозяйственных движителей	217
Grabski J., Strzałko J., Pronkevich S.A. Modelowanie oddziaływania gruntu na maszyny robocze	226

Научное издание

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

*Межведомственный сборник
научно-методических статей*

Выпуск 21

Ответственный за выпуск М. Г. Ботогова

Подписано в печать 29.12.2006 г.

Формат 60x84/8. Бумага офсетная.

Гарнитура «Times». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 25,5. Уч.-изд. л. 26,6. Тираж 100 экз. Заказ 1089.

Издатель Белорусский национальный технический университет.

Лицензия № 02330/0131627 от 01.04.2004 г.

220013, г. Минск, проспект Независимости, 65.

Отпечатано в типографии УП «Промбытсервис».

ЛП № 02330 / 0148738 от 30.04.2004 г.

220114, г. Минск, ул. Ф. Скорины, д. 14, к. 203.

Тел.: +375 /17 / 237-62-89, +375 /17 / 267-27-67.