

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАКРОТРЕЩИН В МАССИВАХ ГОРНЫХ ПОРОД

Журавков М.А., Чумак Н.Г.

*In this paper the shape optimization problem of laminate discontinued rocks is considered. The paper presents some possible formulations of optimal structural design problem based on probabilistic approaches due to possible incompleteness of information concerning crack size, location and orientation. Using these approaches optimal designs for laminate rocks approximated to the beams with surface and internal cracks under fracture mechanics constraints have been found.*

### 1. Введение

Рассмотрим задачу, заключающуюся в изучении различных ситуаций появления и последующего распространения поверхностных и внутренних макротрещин в массивах горных пород. Определяющим моментом при построении методики решения данной задачи является то, что, вследствие специфики среды распространения трещины, ее *положение трещины, размер и тип (открытые трещины, трещины сдвига и т.д.) предполагаются статистически неопределимыми (недетерминированными) параметрами*. То есть при выполнении исследований учитывается факт неполноты исходной информации относительно основных факторов, характеризующих макротрещину. Поэтому при рассмотрении сформулированного класса задач будем пользоваться подходами, основанными на дополнении детерминированных подходов вероятностными методами [1, 2].

В данной статье построим модельные задачи для условий слоистых массивов горных пород в постановке плоско-деформированного состояния. Такие модели имеют широкий диапазон применения и могут использоваться для изучения различных важных прикладных задач геомеханики [3]. К ним относятся, например, проблемы исследования устойчивости кровли подготовительных и капитальных выработок; условий появлений макротрещин в непосредственной и основной кровле очистных выработок; задачи исследования состояния породных образований в зоне трещиноватости, изучения состояния слоев в зоне плавного прогиба и состояния водозащитной толщи на предмет появления в них макротрещин и т.д.

Весьма распространенным для упомянутых типов прикладных задач является использование в качестве модельных таких конструкций, как балки и плиты. Например, при изучении процессов расслоения и разрушения кровли очистной выработки для пластовых месторождений, одной из наиболее распространенной модельной задачей является исследование процессов деформирования различных балочных конструкций под воздействием широкого класса внешних нагрузок и при разнообразных граничных условиях.

### 2. Формулировка модельных задач

Сформулируем механико-математическую постановку общей модельной задачи. В последующих разделах рассмотрим примеры некоторых классов модельных геомеханических задач, базирующихся на общей механико-математической формулировке.

Как указывалось ранее, рассматриваем модельные задачи в двухмерной постановке. Исследуем напряженно-деформируемое состояние (НДС) твердого деформируемого двумерного тела, занимающего область  $V$  и находящегося под воздействием внешнего (по отношению к рассматриваемому элементу) нагружения. НДС рассматриваемого тела описывается стандартной системой разрешающих уравнений теории упругости.

Пусть поведение материала рассматриваемого деформируемого тела можно описать как хрупкое или квазихрупкое, и пусть в теле имеется макротрещина длиной  $l$ . Трещина предполагается прямолинейной и малой по сравнению с характерным размером  $L$  тела, т.е.  $l \ll L$ . Координаты центра трещины обозначим как  $(x_c, y_c) \in V$ .

Рассмотрим ситуацию, когда координаты центра трещины (т.е. положение трещины в теле), угол наклона трещины по отношению к оси  $oX$  в глобальной системе координат, длина трещины или совокупность всех или некоторых из этих параметров являются неизвестными заранее. Поэтому для выполнения полного анализа НДС деформируемого тела необходимо рассмотреть различные случаи расположения трещины и значений ее основных параметров.

Решив соответствующую задачу теории упругости для деформируемого тела с трещиной и определив НДС в нем, можно выполнить оценку коэффициентов интенсивности напряжений  $K_1$  и  $K_2$  в соответствии со следующими асимптотическими представлениями [4].

$$K_1 = \sigma_n \sqrt{2\pi r} + O(1), \quad K_2 = \sigma_\tau \sqrt{2\pi r} + O(1), \quad (2.1)$$

где  $\sigma_n$  и  $\sigma_\tau$  – соответственно нормальная и касательная компоненты вектора напряжений в точке, лежащей на оси трещины и находящейся около ее вершины (кончика) на расстоянии  $r$ . Оси  $\tau$  и  $n$  являются осями локальной ортогональной системы координат, где ось  $\tau$  параллельна оси трещины.

Как известно, условия, при выполнении которых трещина не распространяется, могут быть представлены в следующем виде:

$$K_i \leq K_{iC}, \quad (i=1,2) \quad (2.2)$$

для случаев трещины отрыва ( $i=1$ ) и трещины сдвига ( $i=2$ ), и

$$\frac{K_1^2 + K_2^2}{E} \leq G_C \quad (2.3)$$

для случаев сложно-напряженного состояния, когда общее напряженное состояние можно представить как композицию напряжений сдвига и растяжения.

Величины  $K_{iC}$  и  $G_C$  являются заданными прочностными характеристиками материала.

Если размеры трещины являются достаточно малыми по сравнению с характерными размерами тела и трещина расположена внутри тела (не выходит на поверхность), то для коэффициентов интенсивности напряжений можно использовать следующие выражения [5, 6]:

$$K_1 = \sigma_n^0 \sqrt{\pi l / 2}, \quad K_2 = \sigma_\tau^0 \sqrt{\pi l / 2}, \quad (2.4)$$

где  $\sigma_n^0, \sigma_\tau^0$  – начальное напряженное состояние в теле без трещины.

В случае, когда трещина выходит на поверхность тела и расположена нормально к поверхности тела (наиболее распространенный на практике случай), выражение для коэффициента  $K_1$  имеет вид [5, 6]:

$$K_1 = 1.12 \sigma_n^0 \sqrt{\pi l}. \quad (2.5)$$

*Ведем следующее дополнительное положение* (являющееся весьма распространенным на практике, но которое существенно осложняет модельную задачу): *один из определяющих параметров трещины рассматриваем как случайную переменную  $\xi$  с известной функцией плотности распределения  $f(\xi)$ , в то время как другие параметры трещины считаем заданными или определяемыми.*

Методику решения сформулированных модельных задач будем строить, основываясь на результатах исследований, изложенных в работе [7].

Предположим, что форма деформируемого тела описывается функцией  $h$  пространственных координат, которая принимается как неизвестная проектируемая переменная и которую рассматриваем как тип трещины  $i$ . Введем малый положительный параметр  $\varepsilon$  и в соответствии с этим параметром преобразуем значение коэффициента

интенсивности напряжений следующим образом:  $K_{i\varepsilon} = K_{iC} - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \geq 0$  [8, 9]. Тогда в терминах механики разрушения можно записать:

$$K_i(\xi, h) = K_{i\varepsilon}. \quad (2.6)$$

В общем случае коэффициент интенсивности  $K_i(\xi, h)$  зависит непосредственно (через зависимость параметров трещины и решение уравнений теорий упругости) от случайной переменной  $\xi$ . В частных случаях представляется возможным упростить зависимость  $K_i$  от переменной  $\xi$  и выразить формулу для  $K_i$  в некотором упрощенном виде. Возможная функция плотности распределения переменной  $\xi$  позволяет в принципе определить моменты случайной величины  $K_i$  и в частности количественные показатели их математического ожидания и дисперсии. Это в свою очередь позволяет проконтролировать возможные нарушения искомой величины (2.6) и решить оптимизационную задачу, состоящую в определении функции  $h$ , удовлетворяющей системе неравенств:

$$K_i = E(K_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_i(\xi, h) f(\xi) d\xi \leq K_{i\varepsilon}, \quad (2.7)$$

$$D(K_i) = E\left((K_i - K_i)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (K(\xi, h) - K)^2 f(\xi) d\xi \leq \delta, \quad (2.8)$$

и минимизирующей функционал  $V(h)$  (объем или вес структурного элемента), т.е.:

$$V = V(h) = \int_{\Omega} \gamma d\Omega \rightarrow \min_h. \quad (2.9)$$

В выражениях (2.7) и (2.8)  $E$  и  $D$  обозначают соответственно математическое ожидание и дисперсию для случайной переменной, а  $\delta$  обозначает достаточно малое число, которое считается заданным. Соотношение механики разрушения (2.6) должно удовлетворяться в «среднем» и отклонение значения  $K_i - K_{i\varepsilon}$  должно быть не больше достаточно малой выбранной величины.

*Замечание.* Следует отметить, что понятия «малая величина» и «большая величина» являются относительными и должны обязательно рассматриваться по отношению к размерностям основных параметров и величин рассматриваемых задач [3].

Приведенная формулировка оптимизационной задачи является достаточно общей. **Уточним общую оптимизационную задачу с учетом рассматриваемого класса прикладных задач** [7].

Примем дополнительно, что  $K_i(\xi, h)$  является монотонной функцией от  $\xi$  и уравнение  $K_i(\xi, h) = K_0$  имеет единственное решение  $\xi_0 = \xi_0(h, K_0)$  для фиксированных значений  $h$  и  $K_0$ . Вероятность  $P$  выполнения неравенства  $K_i \leq K_0$  может быть оценена следующим соотношением:

$$P(K_i \leq K_0) = P(\xi \leq \xi_0) = \int_0^{\xi_0} f(\xi) d\xi. \quad (2.10)$$

Тогда, вероятностное выражение механики разрушения, описывающее состояние трещины, когда ее длина не увеличивается (трещина «не растет»), может быть записано в следующей форме:

$$P(K_i \leq K_{i\varepsilon}) = \int_0^{\xi_\varepsilon} f(\xi) d\xi \geq 1 - \nu, \quad (2.11)$$

где  $K_{i\varepsilon} = K_{iC} - \varepsilon$ ;  $\nu$  – достаточно малая положительная величина;  $\xi_\varepsilon$  – решение уравнения вида:

$$K_i(\xi, h) = K_{i\varepsilon}. \quad (2.12)$$

Итак, оптимизационная задача, базирующаяся на методах механики разрушения и вероятностном приближении, может быть сформулирована как задача минимизации функционала (2.9) при ограничении (2.11), взяв в расчет уравнения теории упругости, описывающие состояние рассматриваемых структурных элементов [3].

### 3. Исследование НДС кровли протяженных подземных выработок с макротрещинами

Используем описанную общую процедуру построения оптимизационной задачи для изучения НДС кровли протяженной выработки в случае наличия в ней макротрещины. Задачи будем решать как статистически определенные: силовая нагрузка является известной заранее. Например, может быть известны заранее изгибающие моменты  $M$  и перерезывающие силы  $Q$  от нагрузки, действующей на слой в кровле.

Пусть распределение напряжений по толщине слоя в кровле выработки не зависит от свойств материала слоя. Для оценки коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах (на кончиках) внутренних и поверхностных трещин введем в рассмотрение следующие дополнительные ограничения:

- внутренние трещины появляются далеко от граничных поверхностей слоя (рассматриваемого как балка);
- длины поверхностных трещин намного меньше, чем радиус кривизны поверхности.

#### 3.1. Определение толщины слоя в случае, когда длина трещины рассматривается как случайная переменная

А. Рассматривается слой (балка), находящийся под воздействием поперечной нагрузки, в случае наличия в нем *трещины, выходящей на поверхность слоя*.

В модельной задаче в качестве объекта исследований выбираем балку длиной  $L$ , расположенную вдоль оси  $x$  ( $0 \leq x \leq L$ ), имеющей прямоугольное поперечное сечение высотой  $h=h(x)$  и постоянной ширины  $b$ . Нагрузки, действующие на слой-балку, представим как функции изгибающего момента  $M(x)$  и перерезывающей силы  $Q(x)$  в поперечном сечении балки и будем считать, что они не зависят от упругих свойств, а форма поперечного сечения считается известной для  $0 \leq x \leq L$ .

Максимальные растягивающие напряжения приводят к растяжению поверхности балки для любого поперечного сечения. Введем координату  $\zeta$ , которая определяет расстояние от центра поперечного сечения до поверхности балки. Тогда данная координата изменяется в интервале  $-h/2 \leq \zeta \leq h/2$ , а поверхность определяется как  $|\zeta| = h(x)/2$ . Значение максимальных напряжений равно:  $\sigma_x = 6|M(x)|/(bh^2(x))$ .

Коэффициент интенсивности напряжений  $K_1$  для поверхностной трещины в любом поперечном сечении может быть оценен по формуле [6, 9]:

$$K_1 = 1.12\sigma_x\sqrt{\pi\xi} = \varphi(x)\sqrt{\xi}, \quad (3.1)$$

где, в соответствии с условиями задачи,  $\varphi(x) = k_1|M(x)|/(bh^2(x))$ ,  $k_1 = 6.72\sqrt{\pi}$ .

Длина поверхностной трещины  $\xi$  является случайной переменной, характеризуемой известной функцией плотности распределения  $f(\xi)$ .

Для коэффициента интенсивности напряжений  $K_1$  выражения для математического ожидания  $E(K_1)$  и дисперсии  $D(K_1)$  имеют вид:

$$E(K_1) = \int_0^{+\infty} K_1 f(\xi) d\xi = \varphi(x)E(\sqrt{\xi}), \quad (3.2)$$

$$D(K_1) = \int_0^{+\infty} (K_1 - E(K_1))^2 f(\xi) d\xi = \varphi^2(x) D(\sqrt{\xi}). \quad (3.3)$$

Используя выражения (3.1) - (3.3), уравнения (2.7) и (2.8) могут быть представлены в следующей форме:

$$h(x) \geq h_E(x) \equiv \left[ \frac{k_1 |M(x)|}{b K_{1\varepsilon}} E(\sqrt{\xi}) \right]^{1/2}, \quad (3.4)$$

$$h(x) \geq h_D(x) \equiv \left[ \frac{k_1 |M(x)|}{b} \right]^{1/2} \left[ \frac{D(\sqrt{\xi})}{\delta} \right]^{1/4}. \quad (3.5)$$

Здесь, согласно введенным обозначениям,  $K_{1\varepsilon} = K_{1c} - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр.

Задача оптимизации состоит в определении допустимого распределения толщины слоя при условии минимума его объема при выполнении прочностных ограничений (3.4) и (3.5).

Если взять в расчет условие геометрического ограничения для распределения толщины слоя (например, по условию прочности)  $h(x) \geq h_{\min}(x)$ , тогда *решение задачи определения оптимальной толщины слоя в приближении последнего балкой по условию отсутствия дальнейшего роста имеющейся в нем трещины, выходящей на поверхность слоя*, может быть записано следующим образом:

$$h(x) = \max \{ h_{\min}(x), h_E(x), h_D(x) \}. \quad (3.8)$$

**Пример 1.** В качестве примера рассмотрим слой (балку) с макротрещиной, выходящей на поверхность. Длина балки  $L=100$  м, ширина  $b=1.5$  м и высота  $h(x)$ . Балка находится под воздействием распределенной нагрузки интенсивности  $q=1$ кН/м, сосредоточенной силы  $F=50$  кН и момента  $M=5$  кНм (рис.1).

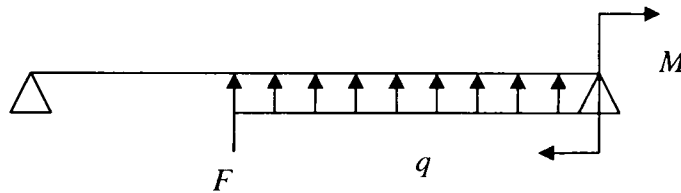


Рис.1. Условная схема действующей на слой нагрузки (пример 1)

Для сформулированных условий определим высоту слоя, при условии, что имеющаяся в нем макротрещина, выходящая на граничную поверхность, не будет распространяться. Рассмотрим такие горно-геологические условия, когда толщина слоев  $h(x)$  изменяется в пределах  $0.3\text{м} < h(x) < 0.5\text{м}$ .

Общее выражение для изгибающего момента  $M(x)$  для заданных условий нагружения имеет вид:

$$M(x) = R_A H_1(x) + P H_1(x-a) + q H_2(x-a) - M H_0(x-L) + R_B H_1(x-L),$$

где  $R_A, R_B$  – реакции опор на концах балки;  $H_n(x) = \frac{x^n}{n!}$  – семейство функций Хэвисайда; сосредоточенная сила  $F$  приложена на расстоянии  $a$  то начала координат.

Предположим, что функция изменения  $h(x)$  соответствует нормальному закону распределения случайной величины с плотностью распределения  $f(\xi) = \frac{1}{0.35\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\xi-0.1}{0.35} \right)^2}$ .

Процедура численного решения задачи строилась, основываясь на формулах (3.1)-(3.8). При этом в выражениях (3.4) и (3.5), в соответствии с условиями рассматриваемого примера, принималось, что  $K_{Ic} = 30 \times 10^6 \text{ МПа} / \sqrt{\text{м}}$ ,  $\delta = K_{Ic}^2 / 4$ . Результаты расчетов представлены в виде графика зависимости толщины слоя (высоты балки)  $h_{\min}(x), h_{\epsilon}(x), h_D(x)$  от местоположения трещины (рис.2).

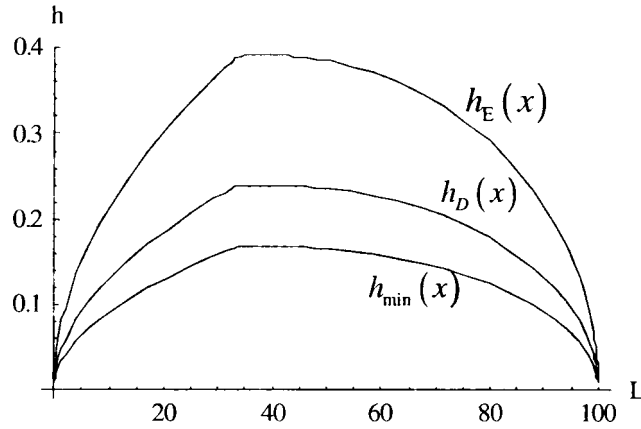


Рис. 2. Графики  $h_{\min}(x), h_{\epsilon}(x), h_D(x)$  для закона нормального распределения случайной величины - длины трещины, выходящей на поверхность слоя

Как следует из графиков (рис.2), для того, чтобы макротрещина, имеющаяся в слое и выходящая на его поверхность, не распространялась при любом ее расположении по длине слоя, необходимо, чтобы высота слоя была не менее  $h(x)=0.4$  м.

**Б.** В качестве следующей рассмотрим оптимизационную задачу для слоя-балки, поведение материала которого соответствует закону хрупкого (квасихрупкого) поведения, с низким предельным значением коэффициента интенсивности срезающих напряжений  $K_{2c}$ . Известно, что срезающие напряжения являются максимальными на нейтральной оси слоя-балки. Будем использовать известное выражение для срезающих напряжений  $\sigma_{xy} = 3|Q(x)|/(2bh(x))$  для получения функциональной зависимости срезающих напряжений от переменных  $b, h$  и  $Q(x)$ .

Пусть в слое имеется *внутренняя трещина сдвига*, расположенная на оси  $x$ . При этом длина трещина намного меньше, чем минимальная толщина слоя-балки  $h_{\min}$ . Кроме того, пусть характеристический размер области срезающих напряжений варьируется для слоя без трещины.

Выражение для коэффициента интенсивности срезающих напряжений для изолированной трещины (тип II) имеет вид:

$$K_2 = \sigma_{xy} \sqrt{\pi \xi} = \varphi(x) \sqrt{\xi}, \quad (3.9)$$

где  $\varphi(x) = k_2 \frac{|Q(x)|}{bh(x)}$ ,  $k_2 = 3\sqrt{\pi}/2$ .

Выполнив оценки, аналогичные при получении выражений (3.2)-(3.5), и введя обозначения

$$h_E(x) \equiv k_2 \frac{|Q(x)| E(\sqrt{\xi})}{b K_{2c}}, \quad h_D(x) \equiv k_2 \frac{|Q(x)| \left[ \frac{D(\sqrt{\xi})}{\delta} \right]^{1/2}}{b}, \quad (3.10)$$

где  $K_{2\varepsilon} = K_{2C} - \varepsilon$ , а  $\varepsilon$  – малый параметр, получим оптимальное решение в форме (3.8), которое минимизирует объем слоя при ограничениях (2.7) и (2.8) и требовании  $h(x) \geq h_{\min}(x)$ ,  $0 \leq x \leq L$ .

**Пример 2.** В качестве примера приведены результаты численного расчета, выполненные при следующих значениях:  $K_{2C} = 10^5 \text{ МПа}/\sqrt{\text{м}}$ ; размеры слоя и нагрузка те же, что и в примере 1: длина  $L=100$  м, ширина  $b=1.5$  м, распределенная нагрузка  $q=1$  кН/м, сосредоточенная сила  $F=50$  кН, момент  $M=5$  кНм.

Выражение для поперечной нагрузки  $Q(x)$  имеет вид:

$$Q(x) = R_A H_0(x) + P H_0(x-a) + q H_1(x-a) + R_B H_0(x-L).$$

Оптимальное решение находится в соответствии с (3.8), где  $h_\varepsilon(x)$  и  $h_D(x)$  определяются в соответствии с (3.10) с учетом (3.9), а  $h_{\min}$  вычисляется по условию прочности.

На рис.3 представлены графики функций  $h_{\min}(x)$ ,  $h_\varepsilon(x)$ ,  $h_D(x)$  для данного случая.

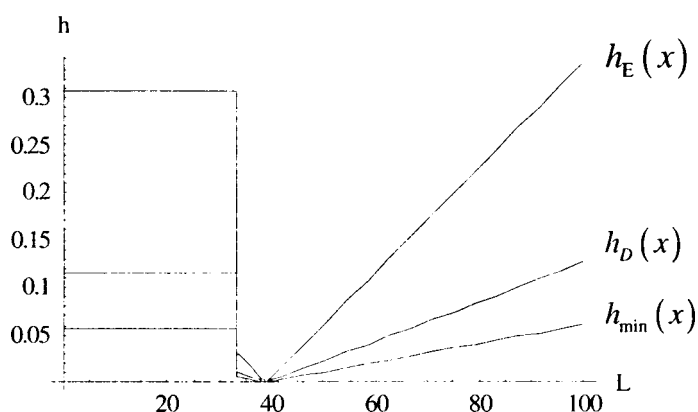


Рис 3. Графики функций  $h_{\min}(x)$ ,  $h_\varepsilon(x)$ ,  $h_D(x)$  для закона нормального распределения случайной величины - длины внутренней трещины (по срезающим усилиям)

Из графиков, представленных на рис.3, следует, что для того, чтобы внутренняя макротрещина не распространялась далее в слое при воздействии срезающих усилий, необходимо, чтобы высота слоя была не менее  $h(x)=0.34$  м.

### 3.2. Определение высоты слоя-балки в случае, когда расположение трещины является случайной величиной

Как и ранее рассматриваем задачу определения оптимальной толщины (высоты) слоя  $h(x)$  ( $0 \leq x \leq L$ ).

Пусть трещина расположена на нейтральной оси слоя и координата ее центра  $\xi$  считается случайной переменной с известной функцией плотности  $f(\xi)$ . Будем считать, что длина  $l$  трещины, которая может появиться в слое, является величиной заданной. Предполагаем, что породы, составляющие слой, обладают низким значением коэффициента интенсивности срезающих напряжений  $K_{2C}$ .

*Замечание.* Такая модельная задача является, например, аналогом такой прикладной задачи, когда требуется определить место появления трещины заданной длины в слое.

Для сформулированной задачи выражение для коэффициента интенсивности напряжений имеет вид [6, 8, 9]:

$$K_2 = K_2(\xi, h(\xi)) = k_2 \sqrt{l} \frac{|Q(\xi)|}{bh(\xi)},$$

где перерезывающая сила  $Q(\xi)$  задана для интервала  $0 \leq \xi \leq L$ .

Для среднего значения и вариации коэффициента  $K_2$  можно записать следующие выражения:

$$E(K_2) = \int_0^L K_2 f(\xi) d\xi \equiv J_1,$$

$$D(K_2) = \int_0^L (K_2 - \int_0^L K_2 f(\xi) d\xi)^2 \cdot f(x) dx = \int_0^L K_2^2 f(x) dx - (\int_0^L K_2 f(x) dx)^2 \equiv J_2 - J_1^2,$$

где  $J_1$  и  $J_2$  – однородные функционалы от  $h$ :

$$J_1(h) = \int_0^L \frac{\psi}{h} f(\xi) d\xi, \quad J_2(h) = \int_0^L \frac{\psi^2}{h^2} f(\xi) d\xi, \quad \psi = \psi(\xi) = k_2 \sqrt{l} \frac{|Q(\xi)|}{b}. \quad (3.11)$$

Соотношения механики разрушения для введенных интегральных функционалов можно записать как неравенства:

$$J_1(h) \leq K_{2\varepsilon}, \quad J_2(h) - J_1^2(h) \leq \delta, \quad (3.12)$$

где  $K_{2\varepsilon} = K_{2c} - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  – малый параметр.

Задача оптимизации заключается в минимизации объемного функционала  $V(h)$  в соответствии с проектируемой переменной  $h$  при условии выполнения (3.12).

Для удобства выполнения дальнейших вычислений заменим неравенства (3.12) равенствами (что усиливает условия ограничения). Используя вспомогательные неизвестные  $\mu_1^2$ ,  $\mu_2^2$  неравенства (3.12) записываются в следующем виде:

$$J_1 - K_{2\varepsilon} + \mu_1^2 = 0, \quad J_2 - J_1^2 - \delta + \mu_2^2 = 0. \quad (3.13)$$

Отметим, что если неравенства (3.12) являются строгими, то  $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$ . Если же в (3.12) имеет место знак равенства, то  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ .

Взяв в расчет (3.13) расширим интеграл  $V(h)$ , используя множители  $\lambda_1, \lambda_2$  [7].

Функция Лагранжа в данном случае имеет вид:

$$L = \int_0^L bh + \lambda_1 (J_1 - K_{2\varepsilon} + \mu_1^2) + \lambda_2 (J_2 - J_1^2 - \delta + \mu_2^2) dx.$$

Варьируя функцию  $L$  по  $h$  и  $\mu_1, \mu_2$ , получаем:

$$\delta V = \delta L = \int_0^L \left[ b + (2\lambda_2 J_1 - \lambda_1) \frac{\psi}{h^2} f - 2\lambda_2 \frac{\psi^2}{h^3} f \right] \delta h dx + 2\lambda_1 \mu_1 \delta \mu_1 + 2\lambda_2 \mu_2 \delta \mu_2. \quad (3.14)$$

Необходимым условием минимизации функционала  $V(h)$  является требование  $\delta V = 0$ . Как следствие этого, необходимые условия оптимальности приобретают вид:

$$h^3 + (2\lambda_2 J_1 - \lambda_1) \frac{\psi}{b} fh - 2\lambda_2 \frac{\psi^2}{b} f = 0, \quad (3.15)$$

$$\lambda_1 \mu_1 = 0; \quad \lambda_2 \mu_2 = 0. \quad (3.16)$$

Как видно, вычисление второго коэффициента в условии оптимальности (3.15), зависит от величины  $J_1$ , что соответствует экстремальному значению. Таким образом, решение уравнения (3.15) зависит от неизвестных параметров  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\beta$  ( $\beta = J_1$ ), т.е.  $h = h(x, \lambda_1, \lambda_2, \beta)$ . В свою очередь параметр  $\beta$  определяется из следующего условия:

$$\int_0^L \frac{\psi f}{h(x, \lambda_1, \lambda_2, \beta)} dx = \beta. \quad (3.17)$$



Величины  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  определяются из решения уравнений (3.13) и (3.16). Условия (3.16) подразумевают, что при неактивных ограничениях (принуждениях)  $\mu_i \neq 0$ . Соответствующие переменные Лагранжа  $\lambda_i$  должны быть равны нулю, и, следовательно, соответствующие ограничения могут быть проигнорированы при всех последующих перемещениях. Однако, если  $\lambda_i \neq 0$ , то  $\mu_i = 0$  и индекс ограничения "i" преобразуется в "активный".

Для сохранения краткости рассмотрим только случай, в котором первое ограничение в (4.3) является активным, а второе – неактивным. То есть  $\mu_1 = 0$ ,  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\mu_2 \neq 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ . В этом случае задача оптимизации решается с помощью системы уравнений, полученных из условий (3.13) и (3.15):

$$\begin{cases} h^2 = \lambda_1 \frac{\psi}{b} f \\ \int_0^L \frac{\psi}{h} f dx = K_{2\varepsilon} \end{cases}; \quad h^2 = \lambda_1 \frac{k_2 \sqrt{l} |Q|}{b^2} f; \quad \frac{k_2 \sqrt{l}}{b} \int_0^L \frac{|Q| f}{h} dx = K_{2\varepsilon}; \quad \frac{k_2 \sqrt{l}}{b} \int_0^L \frac{|Q| f b}{\sqrt{\lambda_1 k_2 \sqrt{l} Q f}} dx = K_{2\varepsilon}.$$

Введем обозначение:  $\int_0^L \sqrt{|Q| f} dx = \alpha_1$ . Тогда:

$$\frac{\sqrt{k_2 \sqrt{l}}}{\sqrt{\lambda_1}} \alpha_1 = K_{2\varepsilon}; \quad \sqrt{\lambda_1} = \frac{\sqrt{k_2 \sqrt{l} \alpha}}{K_{2\varepsilon}}; \quad h = \sqrt{\lambda_1 \frac{\psi}{b} f}; \quad h = \frac{\sqrt{k_2 \sqrt{l} \alpha}}{K_{2\varepsilon}} \cdot \sqrt{\frac{k_2 \sqrt{l} |Q| f}{b^2}} = \frac{k_2 \sqrt{l} \alpha}{K_{2\varepsilon} b} \sqrt{|Q| f}.$$

В результате, решение оптимизационной задачи имеет такой вид:

$$h_* = \frac{k_2 \sqrt{l} \alpha_1}{K_{2\varepsilon} b} \sqrt{|Q| f}, \quad V_* = \frac{k_2 \sqrt{l} \alpha_1^2}{K_{2\varepsilon}}. \quad (3.18)$$

Значения (3.18) реализуют точное равенство в первом неравенстве (3.12) ( $\mu_1 = 0$ ,  $\lambda_1 \neq 0$ ). Подставим распределение толщины (мощности) (3.18) во второе неравенство (3.12) для получения условия относительно параметров задачи, соответствующих рассматриваемому случаю:

$$J_2 - J_1^2 \leq \delta; \quad \int_0^L \frac{\psi^2}{h^2} f dx \leq \delta + \left( \int_0^L \frac{\psi}{h} f dx \right)^2; \quad \int_0^L \frac{(k_2 \sqrt{l} |Q|)^2 b^2 K_{2\varepsilon}^2}{k_2^2 \sqrt{l}^2 \alpha_1^2 b^2 |Q| f} f dx \leq \delta + \left( \int_0^L \frac{k_2 \sqrt{l} |Q| b K_{2\varepsilon}}{k_2 \sqrt{l} \alpha_1 b \sqrt{|Q| f}} f dx \right)^2;$$

$$\int_0^L \frac{|Q|}{\alpha_1^2} dx \leq \frac{\delta}{K_{2\varepsilon}^2} + \left( \int_0^L \frac{\sqrt{|Q| f}}{\alpha_1} dx \right)^2; \quad \int_0^L |Q| dx \leq \frac{\delta}{K_{2\varepsilon}^2} \alpha_1^2 + \alpha_1^2.$$

В результате получим:

$$\alpha_2 \leq \left( 1 + \frac{\delta}{K_{2\varepsilon}^2} \right) \alpha_1^2, \quad \alpha_2 \equiv \int_0^L |Q| dx. \quad (3.19)$$

Неравенство (3.19) является дополнительным условием на параметры задачи.

**Пример 3.** В модельной задаче для трещины, расположенной на нейтральной оси слоя, считаем, что координата ее центра  $\xi$  является случайной переменной, распределенной по нормальному закону с функцией плотности распределения  $f(\xi) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\xi-50}{30} \right)^2}$ . При расчете принимаем, что длина трещины, которая может появиться в слое, является заданной

$l=0.1$  м. Вид решения оптимизационной задачи в соответствии с формулами данного пункта, представлен на рис.4.

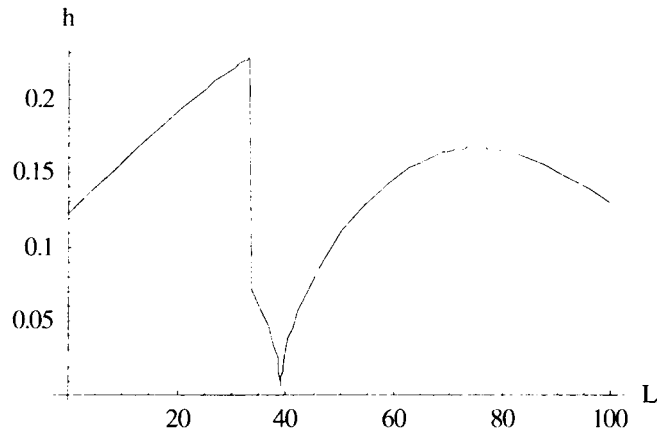


Рис. 4. График  $h(x)$  для закона нормального распределения случайной величины - положения трещины (по срезающим усилиям)

Из рис.4 следует, что для того, чтобы макротрещина не распространялась при случайном ее расположении по длине слоя и при заданном нагружении, необходимо, чтобы высота слоя также была не менее  $h(x)=0.23$  м.

#### 4. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от случайной переменной

А. Рассмотрим ситуацию, когда коэффициент интенсивности напряжений характеризуется монотонной зависимостью от случайной переменной. Пусть балка длиной  $L$ , главная ось которой совмещена с осью  $x$  ( $0 \leq x \leq L$ ), имеет переменное поперечное сечение с высотой  $h = h(x)$  (проектируемая переменная) и постоянную ширину  $b$ . Предположим, что балка нагружена поперечной нагрузкой, и что трещина случайной длины  $\xi$  может появиться на граничных поверхностях балки. Функция плотности для переменной  $\xi$  предполагается известной. Коэффициент  $K_1$  определяется в соответствии с выражением (3.1). Беря в расчет монотонность  $K_1$  от случайной переменной  $\xi$ , получим единственное решение  $\xi_{\epsilon}$  уравнения  $K = K_{1\epsilon}$  для каждого поперечного сечения балки:

$$\xi_{\epsilon} = \frac{b^2 K_{1\epsilon}^2 h^4(x)}{k_1^2 M^2(x)}. \quad (4.1)$$

Для рассматриваемого случая вероятностное неравенство, соответствующее критерию хрупкого разрушения, может быть записано в такой форме:

$$P\{K_1 \leq K_{1\epsilon}\} = P\{\xi \leq \xi_{\epsilon}\} = \int_0^{\xi_{\epsilon}} f(\xi) d\xi \equiv F(\xi_{\epsilon}) \geq 1 - \nu, \quad (4.2)$$

где  $\nu > 0$  – заданная малая величина;  $F$  – функция распределения, определяемая с помощью аналитического выражения или табулируемых данных для многих известных функций  $f$ .

Оптимизационная задача состоит в нахождении такого распределения толщины балки, когда ее объем является минимальным и при выполнении условия прочности (4.2).

Оптимальное решение задачи соответствует случаю выполнения точного равенства в (4.2) и может быть записано следующим образом:

$$h(x) = \left[ \frac{k_1 |M(x)|}{bK_{1\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{4}}(1-\nu), \quad (4.3)$$

где  $S(1-\nu)$  – функция, обратная к функции  $F$ , т.е.  $S(F(\xi)) = \xi$  для любого  $\xi$ .

**Б.** *Рассмотрим общий случай – немонотонной зависимости коэффициента интенсивности напряжений от случайной переменной.* Исследуем оптимизационную задачу для балки с низким значением постоянной материала  $K_{2c}$  и предположим, что координата  $\xi$  центра трещины сдвига является случайной переменной с заданной функцией плотности  $f(\xi)$ . В этом случае для коэффициента интенсивности напряжений  $K_2$  имеет место выражение (3.9). Рассмотрим следующую величину:

$$\Delta K_2 = K_{2\varepsilon} - K_2 = K_{2\varepsilon} - \frac{k_2 |Q(\xi)| \sqrt{l}}{bh(\xi)}. \quad (4.4)$$

Длина трещины  $l$  предполагается заданной. Неравенство  $\Delta K_2 > 0$ , выполнение которого гарантирует отсутствие роста трещины, записывается в таком виде:

$$h \geq \frac{k_2 |Q(\xi)| \sqrt{l}}{bK_{2\varepsilon}} \equiv \chi(x). \quad (4.5)$$

Соответствующая вероятность может быть оценена с помощью интеграла от функции плотности  $f(\xi)$  по интервалу, где  $\Delta K_2 \geq 0$  и записывается так:

$$P\{K_2 \leq K_{2\varepsilon}\} = \int_0^{\infty} g(\xi) f(\xi) d\xi, \quad g = 1 \text{ если } h \geq \chi, \quad g = 0 \text{ если } h < \chi. \quad (4.6)$$

Задача оптимизации состоит в определении функции распределения высоты  $h(x)$  при ограничении вида

$$\int_0^{\infty} g(\xi) f(\xi) d\xi < 1 - \nu \quad (4.7)$$

так, что  $h \geq h_{\min}$  ( $h_{\min}$  – заданная константа) и оптимум функции (2.9) принимает минимальное значение.

*Замечание.* Можно доказать, что для рассматриваемой задачи уменьшение объема материала имеет место для тех областей, где функция плотности  $f$  является малой [7].

**Пример 4.** Численный пример выполнялся для тех же условий, что и в предыдущих примерах. Кроме того, в модельной задаче предполагалось, что  $\xi$  изменяется по закону равномерного распределения на отрезке  $[0, 0.2]$ . Коэффициент интенсивности напряжений  $K_1$  определялся по выражению (3.1).

Задача оптимизации состоит в нахождении такого распределения толщины слоя, чтобы объем балки являлся минимальным при выполнении условия прочности (4.2).

В соответствии с процедурой, приведенной в данном разделе, имеем:

$$K = K_{1\varepsilon} = 30 \times 10^6; \xi_\varepsilon = \frac{b^2 K_{1\varepsilon}^2 h^4(x)}{k_1^2 M^2(x)}.$$

При выбранных исходных данных и для  $\nu = 0.3$  выражение (4.2) приобретает вид:

$$P\{K_1 \leq K_{1\varepsilon}\} = P\{\xi \leq \xi_\varepsilon\} = \int_0^{\xi_\varepsilon} f(\xi) d\xi = F(\xi_\varepsilon) = \frac{\xi}{0.2}.$$

Тогда, выражение, которому должна удовлетворять высота слоя-балки (4.3), в явном виде записывается так:

$$h(x) > \sqrt[4]{0.2(1-\nu)} \sqrt{\frac{k_1 |M(x)|}{b K_\varepsilon}}.$$

График данного выражения представлен на рис.5.

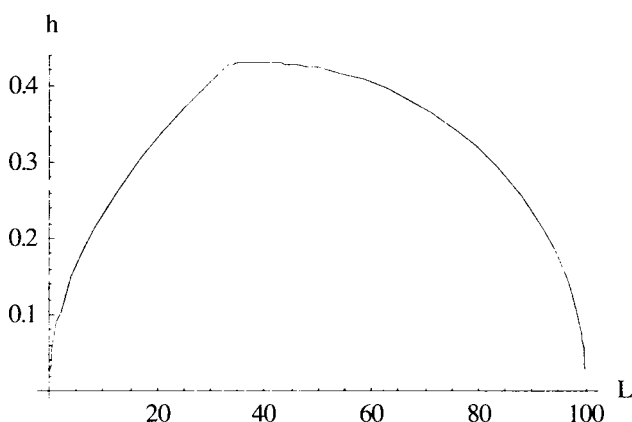


Рис.5. График функции  $h(x)$  при законе равномерного распределения плотности случайной величины – длины трещины

Представленный график показывает, какова должна быть минимальная высота слоя, в случае расположения трещины в соответствующем месте по длине слоя.

## 5. Выводы

В статье представлены исследования, имеющие отношение к задачам структурной оптимизации, которые, в свою очередь, базируются на методах механики хрупкого разрушения. Эффективность метода продемонстрирована на решении оптимизационных задач для деформируемых тел, представляющих собой балки.

Общий подход, описанный в статье, может быть применен и к другим задачам оптимального проектирования различных деформируемых тел, в первую очередь к различным одномерным структурным элементам (стержни, колонны и т.д.) и двумерным тонким стеновым структурным элементам (пластины и оболочки).

Рассмотрены случаи, в которых характеристики трещины зависят только от скалярной случайной переменной. Очевидно, что предложенный подход вероятностных приближений может быть обобщен и применен к более сложным вариантам, когда параметры трещины являются функциями случайного вектора. В этом случае приближение будет так же включать ограничения для корреляционных моментов. И, как для прямого приближения, в

этой ситуации будет использоваться многомерный анализ областей, где  $K_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \leq K_{ic}$  для оценки вероятности того, что трещины не будут далее распространяться.

Следует отметить, что в рассматриваемых случаях внешние нагрузки принимались постоянными. Для упрощения рассмотрены только статически детерминированные варианты, для которых уравнения равновесия могут быть интегрированы отдельно и распределение изгибающего момента  $M$  и перерезывающей силы  $Q$  может быть взято как известные заранее. Более сложные статически неопределимые случаи требуют взятия в расчет уравнения поведения, как дополнительной части сформулированной оптимизационной задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Banichuk N.V. Introduction to Optimization of Structures. Springer-Verlag, New York, 1990.
2. Augusti G., Baratta A., Casciati F. Probabilistic Methods in Structural Engineering. Chapman and Hall. 1984.
3. Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Мн.:БГУ, 2002. 456с.
4. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.:Наука, 1974. 640 с.
5. Hutchinson J.W. A course of nonlinear fracture mechanics. Technical University of Denmark. 1979.
6. Kanninen M.F., Popelar C.H. Advanced Fracture mechanics. Oxford University Press. New York, 1985.
7. Banichuk N.V., Ragnedda F., Serra M. Probabilistic Approaches for optimal beam design based on fracture mechanics // Meccanica. No.1, Vol.34. 1999. Kluwer Academic Publishers. P.29–38.
8. Стрелецкий Н.С. К вопросу установления коэффициентов запаса сооружений // Изв. АН СССР, ОТН, 1, 1947.
9. Bolotin V.V. Statistical methods in structural mechanics. Holden-Day. San Francisco, 1969.