Морская государственная академия им. адм. Ф.Ф. Ушакова, Новороссийск.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕРОВ ДВУТАВРОВЫХ БАЛОК ИЗ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПО ДВУМ ПАРАМЕТРАМ.

Ершов В. И.

This work contains development of solution of the problem of optimization of the weight of beams from Hook's materials and also solution of this problem for nonlinear materials.

Проблем расчета стержневых систем из нелинейно-упругих материалов не существует Если материал не подчиняется закону Гука и имеется диаграмма напряжений $\sigma = f(\varepsilon)$, то решений будет столько, сколько вариантов имеем для функции $f(\varepsilon)$.

Одной из немногих задач нелинейной прикладной механики, подлежащих решению, является задача об отыскании оптимальных по весу параметров составной балки. Для её решения формулируется в общем виде физическая зависимость σ-ε, детализируются вопросы расчета балок из нелинейно-упругих материалов, развивается для физически линейных систем существующая теория оптимального проектирования и распространяются далее основные идеи на вопрос оптимального проектирования составных балок из нелинейно-упругого материала по двум параметрам.

Рассмотрим задачу о чистом изгибе бруса прямоугольного сечения высотой h и шириной b, предполагая справедливой гипотезу плоских сечений и, следовательно, линейный закон измерения деформации по высоте балки. Известно, что эпюра напряжений в поперечном сечении балки при этом совпадает с точностью до некоторого масштабного коэффициента с соответствующей частью диаграммы напряжений. Если фибровая деформация равна $\bar{\varepsilon}$, то эпюра напряжений совпадает с участком диаграммы напряжений от начала координат до $\bar{\varepsilon}$, умножаемом по горизонтали на масштабный коэффициент $h/2\ \bar{\varepsilon}$ [1]. Для произвольной точки сечения с координатой y будем иметь:

$$\varepsilon = 2y\bar{\varepsilon}/h;$$
$$y = \varepsilon h/2\bar{\varepsilon};$$
$$dy = (h/2\bar{\varepsilon})d\varepsilon.$$

Выражение для изгибающего момента

$$M = 2\bar{\varepsilon}\int_0^{h/2}\sigma y dF = 2\int_0^{\bar{\varepsilon}}\sigma b\frac{h^2}{4\bar{\varepsilon}^2}\varepsilon d\varepsilon.$$

Обозначим статический момент диаграммы напряжений на участке ($0 - \bar{\varepsilon}$) через $\bar{S}$:

$$\bar{S} = \int_0^{\bar{\varepsilon}}\sigma\varepsilon d\varepsilon$$

Тогда окончательно имеем выражение для изгибающего момента:

$$M = Sbh^2/2\bar{\varepsilon}^2$$

Для линейно-упругого и жестко-пластического материалов это выражение приводит к известным результатам.

Введем обозначение:

$$m = \bar{S}/2\bar{\varepsilon}^2$$

Коэффициент m, равный изгибающему моменту для единичного квадратного сечения при известной фибровой деформации $\bar{\varepsilon}$, будем называть коэффициентом изгиба. По аналогии эту зависимость можно назвать диаграммой изгиба. Для прямоугольного сечения изгибающий момент выражается через коэффициент изгиба следующим образом:

$$M = mbh^2 \qquad (1)$$

При определении оптимальных размеров двутавровой балки из нелинейно-упругого материала опираемся на теорию оптимального проектирования балок из линейно-упругих материалов.

Вопросы определения двух оптимальных параметров при проектировании наименьшей по весу двутавровой балки из материала, подчиняющегося закону Гука, рассмотрены в работе [2]. Речь идет об исследовании функции двух переменных δ и h для площади поперечного сечения балки

$$F = 2W/h + 2\delta h/3, \qquad (2)$$

где: F – площадь поперечного сечения;

W – требуемый момент сопротивления сечения;

h – высота сечения;

δ – толщина стенки.

В существующей литературе по металлическим конструкциям [3], [4], [5], этой задаче посвящены несколько вариантов решения при исследовании разных по существу кривых, получаемых из (2). В работе [3], предполагая постоянной гибкость стенки $h/\delta = k = \text{const}$, справедливо получают из условия экстремума формулу для оптимальной высоты балки

$$h_{onm} = \sqrt[3]{\frac{3Wk}{2}}, \qquad (\text{VII.15})$$

а затем пишут на стр. 125: "Если в формулу (VII.15) подставить значение $k = h/\delta_{\text{ст}}$, то можно выразить оптимальную высоту сечения в зависимости от толщины стенки $\delta_{\text{ст}}$:

$$h_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{3W}{2\delta_{cm}}}."$$

Здесь нарушено исходное положение о постоянстве гибкости, используемое при дифференцировании. Если строго соблюдать исходные положения, то в (VII.15) можно подставлять только некоторое число k, но не соотношение между высотой и толщиной стенки. Формула (VII.15) занимает достойное место в теории оптимального проектирования двутавровой балки, но дальнейшие выводы из нее ошибочны, поскольку противоречат математическим предпосылкам, принятым перед отысканием экстремума. Все существующие варианты оптимального проектирования двутавровой балки могут быть объединены, если исследовать поверхность (2) в осях F, h, δ. Это позволит создать строгую теорию оптимального проектирования.

1. *Оптимальное проектирование при постоянной высоте* $h = h_1$.

Этому случаю на поверхности (1) соответствуют прямые линии одной переменной δ:

$$F_1 = 2W/h_1 + 2\delta h_1/3.$$

Наименьшее значение функции F_1 соответствует наименьшему значению толщины стенки $\delta=\delta_{\min}$, назначаемому либо по предельной гибкости стенки, либо из условия прочности по касательным напряжениям.

2. *Оптимальное проектирование при постоянной толщине стенки* $\delta = t$.

Этому случаю соответствует плоская кривая одной переменной h, которая лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости $F - h$:

$$F_2 = 2W/h + 2th/3.$$

Минимум исследуемой функции соответствует равенству нулю производной:

$$\frac{\partial F_2}{\partial h} = -\frac{2W}{h^2} + \frac{2t}{3}\,;\ h_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{3W}{t}} \tag{3}$$

Зная $h_{\text{опт}}$ и t , следует проверить условие прочности по касательным напряжениям и сопоставить гибкость стенки с предельной гибкостью.

3. *Оптимальное проектирование при постоянной гибкости стенки .*

В этом случае поверхности соответствует плоская кривая, лежащая в плоскости $F - \rho$, где ρ – полярная ось. ($\rho^2 = h^2 + \delta^2 = \delta^2\,(1 + k^2)$), полярный угол θ $\text{tg}\theta = \delta/h$

Для малых углов $\theta = \delta/\,h = 1/\text{k}$; $\sin\theta = 1/k$; $\cos\theta = 1$

Выражаем переменные δ и h через переменные ρ и θ:

$$\delta = \rho \sin\theta = \rho/k$$
$$h = \rho\cos\theta = \rho$$

Тогда имеем функцию одной переменной ρ

$$F_3 = 2W/\rho + 2\rho^2/3k.$$

и выражение для первой производной

$$\frac{\partial F_3}{\partial \rho} = -\frac{2W}{\rho^2} + \frac{4\rho}{3k}.$$

Приравнивая производную нулю, находим оптимальной значение переменной ρ:

$$\rho_{опт} = \sqrt[3]{\frac{3Wk}{2}}.$$

Возвращаясь к переменным δ и h, имеем:

$$h_{опт} = \sqrt[3]{\frac{3Wk}{2}}\,;\ \delta_{\text{опт}} = h_{\text{опт}}\,/\,k. \tag{4}$$

Перед окончательным назначением оптимальных размеров следует проверить условие прочности по касательным напряжениям.

4. *Оптимальное проектирование по двум параметрам двутавровой балки из нелинейно-упругого материала .*

Для двутавровой балки из нелинейно-упругого материала изгибающий момент можно представить как сумму моментов, приходящихся на полки и на стенку:

$$M = RF_{\text{п}}\,h + m\delta h^2\,, \tag{5}$$

Новые обозначения в выражении (5):

M- изгибающий момент;

R-условное расчетное сопротивление для нелинейно упругого материала;

$F_{\text{п}}$ –площадь полки;

m-коэффициент, учитывающий нелинейность диаграммы напряжений.

Расчетное сопротивление названо условным, поскольку расчет при изгибе следует вести по допускаемому моменту, а расчетное сопротивление есть соответствующее фибровое напряжение. Для прямоугольного сечения размерами δ x h изгибающий момент вычисляется следующим образом :

$$M_{ст} = m\delta h^2.$$

Для линейно-упругого материала m= R/6.

Все члены в (5) разделим на Rh и умножим на 2.

$$2M/Rh = 2F_п + 2m\delta h/R$$

В правую часть полученного выражения добавим и вычтем площадь стенки.

$$2M/Rh = 2F_п + \delta h - \delta h + 2m\delta h/R$$

Вводя условный момент сопротивления W=M/R и учитывая, что площадь всего сечения F равна удвоенной площади полки, сложенной с площадью стенки, получим после преобразований:

$$F=2W/h+2\delta h\,\overline{m}/3, \qquad (6)$$

Коэффициент нелинейности $\overline{m}$ при заданном значении расчетного сопротивления и фибровой деформации является постоянной величиной и вычисляется следующим образом:

$$\overline{m}=3(1-2m/R)/2.$$

Для линейно-упругого материала этот коэффициент равен единице.

Полная аналогия поверхности (7) и поверхности (6) позволяет при отыскании оптимальных параметров сохранить без изменений изложенную выше методику для линейно-упругих задач, внимательно определяя положение в соответствующих формулах поправочного коэффициента $\overline{m}$.

Вместо формул (3) и (4) будем иметь соответственно:

$$h_{опт} = \sqrt{\frac{3W}{t\overline{m}}} \qquad (3a)$$

$$h_{опт} = \sqrt[3]{\frac{3Wk}{2\overline{m}}}\,; \quad \delta_{опт}= h_{опт} / k. \qquad (4a)$$

Полученный результат есть первое приближение, поскольку условное расчетное сопротивление, зависящее от формы сечения и являющееся фибровым напряжением, соответствующим назначаемому допускаемому изгибающему моменту в зависимости от коэффициента запаса, нам неизвестно. Перебирая R, определяем размеры сечения, определяем предельный момент по формуле (12), подставляя туда вместо R предел прочности и соответствующий предельный коэффициент m, и находим коэффициент запаса по моментам делением предельного момента на расчетный изгибающий момент. Если в какой-то попытке найденный коэффициент запаса по моментам и заданный заказчиком совпадут с требуемой точностью, то расчет закончен.

ЛИТЕРАТУРА

1.Ершов В.И. Определяющие соотношения нелинейной теории упругости на основе инвариантов тензора напряжений и тензора деформаций.– Гомель: Полесье, 1999.– 202 с.

2.Ершов В.И. Подбор оптимальных сечений стальной двутавровой балки по двум параметрам. //Изв. Вузов. Строительство и архитектура.– 1985.–№ 7.

3.Васильев А.А. Металлические конструкции.– М.: Стройиздат, 1975.

4.Муханов К.К. Металлические конструкции.– М.: Стройиздат, 1976.

5.Васильков Ф.В., Туманов В.А. Подбор оптимальных сечений и характеристики веса стальных двутавровых балок.//Изв. Вузов. Строительство и архитектура.– 1975.– № 3.