

## ПОВЕРХНОСТИ СКОРОСТЕЙ ДЛЯ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Босяков С.М., Хвисевич В.М.

*In the present article results of realization of a method of characteristics with reference to system of the differential equations of movement of the ionized gases and liquids on which electromagnetic forces operate are submitted. The equations of strong discontinuities and system of the bicharacteristics equations are obtained.*

Исследованиям закономерностей распространения поверхностей сильного разрыва в идеально проводящей жидкости при наличии магнитного поля посвящено достаточно большое количество публикаций, результаты которых отражены в фундаментальной монографии [1]. В частности, проведены исследования кривых фазовых скоростей и двумерных фронтов волн скоростей при различных соотношениях между скоростью звука и скоростью волны Альфвена. Настоящая работа дополняет эти результаты и посвящена анализу поверхностей скоростей волн Альфвена, распространяющихся в сжимаемой ионизированной жидкости, на которую действуют электромагнитные силы. Соответствующую систему уравнений представим в следующем виде (в предположении малости движений) [1]:

$$\begin{aligned}
 & \partial_t B_1 + u_3 \partial_3 B_1 - B_3 \partial_3 u_1 - u_1 (\partial_2 B_2 + \partial_3 B_3) + \\
 & + u_2 \partial_2 B_1 - B_2 \partial_2 u_1 + B_1 (\partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = 0, \\
 & \partial_t B_2 + u_3 \partial_3 B_2 - B_3 \partial_3 u_2 - u_2 (\partial_1 B_1 + \partial_3 B_3) + \\
 & + u_1 \partial_1 B_2 - B_1 \partial_1 u_2 + B_2 (\partial_1 u_1 + \partial_3 u_3) = 0, \\
 & \partial_t B_3 + u_2 \partial_2 B_3 - B_2 \partial_2 u_3 - u_3 (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2) + \\
 & + u_1 \partial_1 B_3 - B_1 \partial_1 u_3 + B_1 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) = 0, \\
 & \partial_t u_1 + \partial_1 p - \frac{1}{\mu} (B_3 (\partial_3 B_1 - \partial_1 B_3) + B_2 (\partial_2 B_1 - \partial_1 B_2)) = 0, \\
 & \partial_t u_2 + \partial_2 p - \frac{1}{\mu} (B_3 (\partial_3 B_2 - \partial_2 B_3) + B_1 (\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1)) = 0, \\
 & \partial_t u_3 + \partial_3 p - \frac{1}{\mu} (B_2 (\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2) + B_1 (\partial_1 B_3 - \partial_3 B_1)) = 0, \\
 & \partial_t \rho + \rho (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) + u_1 \partial_1 \rho + u_2 \partial_2 \rho + u_3 \partial_3 \rho = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $u_1, u_2, u_3$  - компоненты вектора скорости,  $B_1, B_2, B_3$  - компоненты вектора напряженности магнитного поля,  $p = f(\rho)$  - давление, являющееся функцией плотности  $\rho$ ,  $\mu$  - магнитная проницаемость,  $\partial_k = \partial/\partial x_k$ ,  $k = \overline{1,3}$ ,  $\partial_t = \partial/\partial t$ .

Начальные данные к системе (1) зададим на поверхности  $z(t, x_1, x_2, x_3) = 0$  и перейдем к новым переменным по схеме  $g = z(t, x_1, x_2, x_3)$  и  $g_i = z_i(t, x_1, x_2, x_3)$ . Подставляя производные по переменным  $x_k$  и  $t$ , выраженные через производные по

переменным  $g_k$  и  $g$  в (1), после стандартной процедуры получим следующее уравнение характеристик:

$$\det \|w_i\|_{7 \times 7} = 0, \quad (2)$$

где  $w_{jk} = B_j p_k$ ,  $w_{kk} = B_k p_k - \sum_{n=1}^3 B_n p_n$ ,  $w_{j+3,j} = \rho p_0$ ,  $w_{7k} = -\rho p_k$ ,

$$w_{j,j+3} = p_0 + \sum_{n=1}^3 u_n p_n - u_j p_j, \quad w_{j,k+3} = -u_j p_k, \quad w_{j+3,j+3} = -\frac{1}{\mu} \left( \sum_{n=1}^3 B_n p_n - B_j p_j \right),$$

$$w_{j+3,k+3} = \frac{B_k p_j}{\mu}, \quad w_{j+3,7} = a^2 p_j, \quad a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \text{ - скорость звука, } p_j = \frac{\partial z}{\partial x_j}, \quad p_0 = \frac{\partial z}{\partial t},$$

$j \neq k = \overline{1,3}$ ; остальные компоненты равны нулю.

Раскрывая определитель, после несложных преобразований будем иметь (считаем, что система координат перемещается вместе с жидкостью, то есть  $u_k = 0$  [1]):

$$p_0 \left( \mu \rho p_0^2 - (B_1 p_1 + B_2 p_2 + B_3 p_3)^2 \right) \left( A p_0^4 + B p_0^2 + C \right) = 0. \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$A = \mu \rho, \quad B = - \left( B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + a^2 \mu \rho \right) \tau,$$

$$C = a^2 \left( B_1 p_1 + B_2 p_2 + B_3 p_3 \right)^2 \tau, \quad \tau = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

Из уравнения (3), учитывая, что скорость распространения поверхности разрыва  $V = -p_0 / \sqrt{\tau}$  [1], получим

$$\begin{aligned} & v \left( v^2 - (b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3)^2 \right) \times \\ & \times \left( v^4 - v^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1) + (b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3)^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $v = V/a$  - безразмерная скорость распространения поверхности разрыва,  $b_k = \frac{B_k}{a \sqrt{\mu \rho}}$  -

безразмерная скорость волны Альфвена,  $n_k = \cos \alpha_k = p_k / \sqrt{\tau}$  - направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности ( $\alpha_k$  - угол между нормалью к характеристической поверхности и координатной осью  $x_k$ ),  $k = \overline{1,3}$ .

Из уравнения (4) следует существование линии тока (стационарная поверхность разрыва), скорость которой  $v = 0$ , а также прямой и обратной волн Альфвена, распространяющихся со скоростями  $v = \pm \sqrt{b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3}$ . Поскольку анализ этих волн подробно выполнен в [1], обратимся к модифицированным волнам Альфвена, на скорость распространения которых влияет скорость звука  $a$ . Из уравнения (4) имеем:

$$\begin{aligned} v_i &= \sqrt{\hat{B} - (-1)^i \sqrt{\hat{B}^2 - (b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3)^2}}, \\ \hat{B} &= \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1). \end{aligned} \quad (5)$$

С помощью формул (5) можно выполнить построения поверхностей скоростей, отражающих зависимость фазовой скорости от угла наклона нормали к волновой поверхности, а также их сечений различными плоскостями, для модифицированных волн Альфвена. Анализ таких поверхностей показывает, что можно выделить три случая, соответствующие различным соотношениям между скоростью звука  $a$  и скоростью Альфвена  $B/\sqrt{\mu\rho}$  (считаем, что  $B = B_k, k = \overline{1,3}$ ). На рис. 1 представлены поверхности скоростей для волн, распространяющихся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , при  $b = 0,1$ .

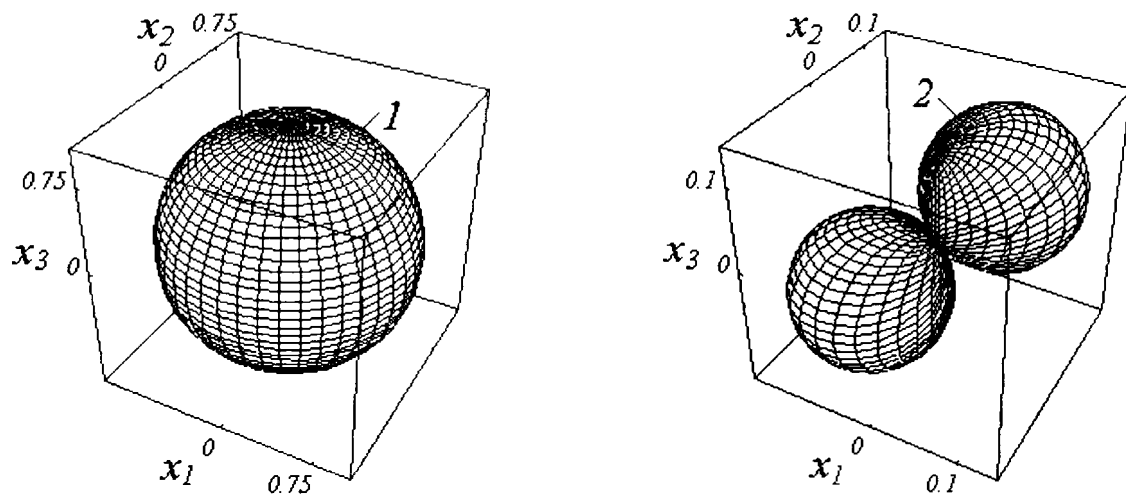


Рис. 1. Поверхности скоростей для случая  $b = 0,1$ : 1 – волна, распространяющаяся со скоростью  $v_1$ ; 2 – волна, распространяющаяся со скоростью  $v_2$

Из рис. 1 (1) видно, что при  $b = 0,1$  поверхность скоростей для волны, распространяющейся со скоростью  $v_1$  близка к сфере (радиус сферы незначительно превышает 1). Поверхность скоростей для другой волны представляет собой две сферы, точка касания которых находится в начале координат. Диаметры сфер приблизительно равны численному значению безразмерной скорости распространения волны Альфвена  $b$ . При уменьшении значения  $b$  диаметры сфер (рис. 1, 2) также уменьшаются, и их значение по-прежнему остается приблизительно равным  $b$ ; радиус сферы, соответствующей скорости  $v_1$  (рис. 1, 1), при неограниченном уменьшении  $b$  стремится к 1.

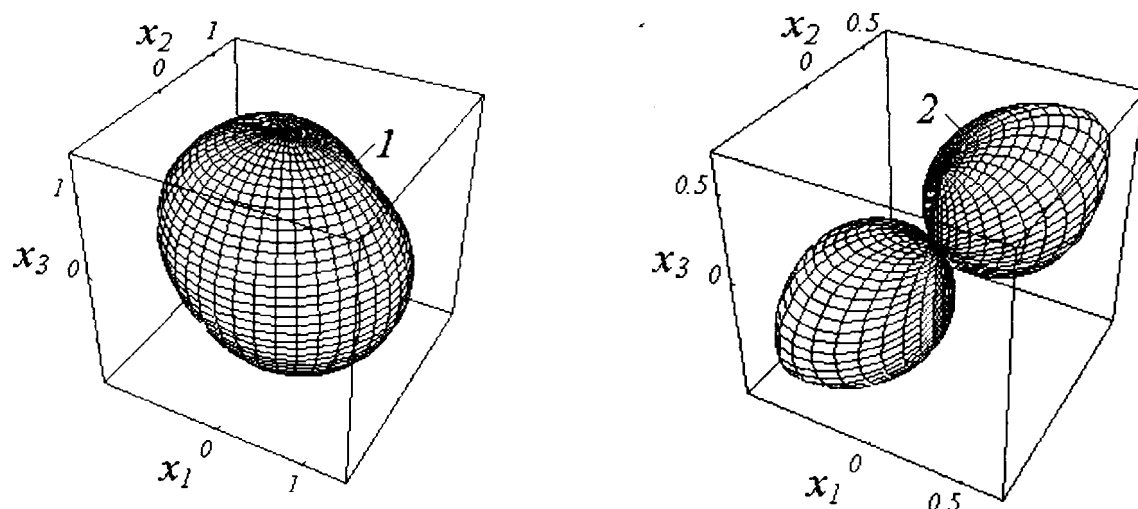


Рис. 2. Поверхности скоростей для случая  $b = 0,6$ : 1 – волна, распространяющаяся со скоростью  $v_1$ ; 2 – волна, распространяющаяся со скоростью  $v_2$

При увеличении значения безразмерной скорости распространения вид поверхностей скоростей изменяется – поверхности вытягиваются в направлении прямых, составляющих с координатными осями углы, равные  $\pi/4$ . Так, на рис. 2 показаны поверхности скоростей, построение которых выполнено при  $b = 0,6$ . Отметим, что аналогичный вид имеют поверхности скоростей для значений безразмерной скорости волны Альфвена из диапазона  $0,45 \div 0,85$ .

При дальнейшем возрастании значений  $b$ , поверхности скоростей для волн, распространяющихся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , принимают вид сферы и двух касающихся сфер соответственно (рис. 3; при построении принимаем  $b = 2,0$ ).

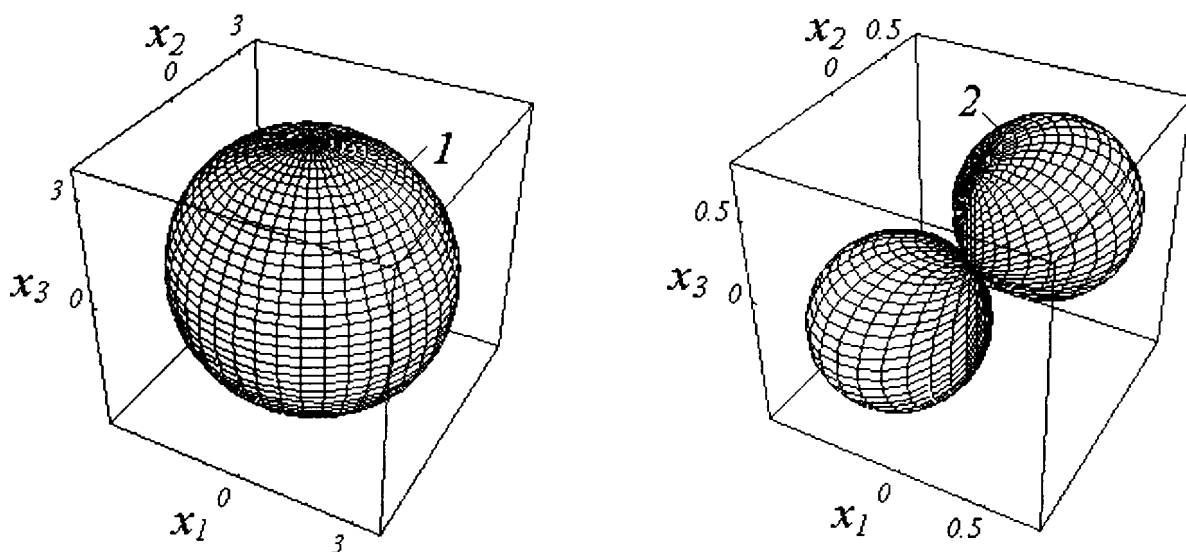


Рис. 3. Поверхности скоростей для случая  $b = 2,0$ : 1 – волна, распространяющаяся со скоростью  $v_1$ ; 2 – волна, распространяющаяся со скоростью  $v_2$

Отличие от случая малых  $b$  (рис. 1) заключается в значениях радиусов сфер. Так, радиус сферы, отражающей поверхность скоростей для  $v_1$ , возрастает с увеличением  $b$ , радиус при этом приближенно равен  $b$ . Значения диаметров сфер, составляющих поверхность скоростей для другой волны при неограниченном возрастании  $b$  не изменяются и приближенно составляют 0,5.

В заключение отметим, что сечения полученных поверхностей скоростей плоскостью, являющейся биссектрисой координатного угла  $x_1 0 x_2$  и проходящей через ось координат  $x_3$ , соответствуют двумерным кривым скоростей, полученными в [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Ф. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. – 600 с.