

ISSN 0134-9635

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Научно-технический международный журнал

Основан в 1975 году

Выпуск 22

**Минск
2007**

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК 22.21я43

30.12я43

Т 33

Редакция сборника

Президиум редакции:

П.А. Витязь, М.С. Высоцкий, Л.Г. Красневский,
Ю.М. Плескачевский, Б.М. Хрусталеv

Международный совет редакции:

J. Awrejcewicz (Польша), Благодарный (Словакия), Г.Я. Беляев (Беларусь), J. Grabski (Польша), G. Gudehus (Германия), Д.Д. Ивлев (Россия), В.В. Лобода (Украина), Н.Ф. Морозов (Россия), Ж.А. Мрочек (Беларусь), Н.К. Мышкин (Беларусь), S. Pytko (Польша), Ф.А. Романюк (Беларусь), K. Zimmermann (Германия), А.И. Шашкин (Россия), Е.И. Шемякин (Россия), Г.П. Черепанов (США), А.М. Якимович (Беларусь)

Редакционная коллегия:

Ю.В. Василевич (зам. председателя), В.С. Вихренко
М.А. Журавков, М.Г. Ботогова (уч. секретарь), А.Е. Крушевский,
И.С. Куликов, А.Т. Скойбеда, А.В. Чигарев (председатель), А.М. Якимович
Экспертный совет по направлениям
Теоретическая и прикладная механика: А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, М.А. Журавков
Механика материалов и структур: Ю.В. Василевич, М.И. Кулак, Н.В. Спиридонов
Мехатроника и интеллектуальные системы: В.М. Колешко, Л.Г. Красневский
Механика машин: В.Б. Альгин, А.Т. Скойбеда, В.К. Шелег,
Приборы точной механики: И.Е. Зуйков, М.Г. Киселев, В.Л. Соломахо
Механика конструкций: А.Н. Борисевич, С.В. Босаков, Т.М. Пецольд, Э.И. Старовойтов

Адрес редакции:

220013 Минск, проспект Независимости, 65
БНТУ, кафедра «Теоретическая механика»
Тел.: (+375 17) 292 74 25, 299 92 52
E-mail: tmecb@bntu.by, theormech@rambler.ru

В сборнике содержатся научные и методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов и научных учреждений. Включены также материалы, обсуждавшиеся на республиканском научно-методическом семинаре с международным участием «Научно-методические основы применения информационных технологий в преподавании механики и научных исследованиях».

Тематика статей сборника охватывает широкий круг вопросов. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Теория механизмов и машин». Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов.

Сборник будет полезен для преподавателей вузов, научно-инженерных работников, аспирантов.

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК 22.21я43

30.12я43

5885701

ISBN 978-985-479-617-8

© Белорусский национальный
технический университет, 2007

Equistrong Tower Design

Genady P. Cherepanov

Honorary Life Member of the New York Academy of Sciences
Miami, Florida, USA

Ivan E. Esparragoza

Professor of Civil Engineering, Pennsylvania State University
Media, PA, USA

Abstract: The September 11, 2001 events attracted the attention of civil engineers of the world to the problem of safety of towers and skyscrapers. According to recent studies, the WTC collapse was caused by man-made explosions on a critical floor located much lower than the floors hit by terrorist planes which supports the wide-spread rumor in the U.S. that MASAD agents used the aftermath mess-up after the crush of the planes, put some explosives in the critical floor and detonated them in a while. These or any other possible calamities must be technically treated which can be achieved by drastic increase of safety factor of tower design. In the present paper a new approach to the optimal design of towers is advanced based on the principle of equistrength. Introductory Section 1 provides a short overview of the theory of equistrong structures given in the book by Cherepanov and Ershov (1977). In Section 2, a continuum model is used for the design of equistrong towers. The same problem is studied in Section 3 with an account of the discrete, floor-by-floor structure of equistrong towers. Conclusion emphasizes that the equistrong tower designs allow developers to achieve the maximum possible safety factor. Current designs of skyscrapers including WTC towers are as primitive as the Tower of Babylon.

1. Introduction

The optimization methods currently used for the design of optimal engineering structures are based on the comparison of many direct solutions and selection of one of them having the desired optimum property. This approach is likable by engineers because the existence theorem is valid for the direct solutions which allows to easily computerize it. However, if optimal means perfect, ideal, non-improvable, then the “optimal” design derived by this approach is, in fact, never optimal because there are no sound physical basis in this approach.

The theory of equistrong structures uses the following physical principle of equistrength: A structure is referred to as the equistrong one if it is designed in such a way that the failure criterion is achieved simultaneously at all points of the structure, or, if it is impossible, in a maximum-possible volume or area of the structure. All parts of the equistrong structure are loaded to one and same extent; and so, all parts are equally stress-loaded and safe. In practical terms, this principle is reduced to the requirement of uniform maximum stresses throughout the whole structure or along some area with inevitable stress concentration. In the future, the principle of equistrength will allow to create perfect designs of structures of minimum weight and structures with maximum safety factor.

The first equistrong design appeared simultaneously with the notion of stress, when Galileo Galilei illustrated this then-unknown notion by a beam of a hyperbolic variable cross-section bent by a force, with maximum stresses being the same along the beam. Since then, several equistrong designs were occasionally found and used in practice. However, this subject has never been given a serious consideration by engineers and because of lack of computerizability it even has not been ever presented in any numerical optimization codes, numerous, very comprehensive and detailed.

The principle of equistrength was formulated in the book by Cherepanov and Ershov (1977) based on several dozens of their publications on the subject. Some equistrong designs of chains, beams, blades, disks, plates, bridges, shells, pipelines, pressure vessels, laminated composites, holes of equistrong shape, etc can be found in this book. The main difficulty in the quest for equistrong designs is the existence problem because there are no existence theorems for the inverse, strongly non-linear problems of this kind with unknown boundaries to be found as the main goal of such studies. However, if an equistrong design is found, it can become the ideal design pattern.

Since the time immemorial, humans have tried to come closer to the heaven by building tall and taller structures. The Tower of Babylon had collapsed long ago but pyramids of Egypt still stand. On September 11, 2001 the towers of the World Trade Center in New York, the tallest and most majestic buildings in the world, had suddenly collapsed into dust and debris, with almost three thousand humans including 330 firemen being perished. According to recent studies, the collapses were caused by some explosions on a critical floor located much lower than the floors hit by terrorist planes, which supports the rumor wide-spread in the United States that MASAD agents used the mess-up after the plane crash, put explosives in a critical floor below those under fire and detonated explosives in a while. The towers were poor-designed and built on cheap. Surely, the collapses would not have happened if the safety factor of their design were significantly greater. The towers collapsed in free fall regime as if disintegrated just before the fall, which supports the same rumor. In Cherepanov (2006) it was proven that the official version was built on miscalculations and therefore is wrong.

The problem of optimal design of towers is studied below based on the physical principle of equistrength.

2. The Continuum Model

Let us consider the vertical tower of height H . The x -axis is assumed to be directed upward along the vertical so that $x = 0$ is the tower basement and $x = H$ is the coordinate of the roof. Let us designate by: $S(x)$, the area of the horizontal cross-section of the tower; $\gamma(x)$, the weight of unit volume of the tower; and $F(x)$, the equivalent compression force from gravitation in the cross-section $x = \text{const}$. It is assumed that the tower height is much greater than any width of its cross-section. Under this assumption the mean stress $\sigma_x = \sigma(x)$ in the cross-section $x = \text{const}$ can be introduced as:

$$\sigma(x) = \frac{F(x)}{S(x)}. \quad (2.1)$$

The equilibrium equation is as follows:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \gamma(x)S(x). \quad (2.2)$$

In what follows we consider only the towers of the following two designs:

(i) Most primitive one when

$$\gamma(x) = \gamma_o = \text{const}, \quad S(x) = S_o = \text{const}; \quad (2.3)$$

The design of the WTC towers as well as most of other buildings is close to this type of designs.

(ii) Most perfect one, the equistrong design, when

$$\sigma(x) = -\sigma_o = \text{const}. \quad (2.4)$$

Here σ_o is the maximum value of safe stresses.

The solution to the equation system (2.1) and (2.2) for both designs is as follows:

$$(i) \quad \sigma = -\gamma_o(H-x) - \frac{R}{S_o}, \quad F = \sigma S_o, \quad |\sigma| \leq \sigma_o. \quad (2.5)$$

$$(ii) \quad S = \frac{R}{\sigma_o} \exp\left(\frac{1}{\sigma_o} \int_x \gamma(x) dx\right), \quad F = \sigma_o S. \quad (2.6)$$

Here R is the weight of the tower roof.

Let us apply this calculation to homogeneous, vertical, solid columns of height H and compare these two designs provided that the total weight W of the column is one and the same for both designs. One can find:

$$(i) \quad H = \frac{\sigma_o}{\gamma_o} \frac{1}{1 - \frac{R}{W}}, \quad (W > R); \quad (2.7) \quad (ii)$$

$$H = \frac{\sigma_o}{\gamma_o} \ln\left(1 + \frac{W}{R}\right), \quad (W > R). \quad (2.8)$$

For very tall columns $W \gg R$ and these equations become even simpler:

$$(i) \quad H = \frac{\sigma_o}{\gamma_o}, \quad (W \gg R); \quad (2.9) \quad (ii)$$

$$H = \frac{\sigma_o}{\gamma_o} \ln\left(\frac{W}{R}\right), \quad (W \gg R). \quad (2.10)$$

As seen, for one and same weight the equistrong column $\ln(W/R)$ times taller than the column of uniform cross-section. The safety of both columns is about the same since the maximum stress is the same in both columns. An account of the column stability with respect to horizontal displacement and forces will evidently be in favor of the equistrong column.

The value of σ_o / γ_o for some materials is brought below.

Material	$\gamma_o, \text{g/cm}^3$	$\sigma_o, \text{N/mm}^2$	$\frac{\sigma_o}{\gamma_o}, \text{m}$
Wood (White Oak)	0.7	5	700
Steel	7.9	120	1500
Aluminum	2.7	20	750
Window glass	2.4	50	2000
Epoxy	1.3	20	1500

The value of σ_o is taken about seven times less than the ultimate compression stress.

Suppose, now, that the height and total weight of the equistrong column is the same as for the column of uniform cross-section. Compare the maximum stresses σ_o in both designs:

$$(i) \quad \sigma_o = \gamma_o H, \quad \text{and} \quad (2.11)$$

$$(ii) \quad \sigma_o = \frac{\gamma_o H}{\ln\left(\frac{W}{R}\right)}. \quad (2.12)$$

Hence, the maximum stress in the equistrong column is $\ln(W/R)$ times less than the maximum stress in the column of uniform cross-section. And so, the equistrong column is many times safer. For example, if $W/R = 10$ the safety factor of equistrong column is 2.3 times greater than the safety factor of common primitive design.

These calculations and estimates for solid columns can be applied to real towers of complex structure using the continuum approach. (As a reminder, each material we consider a homogeneous solid represents a complex, discrete system of atoms, grains, fibers, etc.). By this way, γ_o is equal to the tower weight divided by the tower volume, and the stress in the tower cross-section is equal to the equivalent force in bearing walls and columns of the tower cross-section $x = \text{const}$ divided by the area of this cross-section.

3. The Discrete Model

Let us consider the vertical tower of N stories. Let us designate by: S_n , the area of cross-section of bearing columns and walls of the n^{th} floor, and σ_n , the mean compressive stress in these structural elements bearing the weight of the building above this floor. The equilibrium equation is as follows:

$$-\sigma_{n+1}S_{n+1} + \sigma_n S_n = -G_n - \gamma h_n S_n \quad (3.1)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots, N-1)$$

$$\sigma_n S_n = -R - \gamma h_n S_N \quad (n = N). \quad (3.2)$$

Here: G_n , the weight of the floor-ceiling structure between the $(n+1)^{\text{th}}$ and n^{th} floors plus the passive operation weight of the n^{th} floor including equipment, people, non-bearing walls, etc; h_n , the height of the n^{th} floor; γ , the weight of unit volume of the material of the bearing columns and walls; and R , the weight of the tower roof plus the passive weight of the N^{th} floor.

Let us require that the stress σ_n be one and same for all floors

$$\sigma_n = -\sigma \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N-1). \quad (3.3)$$

Here σ is the safe stress for the given material and structure. The condition of equistrength (3.3) provides for the ideal using of all of the material of bearing structural elements and thus allows to make a perfect design from the point of view of maximum safety and minimum amount of the bearing material.

Equations (3.1) and (3.2) for the equistrength towers become:

$$S_{n+1} - S_n + \frac{\gamma}{\sigma} h_n S_n = -\frac{1}{\sigma} G_n, \quad (3.4)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots, N-1)$$

$$S_N = \frac{1}{\sigma} R + \frac{1}{\sigma} \gamma h_N S_N \quad (n = N). \quad (3.5)$$

The recurrent solution to these equations is:

$$S_N = \frac{R}{\sigma - \gamma h_n} \quad (n = N), \quad (3.6)$$

$$S_n = \frac{\sigma S_{n+1} + G_n}{\sigma - \gamma h_n} \quad (n = N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1). \quad (3.7)$$

This solution determines the floor-by-floor distribution of the bearing material in the equistrong towers. Evidently, numerous architectural designs not considered here are possible within the framework of this solution. The consideration of maximum useful volume of the tower as well as its maximum stability with respect to horizontal random loads leads to the conclusion that the tower should be a vertical cylinder of circular cross-section with bearing columns uniformly concentrated along the perimeter of the cross-section creating a tube, see Cherepanov and Ershov (1977). This shape allows also to use minimum amount of building materials.

In the particular case when $h_n = h = \text{const}$ and $G_n = G = \text{const}$ the equations system (3.4) and (3.5) has the following analytical solution for all n :

$$S_n = \frac{G}{\gamma h} + \left(\frac{R}{\sigma - \gamma h} + \frac{G}{\gamma h} \right) \left(1 - \frac{\gamma h}{\sigma} \right)^{n-N} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N). \quad (3.8)$$

In this case the total weight of the tower without basement is equal to:

$$\begin{aligned} W &= R + G(N-1) + \gamma h \sum_{n=1}^N S_n = \\ &= R + NG + \left[R + G \left(\frac{\sigma}{\gamma h} - 1 \right) \right] \left[\left(1 - \frac{\gamma h}{\sigma} \right)^{-N} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

For the towers and skyscrapers, $N \gg 1$ and $\sigma \gg \gamma h$, so that after using the asymptotic equality

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^N = e^{-N/\lambda} \quad (\lambda \gg 1, N \gg 1) \quad (3.10)$$

$$\left(\lambda = \frac{\sigma}{\gamma h} \right),$$

which is valid for finite values of N/λ , not very large and not very small, equation (3.9) becomes

$$W = R + G(N - \lambda + \lambda e^{N/\lambda}) \quad \left(\lambda = \frac{\sigma}{\gamma h} \right). \quad (3.11)$$

For the most primitive designs when $S_n = S_o = \text{const}$, the solution to equations (3.4) and (3.5) is:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= -\frac{R}{S_o} - \left(\frac{G}{S_o} + \gamma h \right) (N - n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N), \\ W &= R + N(G + \gamma h), \\ \sigma &= \frac{W}{S_o} = \frac{R}{S_o} + N \left(\frac{G}{S_o} + \gamma h \right).\end{aligned}\tag{3.12}$$

The design of WTC towers is close to this primitive design commonly used as well in most of other buildings. As seen, the stresses in equistrong towers are several times smaller than maximum stresses in common primitive designs of the same weight and height and, hence, equistrong towers are much safer.

4. Conclusions

The equistrong design approach allows to ultimately use the bearing capacity of the material and hence to: (i) build the towers of maximum height for the given weight and stress in bearing columns and walls, or, (ii) build the towers of maximum safety, that is with minimum stresses in bearing columns and walls of the tower, for the given weight and height of the building. Equistrong designs will allow to far surpass today's height of skyscrapers and their safety.

Acknowledgment

We gratefully acknowledge the efforts of Prof. McMeeking, Germanovich and others who diligently use the results of the present article in their teaching work, after having known it from our private communication.

Reference

- Genady P. Cherepanov and Leonid V. Ershov (1977), "Failure Mechanics", Mashinostroenie Publishers, Moscow, P. 1-224 (in Russian).
- Genady P. Cherepanov (2006), "On the collapse of the World Trade Center in New York on September 11, 2001", *Int. J. Engineering and Automation Problems*, No. 1, P. 10-20.
- Genady P. Cherepanov (2006), "Mechanics of the WTC collapse", *Int. J. Fracture*, Vol. 141, P. 287-289.

Автореферат¹

С незапамятных времен люди старались подняться выше и выше, строя все более высокие здания. Вавилонская башня развалилась давным-давно, а египетские пирамиды стоят много тысячелетий. Недавно, а точнее 11-ого сентября 2001-ого года, рассыпались в пыль и мелкие обломки башни всемирного торгового центра в Нью-Йорке, считавшиеся самыми высокими зданиями в мире (свыше 400 метров). Рассыпались от пожара, потому что были плохо спроектированы и построены задешево. Под обломками погибло почти три тысячи человек, в том числе 330 пожарников и несколько россиян...

Представляет интерес оценить максимальную высоту идеально спроектированных башен.

¹ Черепанов Г.П. Равнопрочная башня. Вестник ЧГПУ им. Яковлева. 2006. №1(48). Стр.32-39.

УПРУГОСТЬ НЕМАТИЧЕСКИХ ЭЛАСТОМЕРОВ

Немцов В.Б.

The statistical theory of the Cauchy–Green type measure of nonlinear elastic deformation for nematic elastomer is developed. The spontaneous distortions of the nematic elastomers are considered as example of application the statistical theory.

При описании упругого поведения эластомеров, способных испытывать значительные деформации, успешно применяются методы нелинейной теории упругости (см. напр. [1] и приведенную там литературу). В то же время возникает проблема статистического определения тензора конечных деформаций для этой уникальной упругой среды [2]. Наличие ориентационного порядка в нематических эластомерах порождает новые проблемы [3].

В настоящей работе проводится обобщение прежних результатов статистической теории [4], связанных с учетом ориентационного порядка.

Нематический эластомер представляет собой пространственную сеточную структуру, образованную длинными цепными молекулами, соединенных (как говорят, сшитых) поперечными связями. Если цепные молекулы содержат жесткие фрагменты, ориентационное упорядочение их порождает одноосную нематическую структуру (нематический эластомер).

На основе гауссовой статистики полимерных цепей разработана т. н. неоклассическая теория упругости эластомеров с ориентационным порядком [3], которая способна качественно и в ряде случаев количественно описывать деформирование рассматриваемых сред.

В статистической теории молекулярным геометрическим параметром состояния служат радиус-вектор \mathbf{R} , соединяющий два соседних узла сеточной структуры [2, 3]. Пусть \mathbf{R}_0 – радиус-вектор в исходном недеформированном состоянии эластомера.

Для описания деформированного состояния введем микроскопический тензор Коши-Грина

$$\hat{C}_{ij} = R_i \cdot R_j \cdot (R_{0i} R_{0j})^{-1}. \quad (1)$$

Рассматривается участок объема среды, где деформация однородна, поэтому вместо традиционной формулы

$$C_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial R_{0i}} \frac{\partial R_j}{\partial R_{0j}} \quad (2)$$

используется формула (1), в которой введены молекулярные размеры \mathbf{R} и \mathbf{R}_0 и производные заменены отношениями этих размеров, которые с точки зрения континуального описания являются бесконечно малыми величинами [2].

Обычно тензор Коши-Грина представляется через тензор кратности удлинений λ_{ij} , [1–3]

$$C_{ij} = \lambda_{ii} \lambda_{jj}. \quad (3)$$

С точки зрения уравнения (1) появление тензора кратности удлинений вполне естественно.

Среднее значение тензора \hat{C}_{ij} (1) будет использоваться в качестве меры нелинейной деформации эластомера

$$C_{ij} = \langle \hat{C}_{ij} \rangle = \langle R_i R_l \rangle \cdot \langle R_{0i} R_{0j} \rangle_0^{-1}. \quad (4)$$

Здесь угловые скобки $\langle \rangle$ означают усреднение с помощью функции распределения текущего деформированного состояния, а угловые скобки $\langle \rangle_0$ описывает усреднение по начальному недеформированному состоянию.

Усреднение позволяет учесть ориентационный порядок и поэтому мера деформации (4) обобщает классическую меру деформации Коши-Грина (3). Отметим еще отличие предлагаемого подхода от неоклассической теории [3], где отсутствует мера деформации подобная мере вводимой в данной работе.

Небезынтересно, что линейное (по следу $Tr C_{ij}$) приближение для свободной энергии совпадает с выражением неоклассической теории [3]. В отличие от упомянутой теории в нашем подходе имеется возможность учета следующих нелинейных по инвариантам тензора \hat{N}_{ij} слагаемые в выражении для свободной энергии.

Ранее [4] с помощью метода максимума информационной энтропии установлено выражение для функции распределения ансамбля тензора напряжений, в котором компоненты тензора напряжений служат контролируемыми параметрами, а компоненты тензора деформаций являются флуктуирующими переменными. Пусть H – функция Гамильтона системы, β – обратная температура, \hat{N}_{ij} – микроскопический тензор деформации Коши-Грина. Ранее в [4] использовался микроскопический тензор деформации Лагранжа \hat{L}_{ij} .

Функция распределения имеет вид

$$\rho = Q^{-1} \exp(-\beta H - \beta \hat{C}_{ij} \tau_{ij}), \quad (5)$$

где Q – конфигурационный интеграл, τ_{ij} – тензор Пиала-Кирхгофа 2 рода. Функция распределения

$$\rho_0 = Q_0^{-1} \exp(-\beta H), \quad (6)$$

описывает недеформированное состояние (в отсутствие тензора напряжений τ_{ij}).

Среднее значение тензора деформации C_{ij} определяется как

$$C_{ij} = \beta^{-1} \frac{\partial \ln Q}{\partial \tau_{ij}}. \quad (7)$$

С учетом явного выражения для \hat{C}_{ij} запишем соотношение

$$\hat{C}_{ij} \tau_{ij} = \tau_{ij} R_l R_l \langle R_{0i} R_{0j} \rangle_0^{-1} \quad (8)$$

В свою очередь, тензор τ_{ij} можно связать с тензором Пиала-Кирхгофа 1 рода T_{ij} ,

$$\tau_{ij} = \frac{T_{ij} R_{0i}}{R_l}. \quad (9)$$

Принимая во внимание, что [2]

$$T_{ij} = \sum f_l R_{0j}, \quad (10)$$

где f_l – сила, приложенная к полимерной цепи со стороны узлов сетки, с которыми эта цепь связана, найдем выражение

$$\tau_{ij} = \frac{\sum f_l R_{0j} R_{0i}}{R_l}. \quad (11)$$

В результате установим традиционное выражение

$$\tau_{ij} \hat{C}_{ij} = \sum f_l R_l \quad (12)$$

для работы сил растяжения полимерных цепей, по числу которых проводится суммирование.

Проведем вычисление средних значений, входящих в формулу (4), на основе модели свободно сочлененной цепи. Учтем, что

$$\mathbf{R} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{q}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^N q \mathbf{u}^\alpha. \quad (13)$$

Здесь \mathbf{q}^α – вектор, идущий по сегменту цепи с номером α , q – модуль этого вектора, \mathbf{u}^α – соответствующий единичный вектор. Предполагается, что длины сегментов (мономеров) цепи одинаковы, число сегментов молекулы между ближайшими узлами сетки равно N .

В рассматриваемой модели корреляции между ориентациями соседних мономеров отсутствуют, поэтому

$$\langle R_{0i} R_{0j} \rangle = N \cdot \langle q_i q_j \rangle_0 = N \bar{q}_0^2 \langle u_i u_j \rangle_0. \quad (14)$$

где \bar{q}_0^2 – средний квадрат длины мономера в недеформированном состоянии эластомера. Далее обозначаем $\bar{q}_0^2 = a^2$, причем a – эффективная длина мономера.

Учтем, что в общем случае

$$\langle u_i u_j \rangle_0 = \frac{1}{3} (\delta_{ij} + 2Q_{ij}). \quad (15)$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера, Q_{ij} – тензорный параметр порядка в исходном состоянии,

$$Q_{ij} = \left\langle \frac{3}{2} u_i u_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \right\rangle_0. \quad (16)$$

Тогда

$$\langle R_{0i} R_{0j} \rangle = \frac{Na^2}{3} (2Q_{ij} + \delta_{ij}). \quad (17)$$

Следуя [3] это выражение запишем иначе

$$\langle R_{0i} R_{0j} \rangle_0 = \frac{L}{3} l_{ij}^0, \quad (18)$$

причем $L = Na$ – контурная длина молекулы между ближайшими узлами сетки,

$$l_{ij}^0 = a(2Q_{ij} + \delta_{ij}). \quad (19)$$

Тензорная величина l_{ij}^0 характеризует сеть эластомера в исходном состоянии, когда сеть формируется.

Если исходное состояние изотропно, то

$$l_{ij}^0 = a\delta_{ij}, \quad (20)$$

а коррелятор длины молекулы записывается в форме

$$\langle R_{0i} R_{0j} \rangle_0 = \frac{La}{3} \delta_{ij}, \quad (21)$$

в частности,

$$\langle R_{0i} R_{0i} \rangle_0 = \langle R_0^2 \rangle_0 = La = Na^2, \quad (22)$$

Величина $\langle R_0^2 \rangle_0$ является средним квадратом длины отрезка, соединяющей ближайшие узлы сетки, находящейся в недеформированном состоянии.

Рассмотрим распространенный случай, когда в некотором промежуточном состоянии эластомер подвержен деформации, описываемой тензором кратности удлинений. Тогда

$$R_l = \lambda_{lk} \tilde{R}_k, \text{ и } R_l = \lambda_{ln} \tilde{R}_n, \quad (23)$$

где \tilde{R}_n – расстояние между ближайшими узлами сетки в промежуточном состоянии. В этом случае тензор деформации выражается как

$$C_{ij} = \langle R_l R_l \rangle \langle R_{0i} R_{0j} \rangle_0^{-1} = \lambda_{lk} \lambda_{ln} (\tilde{R}_k \tilde{R}_n) \langle R_{0i} R_{0j} \rangle_0^{-1}. \quad (24)$$

Но, согласно (18)

$$\langle R_{0i} R_{0j} \rangle_0 = \frac{L}{3} l_{ij}^0,$$

Аналогично запишем среднее значение по промежуточному состоянию

$$\langle \tilde{R}_k \tilde{R}_n \rangle = \frac{L l_{kn}}{3}, \quad (25)$$

В свою очередь тензорная величина l_{kn} описывает сетку эластомера в промежуточном состоянии.

Тензоры \underline{l}^0 и \underline{l} характеризуют анизотропные шаги в модели броуновского движения, используемой для описания конформаций полимерной цепи [3]

Тогда тензор деформации приобретает вид

$$C_{ij} = \lambda_{ik} \lambda_{ln} l_{kn} (l_{ij}^0)^{-1} \quad (26)$$

Если промежуточное и начальное состояния эластомера изотропны, то

$$\langle R_{0i} R_{0j} \rangle_0 = \frac{\langle R_0^2 \rangle_0 \delta_{ij}}{3} \quad (27)$$

$$\langle \tilde{R}_k \tilde{R}_n \rangle_0 = \frac{\langle R_0^2 \rangle_0 \delta_{kn}}{3}, \quad (28)$$

причем согласно (22)

$$\langle R_0^2 \rangle_0 = La. \quad (29)$$

В сетке средний тензор деформации Коши-Грина в изотропном случае записывается в форме

$$C_{ij} = \lambda_{ik} \lambda_{ln} \delta_{kn} (\delta_{ij})^{-1} = \lambda_{ik}^2 (\delta_{ij})^{-1}, \quad (30)$$

а его след имеет вид

$$C_{ij} = \frac{\lambda_{ik}^2}{3}, \quad (31)$$

что отвечает результату классической теории, так как в линейном приближении свободная энергия пропорциональна λ_{ik}^2 [3].

Приведем еще формулу (26) в безиндексной форме

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{l}} \cdot \underline{\underline{\lambda}}^T \cdot \underline{\underline{\lambda}} \cdot (\underline{\underline{l}}^0)^{-1}, \quad (32)$$

где двумя чертами отмечается тензор, а его свертка характеризуется точкой.

Рассмотрим матрицу тензора кратности удлинений в главных осях

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Для несжимаемого нематика справедливо условие несжимаемости $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Обозначив $\lambda_3 = \lambda$ при $\lambda_1 = \lambda_2$ находим соотношение $\lambda_1^2 \lambda = 1$, из которого следует следующий вид матрицы кратности удлинений:

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (34)$$

а произведение $\underline{\underline{\lambda}}^T \cdot \underline{\underline{\lambda}}$ записывается как

$$\underline{\underline{\lambda}}^T \cdot \underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Для одноосной нематической среды матрица тензора $(\underline{\underline{l}}^0)^{-1}$ имеет структуру [3]

$$(\underline{\underline{l}}^0)^{-1} = \begin{pmatrix} (l_{\perp}^0)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (l_{\perp}^0)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & l^0 \end{pmatrix}; \quad (36)$$

где l^0 и l_{\perp}^0 – соответственно продольные и поперечные по отношению к директору компоненты тензора.

Если тензор $\underline{\underline{l}}$ изотропен ($l_{ij} = a\delta_{ij}$), т. е. эластомер формируется в изотропном промежуточном состоянии, то тензор Коши-Грина представляется в виде

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} a(\lambda l_{\perp}^0)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & a(\lambda l_{\perp}^0)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & a\lambda^2 l^{-1} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

а ее след выглядит как

$$Tr \underline{\underline{C}} = \frac{2a}{\lambda l_{\perp}^0} + \frac{a\lambda^2}{l^0}. \quad (38)$$

Но в рамках линейной теории этот след пропорционален объемной плотности свободной энергии,

$$F = \frac{1}{2} \mu \left(\lambda^2 \frac{a}{l^0} + \frac{2a}{\lambda l_{\perp}^0} \right), \quad (39)$$

где μ – модуль сдвига.

Отсюда следует, что при переходе от промежуточного состояния к текущему (актуальному) состоянию путем охлаждения среды, происходит удлинение образца на величину $\lambda_m = (l^0 / l_{\perp}^0)^{1/3}$ [3]. Эта формула следует из условия минимума свободной энергии.

Если же формирование эластомера происходит в монодоменном нематическом состоянии, а переход его в изотропное состояние с $\underline{\underline{l}}_0 = a\underline{\underline{\delta}}$ реализуется путем нагревания, то матрица $\underline{\underline{l}}$ имеет вид

$$\underline{\underline{l}} = \begin{pmatrix} l_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & l_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix}. \quad (40)$$

В этом случае имеет место сокращение эластомера, характеризуемое величиной

$$\lambda_m = (l_{\perp} / l)^{1/3}, \quad (41)$$

а свободная энергия записывается в форме

$$F = \frac{1}{2} \mu \left(\lambda^2 \frac{l_{\parallel}}{a} + \frac{2l_{\perp}}{\lambda a} \right). \quad (42)$$

Таким образом, уже в рамках линейной по мере деформации теории, предлагаемая мера деформации C_{ij} позволяет предсказать нетривиальные нелинейные эффекты – спонтанное удлинение и укорочение нематического эластомера, а также позволяет записать выражение для его свободной энергии.

Последующее развитие теории нелинейных больших упругих деформаций эластомеров с ориентационным порядком связано с численным расчетом конфигурационного интеграла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
2. Weiner I.M. Statistical Mechanics of Elasticity. – N.Y. Dover publications, 2002. – 439 p.
3. Warner M. and Terentjev E.M. Liquid Crystal Elastomers. – N.Y. Oxford, Claredon press, 2003. – 407 p.
4. Немцов В.Б. Метод максимума информационной энтропии нелинейной упругости деформированных тел в лагранжевых переменных. // Теор. и прикл. механика. – 2004.– вып. 17. – С. 30–33.

ИЗГИБ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОТОКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Куликов И.С.

Использование потоков заряженных частиц в разнообразных процессах металлургии и обработки материалов ставит проблемы, связанные с теплофизическими, механическими и химическими явлениями, происходящими в телах [1-5]. При изучении этих проблем на первом этапе решается тепловая задача, затем при известном температурном поле рассчитываются механические и химические характеристики. Одновременно при воздействии пучка заряженных частиц высокой энергии на тела возникает высокое импульсное давление, которое в значительной степени их деформирует. Если таким телом является тонкая пластинка, то воздействие потока заряженных частиц может привести к ее изгибу, возникновению значительных изгибных напряжений и деформаций с последующим разрушением.

Предположим, что давление $q(x, y, t) = L(\phi, t)f(x, y)$, возникающее на поверхности тонкой прямоугольной пластины при воздействии на нее импульсного пучка заряженных частиц, известно и определяется на основе имеющихся эмпирических зависимостей, полученных в результате физических экспериментов. Тогда изгиб тонкой пластины, вызванный импульсным воздействием, описывается следующим уравнением:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q(x, y, t) = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где w – прогиб пластины;

ρ – плотность материала пластины;

h – толщина пластины;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость;

E – модуль упругости материала пластины;

ν – коэффициент Пуассона;

t – время;

ϕ – поток заряженных частиц.

Возникающие в пластине деформации и напряжения имеют вид:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y); \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x); \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy}.$$

Начальные условия примем следующими

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (3)$$

Граничные условия запишем для двух вариантов закрепления пластины:

1 вариант – жесткое закрепление

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, a \quad (4)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, b$$

2-й вариант – свободное закрепление

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, a \quad (5)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, b$$

Если при решении задачи учитываются неупругие деформации, вызванные нагревом и облучением, уравнение (1) будет иметь вид [6]

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \left(\frac{\partial^2 M_{11H}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12H}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22H}}{\partial y^2} \right) - q(x, y, t) = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (6)$$

где

$$M_{11H} = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E(T, \phi, t) (\epsilon_x^H + \nu \epsilon_y^H) Z dZ,$$

$$M_{22H} = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E(T, \phi, t) (\epsilon_y^H + \nu \epsilon_x^H) Z dZ,$$

$$M_{12H} = \frac{1}{1+\nu} \int_{-h/2}^{h/2} E(T, \phi, t) \epsilon_{xy}^H Z dZ,$$

$T(x, y, t)$ - температурное поле в пластинке, ϕ - поток заряженных частиц, t - время,

$\epsilon_{xx}^H, \epsilon_{yy}^H, \epsilon_{xy}^H$ - неупругие деформации (термическое расширение, пластичность, ползучесть),

$$\epsilon_{sk}^H = \epsilon_{sk}^T + \epsilon_{sk}^P + \epsilon_{sk}^C,$$

где $s, k = x, y$,

ϵ_{sk}^T - деформация термического расширения,

ϵ_{sk}^P - мгновенные пластические деформации,

ϵ_{sk}^C - деформации ползучести.

Деформации термического расширения при известном поле температур $T(x,y,t)$ определяются как

$$\varepsilon_{xx}^T = \varepsilon_{yy}^T = \alpha T(x, y, t) \quad (7)$$

$$\varepsilon_{xy}^T = 0.$$

Для определения мгновенных пластических деформаций используем теорию течения, согласно которой приращения пластической деформации $d\varepsilon_{sk}^P$ имеют вид

$$d\varepsilon_{sk}^P = S_{sk} d\chi, \quad (8)$$

где $S_{sk} = \sigma_{sk} - \delta_{sk} \sigma$ - компоненты девиатора напряжений, $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ - компонента шарового тензора напряжений, σ_{sk} - компоненты тензора напряжений ($s, k = x, y$).

$$d\chi = F_{\sigma}(\sigma_u, T, \phi, t) d\sigma_u + F_T(\sigma_u, T, \phi, t) dT + F_{\phi}(\sigma_u, T, \phi, t) d\phi \quad (9)$$

С учетом (8) получим

$$d\varepsilon_{sk}^P = [F_{\sigma} d\sigma_u + F_T dT + F_{\phi} d\phi] S_{sk}$$

Здесь

$$F_{\sigma} = \frac{3}{2\sigma_u} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) - \text{силовая функция пластичности,}$$

$$F_T = \frac{3}{2\sigma_u} \left(\beta + \frac{\sigma_u}{E^2} \frac{dE}{dT} \right) - \text{тепловая функция пластичности,}$$

$$F_{\phi} = \frac{3}{2\sigma_u} J - \text{радиационная функция пластичности,}$$

$\phi = \Phi$ - флюенс заряженных частиц,

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + 6\sigma_{xy}^2} - \text{интенсивность напряжений;}$$

$E_k(\sigma_u, T, \phi, t)$ - касательный модуль материала пластины;

$\beta(\sigma_u, T, \phi, t)$ - коэффициент температурной податливости материала пластины;

$J(\sigma_u, T, \phi, t)$ - коэффициент радиационной податливости материала пластины.

Для определения деформации ползучести предполагаем, что

$$\dot{\varepsilon}_u^c = f(\sigma_u, T, \phi, t),$$

где $\dot{\varepsilon}_u^c = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{sk}^c \dot{\varepsilon}_{sk}^c}$ - интенсивность скоростей деформаций ползучести.

$$d\varepsilon_{sk}^c = \dot{\varepsilon}_{sk}^c dt$$

$$\dot{\varepsilon}_{sk}^c = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_u^c}{\sigma_u} S_{sk} \quad (10)$$

Рассмотрим численное решение задачи, используя метод конечных разностей. Разделим уравнение (6) на $-\rho h$.

Тогда получим

$$C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f,$$

$$\text{где } C_1 = -\frac{D}{\rho h}, \quad f = -\frac{q(x, y, t)}{\rho h} - 2C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{1}{\rho h} \left(\frac{\partial^2 M_{11H}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12H}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22H}}{\partial y^2} \right).$$

Введем в области $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $t \geq 0$ равномерную по каждой переменной сетку (рис 1)

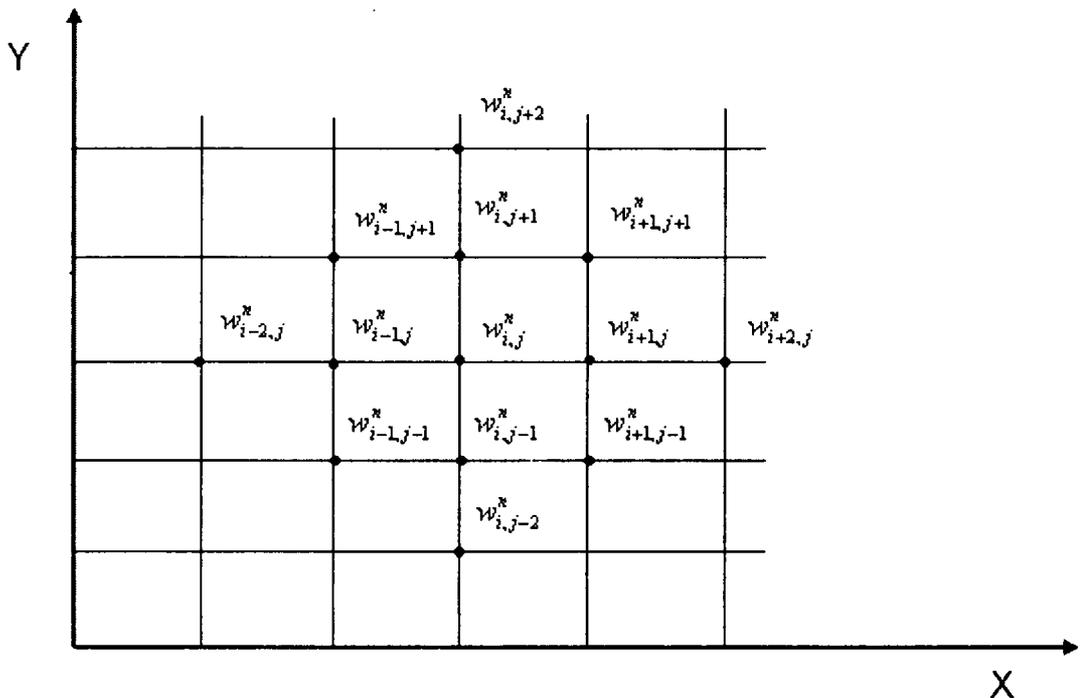


Рис.1.

$$x_i = (i-1)h_x, \quad y_j = (j-1)h_y, \quad t_n = n\tau$$

$$(i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, M; \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$w_{ij}^n = w(x_i, y_j, t_n)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\Lambda_x^2 w_{ij}^n &= (w_{i+2,j}^n - 4w_{i+1,j}^n + 6w_{i,j}^n - 4w_{i-1,j}^n + w_{i-2,j}^n) / h_x^4 \\ \Lambda_y^2 w_{ij}^n &= (w_{i,j+2}^n - 4w_{i,j+1}^n + 6w_{i,j}^n - 4w_{i,j-1}^n + w_{i,j-2}^n) / h_y^4\end{aligned}\quad (11)$$

Тогда

$$(C_1 \Lambda_x^2 + C_1 \Lambda_y^2) w_{i,j}^n = \frac{w_{i,j}^{n+1} - 2w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n-1}}{\tau^2} + f_{ij}^n$$

Введем $w_{i,j}^n = \alpha w_{i,j} + \beta w_{i,j}^{n-1}$, ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$) для $w_{i,j}^n$ в левой части равенства.

Тогда

$$\tau^2 (C_1 \Lambda_x^2 + C_1 \Lambda_y^2) (\alpha w_{i,j}^{n+1} + \beta w_{i,j}^{n-1}) = w_{i,j}^{n+1} - 2w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n-1} + \tau^2 f_{ij}^n \quad (12)$$

Используем «единичный оператор» $I w_{i,j}^n = w_{i,j}^n$:

$$(I - \alpha C_1 \tau^2 \Lambda_x^2 - \alpha C_1 \tau^2 \Lambda_y^2) w_{ij}^{n+1} = F_{ij}, \quad (13)$$

где F_{ij} - все на слое n и $n-1$.

Тогда

$$(I - \alpha C_1 \tau^2 \Lambda_x^2 - \alpha C_1 \tau^2 \Lambda_y^2) w_{ij}^{n+1} = F_{ij} \quad (14)$$

можно записать

$$(I - \alpha C_1 \tau^2 \Lambda_x^2)(I - \alpha C_1 \tau^2 \Lambda_y^2) w_{ij}^{n+1} = F_{ij} \quad (15)$$

Введем промежуточные сеточные функции при помощи следующих соотношений

$$(I - \alpha C_1 \tau^2 \Lambda_x^2) w_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = F_{ij} \quad (16)$$

Тогда

$$(I - \alpha C_1 \tau^2 \Lambda_y^2) w_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = w_{ij}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Решение задачи распадается на два этапа. На первом дробном шаге решается группа одномерных задач по одной из переменных, на втором шаге – по второй переменной.

Разностные граничные условия для нахождения $w_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$:

$$3w_{1j}^{n+\frac{1}{2}} - 4w_{2j}^{n+\frac{1}{2}} + w_{3j}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad w_{1j}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad (j = 1, \dots, M) \quad (17)$$

$$3w_{Nj}^{n+\frac{1}{2}} - 4w_{N-1j}^{n+\frac{1}{2}} + w_{iN-2}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad w_{iN}^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

Разностные граничные условия для нахождения w_{ij}^{n+1} будут иметь вид:

$$3w_{i1}^{n+1} - 4w_{i2}^{n+1} + w_{i3}^{n+1} = 0, \quad w_{ij}^{n+1} = 0, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (18)$$

$$3w_{iM}^{n+1} - 4w_{iM-1}^{n+1} + w_{iM-2}^{n+1} = 0, \quad w_{iM}^{n+1} = 0.$$

Из начальных условий следует, что

$$w_{ij}^0 = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, M,$$

$$w_{ij}^1 = w_{ij}^0 + \tau \frac{\partial w}{\partial t}(0) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0) + O(\tau^3),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0) = 0 - \text{задано,}$$

$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0)$ определяется из дифференциального уравнения для $i = 3, \dots, N-2; j = 3, \dots, M-2$.

Для остальных i и j значения w_{ij}^1 находятся из граничных условий с использованием уже найденных w_{ij}^1 .

Таким образом по каждой переменной x или y мы приходим к системам линейных алгебраических уравнений с 5-диагональной матрицей, которые решаются методом прогонки.

Деформации термического расширения, пластичности и ползучести определяем по схемам, изложенным в [6], сущность которых состоит в решении системы разностных уравнений для w_{ij} на каждом этапе нагружения ровно столько раз, сколько это необходимо, чтобы достичь необходимую точность при вычислении ε_{sk}^P и ε_{sk}^C , после чего осуществляется переход на следующий этап.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуллер Л.В., Бушман А.В., Жерноклетов М.В. и др. «Изоэнтропии разгрузки и уравнение состояния металлов при высоких плотностях энергии». // ЖЭТФ – 1980. т. 78. №2. – С. 743 - 760.
2. Давыдов А.А., Калинин А.И. «Механические эффекты вблизи ионных треков и термических пиков» // Проблемы ядерной физики космических лучей. – 1986. №26. – С. 60 - 64.
3. Романов Г.С., Сузденков М.В., Тетерев А.В., Фоков Г.А. Теоретическая модель взаимодействия сильнооточного релятивистского электронного пучка с металлической преградой ИФЖ. – 1984. т. 18. №6. – С. 952 - 956.
4. Романов Г.С., Сузденков М.В. Динамика кратерообразования при действии сильнооточных пучков заряженных частиц на металлическую преграду. – Докл. АН БССР. – 1982. т. 62. – С. 496-499.
5. Динс Д., Уолли Д., Теория удара. – В кн.: Высокоскоростные ударные явления. М.: Мир, 1973. – С. 48-111.
6. Куликов И.С. Нестеренко В.Б., Тверковкин Б.Е. Прочность элементов конструкций при облучении. Мн.: Навука і тэхніка, 1990. – 144 с.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Сулейман М.

Bending of ring sandwich plate with light filler lying on elastic foundation is considered. For the description of kinematics of package with asymmetrical thickness the broken normal hypothesis was accepted. Reaction of foundation was described on the base of Winkler's model. Combined equations of equilibrium and analytical solutions via displacement were received. Numerical solutions for sandwich metal-polymeric plate were adduced.

Введение. Широкое применение в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности (авиа-, ракетостроение, транспортное машиностроение, реакторное оборудование) находят слоистые композитные элементы конструкций. Деформирование трехслойных систем не связанных с упругим основанием различного рода нагрузками описано в монографиях [1–3]. Изгиб сплошных круговых трехслойных пластин с легким наполнителем на упругом основании равномерно распределенной нагрузкой изучен в [4]. Контактное взаимодействие тел с круговыми границами исследовано в [5]. Здесь рассмотрена поперечно нагруженная упругая кольцевая трехслойная пластина на деформируемом основании, как это имеет место, например, в настилах, и др. элементах механических систем.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z . Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к радиусу внешнего контура r_1 , через h_k обозначена относительная толщина k -го слоя. Для изотропных несущих слоев, толщиной h_1, h_2 , приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине наполнитель ($h_3 = 2c$) легкий, т. е. в нем пренебрегается работа напряжений σ_{rz} в тангенциальном направлении. Вертикальная нагрузка $q_0(r)$ распределена по внешней поверхности пластины (рис. 1). На границах слоев перемещения непрерывны. На внешнем и внутреннем контурах пластины, радиусы которых r_0 и $r_1 = 1$, предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

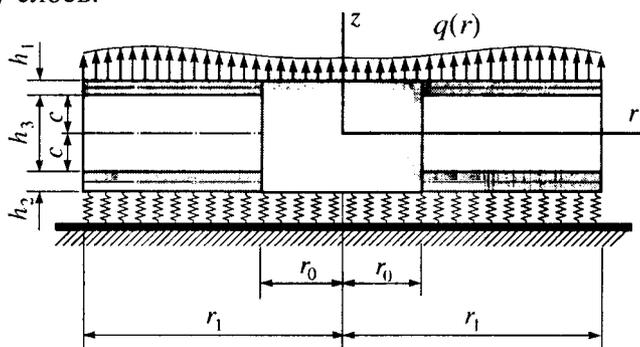


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной кольцевой пластины на упругом основании

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в наполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ , т. е. $u(r), \psi(r), w(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми.

Используя гипотезу прямолинейности нормали наполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)},_z + w_{,r} = \psi$, после интегрирования получим выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \quad u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна (расстояние до срединной плоскости наполнителя), $(u + c\psi)$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации наполнителя,

ля, $(u - c\psi)$ – смещение второго несущего слоя, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из выражений (1) из соотношений Коши $2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(u + z\psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\psi.\end{aligned}\quad (2)$$

Предполагается, что связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями линейной теории упругости в девиаторно-шаровой форме:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi), \quad (3)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ и $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций, G_k , K_k – модули сдвига и объемного деформирования.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)} = s_\alpha^{(k)} + \sigma^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}). \quad (4)$$

Уравнения равновесия круговой трехслойной пластины выводятся из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A - \delta W = 0, \quad (5)$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – вариация суммарной работы внешних нагрузок $q_0(r)$, реакции основания q_R , и контурных усилий T_r^n , H_r^n , M_r^n , Q^n на внутреннем $n = 0$ и внешнем $n = 1$ контурах:

$$\delta A_1 = \iint_S (q_0 - q_R) \delta w r dr d\varphi, \quad \delta A_2 = \sum_0^{2\pi} \int (T_r^n \delta u + H_r^n \delta \psi + M_r^n \delta w_{,r} + Q^n \delta w) d\varphi,$$

δW – вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi. \quad (6)$$

Здесь интеграл распространен по всей срединной поверхности заполнителя S , $dS = r dr d\varphi$.

Вариации перемещений и деформаций в слоях стержня следуют из (1) и соотношений Коши. Подставив их в (6) и учитывая выражения для внутренних усилий (4) после соответствующих преобразований из вариационного уравнения (5) получим систему дифференциальных уравнений в усилиях, описывающую равновесие рассматриваемой круговой трехслойной пластины на упругом основании:

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = -p, \quad H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0, \quad M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q_0 + q_R. \quad (7)$$

На контурах пластины ($r = r_0$ и $r = 1$) должны выполняться силовые условия

$$T_r = T_r^n, \quad H_r = H_r^n, \quad M_r = M_r^n, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^n.$$

Связь между реакцией основания и прогибом пластины принимается в соответствии с моделью Винклера (Winkler E.), согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w, \quad (8)$$

где κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

Получим выражение обобщенных усилий, входящих в (7), через три искомые функции $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$. Для этого подставим в (4) выражение напряжений через деформации (3), а затем деформаций через перемещения (2). В результате

$$\begin{aligned}
T_r &= \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-) + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\psi}{r} - \\
&- \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] w_{,rr} - \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{w_{,r}}{r}. \\
M_r &= \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\
&+ \left[c K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\
&+ \left[c K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\
&- \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\
&- \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}, \\
H_r &= c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) u_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{u}{r} + \\
&+ \left[c^2 (K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \left[c^2 (K_1^- h_1 + K_2^- h_2) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\
&- \left[c \left(K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\
&- \left[c \left(K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}. \tag{9}
\end{aligned}$$

Соотношения для T_ϕ , M_ϕ , H_ϕ следуют из формул для T_r , M_r , H_r , если в (9) поменять местами K_k^+ и K_k^- , где $K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+$, $K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-$.

После подстановки выражений (8), (9) в (7), получим систему дифференциальных уравнений в перемещениях, описывающую изгиб кольцевой трехслойной пластины с легким наполнителем на упругом основании:

$$\begin{aligned}
L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0, \\
L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w &= -q_0, \tag{10}
\end{aligned}$$

где q_0 – интенсивность внешней распределенной нагрузки,

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+, \\
a_4 &= c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), \quad a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\
a_6 &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \\
L_2(g) &\equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \quad L_3(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (r g)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}.
\end{aligned}$$

Задача отыскания функций $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$ замыкается присоединением к (10) граничных условий. При жесткой заделке контуров пластины ($r = r_0, 1$)

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0. \quad (11)$$

При шарнирном опирании контуров ($r = r_0, 1$)

$$u = \psi = w = M_r = 0. \quad (12)$$

В случае свободного контура ($r = r_0$, или $r = 1$)

$$\psi = 0, T_r = M_r = M_{r,r} = 0. \quad (13)$$

Для решения системы (10) с помощью первых двух ее уравнений в третьем уравнении обнуляем коэффициенты перед функциями u и ψ . Затем, после двукратного интегрирование этих уравнений система приводится к виду

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r, \\ w_{,rrr} + \frac{2}{r} w_{,rr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} + \kappa^4 w &= q, \end{aligned} \quad (14)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы интегрирования,

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q = q_0 D,$$

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Общее решение третьего уравнения в (14):

$$w = C_5 \operatorname{ber}(\kappa r) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r) + C_7 \operatorname{ker}(\kappa r) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r) + w_0, \quad (15)$$

где функции Кельвина нулевого порядка $\varphi_n(\kappa r) = \operatorname{ber}(\kappa r), \operatorname{bei}(\kappa r), \operatorname{ker}(\kappa r), \operatorname{kei}(\kappa r)$ образуют фундаментальную систему решений [6], w_0 – частное решение уравнения (14).

Если на пластину действует равномерно распределенная по всей ее поверхности нагрузка интенсивностью $q_0 = \text{const}$, то частное решение имеет вид

$$w_0 = \frac{q}{\kappa^4} = \frac{q_0}{\kappa_0}. \quad (16)$$

В итоге из (14) с учетом (15), (16) получаем искомые перемещения в упругой трехслойной кольцевой пластине, связанной с деформируемым основанием:

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r, \\ w &= C_5 \operatorname{ber}(\kappa r) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r) + C_7 \operatorname{ker}(\kappa r) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r) + \frac{q_0}{\kappa_0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Константы интегрирования C_1, C_2, \dots, C_8 , соответствующие в наиболее общем случае восьми граничным условиям, определяются в каждом частном случае закрепления внешнего и внутреннего контуров пластины.

В дальнейшем нам понадобятся выражения первых двух производных прогиба и их значения на граничных контурах. В соответствии с правилом дифференцирования функций Кельвина [7] производная от прогиба в (17) будет следующей:

$$\begin{aligned} w_{,r} &= \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} \{C_5 [\operatorname{ber}_1(\kappa r) + \operatorname{bei}_1(\kappa r)] + C_6 [-\operatorname{ber}_1(\kappa r) + \operatorname{bei}_1(\kappa r)] + \\ &+ C_7 [\operatorname{ker}_1(\kappa r) + \operatorname{kei}_1(\kappa r)] + C_8 [-\operatorname{ker}_1(\kappa r) + \operatorname{kei}_1(\kappa r)]\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Ее значения на внешнем $r = 1$ и внутреннем $r = r_0$ контурах пластины

$$w_{,r}(1) = b_3 C_5 + b_4 C_6 + b_{30} C_7 + b_{40} C_8, \quad w_{,r}(r_0) = b_{31} C_5 + b_{41} C_6 + b_{32} C_7 + b_{42} C_8, \quad (19)$$

где

$$b_3 = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\operatorname{ber}_1 \kappa + \operatorname{bei}_1 \kappa], \quad b_4 = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [-\operatorname{ber}_1 \kappa + \operatorname{bei}_1 \kappa], \quad b_{30} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\operatorname{ker}_1 \kappa + \operatorname{kei}_1 \kappa],$$

$$b_{40} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [-\ker_1 \kappa + \operatorname{kei}_1 \kappa], \quad b_{31} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\operatorname{ber}_1(\kappa r_0) + \operatorname{bei}_1(\kappa r_0)], \quad b_{41} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [-\operatorname{ber}_1(\kappa r_0) + \operatorname{bei}_1(\kappa r_0)],$$

$$b_{32} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\ker_1(\kappa r_0) + \operatorname{kei}_1(\kappa r_0)], \quad b_{42} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [-\ker_1(\kappa r_0) + \operatorname{kei}_1(\kappa r_0)].$$

Дифференцируя по радиусу первую производную (18), получаем вторую производную:

$$w_{,rr} = \frac{\kappa^2}{2} \{C_5 [\operatorname{bei}_2(\kappa r) - \operatorname{bei}(\kappa r)] + C_6 [-\operatorname{ber}_2(\kappa r) + \operatorname{ber}(\kappa r)] +$$

$$+ C_7 [\operatorname{kei}_2(\kappa r) - \operatorname{kei}(\kappa r)] + C_8 [-\ker_2(\kappa r) + \ker(\kappa r)]\}. \quad (20)$$

Значение второй производной (20) на контурах ($r = 1, r = r_0$):

$$w_{,rr}(1) = b_5 C_5 + b_6 C_6 + b_{50} C_7 + b_{60} C_8,$$

$$w_{,rr}(r_0) = b_{51} C_5 + b_{61} C_6 + b_{52} C_7 + b_{62} C_8, \quad (21)$$

где

$$b_5 = \kappa^2 (\operatorname{bei}_2 \kappa - \operatorname{bei} \kappa) / 2, \quad b_6 = \kappa^2 (-\operatorname{ber}_2 \kappa + \operatorname{ber} \kappa) / 2,$$

$$b_{50} = \kappa^2 (\operatorname{kei}_2 \kappa - \operatorname{kei} \kappa) / 2, \quad b_{60} = \kappa^2 (-\ker_2 \kappa + \ker \kappa) / 2,$$

$$b_{51} = \kappa^2 (\operatorname{bei}_2(\kappa r_0) - \operatorname{bei}(\kappa r_0)) / 2, \quad b_{61} = \kappa^2 (-\operatorname{ber}_2(\kappa r_0) + \operatorname{ber}(\kappa r_0)) / 2,$$

$$b_{52} = \kappa^2 (\operatorname{kei}_2(\kappa r_0) - \operatorname{kei}(\kappa r_0)) / 2, \quad b_{62} = \kappa^2 (-\ker_2(\kappa r_0) + \ker(\kappa r_0)) / 2.$$

При *жесткой заделке обеих контуров* пластины решение (17) необходимо подставить в (11). В результате, с учетом (19) и того, что значения производной прогиба на контурах пластины равны нулю, получаем линейную систему из восьми алгебраических уравнений

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 r_0 + C_2 / r_0 = 0, \quad C_3 + C_4 = 0, \quad C_3 r_0 + C_4 / r_0 = 0,$$

$$C_5 \operatorname{ber} \kappa + C_6 \operatorname{bei} \kappa + C_7 \ker \kappa + C_8 \operatorname{kei} \kappa = -q_0 / \kappa_0,$$

$$C_5 \operatorname{ber}(\kappa r_0) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r_0) + C_7 \ker(\kappa r_0) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r_0) = -q_0 / \kappa_0,$$

$$b_3 C_5 + b_4 C_6 + b_{30} C_7 + b_{40} C_8 = 0, \quad b_{31} C_5 + b_{41} C_6 + b_{32} C_7 + b_{42} C_8 = 0. \quad (22)$$

Отсюда следуют константы интегрирования

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0, \quad C_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta}, \quad C_6 = \frac{\Delta_6}{\Delta}, \quad C_7 = \frac{\Delta_7}{\Delta}, \quad C_8 = \frac{\Delta_8}{\Delta}, \quad (23)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{ber} \kappa & \operatorname{bei} \kappa & \ker \kappa & \operatorname{kei} \kappa \\ \operatorname{ber}(\kappa r_0) & \operatorname{bei}(\kappa r_0) & \ker(\kappa r_0) & \operatorname{kei}(\kappa r_0) \\ b_3 & b_4 & b_{30} & b_{40} \\ b_{31} & b_{41} & b_{32} & b_{42} \end{vmatrix},$$

а остальные определители получаются из приведенного заменой столбца, соответствующего нижнему индексу, на столбец свободных членов из правой части системы (22).

Если *оба контура пластины шарнирно оперты*, то решение (17) необходимо подставить в (12). В результате только пятое и шестое уравнения из системы (22) сохраняют свой вид:

$$C_1 + C_2 + b_1 (b_3 C_5 + b_4 C_6 + b_{30} C_7 + b_{40} C_8) = 0,$$

$$C_1 r_0 + C_2 / r_0 + b_1 (b_{31} C_5 + b_{41} C_6 + b_{32} C_7 + b_{42} C_8) = 0,$$

$$C_3 + C_4 + b_2 (b_3 C_5 + b_4 C_6 + b_{30} C_7 + b_{40} C_8) = 0,$$

$$C_3 r_0 + C_4 / r_0 + b_2 (b_{31} C_5 + b_{41} C_6 + b_{32} C_7 + b_{42} C_8) = 0,$$

$$C_5 \operatorname{ber} \kappa + C_6 \operatorname{bei} \kappa + C_7 \ker \kappa + C_8 \operatorname{kei} \kappa = -q_0 / \kappa_0,$$

$$C_5 \operatorname{ber}(\kappa r_0) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r_0) + C_7 \ker(\kappa r_0) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r_0) = -q_0 / \kappa_0,$$

$$\begin{aligned} a_3 C_1 - a_3 C_2 + a_5 C_3 - a_5 C_4 + b_{71} C_5 + b_{72} C_6 + b_{73} C_7 + b_{74} C_8 &= 0, \\ a_3 C_1 - a_3 C_2 + a_5 C_3 - a_5 C_4 + b_{81} C_5 + b_{82} C_6 + b_{83} C_7 + b_{84} C_8 &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} b_{71} &= b_5 [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_3, & b_{72} &= b_6 [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_4, \\ b_{73} &= b_{50} [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_{30}, & b_{74} &= b_{60} [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_{40}, \\ b_{81} &= b_{51} [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_{31}, & b_{82} &= b_{61} [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_{41}, \\ b_{83} &= b_{50} [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_{30}, & b_{84} &= b_{62} [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_{42}. \end{aligned}$$

В результате решения системы линейных алгебраических уравнений (24) получаем константы интегрирования

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad C_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad C_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad C_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta}, \quad C_6 = \frac{\Delta_6}{\Delta}, \quad C_7 = \frac{\Delta_7}{\Delta}, \quad C_8 = \frac{\Delta_8}{\Delta}, \quad (25)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 b_3 & b_1 b_4 & b_1 b_{30} & b_1 b_{40} \\ r_0 & 1/r_0 & 0 & 0 & b_1 b_{31} & b_1 b_{41} & b_1 b_{32} & b_1 b_{42} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_2 b_3 & b_2 b_4 & b_2 b_{30} & b_2 b_{40} \\ 0 & 0 & r_0 & 1/r_0 & b_2 b_{31} & b_2 b_{41} & b_2 b_{32} & b_2 b_{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{ber } \kappa & \text{bei } \kappa & \text{ker } \kappa & \text{kei } \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{ber}(\kappa r_0) & \text{bei}(\kappa r_0) & \text{ker}(\kappa r_0) & \text{kei}(\kappa r_0) \\ a_3 & -a_3 & a_5 & -a_5 & b_{71} & b_{72} & b_{73} & b_{74} \\ a_3 & -a_3 & a_5 & -a_5 & b_{81} & b_{82} & b_{83} & b_{84} \end{vmatrix},$$

а остальные определители получаются из приведенного заменой столбца, соответствующего нижнему индексу, на столбец свободных членов из правой части системы (24).

Если *внутренний контур пластины заделан, а внешний свободен*, то решение (17) необходимо подставить в (11) при $r = r_0$ и в (13) при $r = 1$.

Таким образом, решение (17) с константами интегрирования (23), (25) описывает перемещения в кольцевой трехслойной пластине на упругом основании в случае заделки или шарнирного опирания ее обоих контуров.

Численные исследования проводились для защемленной по граничным контурам пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [3]. Геометрические параметры пластины, отнесенные к ее радиусу r_1 : $r_0 = 0,2$; $h_1 = h_2 = 0,04$, $h_3 = 0,4$.

Рис. 2 иллюстрирует зависимость максимального прогиба кольцевой пластины от коэффициента жесткости основания κ_0 .

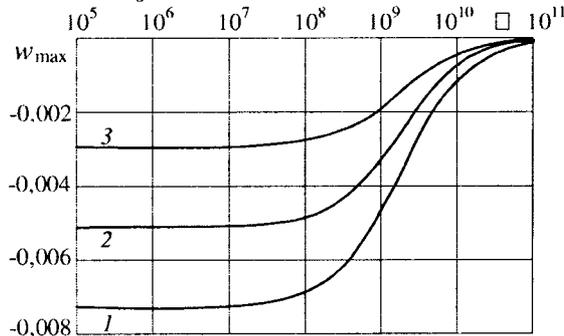


Рис. 2. Максимальный прогиб кольцевой пластины в зависимости от коэффициента постели κ_0

Для слабых оснований ($\kappa_0 \leq 10$ МПа/м) влияние жесткости на прогиб незначительно. При основаниях средней жесткости ($\kappa_0 = 10 \dots 1000$) происходит резкое уменьшение проги-

ба. В случае основания высокой жесткости ($\kappa_0 > 1000$), величина прогиба мала и стабильна. Кривые рассчитаны при различных значениях интенсивности распределенной нагрузки (МПа): 1 – $q_0 = -10$, 2 – $q_0 = -7$, 3 – $q_0 = -4$.

Изменение перемещений по радиусу кольцевой пластины показано на рис. 3 (а – прогиб, б – сдвиг в заполнителе) при различных радиусах отверстия: 1 – $r_0 = 0,2$; 2 – $r_0 = 0,4$; 3 – $r_0 = 0,6$. Величины перемещений убывают нелинейно за счет уменьшения результирующей нагрузки и увеличения жесткости кольцевой пластины. Здесь и далее принято основание средней жесткости с коэффициентом постели $\kappa_0 = 1000$ МПа/м, $q_0 = -1$ МПа.

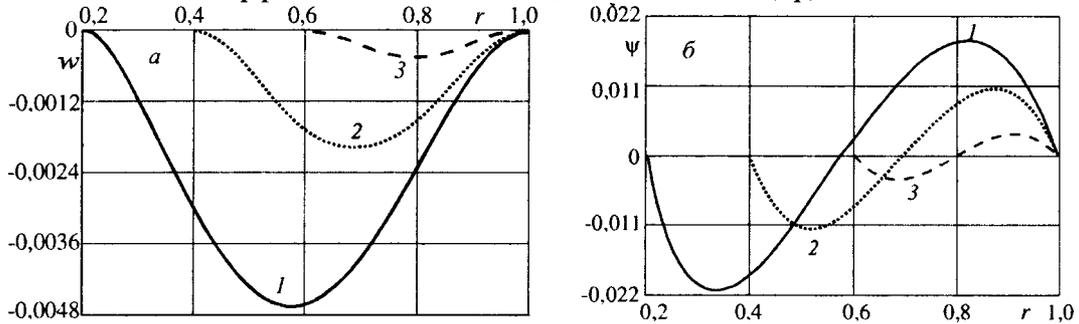


Рис. 3. Изменение перемещений по радиусу кольцевой пластины

Рис. 4 посвящен исследованию радиальных напряжений на граничных плоскостях слоев кольцевой трехслойной пластины, покоящейся на основании малой ($\kappa = 100$ МПа/м, сплошные кривые) и высокой ($\kappa = 10000$ МПа/м, пунктир) жесткости. В несущих слоях значения напряжений уменьшены в 10^9 , в заполнителе – в 10^8 раз. Интенсивность внешней нагрузки принята $q = -10$ МПа, радиус внутреннего граничного контура $r_0 = 0,2$.

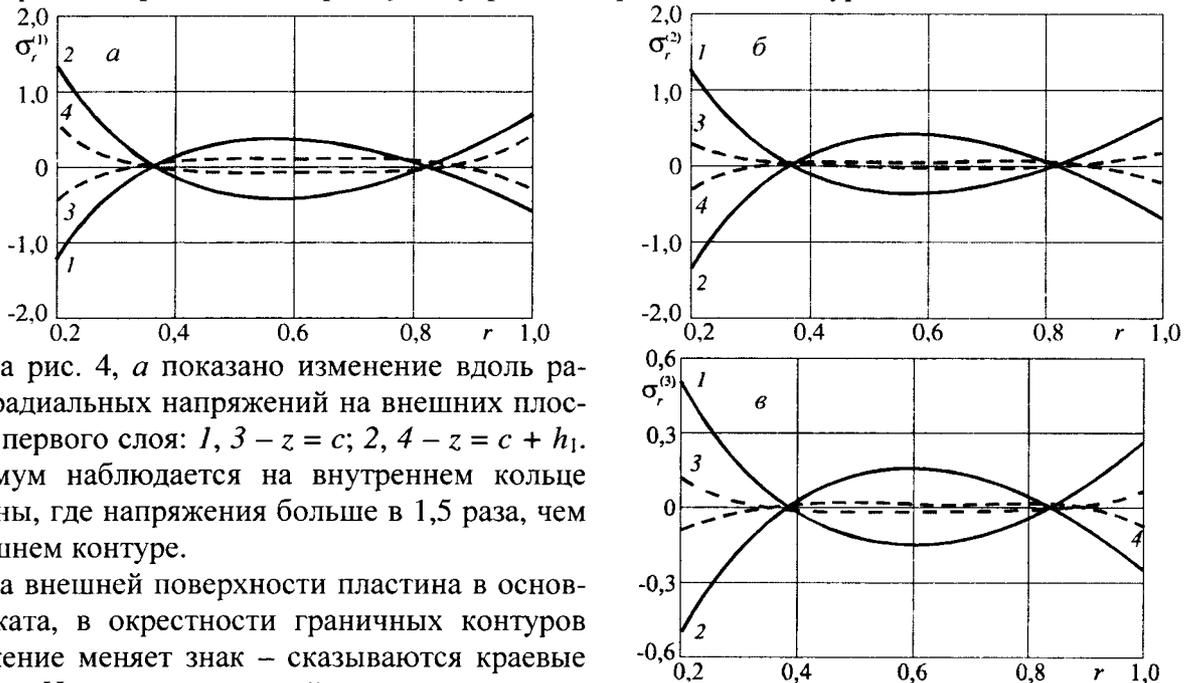


Рис. 4. Изменение радиальных напряжений на внешних плоскостях первого (а), второго (б) слоев и заполнителя (в)

На рис. 4, а показано изменение вдоль радиуса радиальных напряжений на внешних плоскостях первого слоя: 1, 3 – $z = c$; 2, 4 – $z = c + h_1$. Максимум наблюдается на внутреннем кольце пластины, где напряжения больше в 1,5 раза, чем на внешнем контуре.

На внешней поверхности пластины в основном сжата, в окрестности граничных контуров напряжение меняет знак – сказываются краевые эффекты. На плоскости склейки с заполнителем напряжения ведут себя подобным образом, имея противоположные знаки.

При основании высокой жесткости напряжения везде уменьшаются по модулю, оставаясь того же знака. Максимальное значение на внутреннем контуре уменьшается в 2,6 раза.

Во втором несущем слое, связанном с основанием, радиальные напряжения на внешних плоскостях приведены на рис. 4, б: 1, 3 – $z = -c - h_2$; 2, 4 – $z = -c$. Их поведение такое же, как и в первом слое, с точностью до знака. При основании высокой жесткости они везде уменьшаются по модулю.

На внешних плоскостях заполнителя (1, 3 – $z = -c$; 2, 4 – $z = c$) максимальные радиальные напряжения примерно в 30 раз меньше, чем в несущих слоях, но их поведение при увеличении коэффициента постели аналогично (рис. 4, в).

Касательные напряжения в заполнителе (рис. 5) при переходе от слабых – 1 к весьма жестким основаниям – 2 уменьшаются примерно в 6 раз. Максимумы немного сдвигаются к внешним контурам пластины, на которых касательные напряжения равны нулю.

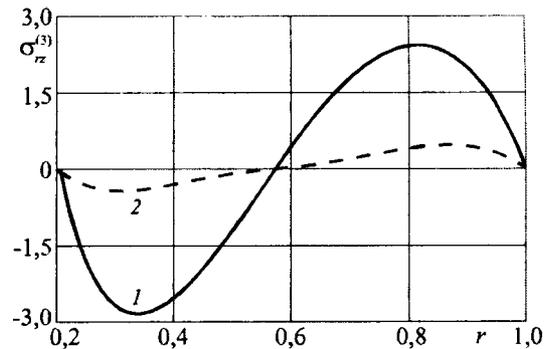


Рис. 5. Изменение касательных напряжений в заполнителе

На рис. 6 показано изменение радиальных σ_r – 1 и окружных σ_ϕ – 2 напряжений по толщине пластины на ее внешнем – а и внутреннем – б контурах соответственно. Коэффициент жесткости основания $k = 1000$ МПа / м (здесь и далее). На внешнем контуре верхние части несущих слоев сжаты, заполнителя – растянуты (в силу краевого эффекта). На внутреннем контуре – наоборот. В склейках слоев напряжения имеют одинаковые знаки, но терпят разрыв из-за различных механических характеристик материалов. Картина напряжений симметрична в силу симметрии пластины по толщине. В обоих случаях наибольшие напряжения достигаются на внешних плоскостях пластины, при этом они равны по величине.

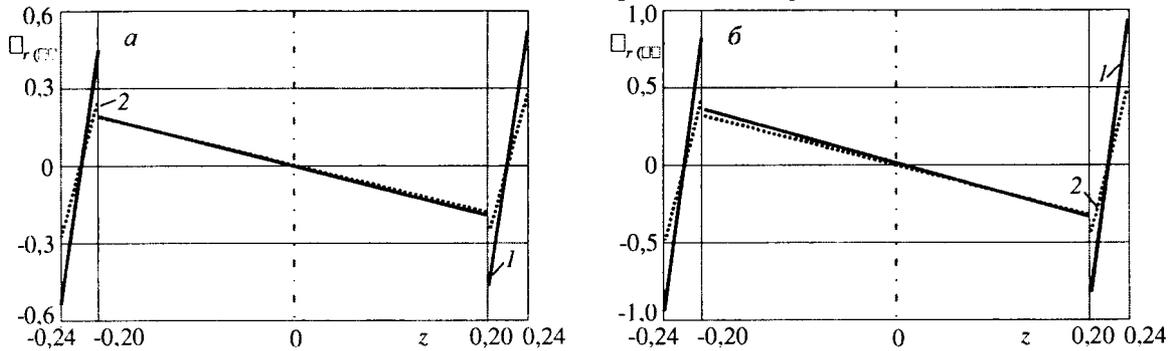


Рис. 6. Изменение радиальных – 1 и окружных – 2 напряжений по толщине пластины

Выводы. Приведенное в работе общее решение (17) можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба трехслойной кольцевой пластины с легким заполнителем на упругом основании, при различных способах закрепления ее внешнего и внутреннего контуров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
2. Плескачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Деформирование металлополимерных систем. – Мн.: Бел. наука, 2004. – 342 с.
3. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
4. Яровая А. В. Изгиб трехслойной круговой пластины на упругом основании // Проблемы прочности. – 2005. – № 6. – С. 68–78.
5. Кравчук А. С., Чигарев А. В. Механика контактного взаимодействия. – Мн.: Технопринт, 2000. – 196 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
7. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М., Стигана И. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

SOLVING THE OSCILLATING PIPE FLOW PROBLEM BY THE BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS METHOD¹

Sorko S.A., Karpovich S.E.

In the work, a solution to a problem of oscillatory flow of viscous incompressible liquid in a rectilinear pipe of circular section, completely filled with the liquid was presented. The way of solving flow generated by pressure pulsation and the pipe oscillation to the flow direction was also-discussed. The behaviour of the liquid for the selected spectrum of its frequency and viscosity-was further analysed.

1. Introduction

The phenomena of oscillatory flows in hydraulic systems and engineering devices is the important technical problem of designing mechanisms and engineering devices and technical problem of exploitation of hydraulic installations, fluid distribution networks also hydraulic systems of machine admission.

Oscillatory flows in the pipes may be generated by the pressure pulsation or by the oscillatory motion of walls enclosed the flux.

In many cases the phenomena of the oscillatory flows are undesirable because of generation water hammer effects and the cavitation effects. On the other hand the phenomena of oscillatory flows have engineering applications in technology for mixing of immiscible fluids and for aggregation of liquid substances.

Calculation the velocity flow field in conditions of pulsating pressure-driven flow and oscillatory channel motion-driven flow were presented below.

2. Equations of motion of viscous and incompressible fluid

Equations of motion of viscous and incompressible fluid in cylindrical coordinate system (R, θ, Z) (fig. 1.) has the form [1]:

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(\frac{\partial c_r}{\partial t} + c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{c_\theta}{r} \frac{\partial c_r}{\partial \theta} - \frac{c_\theta^2}{r} + c_z \frac{\partial c_r}{\partial z} \right) = \rho F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \\
 & + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rc_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 c_r}{\partial z^2} \right] \\
 & \rho \left(\frac{\partial c_\theta}{\partial t} + c_r \frac{\partial c_\theta}{\partial r} + \frac{c_\theta}{r} \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} + \frac{c_r c_\theta}{r} + c_z \frac{\partial c_\theta}{\partial z} \right) = \rho F_{m\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\
 & + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rc_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial c_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial z^2} \right] \\
 & \rho \left(\frac{\partial c_z}{\partial t} + c_r \frac{\partial c_z}{\partial r} + \frac{c_\theta}{r} \frac{\partial c_z}{\partial \theta} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} \right) = \rho F_{mz} - \frac{\partial p}{\partial z} + \\
 & + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} \right]
 \end{aligned} \tag{1}$$

where (ρ) is density of fluid and (μ) is the viscosity.

¹ Technical University of Białystok, Research Work S/IIŚ/21/05

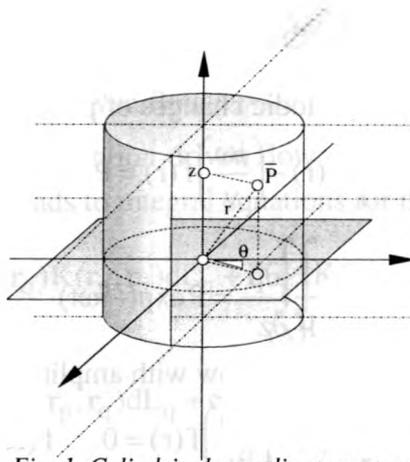


Fig. 1. Cylindrical coordinate system

The flow in straight conduits of circular shape is axisymmetrical flow (fig. 2.) and the radial and circumferential components of velocity are equal zero; $c_r = c_\theta = 0$,

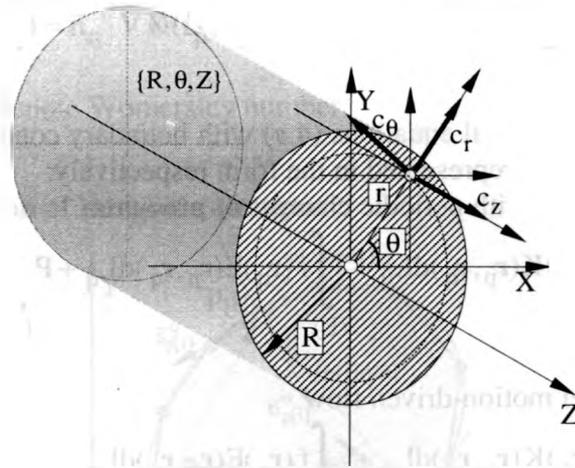


Fig. 2. Axi-symmetrical flow

therefore the motion of the fluid is described by equation for (c_z) component of the velocity:

$$\rho \left(\frac{\partial c_z}{\partial t} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} \right) = \rho F_{mz} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} \right] \quad (2)$$

Assuming that mass forces are negligible $F_{mz} = 0$ and $\frac{\partial c_z}{\partial z} = 0$; $\frac{1}{r} \frac{\partial c_z}{\partial \theta} = 0$ the differential equation describing the flow of viscid and incompressible fluid is obtained:

$$c_z = f(r, t) \quad \frac{\partial c_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 c_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_z}{\partial r} \right] \quad (3)$$

The velocity of the periodic flow may be described as the function [2]:

$$c_z(r, t) = f(r) \exp(-i\omega t) \quad (4)$$

The space and time derivatives of velocity are equal respectively:

$$\frac{\partial c_z}{\partial r} = \frac{df(r)}{dr} \exp(-i\omega t) \quad ; \quad \frac{\partial^2 c_z}{\partial r^2} = \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \exp(-i\omega t)$$

$$\frac{\partial c_z}{\partial t} = -i\omega f(r) \exp(-i\omega t)$$

so that, the differential equation describing the flow of viscid and incompressible fluid (3) in this case takes the forms:

– for pressure-driven flow with periodic changes of pressure $P \exp(-i\omega t)$:

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \left(\frac{i\omega}{\nu} \right) f(r) = P \quad f(R) = 0 \quad (4.a)$$

with boundary condition:

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = P \exp(-i\omega t) \quad (4.a^*)$$

– for oscillatory channel motion-driven flow with amplitude (c^*) and frequency (ω) :

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \left(\frac{i\omega}{\nu} \right) f(r) = 0 \quad f(R) = c^* \quad (4.b)$$

with boundary condition:

$$c_z(r, t) = c^* \exp(-i\omega t) \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (4.b^*)$$

3. Integral equations

The solutions of the differential equations (4.a) with boundary condition (4.a*) and (4.b) with boundary condition (4.b*) can be represented in the form respectively:

– for pressure-driven flow with periodic changes of pressure

$$f(\mathbf{r}_p) = - \int_{(L)} \bar{\mathbf{n}}_q \cdot f(\mathbf{r}_q) K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) dL_q + \int_{(L)} f(\mathbf{r}_q) E(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) dL_q + P \iint_{(\Lambda)} K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) d\Lambda_q \quad (5.a)$$

; $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in (\Lambda)$

– for oscillatory channel motion-driven flow

$$f(\mathbf{r}_p) = - \int_{(L)} \bar{\mathbf{n}}_q \cdot f(\mathbf{r}_q) K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) dL_q + \int_{(L)} f(\mathbf{r}_q) E(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) dL_q \quad (5.b)$$

; $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in (\Lambda)$

where the kernels $K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)$ and $E(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)$ are expressed by spherical Bessel functions of the first kind of order zero and one:

$$\left. \begin{aligned} K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) &= J_0 \left(-\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}} r_{pq} \right) \\ E(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) &= \bar{\mathbf{n}}_q \cdot \nabla K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = -J_1 \left(-\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}} r_{pq} \right) \end{aligned} \right\} , \quad r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| \quad (5^*)$$

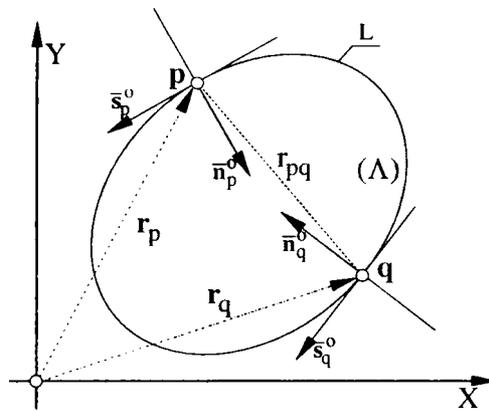


Fig. 3.a. Flow field (Λ)
Sketch for eqs. (5.a), (5.b)

On the boundary of the flow field, there is on the walls enclosing flux the velocity of the flow is equal:

$$\text{in the case of pulsating pressure-driven flow} \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{R}) = 0 \quad (\text{eq. 4.a})$$

$$\text{in the case of oscillatory channel motion-driven flow} \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{R}) = \mathbf{c}^* \quad (\text{eq. 4.b})$$

therefore relationships (5.a) , (5.b) leads to integral equations for the function $f(\mathbf{r}_q)$; $q \in (L)$:

$$-\int_{(L)} \bar{\mathbf{n}}_q \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}_q) K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) dL_q + P \iint_{(\Lambda)} K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) d\Lambda_q = 0 \quad (6.a)$$

$$-\int_{(L)} \bar{\mathbf{n}}_q \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}_q) K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) dL_q + \mathbf{c}^* \int_{(L)} E(\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_q) dL_q - \frac{\pi}{2} \mathbf{c}^* = 0 \quad (6.b)$$

where:

$$\left. \begin{aligned} K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) &= J_0(-\sqrt{-i} Wo_{pq}) \\ E(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) &= \bar{\mathbf{n}}_q \cdot \nabla K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = -J_1(-\sqrt{-i} Wo_{pq}) \end{aligned} \right\}, r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| \quad (6^*)$$

where $Wo = r \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \Rightarrow [-]$ denote Womersley number.

4. Numerical solution of integral equations

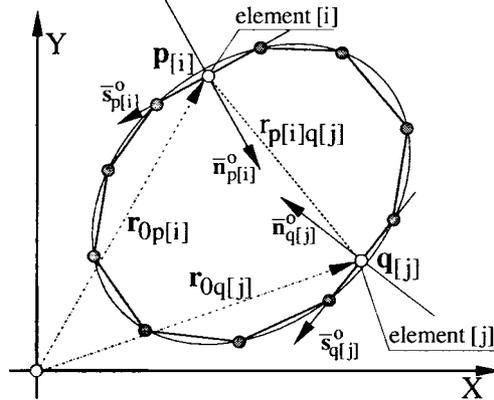


Fig. 3.b. Discretization of area (Λ)

Approximating the integrals over the boundary line (L) with the sum of integrals over the straight line elements $L_{[j]}$; $j = \overline{1, J}$ on which the function $\left(\frac{\partial f(\mathbf{r}_{q[j]})}{\partial n} \right)_{[j]}$ is constant the discrete formulation of integral equations (6.a) and (6.b) is obtained:

$$\Re \sum_{j=1}^J \left(\frac{\partial f(\mathbf{r}_{q[j]})}{\partial n} \right)_{[j]} \int_{(L_{[j]})} K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) dL_{q[j]} = \quad (7.a)$$

$$\Re \sum_{j=1}^J P \iint_{(\Lambda_{[j]})} K(\mathbf{r}_{p[i]}, \mathbf{r}_{q[j]}) d\Lambda_{q[j]} = 0 \quad ; \quad i = \overline{1, I}$$

$$\Re \sum_{j=1}^J \left(\frac{\partial f(\mathbf{r}_{q[j]})}{\partial n} \right)_{[j]} \int_{(L_{[j]})} K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) dL_{q[j]} = \quad (7.b)$$

$$\Re \sum_{j=1}^J \left[c^* \int_{(L_{[j]})} K(r_p, r_q) dL_{q[j]} - \frac{\pi}{2} \right] ; i = \overline{1, I}$$

In equations (7.a) and (7.b) sign \Re denotes real parts of complex kernels (6*).

After determination values of function $\left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial n} \right)_{[i]} \equiv \left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r} \right)_{[i]} ; i = \overline{1, I}$ at collocation points

(nodal points) on boundary elements velocity is determined in discrete form of formulas (5.a) and (5.b) respectively for case pressure-driven flow and for oscillatory channel motion-driven flow.

5. Examples of oscillatory flows in a circular tube

Example (1) – Calculation the oscillating pressure-driven flow of incompressible and viscous fluid for Womersley number $Wo=1.0$ and $Wo=5.0$ (fig. 4.a) and (fig. 4.b).

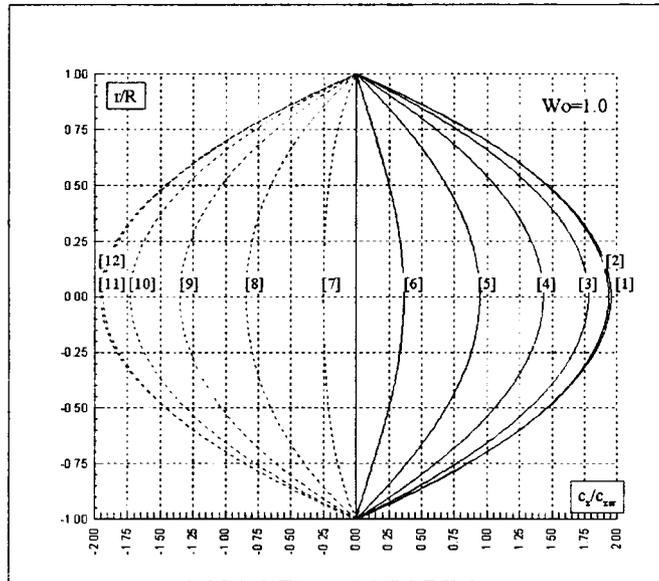


Fig.4.a. Oscillating flow $Wo=1.0$ (pressure pulsation)

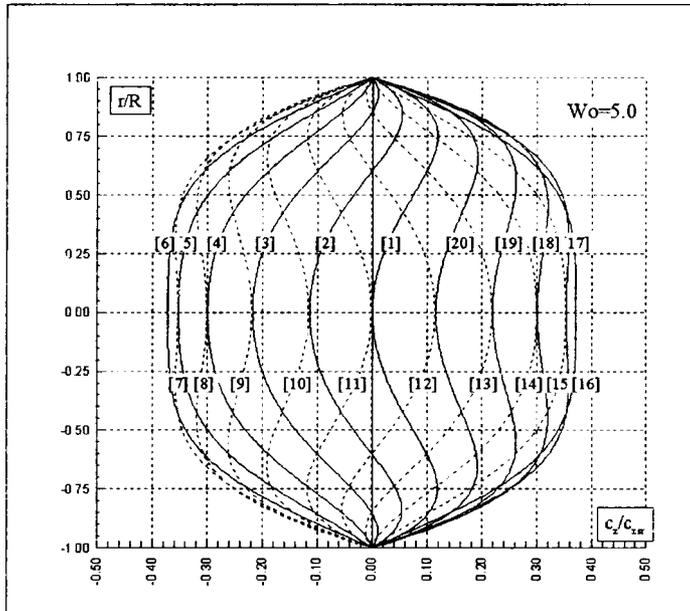


Fig.4.b. Oscillating flow $Wo=5.0$ (pressure pulsation)

Example (2) – Calculation the oscillatory channel moving-driven flow of incompressible and viscous fluid for Womersley number $Wo=1.0$ and $Wo=5.0$ (fig. 5.a) and (fig. 5.b).

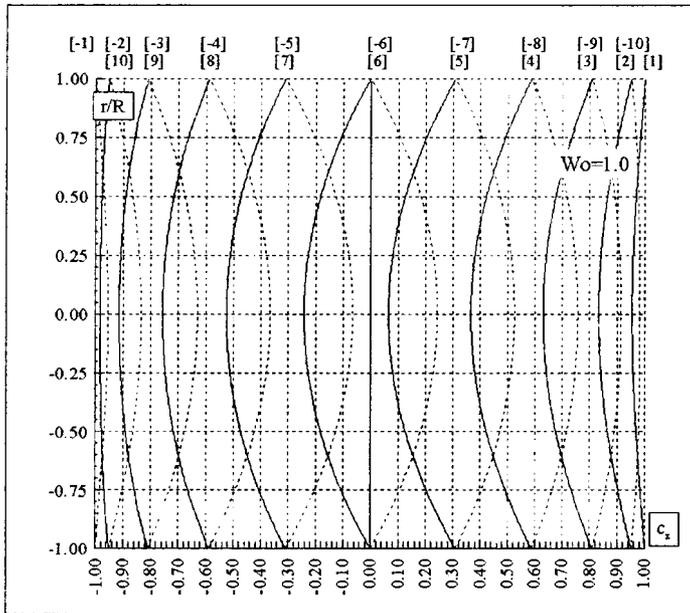


Fig. 5.a. Oscillating flow $Wo=1.0$ (channel wall oscillation)

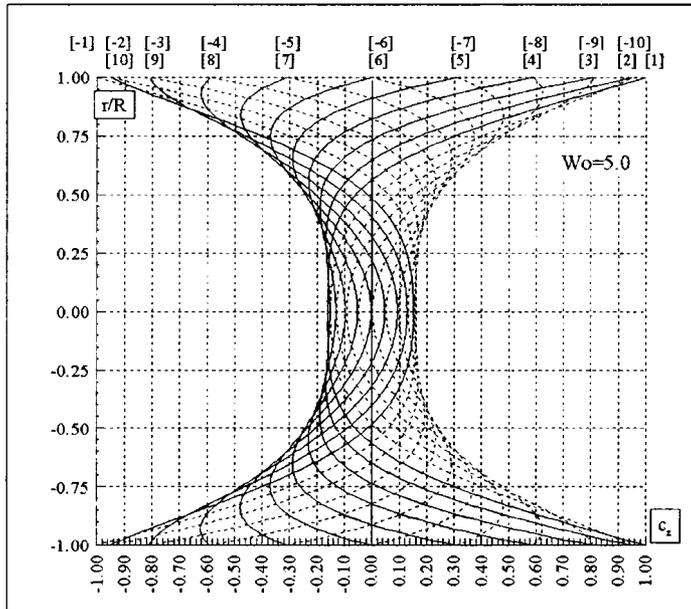


Fig. 5.b. Oscillating flow $Wo=5.0$ (channel wall oscillation)

BIBLIOGRAPHY

1. Lions P.L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics // Oxford Sc. Publ., 1996
2. Spurk J.H. Fluid Mechanics // Springer, 1997

МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОЛЕСА С ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ПРОДОЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Широков Б.Н., Альгин В.Б., Иванов В.Г.

The paper discusses the widespread state-of-the-art statical and dynamic models of contact tyre/surface interaction for friction coefficient determination and simulation. Developing the existing procedures, the fuzzy and neuro-fuzzy models of friction coefficient recognition are proposed. The simulation results are given for models under discussion with a subsequent analysis.

Введение

Алгоритмы систем управления автомобилем используют информацию о коэффициенте сцепления и настроены на работу с сухим, влажным (как функция высоты водяного слоя в контакте) или обледенелым покрытием. Большой разброс значений максимума кривой коэффициента сцепления от проскальзывания (далее $\mu(s)$ -кривой) не позволяет закладывать в алгоритм точные аналитические модели взаимодействия колеса с дорогой. Вследствие этого используют статические модели взаимодействия колеса и опорной поверхности, а применение динамических моделей ограничено быстродействием аппаратной части системы управления.

В данной статье рассматриваются современные наиболее распространенные статические и динамические модели контактного взаимодействия шины с опорной поверхностью, связанные с определением и моделированием коэффициента сцепления. В развитие существующих методологий предложены модели нечеткого и нечетко-нейронного распознавания коэффициента сцепления. Представлены результаты моделирования предложенных моделей с их анализом.

1 Статические модели контактного взаимодействия шины с опорной поверхностью

Большинство статических моделей шин, основывается на использовании математических формул, описывающих связь между скольжением колеса и коэффициентом сцепления или реализуемой продольной силой на колесе. Они выбираются исходя из эмпирических исследований различных шин. Стоит также отметить, что модели, используемые в реальных блоках систем управления автомобиля, являются упрощенными, в основном статическими, и значительно отличаются по степени сложности от моделей, используемых при компьютерном моделировании.

В общем случае аппроксимирование зависимости $\mu(s)$ может быть выполнено частью параболы (либо экспоненты), гиперболы и прямой, как это показано штриховыми линиями на рис. 1.

Уравнение параболы: $\mu = \mu_0 + \mu_{\max} \cdot \sqrt{s}$;

уравнение гиперболы: $\mu = \mu_{AS} \cdot \frac{\mu_H \cdot s_{AS}}{s - s_{AS}}$.

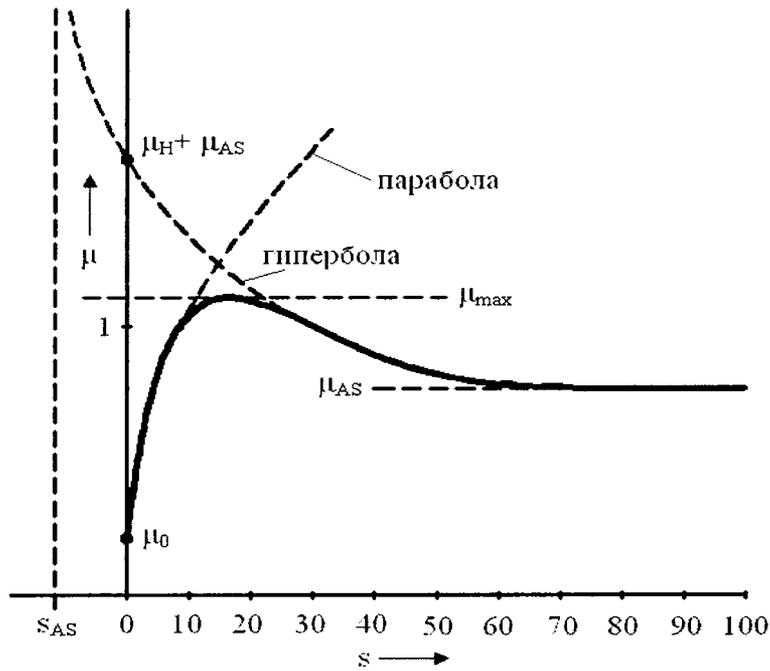


Рис. 1. Аналитическое аппроксимирование зависимости коэффициента сцепления μ от проскальзывания s

В настоящее время ряд аппроксимирующих зависимостей получили широкое распространение в блоках управления и при компьютерном моделировании.

Буркхардт [1] предложил описывать зависимость силы тяги F от проскальзывания s и скорости v следующим образом:

$$F(s, v) = (c_1 \cdot (1 - e^{-c_2 \cdot s}) - c_3 \cdot s) \cdot e^{-c_4 \cdot v}.$$

Получаемая приближенная кривая зависит от скорости движения v . Также Буркхардт предложил зависимость без учета скорости, которая продолжительное время использовалась в электронных блоках систем активной безопасности:

$$F(s) = c_1 \cdot (1 - e^{-c_2 \cdot s}) - c_3 \cdot s.$$

Кинке и Дайс [2] пренебрегли зависимостью скорости в уравнении Буркхардта и, после аппроксимации с использованием экспоненты, получили следующее выражение:

$$F(s) = k_s \cdot \frac{s}{c_1 \cdot s^2 + c_2 \cdot s + 1},$$

где k_s – наклон кривой $F(s)$ при нулевом скольжении, c_1 и c_2 – задаваемые коэффициенты.

Также часто встречается упрощенная модель вида [3]:

$$F(s) = c_1 \cdot \sqrt{s} - c_2 \cdot s.$$

Следует отметить, что коэффициенты c_1 – c_4 , входящие в вышеприведенные уравнения, являются эмпирическими и зависят в общем случае от множества параметров, таких как скорость, нормальная нагрузка, тип и состояние дорожной поверхности и т.д.

Одной из наиболее известных эмпирических моделей является тригонометрическая модель Пачейки [4], которая также известна как "Tire Magic Formula".

$$F(s) = c_1 \cdot \sin(c_2 \cdot \arctan(c_3 \cdot s - c_4 \cdot (c_3 \cdot s - \arctan(c_3 \cdot s))))).$$

На рис. 2 приведено пояснение коэффициентов, входящих в "магическую формулу" Пачейки.

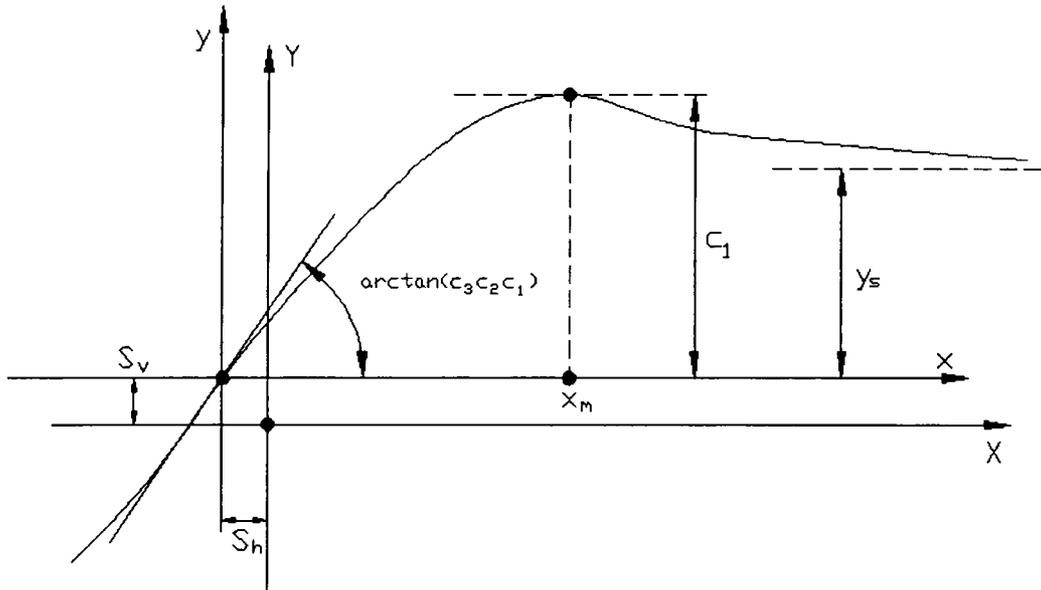


Рис. 2. Пояснение коэффициентов, входящих в "магическую формулу" Пачейки

2 Динамические модели контактного взаимодействия шины с опорной поверхностью

2.1 Модель Даля

Модель Даля [5] была разработана для моделирования систем управления с учетом трибологических факторов. Начальной точкой модели является кривая растяжения-сжатия из теории механики материалов, которая показана на рис. 3.

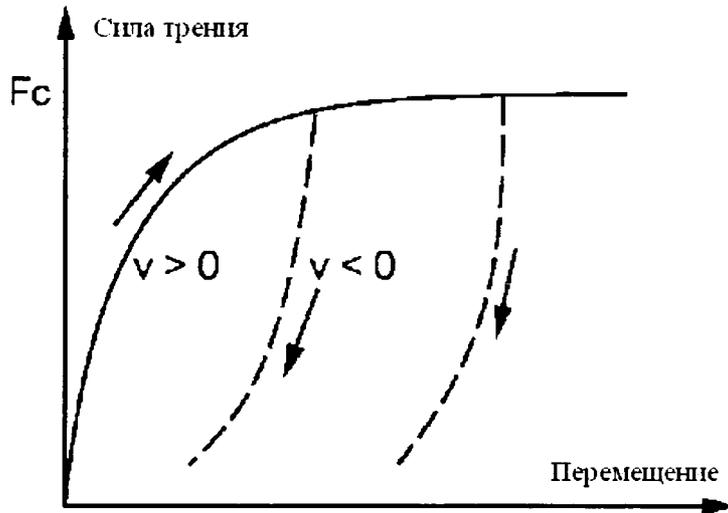


Рис. 3. Сила трения в зависимости от перемещения для модели Даля

При нагружении сила трения постепенно увеличивается до появления разрыва. Даль моделировал кривую растяжения-сжатия с использованием следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dF}{dx_r} = \sigma_0 \cdot \left(1 - \frac{F}{F_c} \cdot \text{sgn}(v_r) \right)^\beta,$$

где x_r – относительное перемещение;

$v_r = dx_r/dt$ – относительная скорость;

F – текущая сила трения;

F_c – максимальная (кулоновская) сила трения;

σ_0 – коэффициент жесткости;

β – коэффициент, характеризующий форму кривой растяжения-сжатия, обычно равный 1. Более высокие значения β используются для кривой растяжения-сжатия с резко выраженными изгибами.

При интегрировании уравнения будет наблюдаться монотонное нарастание $F(t)$. Поэтому, модель Даля не имеет максимума, как в модели Пачейки.

Следует отметить, что в данной модели сила трения является только функцией перемещения и ее направление зависит от относительной скорости. Это означает, что рост силы трения в плоскости $F - x_r$ будет зависеть только от направления скорости v_r , и не зависит от ее значения. Это объясняет гистерезисные петли на рис. 4. Анализируя модель, Даль отметил, что

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx_r} \cdot \frac{dx_r}{dt} = \frac{dF}{dx_r} \cdot v_r = \sigma_0 \cdot \left(1 - \frac{F}{F_c} \cdot \text{sgn}(v_r)\right)^\beta \cdot v_r.$$

Фактически, данная модель является обобщением модели кулоновского трения. Модель Даля также не содержит эффекта Штрибека и статического трения.

При $\beta=1$, уравнения можно записать в следующем виде:

$$\frac{dF}{dt} = \sigma_0 \cdot v_r - \frac{F}{F_c} \cdot |v_r|.$$

2.2 Щеточная модель

Хэссиг и Фридланд [6] ввели модель трения, которая описывает поведение микроскопических контактов между двумя поверхностями. Количество контактов и их положение выбирается случайно из-за неровностей поверхностей. Каждая точка контакта представляется как связь между гибкими щетками. Когда поверхности перемещаются относительно друг друга, напряжение в связи увеличивается, и щетки работают в качестве пружин, создавая силу трения. Эта сила может быть получена следующим образом:

$$F = \sum_{i=1}^N \sigma_0 \cdot (x_i - b_i),$$

где N – количество щеток, σ_0 – жесткость щеток, x_i – относительное положение щеток, b_i – положение возникновения связи.

Сложность модели возрастает с увеличением N . Оптимальные результаты получаются при 20-25 щетках, но даже одна щетка дает корректное качественное поведение. Жесткость щеток σ_0 может зависеть от скорости перемещения. Одним из интересных свойств модели является то, что она захватывает хаотичную природу трения. Хаотичность зависит от числа щеток. Модель не эффективна для моделирования из-за ее сложности. Движение в фазе сдвига может быть колебательным, т.к. в щеточной модели отсутствует демпфирование.

2.3 Модель LuGre

Модель LuGre [7] является одной из наиболее распространенных при моделировании контакта колеса с дорогой, т.к. объединяет ряд особенностей фрикционного взаимодействия.

Например, наличие эффекта Штрибека. Модель Штрибека характеризуется отрицательной производной относительно скорости скольжения для ее малых значений [8]. Эта одна из ключевых особенностей трения, которая способствует граничному циклу и скачкообразному движению при трении. Кроме того, модель LuGre работает как пружина с демпфером, когда линеаризуется при малых перемещениях. Следует отметить, что представление контактного взаимодействия шины с опорной поверхностью чаще всего возможно двумя способами: с помощью эластичной балки, либо с помощью упруго-

демпфированной связи (пружина с демпфером). В современных программных средствах используется второй способ.



Рис. 4. Фрикционное взаимодействие в модели LuGre

Качественное представление модели LuGre показано на рис. 4. Две поверхности контактируют при различных выступах шероховатости поверхности на микропрофиле. Эти выступы представлены с помощью щеток, и щетки деформируются подобно пружине при относительной скорости между поверхностями. Деформация пружин увеличивается при росте силы трения. Если деформация достаточно большая, тогда щетки будут проскальзывать случайным образом. Хотя деформация щеток случайна, модель LuGre описывается только средней деформацией. Средняя деформация Z моделируется с помощью дифференциального уравнения первого порядка:

$$\dot{Z} = V - \frac{|V|}{G(V)} Z,$$

где V – относительная скорость между поверхностями;
 $G(V)$ – функция, описывающая эффект Штрибека.

Функция $G(V)$ позволяет реализовать более высокий коэффициент статического трения, чем динамический:

$$G(V) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ F_c + (F_s - F_c) \cdot e^{-\left(\frac{V}{V_s}\right)^2} \right\},$$

где F_c – кинетическая сила трения;
 F_s – статическая сила трения;
 σ_0 – общий коэффициент жесткости щеток;
 V_s – скорость скольжения Штрибека.

Окончательно, сила трения в модели LuGre задается с помощью:

$$F_L(V, Z) = \sigma_0 \cdot Z + \sigma_1 \cdot \dot{Z} + \sigma_2 \cdot V,$$

где σ_1 – коэффициент демпфирования и σ_2 связано с вязкостным трением. Следует отметить, что V_s является очень малой скоростью скольжения. Ниже V_s поверхность трения находится в микроскольжении.

3 Разработка нечетких и нечетко-нейронных моделей контактного взаимодействия шины с опорной поверхностью

3.1 Нечеткая модель

Основной идеей нечетких моделей контакта шины с дорогой является определение типа и состояния дорожного покрытия по информации от датчиков и прогнозирование на основе этих данных значения коэффициента сцепления [9].

Рассмотрим вариант с двумя нечеткими контроллерами (специализированными микроЭВМ), условно названными контроллером шероховатости и контроллером условий окружающей среды (рис. 5).

В качестве входных переменных контроллера шероховатости используются полученные сканированием данные о микро- и макропрофиле поверхности для текущего участка дороги. Выходной переменной является некоторое базовое значение коэффициента сцепления колеса с дорогой, характерное для типового дорожного покрытия. Правила, заложенные в блоке расчета, выведены на основе информации, приведенной в работах [10, 11]. В данных работах микропрофилем считаются шероховатости до 2 мм, а макропрофилем – от 2 мм до 25 мм. Также в них указаны характерные интервалы шероховатостей для различных дорожных покрытий (например, асфальт, асфальтобетон и т.д.).

Контроллер условий окружающей среды производит корректировку базового значения коэффициента сцепления по показаниям температуры воздуха и дороги, влажности и интенсивности атмосферных осадков. В данном контроллере заложены правила, составленные по статистическим результатам погодных наблюдений.

Оба контроллера объединены в логический блок, работающий по следующему алгоритму:

Если модуль величины $(\mu_{inv} - \mu_{rou})$ не больше установленной величины (уставки) в 0,1, то выходной коэффициент сцепления представляет собой среднее арифметическое.

Если величина $(\mu_{inv} - \mu_{rou})$ больше уставки в 0,1, то выходной коэффициент сцепления представляет собой коэффициент сцепления по шероховатости.

Если величина $(\mu_{inv} - \mu_{rou})$ меньше уставки в -0,1, то выходной коэффициент сцепления представляет собой коэффициент сцепления по окружающей среде.

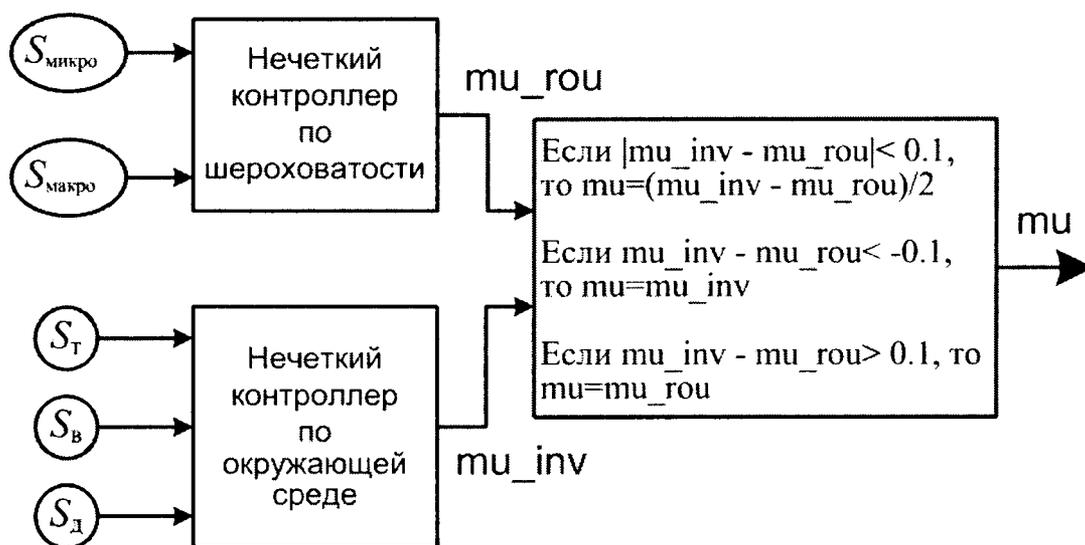


Рис. 5. Схема метода нечеткой детерминации коэффициента сцепления: $S_{\text{микро}}$ – микропрофиль; $S_{\text{макро}}$ – макропрофиль; S_T – температура; S_B – влажность; S_D – интенсивность дождя; μ_{rou} – коэффициент сцепления по шероховатости; μ_{inv} – коэффициент сцепления по окружающей среде; μ – выходное значение коэффициента сцепления

На рис. 6 показаны примеры моделирования для сухого (а) и влажного покрытия (б).

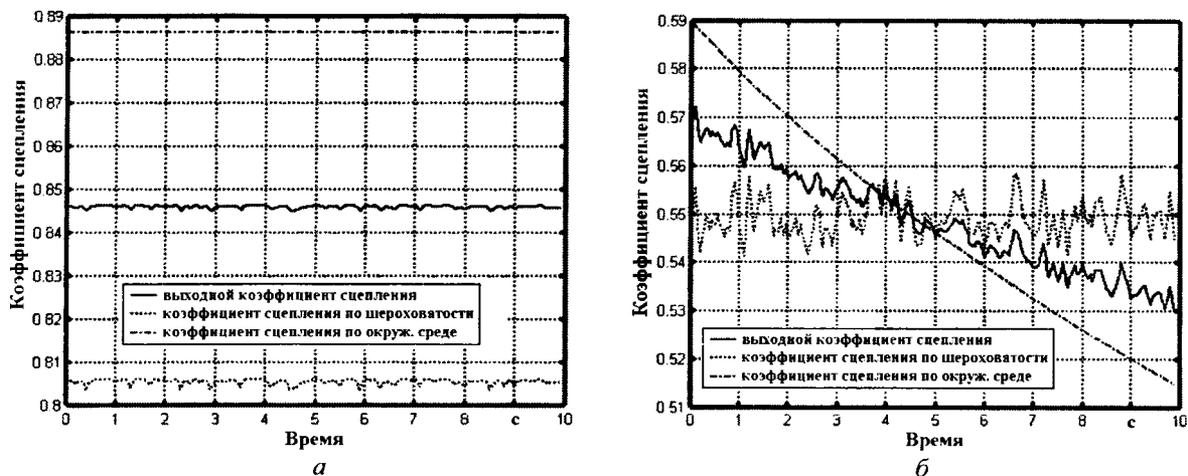


Рис. 6. Примеры моделирования коэффициента сцепления для различных покрытий: а – сухое и б – влажное покрытие

3.2 Нечетко-нейронная модель

Для решения задачи идентификации дорожных свойств с помощью модели нейронной сети в первую очередь требуется выбрать её структуру и провести обучение на основе имеющейся информации, например, по статистическим данным или экспертным оценкам. Для этого можно использовать нейро-нечёткий вывод на основе гибридной сети, обучающейся по алгоритму обратного распространения ошибки. Он представляет собой итеративный градиентный алгоритм минимизации среднеквадратичного отклонения значений выхода от желаемых значений.

Исследование данной сети для решаемой задачи проводилось с помощью адаптивной системы нейро-нечёткого вывода ANFIS, реализованной в среде MATLAB.

За основу для дальнейшего исследования целесообразно взять следующую задачу нечёткого управления: прогнозировать максимум коэффициента сцепления по характерным показателям $\mu(s)$ -кривой, рис. 7. В этом случае процесс исследования будет разбит на три этапа.

Первоначально следует исследовать нейронную сеть с функциями принадлежности, составленными на основе эмпирического анализа. В этом случае имеется по четыре функции принадлежности для параметров k_{μ} и μ_l и три функции принадлежности для параметра s_l , а вид нейронной сети будет соответствовать рис. 8. Для её обучения был выбран гибридный метод, представляющий собой комбинацию метода наименьших квадратов и метода убывания обратного градиента. При использовании средств MATLAB при заданных функциях принадлежности обучение было осуществлено за 25 циклов. Ошибка обучения при этом составила 0,085847.

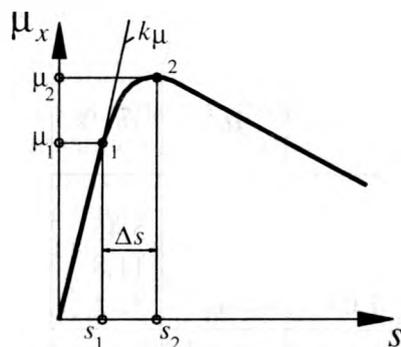


Рис. 7. Характерные точки зависимости коэффициента окружной силы μ от коэффициента относительного проскальзывания s

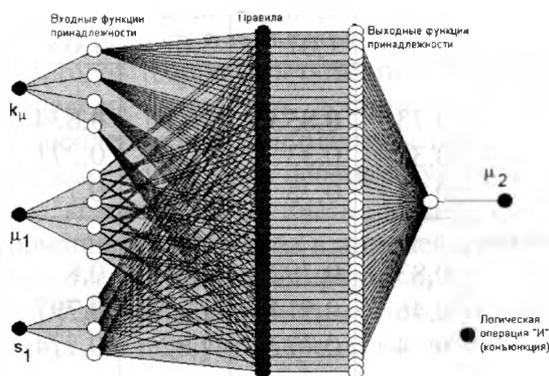


Рис. 8. Структура нечёткой нейронной сети

Для организации процедуры нечёткого вывода была использована статистическая выборка из таблицы 1. Полученные значения максимума $\mu(s)$ -кривой μ_2^1 также даны в таблице 1. Дополнительно также рассчитана величина относительного отклонения:

$$\delta_1 = \frac{|\mu_2^{\text{эсп}} - \mu_2^1|}{\mu_2^{\text{эсп}}} \cdot 100\% .$$

Для второго этапа было выбрано исследование сети, в которой количестве функций принадлежности осталось без изменений, но внешний вид функций был сгенерирован средой MATLAB в виде функций Гаусса или плотности нормального распределения:

$$f = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} ,$$

где σ – дисперсия распределения; c – математическое ожидание. При моделировании достигнутая ошибка обучения составила 0,078469. Соответствующие результаты определения максимума $\mu(s)$ -кривой μ_2^2 также занесены в таблицу 1.

На третьем этапе исследования было проведено усложнение структуры нечёткой нейронной сети. Это было достигнуто увеличением количества функций принадлежности. Было сгенерировано по пять функций принадлежности для каждой из входных переменных. Как и в предыдущем случае, для описания были использованы функции Гаусса. При моделировании данной сети ошибка обучения составила 0,062652. Соответствующие результаты определения максимума $\mu(s)$ -кривой μ_2^3 также приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты определения максимума коэффициента μ_x с помощью нейронных нечётких сетей

Тип шины, дороги и данные произвольной статистической выборки	$\mu_2^{эксн}$	μ_2^1	$\delta_1, \%$	μ_2^2	$\delta_2, \%$	μ_2^3	$\delta_3, \%$
Летние шины, сухая дорога: $k_\mu=7,12; \mu_1=0,67; s_1=2,5$	1,1	1,04	5,45	0,999	9,18	0,979	11,0
$k_\mu=11,43; \mu_1=0,72; s_1=1,5$	1,0	0,882	11,8	0,935	6,5	0,925	7,5
$k_\mu=11,43; \mu_1=0,78; s_1=2$	1,04	0,949	8,75	1,06	1,9	1,02	1,92
Зимние шины, сухая дорога: $k_\mu=4,51; \mu_1=0,64; s_1=3,5$							
$k_\mu=4,33; \mu_1=0,53; s_1=3,5$	1,08	1,03	4,62	1,05	2,78	1,05	2,78
$k_\mu=4,01; \mu_1=0,8; s_1=5,0$	0,97	0,963	0,72	1,03	6,19	0,973	0,31
	1,11	1,07	3,6	1,05	5,4	1,1	0,91
Летние шины, влажная дорога: $k_\mu=5,67; \mu_1=0,56; s_1=2,5$	0,73	0,853	16,85	0,834	14,25	0,813	11,37
$k_\mu=2,75; \mu_1=0,2; s_1=2,0$	0,3	0,33	10,0	0,271	9,67	0,328	9,33
$k_\mu=19,08; \mu_1=0,5; s_1=1,0$	0,74	0,73	1,35	0,77	4,05	0,74	0,0
Зимние шины, влажная дорога: $k_\mu=5,67; \mu_1=0,48; s_1=2,0$	0,83	0,792	4,58	0,8	3,75	0,859	3,49
$k_\mu=2,25; \mu_1=0,38; s_1=4,5$	0,46	0,514	11,74	0,797	73,26	0,461	0,22
$k_\mu=6,31; \mu_1=0,51; s_1=1,5$	0,74	0,772	4,32	0,774	4,59	0,744	1,04
Летние шины, лёд: $k_\mu=9,51; \mu_1=0,06; s_1=1,0$	0,083	0,109	31,33	0,0892	7,47	0,08	0,54
$k_\mu=14,3; \mu_1=0,138; s_1=1,25$	0,175	0,136	22,29	0,167	4,57	0,175	0,0
$k_\mu=5,14; \mu_1=0,05; s_1=1,5$	0,07	0,0907	29,57	0,0564	19,43	0,087	24,29
Зимние шины, лёд: $k_\mu=4,33; \mu_1=0,06; s_1=1,5$	0,075	0,0905	20,67	0,0737	1,73	0,0837	11,6
$k_\mu=14,3; \mu_1=0,185; s_1=1,5$	0,26	0,242	6,92	0,228	12,31	0,238	8,46
$k_\mu=11,43; \mu_1=0,175; s_1=2,0$	0,235	0,235	0,0	0,283	20,43	0,235	0,0

Анализ результатов из таблицы 1 показывает, что все три варианта идентификации дороги с помощью нечёткой нейронной сети в подавляющем большинстве случаев адекватно распознают значение максимума $\mu(s)$ -кривой (расхождения свыше 10% в таблице выделены жирным шрифтом). Повышения точности при использовании данного аналитического метода можно добиться двумя путями.

Во-первых, точность может возрасти за счёт увеличения количества функций принадлежности для входных переменных. Однако, это ведёт к усложнению структуры нечёткой нейронной сети и увеличению затрат времени на процесс обучения, что может препятствовать введению подобной сети в структуру алгоритма системы управления автомобиля.

Во-вторых, качество распознавания выходной переменной может быть улучшено при замене одной глобальной нечёткой нейронной сети для всех дорожных условий на несколько локальных, каждая из которых отвечает за свой тип дорожного покрытия. В рассматриваемом случае это могут быть три локальных нечётких нейронных сети – для сухой, влажной и обледенелой дороги.

Заключение

Проведенный обзор и анализ моделей контактного взаимодействия шины с опорной поверхностью позволяет сделать ряд принципиальных выводов.

1) Разработка моделей шины как объекта прикладной динамики нацелена в настоящее время на их последующее использование в алгоритмах управления системами автомобиля. С этой позиции специалистам приходится постоянно разрешать конфликт между простотой аппаратного представления модели шины и её точностью. С одной стороны, большинство статических моделей шины не вызывает сложностей при их процессорной обработке, однако их надежность напрямую связана с объемом сбора предварительной экспериментальной информации. Кроме этого, статические модели не могут претендовать на универсальность из-за большого набора эмпирических коэффициентов, необходимых для математического описания. Напротив, в динамических моделях используются, как правило, универсальные параметры механики и трибологии, но при этом описание подобных моделей усложняется на несколько порядков по сравнению со статическими моделями.

2) Принципиально новым решением для исследований контактного взаимодействия шины может стать использованием методов теории нечетких множеств. В представленной работе было показано, что нечеткие процедуры позволяют достичь приемлемой точности результатов детерминации коэффициента сцепления при минимальном наборе входной информации. Кроме этого, уже известно много продвинутых методик нечеткого управления, успешно используемых в различных областях техники, которые могут быть перенесены и на системы управления автомобиля, требующие информацию о параметрах взаимодействия шины с дорогой.

В развитие данной работы авторы планируют представить результаты детального анализа для моделирования других, не менее важных для динамики автомобиля, параметров, характеризующих работу шины – в первую очередь, коэффициента сопротивления качению и гистерезисных потерь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burckhardt, M., Fahrwerktechnik: Radschlupfregelsysteme, Vogel-Verlag, Germany, 1993
2. Kiencke, U. and Daiss, A., "Estimation of Tyre Friction for Enhanced ABS Systems," Proceedings of the AVEG'94, 1994
3. Canudas de Wit, C., Horowitz, R. and Tsotras, P., "Model-Based Observers for Tire/Road Contact Friction Prediction," In New Directions in Nonlinear Observer Design, Nijmeijer, H. and T.I Fossen (Eds), Springer Verlag, Lectures Notes in Control and Information Science, May 1999.
4. Hans B. Pacejka. Tire and Vehicle Dynamics. – UK.: Elsevier. – 2006. – 642 p.
5. Dahl, P.R., "Solid Friction Damping of Mechanical Vibrations," AIAA Journal, 1976. – Vol. 14. – No. 12. – pp. 1675-1682.
6. D. A. Haessig and B. Friedland. On the modelling and simulation of friction. J Dyn Syst Meas Control Trans ASME. – September 1991. – 113H31:354-362.
7. Canudas de Wit, C. and Tsotras, P., "Dynamic Tire Friction Models for Vehicle Traction Control," In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, AZ. – 1999. – pp. 3746–3751.
8. Deur, J., "Modeling and Analysis of Longitudinal Tire Dynamics Based on the LuGre Friction Model," In Proceedings of the IFAC Conference on Advances in Automotive Control, Karlsruhe, Germany. – 2001. – pp. 101–106.
9. Ivanov V., Algin V., Shyrokau B. Intelligent control for ABS application with identification of road and environmental properties, International Journal of Vehicle Autonomous System. – 2006. – Vol. 4. – No. 1. – pp. 44-67.
10. Крагельский И.В., Михин Н.М. Узлы трения машин: Справочник. – М.: Машиностроение, 1984. – 280 с.
11. Fischlein, H., R. Gnadler and H.-J. Unrau. Der Einfluss der Fahrbahnoberflächenstruktur auf das Kraftschlussverhalten von Pkw-Reifen bei trockener und Nasser Fahrbahn. ATZ Automobiltechnische Zeitschrift, 2001. – №103. – p. 950-962.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ФОРМЫ ПЕРИОДОНТА НА ОСНОВЕ ОВАЛОВ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ.

Крушевский А.Е.

Стоматологическая практика показывает, что у всех однокорневых зубов наблюдается тенденция к форме, напоминающей восьмерку, т.е. к профилю зуба с вогнутостями. Эллиптическая модель такие случаи не может охватить. Следовательно, необходимо разработать модель, которая включала бы как формы корня зуба с поперечным сечением в виде "восьмерки", так и формы с сечением в виде эллипсов, рассмотренных в работе [1]. Такую возможность позволяют сделать кривые четвертого порядка (овалы), уравнения которых записываются в виде

$$\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + k^2 + 2kf, \text{ где } f = \frac{\frac{x^2}{a_k^2} - \frac{y^2}{b^2}}{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

При $k = 0$ получаем эллиптические модели, изученные в работах [2].

При $0 < k < (3 - 2\sqrt{2})$ имеем овалы без вогнутости, отличающиеся от эллипсов отсутствием явно выраженной вершины в точке $x = 0$

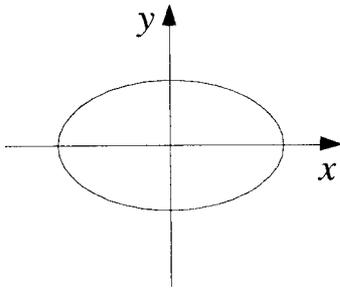


Рис.1. Форма поперечного сечения корня зуба в виде эллипса.

При $3 - 2\sqrt{2} < k < 1$ имеем овалы с вогнутостью, а при $k = 1$ настоящую "восьмерку".

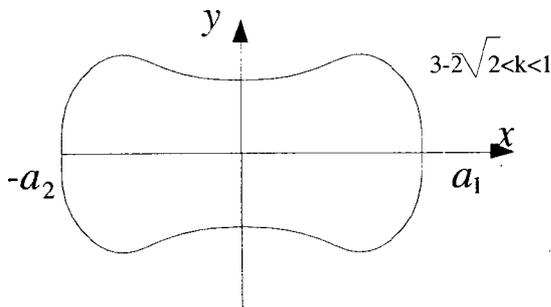


Рис.2. Форма поперечного сечения корня зуба в форме сглаженной восьмерки (овала с вогнутостями).

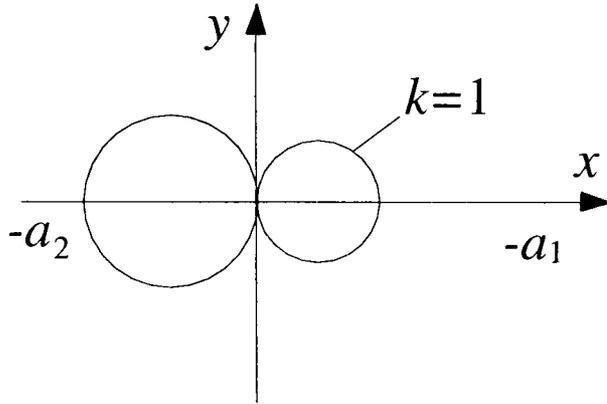


Рис.3. Форма поперечного сечения двух состыкованных корней зуба.

Практически представляющий интерес для стоматологии диапазон изменения коэффициента k лежат в пределах $0 \leq k \leq 1$.

Случай $k = 0$ соответствует эллиптической модели. Случай $k = 1$ соответствует двукорневому зубу и требует дополнительного исследования.

Случай $k = 1$ можно исключить из рассмотрения, т.к. в реальности двукорневые зубы имеют просвет между корнями, в то время как предлагаемая модель при $k = 1$ представляет два состыкованных корня.

Поэтому в предлагаемой модели k должно находиться в пределах $0 \leq k < 1$, причем для реальных корней вогнутость находится в пределах $3 - 2\sqrt{2} < k < 0,5$.

Учитывая возможность стыковки в точке $x = 0$ различных овалов с общей малой осью "b", можно рассмотреть очень много различных форм поперечного сечения корня зуба с одной плоскостью симметрии.

Итак, на основании предлагаемой новой модели формы поперечного сечения корня зуба строим уравнения наружной и внутренней поверхности периодонта в виде двух состыкованных двуполостных гиперболоидов. Со стороны костной ткани

$$1. F_1 = z + h_0 - H \sqrt{\frac{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b^2}}{1 + k_1^2 + 2k_1 f} + d^2} \quad \text{при } 0 < x < a_1$$

$$2. F_1^* = z + h_0 - H \sqrt{\frac{\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b^2}}{1 + k_1^2 + 2k_1 f} + d^2} \quad \text{при } -a_2 < x < 0$$

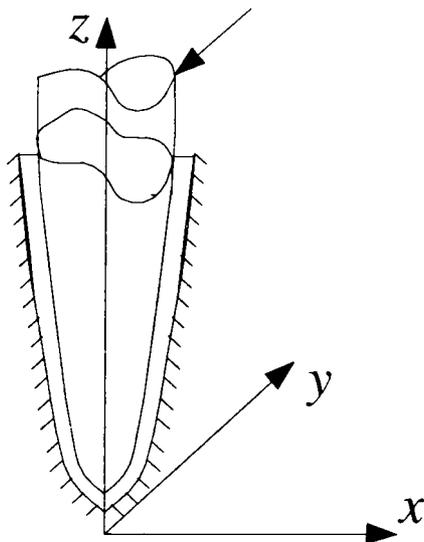


Рис.4.Зуб с поперечным сечением корня в виде овала с вогнутостями.

Со стороны корня зуба

1. $F_2 = F_1 - h_0$ при $0 < x < a_1$
2. $F_2^* = F_1^* - h_0$ при $-a_2 < x < 0$

Достоинством новой модели является то, что из нее как частные случаи, вытекают все известные ранее разработанные модели [2]. Теперь имеется возможность выяснить влияние вогнутости на жесткость зуба и на напряженно-деформированное состояние периодонта, а также ответить на вопрос, почему природа в процессе эволюции избрала ту или иную форму сглаженной восьмерки для поперечного сечения однокорневого зуба.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Решение задачи о равновесии периодонта как оболочки, ограниченной двумя эллиптическими двуполостными гиперboloидами. //Теоретическая и прикладная механика. 1983. №10. – С. 11-21.
2. Наумович С.А., Крушевский А.Е. Биомеханика системы зуб-периодонт. –Мн.: Экономические технологии, 2000.–168 с.

СЕНСОРНЫЕ МИКРОСИСТЕМЫ С RFID ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ

Колешко В.М., Полынкова Е.В., Паутино А.А.

Radio frequency identification systems (RFID systems) have already being widely used for a long time in different spheres from access control systems to goods and transport tracking systems. Combining surface acoustic wave (SAW) sensor with radio frequency identification system can result in wireless SAW sensor microsystem or in other words in wireless sensor. This research examines basic constructions of wireless SAW sensor microsystem, formulates its mathematical model and with the help of "RFID SAW Sensor" program computes operational parameters of wireless sensor.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время наблюдается развитие систем радиочастотной идентификации (RFID системы). Они нашли применение в торговле, наблюдении за людьми, контроле над товарами, транспортом, животными, в различных системах доступа и против терроризма [1-4]. Обычно RFID системы состоят из трех основных компонентов - ридера (считыватель), транспондера - пассивной или активной идентификационной (ИД) метки (тэга) и компьютерной системы обработки информации. Электромагнитный сигнал ридера возбуждает тэг, который в свою очередь посылает электромагнитный сигнал, содержащий идентификационную информацию, назад ридеру.

Все системы РЧ идентификации можно условно разделить на две группы: индуктивные и электромагнитные (ЭМ) [2].

В индуктивных системах РЧ идентификации передача энергии и данных осуществляется с использованием индуктивной связи. Рабочие частоты в таких системах лежат в пределах от сотни кГц до десятков МГц. Антенна ридера генерирует электромагнитное поле, которое вызывает напряжение в катушке тэга и снабжает микросхему тега энергией. В таких системах, как правило, используются плоские спиральные антенны. Для работы микросхемы тэга необходимо напряжение, равное примерно 5В. Передача данных от тэга к ридеру осуществляется на принципе модуляции сигнала ридера. Индуктивные пассивные RFID тэги позволяют передавать ридеру от 64 бит до нескольких килобайт информации. Пассивный тэг может быть обнаружен передающей антенной считывателя на расстояниях до 5 метров, активный до 30 м. Основным недостатком пассивных индуктивных RFID систем является маленькое расстояние считывания по сравнению с ЭМ, т.к. индукция магнитного поля убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния от источника поля. Также недостатком таких систем является необходимость расположения тэгов под определенных углом к ридеру в пространстве. В зависимости от того, как «пассивные» теги размещаются относительно поляризации поля ридера, они могут считываться или не обнаруживаться вовсе. Оптимальная ориентация будет в случае, когда антенны тега и ридера параллельны друг другу.

В электромагнитных RFID системах для обмена информацией между ридером и тэгом, а в случае пассивных тэгов и для их питания, используются ЭМ волны. Рабочие частоты в таких системах лежат в диапазоне от 400 МГц до 10 ГГц и выше. Напряженность электрического поля ЭМ волны убывает обратно пропорционально первой степени расстояния, поэтому ЭМ RFID системы имеют большую дальность считыванию по сравнению с индуктивными. Достижимая дальность считывания для пассивных тэгов составляет от 0.5 до 12 метров, а для активных 100 метров и более. В ЭМ RFID системах, как правило, используются микрополосковые (планарные) антенны [5].

Объединение сенсора на поверхностных акустических волнах с системой радиочастотной идентификации позволяет получить беспроводную сенсорную систему [1,6,7].

Наиболее перспективным для беспроводных пассивных ПАВ сенсорных микросистем является ЭМ принцип обмена информацией, который позволяет реализовать большую дальность считывания и меньшую по сравнению с индуктивными системами зависимость эффективности считывания от взаимного расположения ридера и тэга в пространстве.

Пример конструкции беспроводной пассивной ПАВ сенсорной микросистемы представлен на рис. 1. Эта система состоит из ридера и беспроводной ПАВ сенсорной метки (ПАВ ретранслятора). ПАВ ретранслятор, представляющий собой «отражательную линию задержки», состоит из антенны, встречно-штыревого преобразователя (ВШП) и набора отражателей, расположенных на пьезоэлектрическом кристалле.

Принцип действия такой системы состоит в следующем: радиочастотный (РЧ) ЭМ опрашивающий сигнал принимается антенной пассивного ПАВ устройства (ПАВ ретранслятор). ВШП, соединенный с антенной, преобразует полученный сигнал в ПАВ посредством обратного пьезоэлектрического эффекта. ПАВ распространяется от ВШП в направлении отражателей, и затем обратно в направлении ВШП, где преобразуется в ЭМ сигнал, излучаемый назад к ридеру посредством антенны. Далее ответный сигнал, содержащий информацию о характеристиках распространения и влиянии внешних физических величин на звуковод ПАВ, обрабатывается на приемном конце. Идентификация меток может осуществляться путем расположения отражателей в определенной штрих-кодовой последовательности, либо путем изменения расстояния между ВШП и отражателями (изменение времени задержки прихода ответного сигнала).

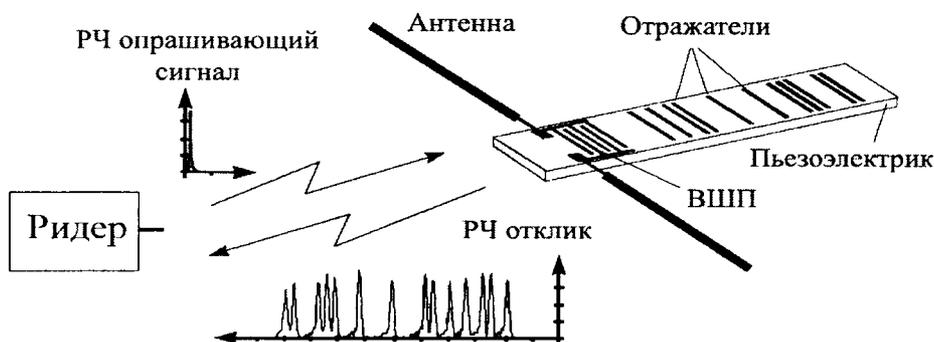


Рис. 1 – Беспроводная пассивная ПАВ сенсорная микросистема

Скорость опроса устройства превышает $10^5/\text{с}$. Отдельный опрос требует всего несколько микросекунд. Это делает систему особенно подходящей для быстро движущихся объектов.

2. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ПАВ РЕТРАНСЛЯТОРОВ

В большинстве сенсорных приложений измеряемая величина изменяет скорость ПАВ, воздействуя на упругие постоянные материала кристалла. Другие параметры, такие как концентрация газа или пара, напряжение или магнитное поле, радиация или взрывчатые вещества, могут быть измерены косвенно путем нанесения на кристалл слоя, чьи характеристики зависят от измеряемой величины; в результате ПАВ реагирует на изменение этих характеристик. В другом случае изменение Δy величины y_0 приводит к изменению времени задержки τ и/или частоты f ПАВ устройства. Линейные составляющие ряда Тэйлора обычно достаточно хорошо описывают эту ситуацию [7]

$$\Delta \tau(y_0) = \left. \frac{\partial \tau}{\partial y} \right|_{y=y_0} \Delta y =: \tau(y_0) S_y \Delta y, \quad (1)$$

$$\Delta f(y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_0} \Delta y =: -f(y_0) S_y \Delta y, \quad (2)$$

где S_y обозначает чувствительность по отношению к y . Примером такой чувствительности является линейный температурный коэффициент задержки (ТКЗ):

$$\text{ТКЗ} = S_T = \tau^{-1} \partial \tau / \partial T, \quad (3)$$

2.1. Отражательные линии задержки

Большинство ПАВ ИД меток и пассивных сенсоров проектируются по принципу отражательных линий задержки в соответствии с рис. 1. Так как ПАВ преодолевает расстояние между ВШП и отражателями дважды (ВШП-отражатель-ВШП) минимальное время отклика

(определяемое временем после которого затухают эхо сигналы) можно получить на половинном размере кристалла по сравнению с линией задержки на 2-х ВШП (ВШП-ВШП) [6].

Приложения идентификации требуют, чтобы каждая метка была уникально закодирована. Для этого каждая метка должна использовать уникальный набор отражателей. В самом простом варианте кодирование осуществляется посредством наличия/отсутствия отражателя (на каждом возможном месте расположения отражателя присутствие отражателя означает «1», а отсутствие «0»). С помощью 32 позиций возможно различить 232 метки.

Кодирование «наличие/отсутствие» уступает методу кодирования с помощью фазовой модуляции (ФМ). С помощью фазовой модуляции измеряют фазы разнесенных во времени ответных импульсов, а не их амплитуды в соответствии с рис. 2. Для заданной величины ошибки требуемое отношение сигнал-шум двоичной ФМ примерно на 6 дБ ниже, чем при кодировании «наличие/отсутствие» и требуемое расстояние можно соответственно сделать большим. Более высокие порядки метода ФМ, такие как квадратурная ФМ (КФМ) в соответствии с рис. 2, или 8-ФМ требуют меньше отражателей и поэтому меньше места на кристалле, но необходимое отношение сигнал-шум для заданного уровня ошибки возрастает со сложностью модуляции.

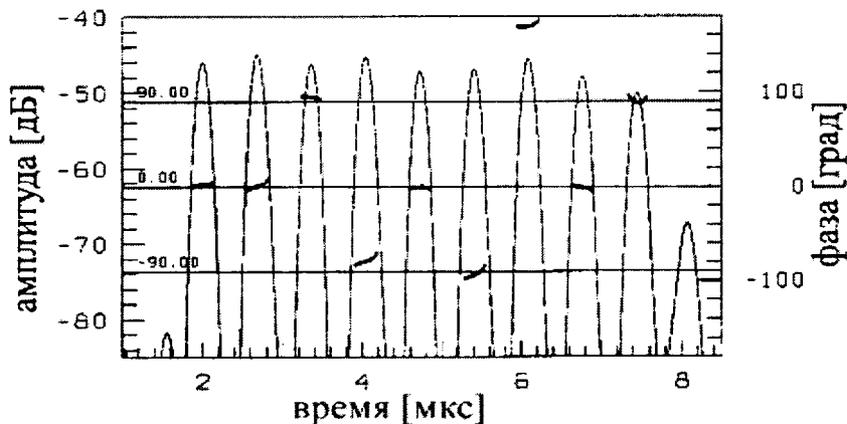


Рис. 2 – Измеренное время отклика 434 МГц ИД метки с КФМ.

Беспроводные ПАВ сенсоры требуют меньше отражателей, чем ИД метки, но фаза временного отклика должна определяться более точно. Сенсорный эффект, описанный с помощью (1) и (2), приводит к разнице временной задержки $\Delta\tau_{2-1} := \Delta\tau_2 - \Delta\tau_1$ между двумя временными ответными импульсами:

$$\Delta\tau_{2-1} = [\tau_2(y_0)S_{y,2} - \tau_1(y_0)S_{y,1}] \Delta y. \quad (4)$$

Если, как обычно бывает, частотная полоса опрашивающего сигнала является поднабором рабочей полосы частот сенсорного элемента, ни центральная частота, ни полоса отклика сенсора не зависят от сенсорного эффекта. Отсюда, все сенсорные отклики могут детектироваться с помощью отдельной заданной частоты, после которой временные ответные импульсы имеют постоянную фазу. Поэтому, разрешение значительно увеличится, т.ч. разница фаз $\Delta\varphi_{2-1}$ может быть точно определена во временной области:

$$\Delta\varphi_{2-1} = 2\pi f_0 \Delta\tau_{2-1} =: S_y^{DL} \Delta y. \quad (5)$$

Здесь, величина $2\pi f_0 t$ соответствует количеству волновых серий в соответствующем пути распространения. С помощью (4) эффективная чувствительность отражательной линии задержки определяется как:

$$S_y^{DL} = 2\pi f_0 [\tau_2(y_0)S_{y,2} - \tau_1(y_0)S_{y,1}]. \quad (6)$$

Для пути распространения в 20 000 акустических длин волн ($S_y^{DL} = 20000S_y$), на частотах 434 МГц и 2.4 ГГц необходимы времена задержки в 7.3 и 1.3 мкс, соответственно. Необходимо отметить, что в соответствие с (4) или чувствительность, или времена задержки в разностном виде должны различаться. Это достигается выбором подходящего материала или геометрии ПАВ сенсора.

2.2. Резонаторы

Также как с отражательными линиями задержки, к ПАВ резонаторам можно получить доступ с помощью опрашивающих РЧ импульсов в соответствии с рис. 3 [8,9]. РЧ импульс возбуждает резонаторы и полученная энергия вначале запасается в резонаторе. По прошествии некоторого времени резонатор затухает и освобождает запасенную энергию маленькими порциями на интервале времени, определяемом временем затухания. Последнее обратно пропорционально добротности нагрузки Q , которая также является числом волновых серий, запасенных в резонаторе, в соответствии с рис. 4.

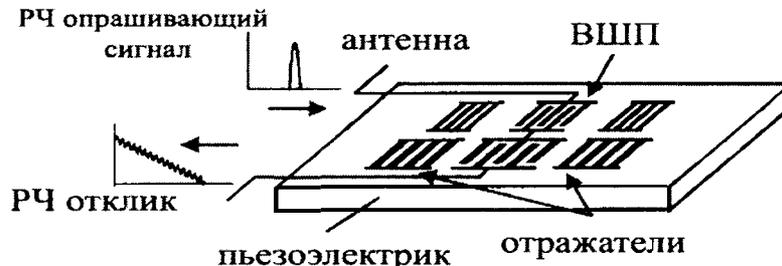


Рис. 3 – Схематическое изображение двух однопортовых ПАВ резонаторов, используемых в качестве пассивных сенсоров.

Для устранения опрашивающего сигнала и эхо сигналов первые 1 или 2 мкс отклика сенсора блокируются во временной области. В первом приближении это уменьшает энергию сигнала, но не Q . После последующего Фурье преобразования или другого подходящего алгоритма пики в частотной области измеряются для получения сенсорной информации в соответствие с рис. 4б.

Как и в случае с линиями задержки, обычно используют разностные схемы и избегают вычислять абсолютные значения. Следуя аналогии с линиями задержки, получается следующая эффективная чувствительность конфигурации резонатора:

$$S_y^R = -2[Q_2(y_0)S_{y,2} - Q_1(y_0)S_{y,1}]. \quad (7)$$

Чувствительность зависит от параметров материала S_y и количества запасенных волновых серий ($Q_{(1,2)}$). Разрешение значительно улучшается путем определения соответствующей разности фаз в частотной области.

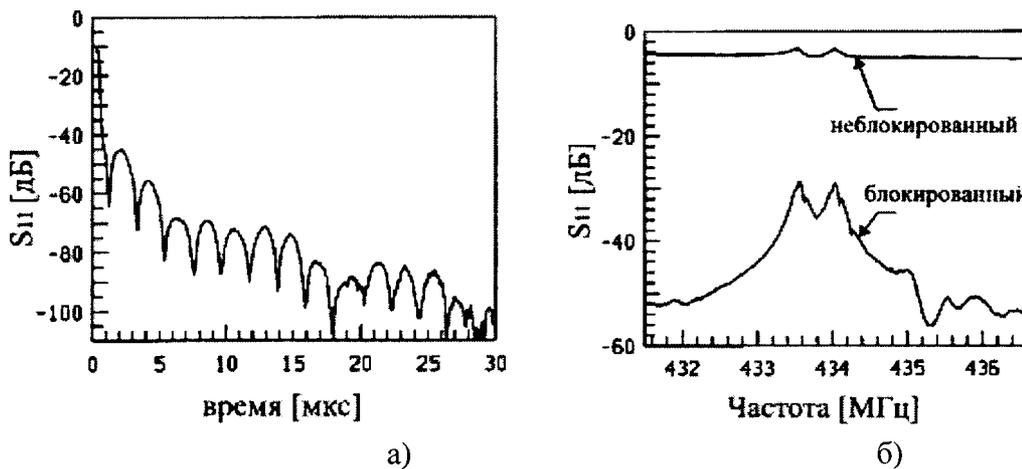


Рис. 4 – Измеренные характеристики ПАВ сенсора, включающего 2 однопортовых резонатора: а) временной отклик, б) частотный отклик

На частотах 434 МГц и 2.4 ГГц ПАВ резонаторы проявляют добротность Q равную 10 000 и 1500...3000, соответственно. Результирующие чувствительности $S_y^R = 20\,000 S_y$ и 3000...6000 S_y , соответственно, согласуются с чувствительностями длинных линий задержки. Однако, достигаются значительно меньшие размеры кристалла.

2.3. Сенсоры импеданса

Классические сенсоры с изменяющимся импедансом могут считываться беспроводным способом при объединении их с ПАВ ретрансляторами. В этом случае ВШП, нагружен-

ный внешним сенсором, играет роль отражателя. Измеряемая величина меняет импеданс нагрузки, и это в свою очередь изменяет акустические отражательные параметры ВШП в соответствии с рис. 5. В частности, акустическая отражательная способность ВШП изменяется от почти «1» для разомкнутой цепи до почти нуля для короткозамкнутой цепи.

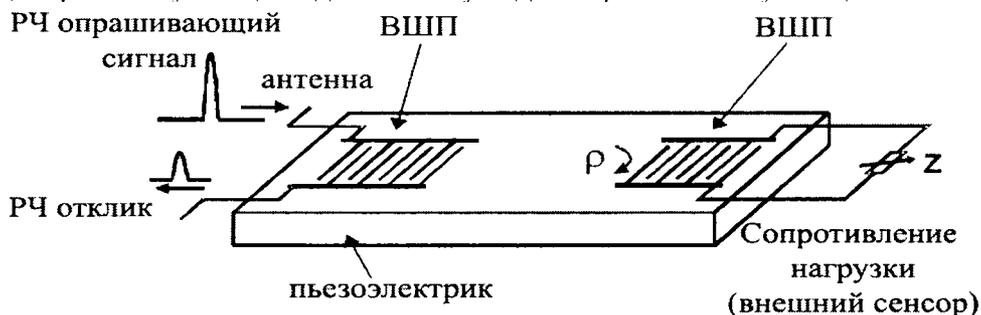


Рис. 5 – Схематическое изображение пассивного ПАВ устройства соединенного с внешним классическим сенсором

2.4. Активный ПАВ ретранслятор

Активный ПАВ ретранслятор отличается от пассивного наличием у него источника питания и схемы усиления сигнала в соответствии с рис. 6.



Рис. 6 - Схематическое изображение активного ПАВ ретранслятора

Принцип действия активного ПАВ ретранслятора такой же как и у пассивного, за исключением того, что ПАВ отражается от ВШП с определенной конфигурацией электродов, а не от отражательных полосок. Также, за счет наличия источника питания отраженная ПАВ имеет значительно больший потенциал по сравнению с проходящей и соответственно переносит большую мощность.

Идентификация активных ПАВ ретрансляторов может осуществляться путем расположения электродов отражательного ВШП в определенной штрих-кодовой последовательности, либо путем изменения расстояния между двумя ВШП (изменение времени задержки прихода ответного сигнала).

Дальность считывания активного ПАВ ретранслятора с 10 Вт источником питания может достигать 5 км.

3. ПАВ РЕТРАНСЛЯТОР В РЕЖИМАХ ПРИЕМА И ИЗЛУЧЕНИЯ

Функционирование такого ПАВ ретранслятора можно представить в виде двух последовательных процессов: прием ЭМ волны и преобразование её в ПАВ (ПАВ ретранслятора в режиме приема) и преобразование ПАВ в ЭМ волну, распространяющуюся от ретранслятора (ПАВ ретранслятор в режиме излучения).

3.1. ПАВ ретранслятор в режиме приема

ПАВ ретранслятор в режиме приема можно представить в виде электрической схемы в соответствии с рис. 7.

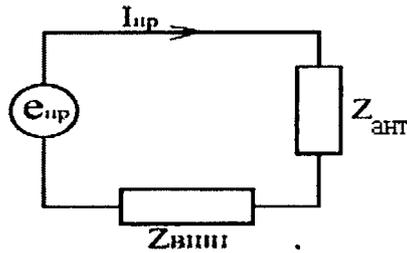


Рис. 7 – Электрическая схема ПАВ ретранслятора в режиме приема

$Z_{ант}$ и $Z_{ВШП}$ представляют собой полное входное сопротивление антенны и полное сопротивление ВШП ПАВ ретранслятора, соответственно, e_{np} и I_{np} – ЭДС и ток, наводимые ЭМ волной в ПАВ ретрансляторе в режиме приема,

Амплитудное значение силы тока на входе антенны ПАВ ретранслятора при приеме плоской волны с направления θ, φ определяется выражением [10]:

$$I_{np} = \frac{\lambda \cdot E_{np}}{\pi \cdot (Z_{ВШП} + Z_{ант})} \cdot \sqrt{\frac{R_{\Sigma ант} \cdot D_{ант}}{120}} \cdot F_{ант}(\theta, \varphi), \quad (8)$$

где λ – длина волны принимаемого антенной ЭМ излучения;

E_{np} – напряженность электрического поля плоской волны, падающей на ПАВ ретранслятор, при его работе в режиме приема;

$R_{\Sigma ант}$ – сопротивление излучения антенны ПАВ ретранслятора;

$D_{ант}$ – коэффициент направленного действия (КНД) антенны ПАВ ретранслятора;

$F_{ант}(\theta, \varphi)$ – нормированная диаграмма направленности (ДН) антенны ПАВ ретранслятора;

Напряженность электрического поля волны, создаваемой излучающей антенной на расстоянии r , определяется выражением:

$$E = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\rho \cdot P_{\Sigma} \cdot D}{2\pi}} \cdot F(\varphi, \theta), \quad (9)$$

где ρ – волновое (характеристическое) сопротивление свободного пространства (377 Ом);

P_{Σ} – мощность, излучаемая антенной;

D – КНД антенны;

$F(\theta, \varphi)$ – нормированная ДН антенны;

Полная мощность P , подводимая к антенне, представляет собой сумму мощности излучения P_{Σ} и мощности P_n , теряемой на тепло (нагревание элементов антенны).

Коэффициент полезного действия (КПД) антенны в этом случае будет

$$\eta = \frac{P_{\Sigma}}{P_n + P_{\Sigma}} = \frac{R_{\Sigma}}{R_n + R_{\Sigma}} = \frac{R_{\Sigma}}{R_{вх}}, \quad (10)$$

где R_n и R_{Σ} – сопротивления потерь на нагревание и излучения ЭМ волны антенны, соответственно;

$R_{вх}$ – входное сопротивление антенны;

Коэффициент усиления (КУ) антенны представляет собой произведение КПД и КНД [10]

$$G = D \cdot \eta. \quad (11)$$

Для случая, когда ПАВ ретранслятор находится в направлении максимального излучения антенны ридера (нормированная ДН ридера равна «1»), ридер находится в направлении максимального излучения ПАВ ретранслятора (нормированная ДН ПАВ ретранслятора, $F_{ант}(\theta, \varphi) = 1$), а также с учетом выражений (10) и (11) выражения (8) и (9) можно переписать в следующем виде:

$$I_{np} = \frac{\lambda \cdot E_{np}}{\pi \cdot (Z_{ВШП} + Z_{ант})} \cdot \sqrt{\frac{G_{ант} \cdot R_{ант}}{120}}, \quad (12)$$

$$E_{np} = \frac{1}{r_{ант}} \sqrt{\frac{\rho \cdot P_p \cdot G_p}{2\pi}}, \quad (13)$$

где $G_{ант}$ – КУ антенны ПАВ ретранслятора;

$R_{ант}$ – входное сопротивление антенны ПАВ ретранслятора;

$r_{ант}$ – расстояние от ридера до ПАВ ретранслятора;

P_p – полная мощность, подводимая к антенне ридера;

G_p – КУ антенны ридера;

Максимальное значение силы тока в ПАВ ретрансляторе будет в случае, когда полное входное сопротивление антенны и сопротивление ВШП комплексно сопряжены, т.е.

$$\begin{cases} R_{ант} = R_{ВШП}, \\ X_{ант} = -X_{ВШП}, \end{cases} \quad (14)$$

где $R_{ВШП}$ – активная составляющая полного сопротивления ВШП;

$X_{ант}$ и $X_{ВШП}$ – реактивные составляющие полного входного сопротивления антенны и сопротивления ВШП, соответственно.

Выражение (12) для этого случая можно записать в следующем виде:

$$I_{np} = \frac{\lambda \cdot E_{np}}{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{G_{ант}}{30 \cdot R_{ант}}}. \quad (15)$$

Падение напряжения на ВШП в соответствии с законом Ома для участка цепи определяется выражением:

$$U_{ВШП} = Z_{ВШП} \cdot I_{np}, \quad (16)$$

Электрический потенциал 2-х ПАВ волн распространяющихся в обе стороны от ВШП ПАВ ретранслятора при приложении к нему разности потенциалов $U_{ВШП}$ в соответствии с методом функции Грина в электростатической аппроксимации определяется выражением:

$$\varphi_{np}(\omega) = j \cdot \Gamma_s \cdot U_{ВШП} \cdot \bar{\rho}_\epsilon(k_0) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} j \cdot k_0 \cdot L\right), \quad (17)$$

где ω – циклическая частота;

j – мнимая единица;

Γ_s – константа, характеризующая материал пьезоэлектрического звукопровода ПАВ;

$\bar{\rho}_\epsilon(k_0)$ – Фурье преобразование от электростатической плотности зарядов на электродах ВШП при единичном приложенном напряжении;

k_0 – волновое число для свободной поверхности пьезоэлектрического звукопровода ПАВ;

L – длина ВШП.

3.2. ПАВ ретранслятор в режиме излучения

Пусть на ВШП ПАВ ретранслятора с одной из сторон падает поверхностная акустическая волна с электрическим потенциалом $\varphi_{из}(\omega)$. Мощность, переносимая такой волной в соответствии с методом функции Грина в электростатическом приближении, определяется выражением [10]:

$$P_s = \frac{\omega \cdot W \cdot |\varphi_{из}|^2}{4\Gamma_s}, \quad (18)$$

где W – апертура ВШП ПАВ ретранслятора.

Коэффициент передачи по мощности, т.е. отношение мощности, выделяемой на антенне ПАВ ретранслятора, к мощности ПАВ, падающей на ВШП, в соответствии с методом функции Грина в электростатическом приближении определяется выражением:

$$C(\omega) = \frac{2G_{ВШП} G_{ант}}{|Y_{ВШП} + Y_{ант}|^2}, \quad (19)$$

где $G_{ВШП}$ и $G_{ант}$ – активные составляющие проводимости ВШП и антенны ПАВ ретранслятора, соответственно;

$Y_{ВШП}$ и $Y_{ант}$ – полные проводимости ВШП и антенны ПАВ ретранслятора, соответственно.

Проанализировав выражения (19) можно сделать вывод, что коэффициент передачи по мощности $C(\omega)$ принимает максимальное значение равное 0.5 в случае, когда ВШП ПАВ ретранслятора электрически согласован с антенной, т.е. $Y_{ВШП}$ и $Y_{ант}$ комплексно сопряжены.

Таким образом, мощность, выделяемую на антенне ПАВ ретранслятора, можно записать в следующем виде:

$$P_a = C(\omega) \cdot P_s = \frac{\omega \cdot W \cdot |\Phi_{из}|^2}{4\Gamma_s} \cdot \frac{2G_{ВШП} G_{ант}}{|Y_{ВШП} + Y_{ант}|^2}, \quad (20)$$

Мощность, излучаемая антенной в пространство, представляет собой произведение мощности, выделяемой на антенне, умноженной на КПД антенны ПАВ ретранслятора:

$$P_{из} = P_a \cdot \eta_a. \quad (21)$$

3.3. Проводимость ВШП ПАВ ретранслятора

В рамках метода функции Грина в квазистатическом приближении проводимость ВШП можно представить эквивалентной электрической схемой в соответствии с рис. 8.

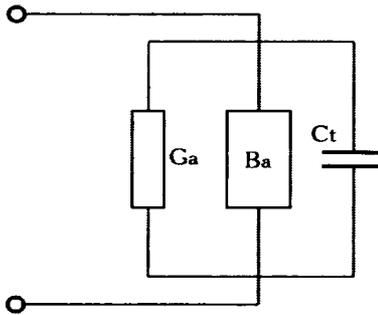


Рис. 8 – Эквивалентная электрическая схема ВШП

Полная проводимость ВШП в рамках метода функции Грина в электростатическом приближении будет определяться выражением:

$$Y_t(\omega) = G_a(\omega) + jB_a(\omega) + j\omega C_t, \quad (22)$$

где $G_a(\omega)$ – действительная часть вклада проводимости преобразователя, обусловленная акустической поверхностной плотностью зарядов;

$B_a(\omega)$ – мнимая часть вклада проводимости преобразователя, обусловленная акустической поверхностной плотностью зарядов;

C_t – статическая емкость преобразователя;

Для неаподизованного ВШП величины, входящие в выражение (22), могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} C_t &= W \sum_n \hat{P}_n \int \rho_e(x) dx, \\ G_a(\omega) &= \omega W \Gamma_s |\bar{\rho}_e(k_0)|^2, \\ B_a(\omega) &= -G_a(\omega) * \frac{1}{\pi\omega} = -\int_{-\infty}^{\infty} G_a(\omega - \omega') \cdot \frac{1}{\pi\omega} d\omega', \end{aligned} \quad (23)$$

где $\rho_e(x)$ – электростатическая плотность зарядов на электродах при единичном приложенном напряжении;

P_n – равен «1» для электродов, подключенных к одной шине ВШП, и «0» для электродов, подключенных к другой шине ВШП;

$\bar{\rho}_e(k_0)$ – Фурье преобразование от электростатической плотности зарядов на электродах при единичном приложенном напряжении.

Зависимость комплексной проводимости неаподизованного ВШП от частоты представлена на рис. 9.

Зависимость активной и реактивной составляющих проводимости различных ВШП от их центральных частот (частота с максимальным значением G_a) представлена на рис. 10. Эта зависимость позволяет примерно оценить проводимость ВШП для рабочей частоты ПАВ ретранслятора.

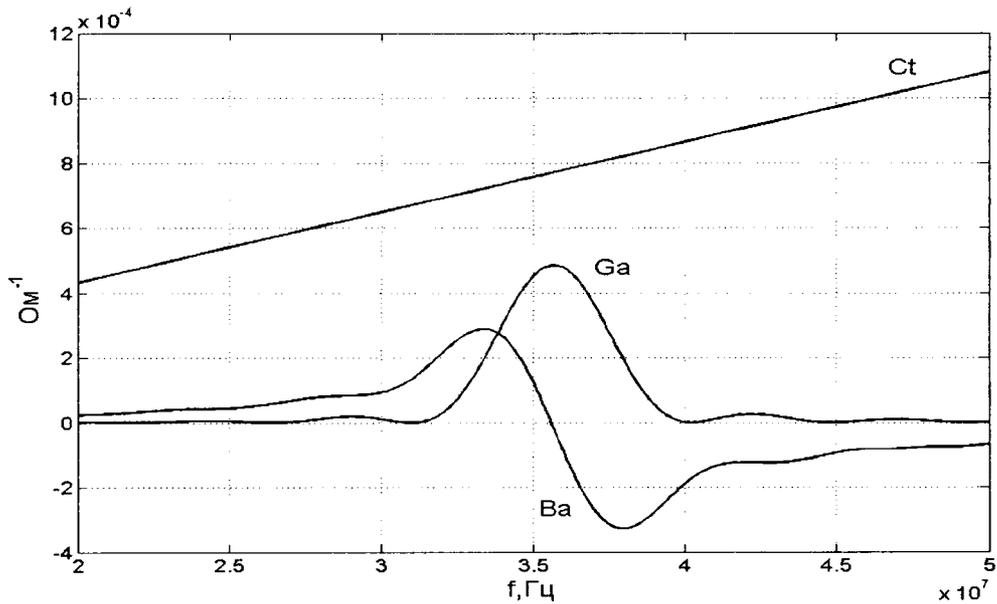


Рис. 9 – Комплексная проводимость неаподизованного 16 электродного ВШП (параметры ВШП: ширина электродов $a = 29.31$ мкм; период $d = 54.63$ мкм; апертура $W = 844.9$ мкм)

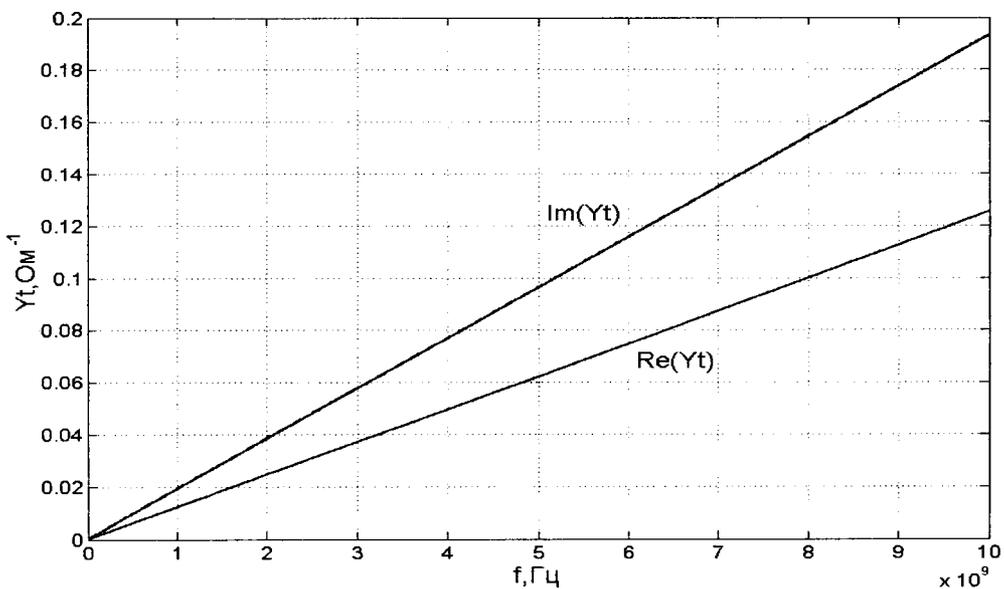


Рис. 10 – Зависимость действительной и мнимой части комплексной проводимости неаподизованного ВШП от его центральной частоты (апертура ВШП $W = 844.9$ мкм)

4. БЕСПРОВОДНАЯ ПАВ СЕНСОРНАЯ МИКРОСИСТЕМА

Рассмотрим беспроводную пассивную ПАВ сенсорную микросистему с рабочей частотой 2.4 ГГц и конструкцией ПАВ ретранслятора - «отражательная линия задержки» (см. рис. 1).

В качестве материала подложки возьмем $128^{\circ}\text{LiNbO}_3$, имеющий относительную диэлектрическую проницаемость $\epsilon = 57.1$ и скорость ПАВ на свободной и металлизированной поверхностях $V_0 = 3890$ м/с и $V_m = 3875$ м/с, соответственно. Константа Γ_s для такого звукопровода равна $5.56 \cdot 10^7$.

На лицевой стороне подложки будет располагаться микрополосковая (patch) антенна и неаподизованный ВШП, один конец которого будет соединен с антенной в точке питания, а другой со сплошной металлизированной поверхностью на обратной стороне подложки («земля»).

Возьмем ВШП, содержащий четыре электрода. Коэффициенты усиления антенны ридера и ПАВ ретранслятора G_p и G_{ant} , соответственно, примем равными 8 дБи, т.е. примерно 6.3 раза. Входное сопротивление антенн ПАВ ретранслятора и ридера примем равным 50 Ом. Допустим также, что ридер излучает ЭМ импульс мощностью $P_p = 10$ Вт.

Для определения параметров функционирования описанной выше системы была разработана программа «RFID SAW Sensor» в программном пакете Matlab 6.0. Результаты представлены в таблице 1. Зависимость коэффициента ослабления по мощности, представляющего собой отношение мощности, принятой ридером от ПАВ ретранслятора, к мощности опрашивающего сигнала, излученного ридером, представлена на рис. 11.

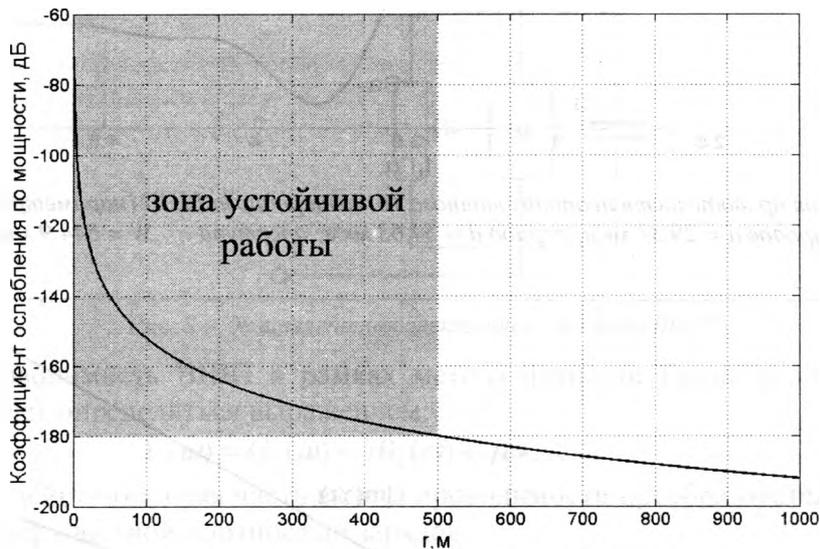


Рис. 11 – Зависимость коэффициента ослабления по мощности от расстояния считывания

Максимальную дальность считывания системы можно приблизительно оценить зная шумовую ЭДС в антенне ридера, принимающего РЧ отклик от ПАВ ретранслятора.

Шумовая ЭДС, возникающая в антенне, определяется выражением [10]:

$$\left| \bar{e}_\omega \right|^2 = \frac{2}{\pi} (R_\Sigma \cdot k \cdot T_A^0 + R_{n.a.} \cdot k \cdot T_0), \quad (24)$$

где \bar{e}_ω – шумовая ЭДС антенны;

R_Σ – сопротивление излучения антенны;

k – постоянная Больцмана;

T_A^0 – шумовая температура антенны;

$R_{n.a.}$ – сопротивление потерь антенны;

T_0 – температура материала антенны.

Таблица 1 – Основные параметры функционирования 2.4 ГГц беспроводной пассивной ПАВ сенсорной микросистемы

Материал подложки ПАВ ретранслятора	128 ⁰ LiNbO ₃	
Рабочая частота ПАВ ретранслятора, f	2.4 ГГц	
Мощность, излучаемая ридером, P_p	10 Вт	
Коэффициенты усиления антенны ПАВ ретранслятора, $G_{ант}$	6.3 (8 дБи)	
Коэффициенты усиления антенны ридера, G_p	6.3 (8 дБи)	
Входное сопротивление антенны ПАВ ретранслятора, $R_{ант}$	50 Ом	
Входное сопротивление антенны ридера, R_p	50 Ом	
Расстояние между ридером и ПАВ ретранслятором, $r_{ант}$	10 м	500 м
Ширина электрода ВШП, a	0.433 мкм	
Период ВШП, d	0.808 мкм	
Апертура ВШП, W	844.9 мкм	
Проводимость 4-х электродного ВШП, $Y_{ВШП}$	0.0017 - 0.0127 Ом ⁻¹	
Модуль Фурье преобразования от электростатической плотности зарядов на электродах ВШП при единичном приложенном напряжении, $\bar{\rho}_e(k_0)$	5.7596·10 ⁻¹⁰ Кл/м	
Напряженность электрической составляющей ЭМ волны на расстоянии $r_{ант} = 10$ м, $E_{нр}$	6.1482 В/м	0.1230 В/м
Сила тока в цепи ПАВ ретранслятора, возбуждаемая ридером, $I_{нр}$	0.0025 - 0.0032 А	4.97·10 ⁻⁵ - 6.37·10 ⁻⁵ А
Напряжение, возбуждаемое на ВШП ридером, $U_{ВШП}$	0.2721 + 0.1592	0.0054 + 0.0032 В
Электрический потенциал ПАВ, возбуждаемый ридером, $\varphi_{нр}$	0.0871 + 0.0510	0.0017 + 0.0010 В
Мощность, излучаемая антенной ПАВ ретранслятора ридеру, $P_{из}$	1.5702 мкВт	6.281·10 ⁻¹⁰ Вт
Сила тока, наводимая ПАВ ретранслятором в ридере, I_p	1.5706 мкА	6.2823·10 ⁻¹⁰ А
Мощность, выделяемая ПАВ ретранслятором в нагрузку ридера, $P_{возв}$	6.1668·10 ⁻¹¹ Вт	9.8669·10 ⁻¹⁸ Вт
Коэффициент ослабления по мощности, K_p	-112 дБ	-180 дБ

Для коэффициента сигнал-шум в антенне ридера, равном 100, максимальное расстояние взаимодействия ридера и ПАВ ретранслятора составит $r_{max} \approx 500$ м (см. рис. 11).

5. ВЫВОДЫ

1. Для моделирования и расчета параметров сенсорных микросхем на ПАВ и функционирования ПАВ сенсорной метки (ПАВ-ретранслятора) с помощью метода функции Грина разработана программа “RFID SAW Sensor” в программном пакете Matlab 6.0.

2. Для беспроводных пассивных ПАВ сенсорных идентификационных меток были проведены исследования параметров функционирования 2,4 ГГц ПАВ ретранслятора. Напряжение, возбуждаемое на ВШП ПАВ ретрансляторе ридера, излучающим 10 Вт, на расстоянии 10 м составило примерно 0,3 В по модулю. Электрический потенциал ПАВ в ретрансляторе составил 0,1 В. Сила тока в ридере, наводимая откликом ПАВ ретранслятора, составила при-

мерно 1, 58 мкА. Коэффициент ослабления по мощности составил минус 112 дБ. Максимальное расстояние взаимодействия с ридером составило 500 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колешко В.М., Карякин Ю.Д. Микросистема дистанционного обнаружения опасных веществ // Доклады 4-я Международная конференция “Обработка информации и управление в чрезвычайных и экстремальных ситуациях”. – Мн.: 2004, с.35-39
2. The Association of the Automatic Identification and Data Capture Industry. «Draft Paper on the Characteristics of RFID-Systems»/ AIM Inc. Frequency Forum White Paper, July 2000.
3. Колешко В.М., Карякин Ю.Д., Чашинский А.С. “Электронный нос” для дистанционного обнаружения взрывчатых веществ // Доклады БГУИР «Электроника, материалы, технологии, информатика». – Мн.: № 5, 2004, с. 44-45
4. Колешко В.М., Карякин Ю.Д. Мультипроцессорная микросистема дистанционного обнаружения взрывчатых и наркотических веществ. Сб. «Теоретическая и прикладная механика», вып. 18. – Мн.:, 2005, с.79-84
5. В. Калинин, А.Курушин. Планарные антенны сотовых телефонов/Chip News, #7, 2001.
6. Wolf-Eckhart Bulst, Gerhard Fischerauer, and Leonhard Reindl. «State of the Art in Wireless Sensing with Surface Acoustic Waves»/ IEEE Transactions On Industrial Electronics, vol. 48, № 2, April 2001.
7. Колешко В.М., Баркалин В.В., Полюнкова Е.В. Управление акустическим полем в микроэлектромеханических сенсорных системах // Машиностроение: Сб. научных трудов, вып. 16. – Мн.: УП Технопринт, 2000, с.66-72
8. Колешко В.М., Мешков Ю.В. Микроэлектронные преобразователи на поверхностных акустических волнах. – М.: Электроника, 1985, 185 с.
9. W. Buff, F. Plath, O. Schmeckebier, M. Rusko, T. Vandahl, H. Luck, and F. Moller, “Remote sensor system using passive SAW sensors,” in Proc. 1994 IEEE Ultrasonics Symp., pp. 585–588.
10. Юрцев О.А. Элементы общей теории антенн. Ч.1: Методическое пособие по курсу «Антенны и устройства СВЧ» для студентов специальности «Радиотехника». В 3-х частях. – Мн.: БГУИР, 1997. – 77с.
11. Морган Д. Устройства обработки сигналов на поверхностных акустических волнах.-М.: Радио и связь., 1990.-416с.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ВВОДИМОГО ПРОТЕЗА ПРИ РЕКОНСТРУКЦИИ СРЕДНЕГО УША

Михасев Г. И., Ермоченко С. А.

The reconstructed middle ear consisting of a thin annular plate made from cartilage, the intact stapes, and a T-type prosthesis replacing the malleus-incus chain is considered. The first problem is to calculate the initial pretension that can be generated by prosthesis longer than the distance between the stapes head and the eardrum. The second one is to investigate possible stable and unstable positions of the prosthesis after its inserting.

Введение

Среднее ухо человека является сложнейшей механической колебательной системой. Повреждения мембраны, а также ограниченная подвижность цепи косточек, вызванная отосклерозом и другими заболеваниями, может приводить к значительному снижению порога акустической восприимчивости или к полной потере слуха. В ряде случаев, с целью устранения патологических изменений или механических повреждений, в оториноларингологии прибегают к частичной или полной реконструкции среднего уха [1]. Объем реконструкции зависит от степени повреждения каждого составляющего элемента колебательной системы среднего уха. Классификация используемых на практике реконструктивных операций приведена в работах [1-3].

В настоящей работе рассматривается случай частичной реконструкции [1, 4], когда барабанная перепонка замещается искусственной мембраной, изготовленной из хряща [5], а вместо поврежденной цепи косточек «молоточек-наковальня» вводится Т-образный протез (рис. 1).

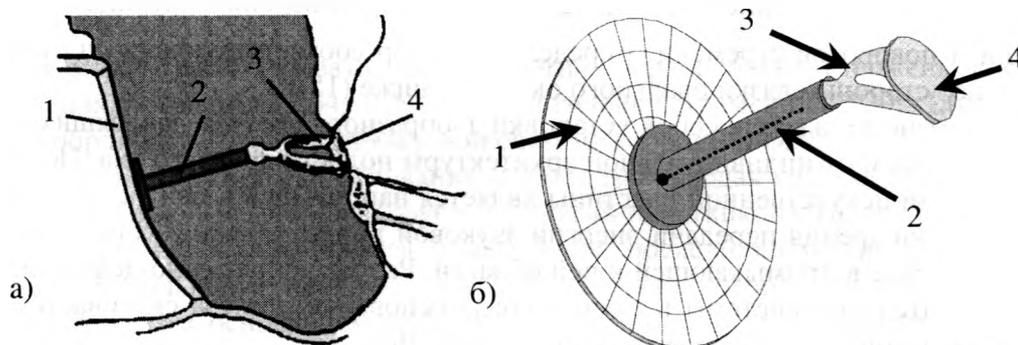


Рис. 1. Реконструированное среднее ухо: а) поперечное сечение, б) геометрическая модель.

1 - восстановленная мембрана, 2 - Т-образный протез, 3 - стремя, 4 - основание стремени, овальное окно

Характеристики данной колебательной системы, определяющие качество слуха оперированного больного, сильно зависят как от параметров вводимого протеза [1], так и от техники протезирования. Так выбор длины Т-образного протеза, замещающего звено «молоточек-наковальня», определение угла наклона стержня протеза к его основанию, а также места его крепления к барабанной перепонке сильно влияют на напряжения, возникающие в пластинке, моделирующей мембрану, в связке овального окна, а также в сочленении «протез-стремя» [6]. Значительные напряжения могут сильно исказить спектр собственных частот восстановленной колебательной системы, изменяя тем самым порог восприимчивости падающей акустической волны [7]. Одной из задач, возникающих при реконструкции среднего уха, является выбор оптимальных параметров протеза, обеспечивающих, с одной стороны устойчивое положение протеза, а с другой стороны – минимум начальных напряжений, обусловленных введением протеза.

Целью данной работы является исследование влияния параметров протеза на начальные усилия в соединении «протез-стремя», а также на устойчивость его положения. Рассматривается случай эксцентричного соединения основания Т-образного протеза с восстановленной мембраной.

Геометрическая модель колебательной системы

Здесь предлагается упрощенная модель реконструированного среднего уха. Восстановленная колебательная система состоит из круглой пластины, изготовленной из хряща и заменяющей барабанную перепонку, а также двух шарнирно соединенных между собой стержней. Первый стержень, жестко скрепленный с пластиной, моделирует Т-образный протез, замещающий цепь косточек «молоточек-наковальня», а второй – стременистую косточку.

Основание стремени представляет собой жесткую пластинку, которая крепится при помощи связок овального окна к костной ткани. Жесткостные свойства связок были изучены в работе [8] и описываются матрицей:

$$C_{RB} = c_{ref} \begin{bmatrix} 51,4 & -0,24 & -1,37 & 0,04 & 9,66 & 0,35 \\ -0,24 & 49,2 & -0,6 & -7,87 & -1,01 & -8,4 \\ -1,37 & -0,6 & 27,8 & 0,37 & 17,1 & 0,96 \\ 0,04 & -7,87 & 0,37 & 8,29 & 0,58 & 2,6 \\ 9,66 & -1,01 & 17,1 & 0,58 & 29,7 & 1,6 \\ 0,35 & -8,4 & 0,96 & 2,6 & 1,6 & 12,9 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где коэффициент c_{ref} может варьироваться от $0,035 \text{ Н} \cdot \text{мм}^{-1}$ до $0,05 \text{ Н} \cdot \text{мм}^{-1}$. В данной работе принято среднее значение $c_{ref} = 0,0425 \text{ Н} \cdot \text{мм}^{-1}$. Произведение матрицы (1) на вектор перемещений и поворотов стремени определяет вектор соответствующих сил и моментов, возникающих со стороны связки овального окна (см. ниже (15)).

Существует несколько способов установки Т-образного протеза, зависящих как от степени патологии, так и от индивидуальной архитектуры полости среднего уха. Поскольку амплитуда колебаний искусственной пластины является наибольшей в центре, то наиболее оптимальным с точки зрения передачи энергии звуковой волны является установка протеза в центре пластины или в примыкающей к ней области. Расчет напряженно-деформированного состояния колебательной системы в случае, когда основание протеза склеивается с восстановленной мембраной в ее центре выполнен в работе [9].

На рис. 1 показан Т-образный протез, ось которого перпендикулярна его основанию. Подобный вариант установки протеза является, возможно, наиболее оптимальным с точки зрения его устойчивости, однако он предполагает значительный отвод стремени от исходного положения, что приводит к появлению больших напряжений в связке овального окна, а также усилия в шарнирном соединении «протез-стремя» [6]. В данной работе рассматривается другой вариант реконструкции, когда ось протеза наклонена к его основанию под некоторым углом (inclined position, см. [1]).

Физические и геометрические параметры пластины, моделирующей барабанную перепонку, стремени и протеза, а также способы введения систем координат взяты из работ [8, 10].

Восстановленная барабанная перепонка рассматривается как однородная круглая изотропная пластинка толщиной h и радиуса a . Модуль Юнга материала пластины обозначим через E , а коэффициент Пуассона – через σ . Протез моделируется как абсолютно твердый Т-образный стержень, основанием которого является абсолютно твердая круглая пластинка радиуса b . Ось протеза (стержня) наклонена к плоскости основания под некоторым углом θ_k .

Длина стержня протеза l_p является варьируемой величиной. Минимальная его длина l_{\min} равна расстоянию от точки установки протеза до головки стремени, находящегося в нормальном (ненапряженном) состоянии. При установке протеза в центр пластинки $l_{\min} = 4,358$ мм. Максимальная длина стержня протеза не превышает минимальную более чем на 0,5 – 1 мм.

Введем глобальную ортогональную систему координат $Oxyz$, поместив начало координат в центр недеформированной пластинки (см. рис. 2), и направив ось Oz перпендикулярно ее плоскости. Обозначим через φ_p угол между осью Ox и проекцией оси протеза на его основание. Во введенной системе координат обозначим через x_p, y_p координаты точки O_p – центра основания протеза.

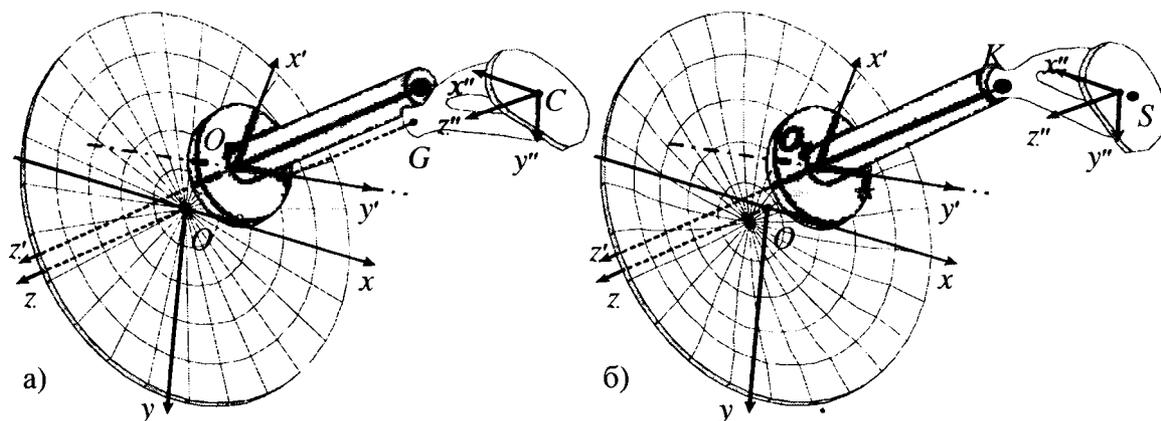


Рис. 2. Схема реконструированного среднего уха: а) до анкирования протеза на головку стремени; б) после анкирования протеза на головку стремени

Стремя можно рассматривать как абсолютно твердое тело – стержень, соединяющий центр основания стремени $C(3,64; -1,50; -6,50)$ и головку стремени $G(2,29; -1,65; -3,32)$. Здесь приведены координаты (в мм), в глобальной системе координат $Oxyz$.

При установке протеза его основание (абсолютно твердая круглая пластинка) склеивается с восстановленной мембраной (круглой упругой пластинкой). Предполагая жесткий характер склеивания основания протеза и мембраны, последнюю можно рассматривать как эксцентрическую кольцевую круглую упругую пластинку, которая сопряжена по внутреннему контуру с круглым основанием протеза. Вторым концом протез анкируется на головку стременной косточки (в точке G). После установки протеза его основание прогибает упругую кольцеобразную пластинку и отводит стременную косточку в некоторое новое положение, так что точки G и C занимают положение K и S , соответственно (см. рис. 2б). В результате чего протез также совершит некоторое перемещение относительно выбранной глобальной системы координат. Обозначим через w_p поступательное перемещение протеза вдоль оси Oz , а через θ_p – угол поворота основания протеза вокруг некоторой оси $O_p y'$, лежащей в плоскости основания стремени (см. рис. 2). Пусть $O_p x' y' z'$ – новая ортогональная система координат, а φ_r – угол между осями Oy и $O_p y'$.

Для определения сил и моментов, действующих на стременную косточку со стороны связок овального окна, удобно ввести систему координат $Sx''y''z''$, связанную с центром основания стремени C в его исходном положении (см. рис. 2а). Формулы перехода от глобальной системы координат $Oxyz$ к $Sx''y''z''$ приведены в работе [8]. Пусть (x_k, y_k, z_k) – координаты

наты точки K в системе координат $Oxyz$, а (x_s, y_s, z_s) – координаты точки S относительно $Sx''y''z''$.

Считаем, что в точке $K(x_k, y_k, z_k)$ выполняется условие шарнирного соединения протеза и стремени. Пусть F_k – сила, возникающая в данном соединении. Обозначим через X_k, Y_k, Z_k ее компоненты в системе $Oxyz$.

Введенные параметры $w_p, \theta_p, \varphi_r, X_k, Y_k, Z_k, x_s, y_s, z_s$ однозначно определяют напряженно-деформированное состояние системы после установки протеза.

Уравнения равновесия

В связи с тем, что поворот протеза происходит вокруг оси $O_p y'$, сила F_k должна лежать в плоскости $O_p x' z'$. Это условие записывается как

$$Y_k \cos \varphi_r - X_k \sin \varphi_r = 0. \quad (2)$$

Стремя рассматривается как абсолютно твердое тело, поэтому его длина l_s после введения протеза остается неизменной:

$$\sqrt{(x_k'' - x_s'')^2 + (y_k'' - y_s'')^2 + (z_k'' - z_s'')^2} = l_s, \quad (3)$$

где (x_k'', y_k'', z_k'') – координаты точки K в системе координат $Sx''y''z''$.

Введем нормальный прогиб пластинки $w(r, \varphi)$ в полярной системе координат, связанной с $O_p x' y' z'$. В классической постановке функция $w(r, \varphi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta^2 w = 0, \quad (4)$$

где Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат.

На внутренней границе примем условия жесткой заделки:

$$w|_{r=b} = w_p + b \cos \varphi \operatorname{tg} \theta_p, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=b} = \cos \varphi \operatorname{tg} \theta_p. \quad (5)$$

По внешнему контуру барабанная перепонка граничит с волокнисто-хрящевым (мембранным) кольцом [8], упругие свойства которого непостоянны по периметру [10] и могут колебаться у каждого человека. Рассмотрим на внешнем контуре условия упругой заделки:

$$k_{st} w|_{r=\Gamma} = Q_l|_{r=\Gamma}, \quad k_{st} \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=\Gamma} = M_l|_{r=\Gamma}, \quad (6)$$

где

$$Q_l = D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad M_l = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sigma}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \quad (7)$$

– перерезывающая сила и изгибающий момент в пластине, приходящиеся на единицу длины дуги, $D = E h^3 / [12(1 - \sigma^2)]$ – цилиндрическая жесткость пластины, значения коэффициентов k_{st} и k_{st} могут варьироваться [10]. Для простоты нами рассмотрены усредненные значения $k_{st} = 7,5 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$ и $k_{st} = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ Н}$.

Уравнение внешней границы Γ в полярной системе координат с центром в точке O_p имеет вид:

$$r = \Gamma(\varphi) = \sqrt{a^2 - \delta_p^2 \sin^2(\varphi + \varphi_r - \varphi_p)} - \delta_p \cos(\varphi + \varphi_r - \varphi_p), \quad (8)$$

$$\delta_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}, \quad \cos \varphi_p = x_p / \delta_p, \quad \sin \varphi_p = y_p / \delta_p.$$

Считаем, что центр основания протеза (точка O_p) находится на относительно малом расстоянии от центра восстановленной мембраны (точка O), так что параметр $\mu = \delta_p / a$ можно считать малым. Разложим функцию (8) в ряд по степеням малого параметра μ :

$$r = a \left[1 - \mu \cos(\varphi + \varphi_r - \varphi_p) - \mu^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2(\varphi + \varphi_r - \varphi_p) \right) + O(\mu^3) \right]. \quad (9)$$

Решение уравнения (4) будем искать в виде асимптотического разложения по степеням μ , представив каждый член данного разложения в виде ряда Фурье:

$$w(r, \varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i w_i(r, \varphi), \quad (10)$$

$$w_i(r, \varphi) = w_i^0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} [w_{ik}^c(r) \cos k(\varphi + \varphi_r - \varphi_p) + w_{ik}^s(r) \sin k(\varphi + \varphi_r - \varphi_p)].$$

Подстановка данного разложения в уравнение, (4) с учетом граничных условий (5), (6) и асимптотического представления внешней границы (9), позволяет найти неизвестные функции $w_i^0(r)$, $w_{ik}^c(r)$, $w_{ik}^s(r)$. Аналитические представления последних ввиду их громоздкости здесь не приводятся.

Подставляя найденное решение (10) в (7) и интегрируя по всему контуру $r = b$, получаем равнодействующие перерезывающей силы, изгибающего момента и момента перерезывающей силы, действующих со стороны пластины на основание протеза:

$$Q = -2 \pi b D [c_1 w_p + \mu c_2 \operatorname{tg} \theta_p \cos(\varphi_r - \varphi_p)],$$

$$M = -\pi b D [c_3 \operatorname{tg} \theta_p + \mu c_4 w_p \cos(\varphi_r - \varphi_p) + \mu^2 c_5 \operatorname{tg} \theta_p + \mu^2 c_6 \operatorname{tg} \theta_p \cos 2(\varphi_r - \varphi_p)], \quad (11)$$

$$M_Q = -\pi b^2 D [c_7 w_p + c_8 \mu \operatorname{tg} \theta_p \cos(\varphi_r - \varphi_p) + \mu^2 c_9 w_p \cos 2(\varphi_r - \varphi_p)].$$

Здесь c_j ($j = 1, \dots, 9$) – константы, определяемые из граничных условий (ввиду громоздкости не выписаны).

Тогда условия равновесия протеза примут вид:

$$(X_k \cos \varphi_r + Y_k \sin \varphi_r) \sin \theta_p - Z_k \cos \theta_p - Q = 0, \quad (12)$$

$$I_p [(X_k \cos \varphi_r + Y_k \sin \varphi_r) (\cos \theta_k \cos(\varphi_k - \varphi_r) \sin \theta_p - \sin \theta_k \cos \theta_p) - Z_k (\cos \theta_k \cos(\varphi_k - \varphi_r) \cos \theta_p + \sin \theta_k \sin \theta_p)] + M + M_Q = 0. \quad (13)$$

Здесь уравнения (12) и (13) выражают условия равенства нулю главного вектора всех сил и главного момента, соответственно, действующих на протез со стороны кольцевой пластинки и стремени косточки.

Запишем теперь условия равновесия стремени. Положение стремени, с точностью до поворота вокруг оси Cz'' определяется координатами (x_s, y_s, z_s) точки S и углами поворота основания стремени α_x и α_y вокруг осей Cx'' и Cy'' , соответственно.

Параметры α_x и α_y легко находятся по формулам

$$\begin{aligned}\sin \alpha_x &= \frac{(y_g - y_c)(z_k'' - z_s) - (z_g - z_c)(y_k'' - y_s)}{(y_g - y_c)^2 + (z_g - z_c)^2}, \\ \sin \alpha_y &= \frac{(x_g - x_c)(z_k'' - z_s) - (z_g - z_c)(x_k'' - x_s)}{(x_g - x_c)^2 + (z_g - z_c)^2},\end{aligned}\quad (14)$$

где x_g, y_g, z_g – ранее приведенные координаты точки G в глобальной системе координат.

Компоненты равнодействующих сил и моментов (в системе координат $Sx''y''z''$), действующих на основание стремени косточки со стороны связок овального окна, определяются по формуле (1):

$$(F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)^T = C_{RB} (x_s, y_s, z_s, \alpha_x, \alpha_y, 0)^T. \quad (15)$$

Тогда уравнения равновесия стремени примут вид:

$$\begin{aligned}F_x - X_k'' &= 0, & F_y - Y_k'' &= 0, & F_z - Z_k'' &= 0, \\ M_x + y_k'' Z_k'' - z_k'' Y_k'' &= 0, & M_y + z_k'' X_k'' - x_k'' Z_k'' &= 0,\end{aligned}\quad (16)$$

где X_k'', Y_k'', Z_k'' – компоненты вектора F_k в системе координат $Sx''y''z''$.

Система уравнений (2), (3), (12), (13), (16) является замкнутой относительно неизвестных $w_p, \theta_p, \varphi_r, X_k, Y_k, Z_k, x_s, y_s, z_s$, которые однозначно определяют статическое напряженно-деформированное состояние реконструированной колебательной системы среднего уха. Следует заметить, что полученные уравнения являются нелинейными и могут допускать (в зависимости от соотношения входящих в задачу параметров) множество решений. Очевидно, что в том случае, когда длина протеза лишь незначительно превышает минимально возможную величину l_{\min} , уравнения равновесия допускают линеаризацию. Решения линеаризованных уравнений будут соответствовать устойчивому положению системы в окрестности ее исходного положения (до введения протеза).

Если же длина протеза достаточно велика, то все перемещения и повороты колебательной системы могут быть значительными. В этом случае среди найденных решений нелинейных уравнений равновесия возможны такие, которые соответствуют неустойчивому положению системы.

Для определения устойчивого положения протеза были выполнены расчеты потенциальной энергии системы:

$$U = U_1 + U_2, \quad (17)$$

где

$$U_1 = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_b^{\Gamma(\varphi)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)^2 r dr d\varphi \quad (18)$$

есть потенциальная энергия деформированной пластины, а

$$U_2 = \frac{1}{2} (F_x x_s + F_y y_s + F_z z_s + M_x \alpha_x + M_y \alpha_y) \quad (19)$$

– потенциальная энергия деформирования связок овального окна.

Численные расчеты

Для различных значений геометрических параметров вводимого протеза были найдены решения разрешающих уравнений, соответствующие как устойчивому, так и неустойчивому положению равновесия системы. Среди возможных решений практический интерес представляют те решения, для которых потенциальная энергия реконструированной системы среднего уха минимальна. Установлено, что при введении протеза с длиной, превышающей минимальную более чем на 1 мм, потенциальная энергия системы не удовлетворяет требованию локального минимума, что говорит о том, что система будет находиться в неустойчивом положении.

На рис. 3 представлен график зависимости модуля силы F_k , возникающей в шарнирном соединении «протез-стремя», от приращения длины протеза Δl_p для различных вариантов установки протеза (в зависимости от параметра μ и угла φ_p , характеризующих положение точки O_p). Кривые на рис. 3а соответствуют тому случаю, когда центр O_p основания протеза крепится с восстановленной мембраной по линии, совпадающей с кривой сопряжения рукоятки молоточка (*malleus manubrium*) с мембраной, а графики на рис. 3б – случаю, когда точка O_p находится между линией «*malleus manubrium*» и проекцией головки стремени (точка G) на мембрану. Во всех случаях вычисления выполнялись при следующих значениях геометрических и физических параметров системы: $a = 5$ мм, $b = 1,5$ мм, $h = 0,15$ мм, $E = 3,3 \cdot 10^5$ Па, $\sigma = 0,4$. Значение угла θ_k (угла наклона оси протеза к плоскости его основания) выбиралось таким образом, чтобы при минимальной длине протеза его конец совпадал с головкой стремени, находящегося в нормальном состоянии.

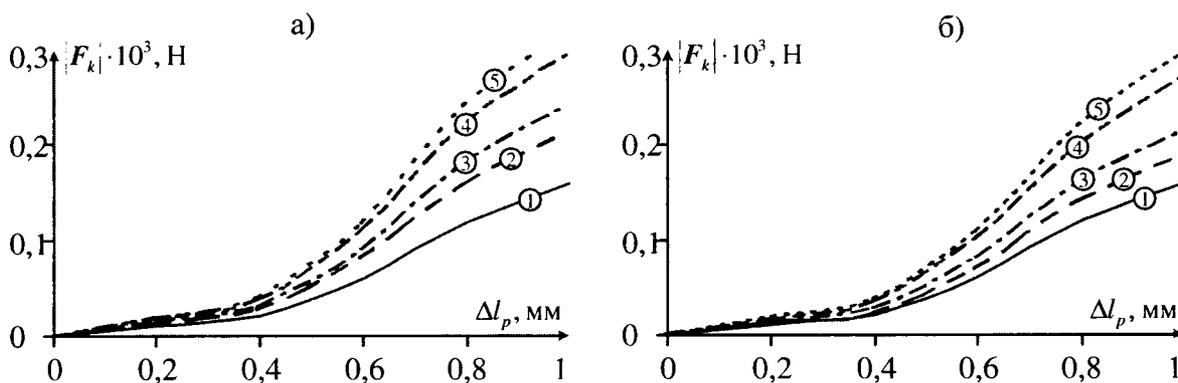


Рис. 3. Графики зависимости модуля силы F_k от $\Delta l_p = l_p - l_{\min}$: а) $\varphi_p = -\pi/2$, б) $\varphi_p = -0,298$.

1 – $\mu = 0$, 2 – $\mu = 0,02$, 3 – $\mu = 0,04$, 4 – $\mu = 0,06$, 5 – $\mu = 0,08$.

Кривые на рис. 3 указывают на линейный характер зависимостей величины силы F_k от приращения длины протеза при малых $\Delta l_p < 0,4$ мм. При увеличении длины протеза на 0,4 – 0,5 мм сверх минимальной, сила в шарнирном соединении значительно возрастает, что объясняется конечными перемещениями протеза и стремени косточки. При этом зависимость силы от приращения Δl_p становится более заметной при увеличении параметра μ , то есть при удалении центра основания протеза от центра восстановленной мембраны.

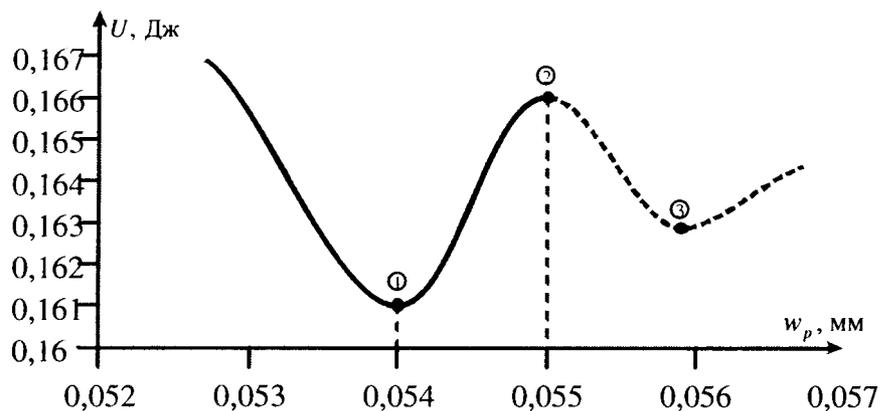


Рис. 4. Потенциальная энергия колебательной системы реконструированного среднего уха:
 1 – устойчивое положение, 2 – неустойчивое положение, 3 – предполагаемое второе устойчивое положение.

Для более точных расчетов напряженно-деформированного состояния колебательной системы при конечных перемещениях составляющих ее элементов необходимо также рассмотрение деформаций пластинки в нелинейной постановке. Укажем также на влияние стремной мышцы на конфигурацию всей системы при значительных поворотах и перемещениях стремной косточки.

Анализ потенциальной энергии системы (см. рис. 4), показал, что при увеличении длины протеза на 0,5 мм и более сверх минимальной, разрешающие уравнения допускают несколько решений. В расчетах данной работы количество решений не превышало двух (они соответствуют точкам 1 и 2 на рис. 4). Однако, при рассмотрении уравнения пластины в нелинейной постановке, возможно появление смежных положений устойчивого равновесия (точка 3 на рис. 4) с более высоким уровнем потенциальной энергии, чем в точке 1.

Выводы

В работе предложен метод расчета напряженно-деформированного состояния реконструированной колебательной системы среднего уха после установки Т-образного протеза, замещающего звено косточек «молоточек-наковальня». Рассмотрен случай, когда ось протеза наклонена к плоскости его основания под острым углом, а центр основания протеза находится вблизи центра восстановленной мембраны. Исследовано влияние длины протеза и его положения на усилие F_k , возникающее в шарнирном соединении протеза с головкой стремной косточки. Установлено, что при малых значениях приращения длины протеза ($\Delta l_p < 0,4$ мм) зависимость «сила – длина протеза» носит линейный характер. Дальнейшее увеличение длины протеза приводит к значительному (нелинейному) возрастанию силы F_k .

Обнаружено также, что кроме устойчивого положения равновесия протеза, соответствующего минимальному значению потенциальной энергии колебательной системы, возможны и другие положения равновесия. При этом ближайшее смежное положение равновесия является неустойчивым, ибо потенциальная энергия системы в данном положении имеет локальный максимум. Указывается также на возможные смежные устойчивые положения равновесия системы с более высоким уровнем потенциальной энергии. Таким образом, представляется крайне важным при хирургической реконструкции выбор оптимальной длины протеза, а также его ориентации, с учетом индивидуальной архитектуры среднего уха, при которых конфигурация всей системы в момент введения протеза занимает положение как можно близкое к устойчивому положению с наименьшим уровнем энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huttenbrink, K.-B. Mechanical aspects of middle ear reconstruction / K.-B. Huttenbrink // *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery / Dept. of Oto-Rhino-Laryngology of Univ. of Technology*; ed. by K.-B. Huttenbrink. – Dresden, 1997. – P. 165-168.
2. Ситников, В.П. Щадящий вариант функциональной стапедопластинки при отосклерозе / В.П. Ситников, А.Б. Бизунков // *Здравоохранение*. – 1997. – №7. – С. 50-51.
3. Sitnikov, V.P. Ossiculoplastz in patients with chronic purulent otitis media / V.P. Sitnikov, A. Kaushic // *Proc. Int. Otorhinolaryng Congress*. – Bratislava, 1998. – P. 84.
4. Jahnke, K. Missing handle of malleus: reinforcement of the tympanic membrane / K. Jahnke, B. Leieberum, W. Kuhn // *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery / Dept. of Oto-Rhino-Laryngology of Univ. of Technology*; ed. by K.-B. Huttenbrink. – Dresden, 1997. – P. 197-199.
5. Assesment of vibration characteristics of different cartilage reconstruction techniques for the tympanic membrane using scanning laser vibrometry / D. Murbe [et al.] // *The function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear / Kugler Publication*; ed. by J.J. Rosowski, S.N. Merchant. – Hague, 2000. – P. 321-329.
6. Mikhasev, G. Calculation of the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis / G. Mikhasev, S. Ermochenko, M. Bornitz // *Journal of Biomechanics, Abstracts of the 5th World Congress of Biomechanics, Munich, Germany, 29 Jul. – 4 Aug. 2006*. – 2006. – Vol. 39, Suppl. 1 – P. S389.
7. On the coupling of prosthesis to the middle ear structure and its influence on sound transfer / A. Eiber [et al.] // *The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear / Kugler Publication*; ed. by J. J. Rosowski, S.N. Merchant. – Hague, 2000. – P. 297-308.
8. Modeling of Components of the Human Middle Ear and Simulation of Their Dynamic Behavior / H.-J. Beer [et al.] // *Audiol Neurootol*. – 1999. – № 4. – P. 156-162.
9. Михасев, Г.И. О простейшей модели расчета напряженно-деформированного состояния колебательной системы реконструированного среднего уха / Г.И. Михасев, С.А. Ермоченко, В.П. Ситников // *Вестн. Віцебскага дзярж. ун-та*. – 2004. – №4(34). – С. 97-102.
10. Wada, H. Three-Dimensional Finite-Element Method Analysis of the Human Middle Ear / H. Wada, T. Koite, T. Kobayashi // *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery / Dept. of Oto-Rhino-Laryngology of Univ. of Technology*; ed. by K.-B. Huttenbrink. – Dresden, 1997. – P. 76-81.

ПРИМЕНЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ ИНВАРИАНТНОСТИ К ВЫВОДУ НОВЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЯРКОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ

Роговцов Н.Н.

The new integral equations for brightness coefficients of planeparallel dispersive medium of optical thickness τ_0 are obtained using invariance relations, involving usual Green's functions or their generalization (for example, reduced Green's functions) of radiation transfer equations. It is shown that the structure of these integral equations enables to obtain multiterm asymptotics of brightness coefficients when $\tau_0 \rightarrow +\infty$ or $\tau_0 \rightarrow +0$. Such kinds of asymptotics of transmission coefficient $\sigma(\dots)$ when $\tau_0 \rightarrow +\infty$ are given to illustrate.

1. При рассмотрении целого ряда проблем, связанных с исследованием свойств атмосфер Земли, Венеры и планет-гигантов, приходится решать следующую краевую задачу:

$$\mu \frac{\partial G_s(\tau, \mu, \xi, \Lambda, \tau_0)}{\partial \tau} = -G_s(\tau, \mu, \xi, \Lambda, \tau_0) + \frac{\Lambda}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') G_s(\tau, \mu', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu', \quad (1)$$

$$(\tau, \mu) \in [0, \tau_0] \times [-1, 1], \quad \xi \in (0, 1], \quad \Lambda \in (0, 1], \quad \tau_0 \in R_+;$$

$$G_s(+0, |\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = \delta(|\mu| - \xi). \quad (2)$$

Здесь $P(\mu, \mu') = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \chi(\mu_0) d\varphi$, где $\mu_0 = ((1 - \mu^2)(1 - \mu'^2))^{\frac{1}{2}} \cos \varphi + \mu\mu'$, $\chi(\mu_0)$ неотрица-

тельная вещественная функция, удовлетворяющая условию нормировки $\int_{-1}^1 \chi(\mu_0) d\mu_0 = 2$;

$G_s(\tau, \mu, \xi, \Lambda, \tau_0)$ — поверхностная функция Грина [1] уравнения переноса излучения (RTE), $\delta(\dots)$ — дельта-функция Дирака.

2. При решении обратных задач теории переноса излучения необходимо не только проанализировать общие качественные свойства решения краевой задачи (1), (2), но и найти само это решение в удобном аналитическом (или хотя бы в полуаналитическом) виде. Формально исследование указанной задачи можно свести к изучению уравнения Фредгольма 2-го рода для случая прямоугольной области $[0, \tau_0] \times [-1, 1]$. Общие методы решения такого рода уравнений в замкнутой форме не разработаны. Однако, краевую задачу (1), (2) с помощью общих соотношений инвариантности [2, 3] возможно переформулировать так, чтобы отыскание $G_s(\tau, \mu, \xi, \Lambda, \tau_0)$ сводилось к нахождению коэффициентов яркости $\rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$, $\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$, которые определяются такими выражениями:

$$\begin{aligned} G_s(0 - |\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) &= 2\xi \rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0), \\ G_s(\tau_0, |\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) &= \exp(-(\tau_0/\xi)) \delta(|\mu| - \xi) + 2\xi \sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того с использованием общих соотношений инвариантности [2, 3] удастся сформулировать новые интегральные уравнения для $\rho(\dots)$ и $\sigma(\dots)$, структура которых позволяет находить многочленные асимптотики для коэффициентов яркости при $\tau_0 \rightarrow +0$ и $\tau_0 \rightarrow +\infty$. В работе будут кратко описаны процедуры получения этих интегральных уравнений и упомянутых асимптотик.

3. Из результатов работ [2, 3] следует справедливость такого соотношения инвариантности

$$\theta_{[0, \tau_0]}(\tau) G_s(\tau, \mu, \xi, \Lambda, \tau_0) = \xi G_{(0, \infty)}(\tau, \mu, 0, \xi, \Lambda) - \int_0^1 \mu' G_{(0, \infty)}(\tau, \mu, \tau_0, \mu', \Lambda) G_s(\tau_0, \mu', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu', \quad (4)$$

где $\theta_{[0, \tau_0]}(\tau)$ — характеристическая функция множества $[0, \tau_0]$ $G_{(0, \infty)}(\tau, \mu, \tau', \mu', \Lambda)$ — «объемная» функция Грина [1] для RTE для случая полубесконечной дисперсной среды $V_{(0, \infty)}$, содержащей «источник» $\delta(\tau - \tau') \delta(\mu - \mu')$. Так как к настоящему времени разработаны эффективные алгоритмы отыскания функции $G_{(0, \infty)}(\tau, \mu, \tau', \mu', \Lambda)$, то будем считать ее известной. Заметим, что соотношение (4) получено посредством погружения слоя « $[0, \tau_0]$ » в полубесконечную среду « $[0, +\infty)$ » и учета всех изменений в решениях краевых задач для RTE, которые при этом в них возникают (см. подробные разъяснения в [3]). Из (3), (4) следует, что верно выражение

$$\rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = 2^{-1} G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, 0, \xi, \Lambda) - 2^{-1} \exp(-(\tau_0 / \xi)) G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \xi, \Lambda) - \int_0^1 \mu' G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) \sigma(\mu', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu'. \quad (5)$$

Используя (3) и соотношение инвариантности, родственное (4), можно показать, что имеет место

$$\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = 2^{-1} (G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, -\xi, \Lambda) - (2\xi)^{-1} \exp(-(\tau_0 / \xi)) \delta(\xi - |\mu|)) - \int_0^1 \mu' G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) \rho(\mu', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu'. \quad (6)$$

Выражения (5), (6) образуют систему интегральных уравнений, которую можно использовать для определения коэффициентов яркости. Система (5), (6) расщепляется на два отдельных интегральных уравнения для данных коэффициентов. Эти интегральные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) &= 2^{-1} G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, 0, \xi, \Lambda) - 2^{-1} \int_0^1 \mu' G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) \times \\ &\times G_{(0, \infty)}(0, -\mu', \tau_0, -\xi, \Lambda) d\mu' + \int_0^1 \mu'' \int_0^1 \mu' G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) \times \\ &\times G_{(0, \infty)}(0, -\mu', \tau_0, \mu'', \Lambda) d\mu' \int_0^1 \mu'' \rho(\mu'', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu''; \\ \sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) &= 2^{-1} (G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, -\xi, \Lambda) - \xi^{-1} \exp(-(\tau_0 / \xi)) \delta(\xi - |\mu|)) - \\ &- 2^{-1} \int_0^1 \mu' G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) G_{(0, \infty)}(0, -\mu', 0, \xi, \Lambda) d\mu' + \\ &+ 2^{-1} \exp(-(\tau_0 / \xi)) \int_0^1 \mu' G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) G_{(0, \infty)}(0, -\mu', \tau_0, \xi, \Lambda) d\mu' + \\ &+ \int_0^1 \mu'' \int_0^1 \mu' G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) G_{(0, \infty)}(0, -\mu', \tau_0, \mu'', \Lambda) d\mu' \int_0^1 \mu'' \sigma(\mu'', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu''. \end{aligned} \quad (7) \quad (8)$$

Заметим, что интегральные уравнения (7), (8) имеют одинаковые ядра и отличаются только свободными членами. Эти ядра выражаются через обычные «объемные» функции Грина RTE для случая полупространства (точнее полубесконечной плоскопараллельной дисперсной среды $V_{(0, \infty)}$). Интегральные уравнения (7) и (8) можно использовать для получения асимптотик функций $\rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$, $\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$, но только тогда, когда $\tau_0 \rightarrow +\infty$.

4. В работах [2, 4] впервые были получены соотношения инвариантности, содержащие усеченные функции Грина. Такого рода соотношения позволяют получать интегральные уравнения для коэффициентов яркости, которые можно использовать для отыскания асимптотик функций $\rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$, $\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$ как при $\tau_0 \rightarrow +\infty$, так и при $\tau_0 \rightarrow +0$. Для вывода соотношений инвариантности, которые содержат усеченные функции Грина или их обобщения, достаточно воспользоваться обычными соотношениями инвариантности [2, 3], к которым относится и выражение (4), и учесть определение характеристической функции множества [5].

Положим в (4) $\tau = \tau_0 + 0$ и $\mu = -|\mu|$. Затем полученное выражение умножим на функцию $\eta_1(\tau_0, |\mu|)$, а результат вычтем из соотношения (4), в котором предварительно положим $\tau_0 = +0$, $\mu = -|\mu|$. В итоге получим одно из искомым соотношений инвариантности. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = & 2^{-1} [G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, 0, \xi, \Lambda) - \eta_1(\tau_0, |\mu|)G_{(0, \infty)}(\tau_0, -|\mu|, 0, -\xi, \Lambda)] - \\ & - 2^{-1} [G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \xi, \Lambda) - \eta_1(\tau_0, |\mu|)G_{(0, \infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, \xi, \Lambda)] \exp(-(\tau_0/\xi)) - \\ & - \int_0^1 \mu' [G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) - \eta_1(\tau_0, |\mu|)G_{(0, \infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda)] \times \\ & \times \sigma(\mu', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu' \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичным образом можно получить второе искомое соотношение инвариантности

$$\begin{aligned} \sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = & -(2\xi)^{-1} \exp(-(\tau_0/\xi)) \delta(\xi - |\mu|) + 2^{-1} [G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, -\xi, \Lambda) - \\ & - \eta_2(\tau_0, |\mu|)G_{(0, \infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, -\xi, \Lambda)] - \\ & - \int_0^1 \mu' [G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) - \eta_2(\tau_0, |\mu|)G_{(0, \infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda)] \times \\ & \times \rho(\mu', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu'. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что если положить $\eta_1(\tau_0, |\mu|) = \eta_2(\tau_0, |\mu|) = \exp(-(\tau_0/|\mu|))$, то ядра интегральных уравнений (9), (10) будут одинаковыми и будут выражаться через усеченные функции Грина [2, 4].

Из системы интегральных уравнений (9), (10) несложно получить отдельные уравнения для коэффициентов яркости. Выпишем эти уравнения только для того частного случая, когда $\eta_1(\tau_0, |\mu|) = \eta_2(\tau_0, |\mu|) = \eta(\tau_0, |\mu|)$. Представим эти уравнения в такой форме:

$$\rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = g_1(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) + \int_0^1 K(|\mu|, \mu'', \tau_0, \Lambda) \rho(\mu'', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu'', \quad (11)$$

$$\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = g_2(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) + \int_0^1 K(|\mu|, \mu'', \tau_0, \Lambda) \sigma(\mu'', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu'', \quad (12)$$

$$\begin{aligned} g_1(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = & 2^{-1} [G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, 0, \xi, \Lambda) - \eta(\tau_0, |\mu|)G_{(0, \infty)}(\tau_0, -|\mu|, 0, \xi, \Lambda)] - \\ & - 2^{-1} \int_0^1 \mu' [G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) - \eta(\tau_0, |\mu|)G_{(0, \infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda)] \times \\ & \times [G_{(0, \infty)}(0, -\mu', \tau_0, -\xi, \Lambda) - \eta(\tau_0, \mu')G_{(0, \infty)}(\tau_0 + 0, -\mu', \tau_0, -\xi, \Lambda)] d\mu', \\ g_2(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = & -(2\xi)^{-1} \exp(-(\tau_0/\xi)) \delta(\xi - |\mu|) + 2^{-1} [G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, -\xi, \Lambda) - \\ & - \eta(\tau_0, |\mu|)G_{(0, \infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, -\xi, \Lambda)] - \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
& -2^{-1} \int_0^1 \mu' [G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) - \eta(\tau_0, |\mu|)G_{(0, \infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda)] \times \\
& \times [G_{(0, \infty)}(0, -\mu', 0, \xi, \Lambda) - \eta(\tau_0, \mu')G_{(0, \infty)}(\tau_0, -\mu', 0, \xi, \Lambda) - (G_{(0, \infty)}(0, -\mu', \tau_0, \xi, \Lambda) - \\
& \eta(\tau_0, \mu')G_{(0, \infty)}(\tau_0 + 0, -\mu', \tau_0, \xi, \Lambda)) \exp(-(\tau_0 / \xi))] d\mu', \\
& K(|\mu|, \mu'', \tau_0, \Lambda) = \mu'' \int_0^1 \mu' [G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) - \eta(\tau_0, |\mu|)G_{(0, \infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda)] \times \\
& \times [G_{(0, \infty)}(0, -\mu', \tau_0, \mu'', \Lambda) - \eta(\tau_0, \mu')G_{(0, \infty)}(\tau_0 + 0, -\mu', \tau_0, \mu'', \Lambda)] d\mu'.
\end{aligned}$$

В отличие от (7), (8) интегральные уравнения (11), (12) позволяют посредством соответствующего выбора функций $\eta(\tau_0, \mu)$ отыскивать асимптотики коэффициентов яркости не только при $\tau_0 \rightarrow +\infty$, но и при $\tau_0 \rightarrow +0$.

5. Перейдем к краткому описанию процедуры получения асимптотик коэффициентов яркости, когда $\tau_0 \rightarrow +\infty$. Для отыскания этих асимптотик, во-первых, следует принять во внимание принцип взаимности [1], согласно которому $G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, 0, \xi, \Lambda) = |\mu|^{-1} G_s(0, -\xi, |\mu|, \Lambda; V_{(0, \infty)})$, $G_{(0, \infty)}(\tau_0, -|\mu|, 0, \xi, \Lambda) = G_{(0, \infty)}(0, -\xi, \tau_0, |\mu|, \Lambda) = \xi^{-1} G_s(\tau_0, -|\mu|, \xi, \Lambda; V_{(0, \infty)})$, $G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \xi, \Lambda) = |\mu|^{-1} G_s(\tau_0, -\xi, |\mu|, \Lambda; V_{(0, \infty)})$, $G_{(0, \infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, -\xi, \Lambda) = |\mu|^{-1} G_s(\tau_0, \xi, |\mu|, \Lambda; V_{(0, \infty)})$, где $G_s(\tau, \mu, \xi, \Lambda; V_{(0, \infty)})$ — поверхностная функция Грина RTE для случая среды $V_{(0, \infty)}$. Во-вторых, надо учесть соотношение инвариантности (см. [2, 3]), связывающее функции $G_s(\dots)$ и $G_\infty(\dots)$, где $G_\infty(\tau, \mu, \tau', \mu', \Lambda)$ — функция Грина RTE для бесконечной плоскопараллельной среды V_∞ , содержащей «источник» $\delta(\tau - \tau') \delta(\mu - \mu')$. Оно имеет вид

$$G_s(\tau, \mu, \mu_1, \Lambda; V_{(0, \infty)}) = \int_{-1}^1 \mu' G_\infty(\tau, \mu, 0, \mu', \Lambda) G_s(+0, \mu', \mu_1, \Lambda; V_{(0, \infty)}) d\mu', \quad (14)$$

где $\tau > 0$, $\mu_1 \in (0, 1]$, $\mu \in [-1, 1]$. В-третьих, необходимо воспользоваться такими представлениями для функции $G_\infty(\dots)$ [6, 7]:

$$\begin{aligned}
G_\infty(\tau, \mu, \tau', \mu', \Lambda) &= G_\infty(\tau - \tau', \mu, \mu', \Lambda) = \sum_{l=1}^p C_l \varphi_{l+}(\mu, \Lambda) \varphi_{l+}(\mu', \Lambda) \exp(-k_l(\tau - \tau')) + \\
&+ G_\infty^{**}(\tau - \tau', \mu, \mu', \Lambda) = C_1 \varphi_{1+}(\mu, \Lambda) \varphi_{1+}(\mu', \Lambda) \exp(-k_1(\tau - \tau')) + G_\infty^*(\tau - \tau', \mu, \mu', \Lambda), \\
&\tau - \tau' > 0
\end{aligned} \quad (15)$$

Здесь C_l — нормировочные константы: $\varphi_{l+}(\mu, \Lambda)$ — собственные функции, соответствующие дискретному спектру характеристического уравнения для RTE; p — число учитываемых в явном виде дискретных неотрицательных корней k_1, k_2, \dots этого характеристического уравнения (если существует только один неотрицательный корень k_1 , то $p = 1$); $G_\infty^*(\dots)$ и $G_\infty^{**}(\dots)$ — функции, учитывающие часть вклада в $G_\infty(\dots)$, которая порождается дискретным и непрерывными спектрами характеристического уравнения и не входит в первые слагаемые в правых частях (15). В-четвертых, надо иметь ввиду, что неотрицательные собственные значения k_1, k_2, \dots принадлежат полуинтервалу $[0, 1)$ и функции $\int_0^1 G_\infty^*(\tau - \tau', \mu, \mu', \Lambda) d\mu'$ и

$\int_0^1 G_{\infty}^{**}(\tau - \tau', \mu, \mu', \Lambda) d\mu'$ допускают соответственно оценки $O(\exp(-k_2(\tau - \tau')))$ и $O(\exp(-k_{p+1}(\tau - \tau')))$ при $(\tau - \tau') \rightarrow +\infty$ (при этом следует полагать $k_2 = 1$ и $k_{p+1} = 1$, если корни R_2 и R_{p+1} не существуют. В-пятых, следует использовать то, что ядра интегральных уравнений (7), (9) с учетом сказанного выше в этом пункте допускают представление в виде суммы вырожденного ядра и остатка, порядок убывания которого при $\tau_0 \rightarrow +\infty$ известен. Посредством учета указанной информации о свойствах функций $G_{(0, \infty)}(\dots)$, $G_{\infty}(\dots)$, $G_{\infty}^*(\dots)$, $G_{\infty}^{**}(\dots)$ из (7), (8), (14), (15) с помощью достаточно трудоемких преобразований и оценок можно получить искомые асимптотики для коэффициентов яркости $\rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$ и $\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$ при $\tau_0 \rightarrow +\infty$. Выпишем для иллюстрации только наиболее простую асимптотику для $\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$, когда $\Lambda \in (0, 1)$. Она имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = & (8/\Lambda^2 C_1 w(\Lambda, \tau_0)) \exp(-k_1 \tau_0) \{u_1(|\mu|, \Lambda) [u_1(\xi, \Lambda) + \\ & + \exp(-k_1 \tau_0) [C_1 a_{11}(\Lambda) \sum_{\ell=2}^{r_1} (a_{1\ell}(\Lambda)/C_{\ell}) u_{\ell}(\xi, \Lambda) \exp(-k_{\ell} \tau_0) + \\ & + (w(\Lambda, \tau_0))^{-1} u_1(\xi, \Lambda) (\tilde{g}_{r_0}(\Lambda, \tau_0) \mathfrak{Z}(\tau_0, \Lambda) + \theta(\Lambda) a_{11}^2(\Lambda) \tilde{g}_{r_1}(\Lambda, \tau_0) \exp(-2k_1 \tau_0)]\} + \\ & + a_{11}(\Lambda) u_1(\xi, \Lambda) \sum_{\ell=2}^{r_0} a_{\ell 1}(\Lambda) u_{\ell}(|\mu|, \Lambda) \exp(-(k_1 + k_{\ell}) \tau_0) + \\ & + \sum_{\ell=2}^{r_0} (8/\Lambda^2 C_{\ell}) u_{\ell}(|\mu|, \Lambda) u_{\ell}(\xi, \Lambda) \exp(-k_{\ell} \tau_0) + O(\exp(-(k_1 + 2k_2) \tau_0)) \\ & \tau_0 \rightarrow +\infty (\Lambda \in (0, 1)). \end{aligned} \quad (16)$$

Асимптотика (16) получена в предположении существования корня k_2 и выполнения условия $k_1 + 2k_2 < 1$. Функции, входящие в (16) имеют следующий смысл:

$$u_{\ell}(|\mu|, \Lambda) = (\Lambda C_{\ell}/4) \left[\varphi_{\ell+}(|\mu|, \Lambda) - 2 \int_0^1 \mu' \varphi_{\ell}(-\mu', \Lambda) \rho_0^{(0, \infty)}(|\mu|, \mu', \Lambda) d\mu' \right],$$

где $\rho_0^{(0, \infty)}(|\mu|, \mu', \Lambda)$ — нулевая азимутальная гармоника коэффициента отражения от полубесконечной дисперсной среды [8]; $a_{j\ell}(\Lambda) = (4/\Lambda) \int_0^1 \mu' \varphi_{j+}(-\mu', \Lambda) u_{\ell}(\mu', \Lambda) d\mu'$,

$$w(\Lambda, \tau_0) = 1 - a_{11}^2(\Lambda) \exp(-2k_1 \tau_0); \quad \tilde{g}_s(\Lambda, \tau_0) = \sum_{\ell=2}^s a_{\ell 1}(\Lambda) a_{1\ell}(\Lambda) \exp(-k_{\ell} \tau_0);$$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Z}(\tau_0, \Lambda))^{-1} = & 1 - (4/\Lambda) \exp(-k_1 \tau_0) (w(\Lambda, \tau_0))^{-1} \int_0^1 \mu'' u_1(\mu'', \Lambda) d\mu'' \int_0^1 \mu' \varphi_{1+}(-\mu', \Lambda) \times \\ & \times \left[G_{\infty}^*(\tau_0, -\mu'', 0, \mu', \Lambda) - 2 \int_0^1 \mu''' G_{\infty}^*(\tau_0, -\mu''', 0, -\mu''', \Lambda) \rho_0^{(0, \infty)}(\mu''', \mu', \Lambda) d\mu''' \right] d\mu'; \end{aligned}$$

Λ — множество решений системы неравенств $3k_1 + k_{\ell} < 2k_2$, где $\ell = 2, 3, \dots$, а r_1 — максимальное значение ℓ , для которого Λ не пусто; $\theta(\Lambda)$ — характеристическая функция множе-

ства A (если $A = \emptyset$, то $\theta(\emptyset) = 0$); r_0 — наибольшее натуральное число, для которого выполняется неравенство $k_1 + k_{r_0} < 2k_2$, где $r_0 \geq 2$; r — максимальное натуральное число ℓ , для которого верно неравенство $k_\ell < k_1 + 2k_2$.

Все входящие в (16) величины и функции могут быть найдены по алгоритмам, изложенным в работах [6—9]. Асимптотика (16) обобщает известные асимптотические выражения для $\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$ [8] и может использоваться для решения обратных задач теории переноса излучения, когда $\Lambda \in (0, 1)$ и $\tau_0 \gg 1$. На основе приведенных выше интегральных уравнений и соотношений инвариантности возможно найти асимптотики коэффициентов яркости и для случая консервативного рассеяния (т.е. тогда, когда $\Lambda = 1$ и в среде отсутствует поглощение излучения). Посредством итерационной процедуры из полученных интегральных уравнений можно вывести и асимптотики с остаточными членами более высокого порядка по сравнению с $O(\exp(-(k_1 + 2k_2)\tau_0))$. Заметим еще, что при $\tau_0 \rightarrow +0$ нормы ядер (в пространствах ограниченных или суммируемых на $[0, 1]$ функций) интегральных уравнений (11), (12) стремятся к нулю, когда $\forall \mu \in [0, 1] \lim_{\tau_0 \rightarrow +0} \eta(\tau_0, |\mu|) = 1$. Именно это обстоятельство и позволяет найти асимптотики коэффициентов яркости при $\tau_0 \rightarrow +0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., 1972. — 384 с.
2. Роговцов Н.Н. // Изв. СССР. ФАО. 1980. Т. 16, №3. С. 244 — 253.
3. Роговцов Н.Н. Свойства и принципы инвариантности. Приложение к решению задач математической физики. Ч. 1. Минск. 1999. — 384 с.
4. Роговцов Н.Н. // Ж. прикл. спектр. 1981. Т. 34, №2. — С. 335—342.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1971. — 512 с.
6. Роговцов Н.Н., Боровик Ф.Н. // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37, №6. — С. 39—44.
7. Роговцов Н.Н., Самсон А.М. // Астрофизика. 1985. Т. 23, №1. — С. 163—176.
8. Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., 1972. — 336 с.
9. Роговцов Н.Н. / Труды междунар. конфер. «Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление». Минск, Беларусь, 10—20 февраля 1996. — С. 305—312.

ПОВЕРХНОСТИ СКОРОСТЕЙ ДЛЯ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Босяков С.М., Хвисевич В.М.

In the present article results of realization of a method of characteristics with reference to system of the differential equations of movement of the ionized gases and liquids on which electromagnetic forces operate are submitted. The equations of strong discontinuities and system of the bicharacteristics equations are obtained.

Исследованиям закономерностей распространения поверхностей сильного разрыва в идеально проводящей жидкости при наличии магнитного поля посвящено достаточно большое количество публикаций, результаты которых отражены в фундаментальной монографии [1]. В частности, проведены исследования кривых фазовых скоростей и двумерных фронтов волн скоростей при различных соотношениях между скоростью звука и скоростью волны Альфвена. Настоящая работа дополняет эти результаты и посвящена анализу поверхностей скоростей волн Альфвена, распространяющихся в сжимаемой ионизированной жидкости, на которую действуют электромагнитные силы. Соответствующую систему уравнений представим в следующем виде (в предположении малости движений) [1]:

$$\begin{aligned}
 & \partial_t B_1 + u_3 \partial_3 B_1 - B_3 \partial_3 u_1 - u_1 (\partial_2 B_2 + \partial_3 B_3) + \\
 & + u_2 \partial_2 B_1 - B_2 \partial_2 u_1 + B_1 (\partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = 0, \\
 & \partial_t B_2 + u_3 \partial_3 B_2 - B_3 \partial_3 u_2 - u_2 (\partial_1 B_1 + \partial_3 B_3) + \\
 & + u_1 \partial_1 B_2 - B_1 \partial_1 u_2 + B_2 (\partial_1 u_1 + \partial_3 u_3) = 0, \\
 & \partial_t B_3 + u_2 \partial_2 B_3 - B_2 \partial_2 u_3 - u_3 (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2) + \\
 & + u_1 \partial_1 B_3 - B_1 \partial_1 u_3 + B_1 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) = 0, \\
 & \partial_t u_1 + \partial_1 p - \frac{1}{\mu} (B_3 (\partial_3 B_1 - \partial_1 B_3) + B_2 (\partial_2 B_1 - \partial_1 B_2)) = 0, \\
 & \partial_t u_2 + \partial_2 p - \frac{1}{\mu} (B_3 (\partial_3 B_2 - \partial_2 B_3) + B_1 (\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1)) = 0, \\
 & \partial_t u_3 + \partial_3 p - \frac{1}{\mu} (B_2 (\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2) + B_1 (\partial_1 B_3 - \partial_3 B_1)) = 0, \\
 & \partial_t \rho + \rho (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) + u_1 \partial_1 \rho + u_2 \partial_2 \rho + u_3 \partial_3 \rho = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u_1, u_2, u_3 - компоненты вектора скорости, B_1, B_2, B_3 - компоненты вектора напряженности магнитного поля, $p = f(\rho)$ - давление, являющееся функцией плотности ρ , μ - магнитная проницаемость, $\partial_k = \partial/\partial x_k$, $k = \overline{1,3}$, $\partial_t = \partial/\partial t$.

Начальные данные к системе (1) зададим на поверхности $z(t, x_1, x_2, x_3) = 0$ и перейдем к новым переменным по схеме $g = z(t, x_1, x_2, x_3)$ и $g_i = z_i(t, x_1, x_2, x_3)$. Подставляя производные по переменным x_k и t , выраженные через производные по

переменным g_k и g в (1), после стандартной процедуры получим следующее уравнение характеристик:

$$\det \|w_i\|_{7 \times 7} = 0, \quad (2)$$

где $w_{jk} = B_j p_k$, $w_{kk} = B_k p_k - \sum_{n=1}^3 B_n p_n$, $w_{j+3,j} = \rho p_0$, $w_{7k} = -\rho p_k$,

$$w_{j,j+3} = p_0 + \sum_{n=1}^3 u_n p_n - u_j p_j, \quad w_{j,k+3} = -u_j p_k, \quad w_{j+3,j+3} = -\frac{1}{\mu} \left(\sum_{n=1}^3 B_n p_n - B_j p_j \right),$$

$$w_{j+3,k+3} = \frac{B_k p_j}{\mu}, \quad w_{j+3,7} = a^2 p_j, \quad a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \text{ - скорость звука, } p_j = \frac{\partial z}{\partial x_j}, \quad p_0 = \frac{\partial z}{\partial t},$$

$j \neq k = \overline{1,3}$; остальные компоненты равны нулю.

Раскрывая определитель, после несложных преобразований будем иметь (считаем, что система координат перемещается вместе с жидкостью, то есть $u_k = 0$ [1]):

$$p_0 \left(\mu \rho p_0^2 - (B_1 p_1 + B_2 p_2 + B_3 p_3)^2 \right) \left(A p_0^4 + B p_0^2 + C \right) = 0. \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$A = \mu \rho, \quad B = - \left(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + a^2 \mu \rho \right) \tau,$$

$$C = a^2 \left(B_1 p_1 + B_2 p_2 + B_3 p_3 \right)^2 \tau, \quad \tau = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

Из уравнения (3), учитывая, что скорость распространения поверхности разрыва $V = -p_0 / \sqrt{\tau}$ [1], получим

$$\begin{aligned} & v \left(v^2 - (b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3)^2 \right) \times \\ & \times \left(v^4 - v^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1) + (b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3)^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $v = V/a$ - безразмерная скорость распространения поверхности разрыва, $b_k = \frac{B_k}{a \sqrt{\mu \rho}}$ -

безразмерная скорость волны Альфвена, $n_k = \cos \alpha_k = p_k / \sqrt{\tau}$ - направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности (α_k - угол между нормалью к характеристической поверхности и координатной осью x_k), $k = \overline{1,3}$.

Из уравнения (4) следует существование линии тока (стационарная поверхность разрыва), скорость которой $v = 0$, а также прямой и обратной волн Альфвена, распространяющихся со скоростями $v = \pm \sqrt{b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3}$. Поскольку анализ этих волн подробно выполнен в [1], обратимся к модифицированным волнам Альфвена, на скорость распространения которых влияет скорость звука a . Из уравнения (4) имеем:

$$\begin{aligned} v_i &= \sqrt{\hat{B} - (-1)^i \sqrt{\hat{B}^2 - (b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3)^2}}, \\ \hat{B} &= \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1). \end{aligned} \quad (5)$$

С помощью формул (5) можно выполнить построения поверхностей скоростей, отражающих зависимость фазовой скорости от угла наклона нормали к волновой поверхности, а также их сечений различными плоскостями, для модифицированных волн Альфвена. Анализ таких поверхностей показывает, что можно выделить три случая, соответствующие различным соотношениям между скоростью звука a и скоростью Альфвена $B/\sqrt{\mu\rho}$ (считаем, что $B = B_k, k = \overline{1,3}$). На рис. 1 представлены поверхности скоростей для волн, распространяющихся со скоростями v_1 и v_2 , при $b = 0,1$.

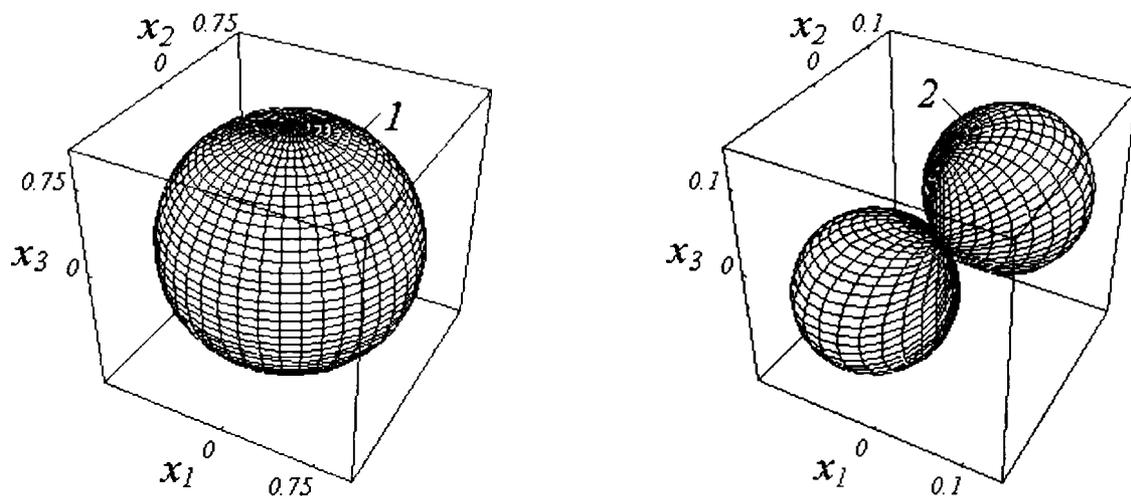


Рис. 1. Поверхности скоростей для случая $b = 0,1$: 1 – волна, распространяющаяся со скоростью v_1 ; 2 – волна, распространяющаяся со скоростью v_2

Из рис. 1 (1) видно, что при $b = 0,1$ поверхность скоростей для волны, распространяющейся со скоростью v_1 близка к сфере (радиус сферы незначительно превышает 1). Поверхность скоростей для другой волны представляет собой две сферы, точка касания которых находится в начале координат. Диаметры сфер приблизительно равны численному значению безразмерной скорости распространения волны Альфвена b . При уменьшении значения b диаметры сфер (рис. 1, 2) также уменьшаются, и их значение по-прежнему остается приблизительно равным b ; радиус сферы, соответствующей скорости v_1 (рис. 1, 1), при неограниченном уменьшении b стремится к 1.

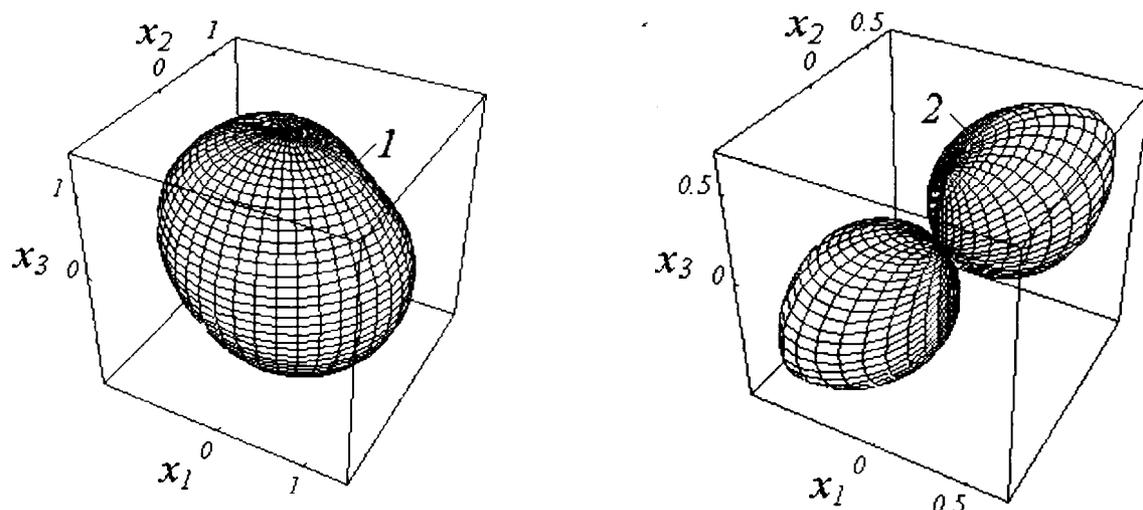


Рис. 2. Поверхности скоростей для случая $b = 0,6$: 1 – волна, распространяющаяся со скоростью v_1 ; 2 – волна, распространяющаяся со скоростью v_2

При увеличении значения безразмерной скорости распространения вид поверхностей скоростей изменяется – поверхности вытягиваются в направлении прямых, составляющих с координатными осями углы, равные $\pi/4$. Так, на рис. 2 показаны поверхности скоростей, построение которых выполнено при $b = 0,6$. Отметим, что аналогичный вид имеют поверхности скоростей для значений безразмерной скорости волны Альфвена из диапазона $0,45 \div 0,85$.

При дальнейшем возрастании значений b , поверхности скоростей для волн, распространяющихся со скоростями v_1 и v_2 , принимают вид сферы и двух касающихся сфер соответственно (рис. 3; при построении принимаем $b = 2,0$).

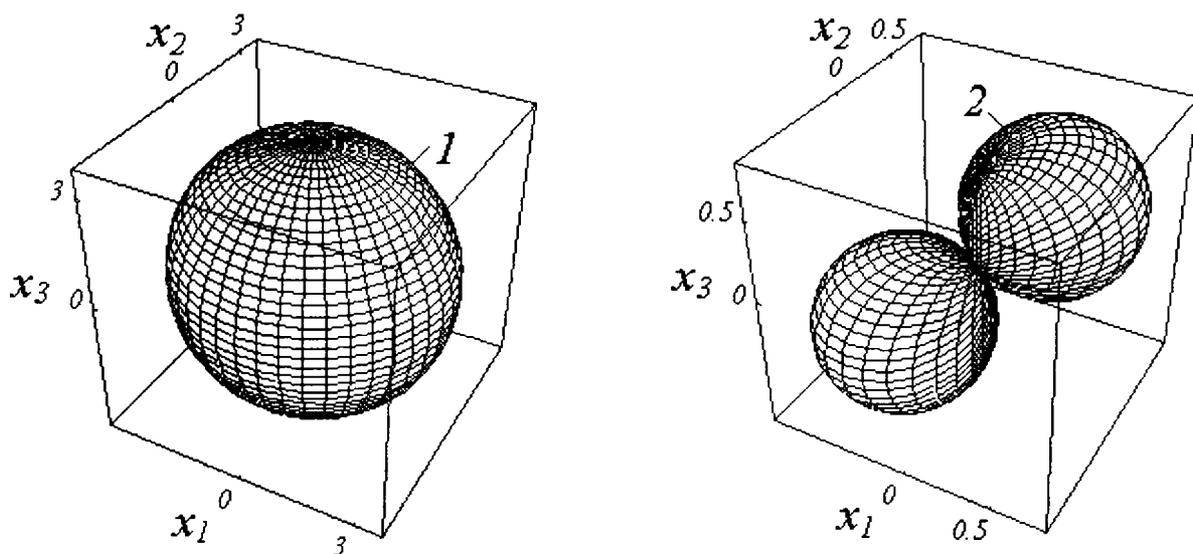


Рис. 3. Поверхности скоростей для случая $b = 2,0$: 1 – волна, распространяющаяся со скоростью v_1 ; 2 – волна, распространяющаяся со скоростью v_2

Отличие от случая малых b (рис. 1) заключается в значениях радиусов сфер. Так, радиус сферы, отражающей поверхность скоростей для v_1 , возрастает с увеличением b , радиус при этом приближенно равен b . Значения диаметров сфер, составляющих поверхность скоростей для другой волны при неограниченном возрастании b не изменяются и приближенно составляют 0,5.

В заключение отметим, что сечения полученных поверхностей скоростей плоскостью, являющейся биссектрисой координатного угла $x_1 0 x_2$ и проходящей через ось координат x_3 , соответствуют двумерным кривым скоростей, полученными в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Ф. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. – 600 с.

БЕЗОПАСНОСТЬ РАБОТЫ АВТОМОБИЛЬНОГО ПОДЪЁМНИКА-ВЫШКИ

Любнауер В. А.

The paper presents the analysis of the mechanics the systems, which is modeling the motor-car with the basket jack – the telescopic lift . For the assumed mathematical model, its equations were introduced, solved by means of the Mathematica 5.2 software. The results are shown in the form of adequate graphs.

Развитие технологии и новых конструкционных материалов допускает проектирование и строение лучших и более сложных конструкции автомобильных кранов и подъёмников-вышек. Однако к этим новым конструкциям предъявляются всё более строгие требования [1,20] относительно норм безопасности [2,3,8], в особенности международных стандартов серии *ISO 9000*, *ISO 9100*, польских и европейских норм качества. Инженерам также надо выполнить и другие, международные нормы. В настоящее время качество и безопасность рабочих машин нормирует европейская директива *85/374/EEC*, в которую внесено в 1998 году нововведение – директива *37/98/EC*. Подтверждением этого есть символ *CE – Conformance Europe*, который помещается на заводской табличке каждой, новой машины.

Автомобильные подъёмники-вышки принадлежат к многочисленной группе транспортных машин, аналогичных автомобильным краном. Чертой, которая отличается их от кранов это снабжение их стрелы в рабочую платформу или корзину для людей. Статические и динамические свойства элементов подъёмника, а в особенности его стрелы дают решение об этом, как статически или динамически будет работать целая конструкция. Знакомство этих черт подъёмников может дать ответ на вопрос – будет ли данный подъёмник работать безопасно или нет?

100% уровень безопасности является недостижимым [14,20]. Правила требуют, чтобы безопасность работы транспортных машин соответствовала цели называемой по английскому « *as low as relatively available* или *ALARA* ». Эта проблема такая важная [2,3,8,10] потому, что были случаи, когда подвергались разрушению машины и погибали люди. Вот пример. В последнем десятилетии работало в Польше приблизительно 10000 автомобильных кранов и подъёмников. В этих годах по причине потери механической устойчивости или превышения механической прочности имели место 61 опасных случаев.

(Это данные из польского, государственного института работы – *PIP* в также бюро технического надзора – *UDT*). В этих несчастных случаях погибло 20 людей, а 18 получило серьезные телесные повреждения – данные тоже из *PIP* и *UDT*.

Испытание статики и динамики подъёмников или кранов было уже темой различных диссертации [6,13,15,16]. Описанные в этих работах успехи для решения стрел и проведенных опытов имеют очень много совместных черт со стрелами корзинных подъёмников [13]. Моделирование гидравлических сервомоторов рассмотрено в [4,17,18], стрел кранов и подъёмников в [11,19]. Показано в них также результаты вычислений влияния нагрузки на конце стрелы и на её динамику.

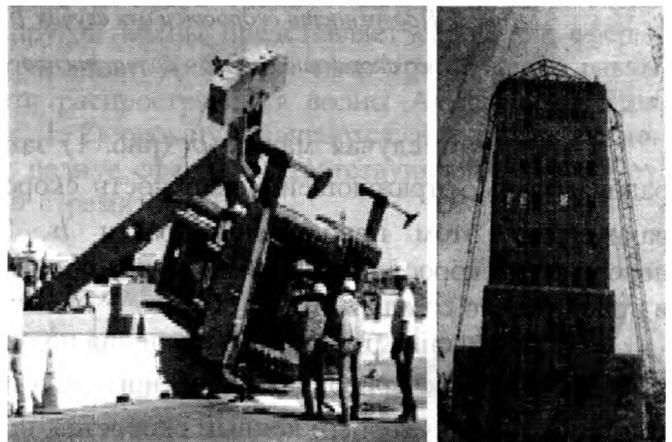


Рис. 1. Опасные инциденты транспортных машин – подъёмника-вышки и крана

В настоящей статье представлено решение механической системы моделирующей подъёмник-вышку.



Рис. 2. Подъёмник-вышка во время работы и его схема

Для определенной физической системы подъёмника-вышки построено математический модель механической системы представленный на рисунке 3.

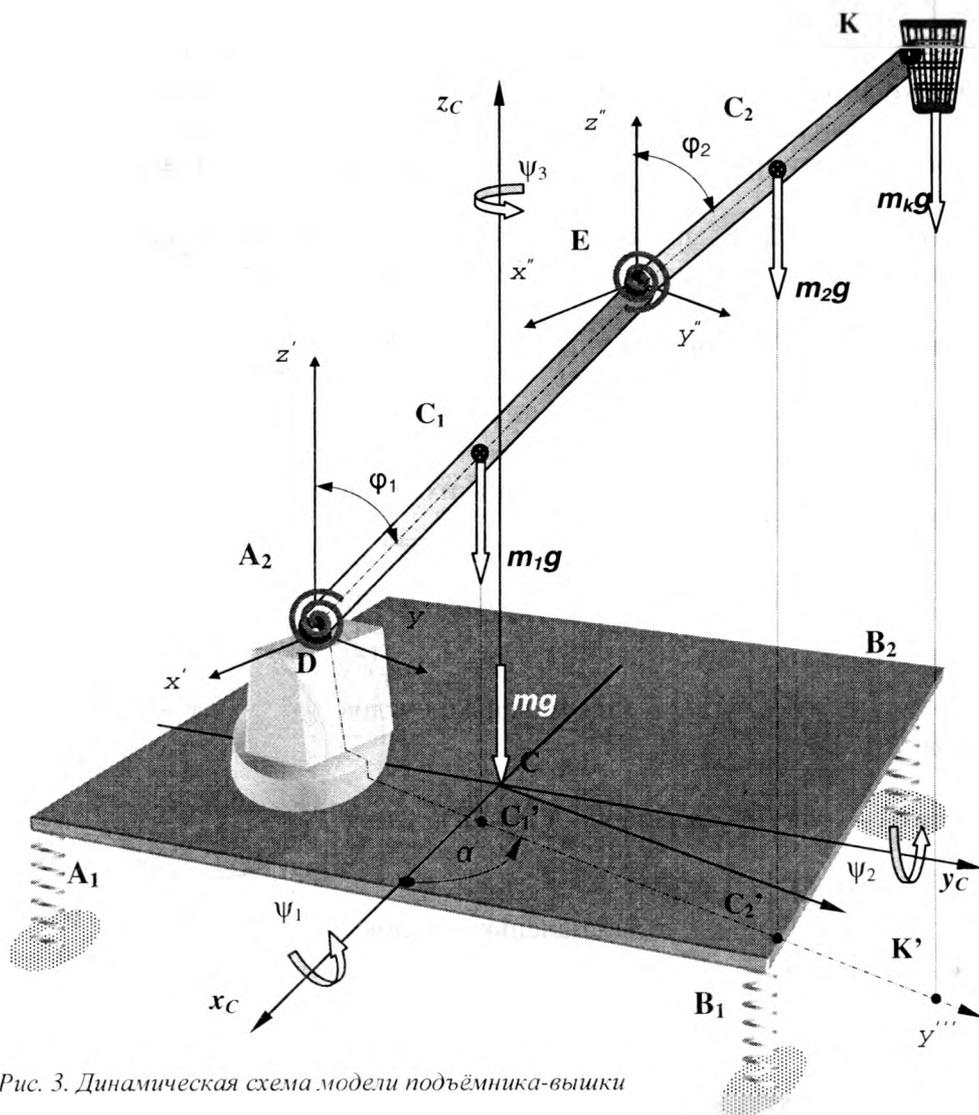


Рис. 3. Динамическая схема модели подъёмника-вышки

Принято, что стрела соединена шарнирно с оборотной платформой подъёмника. На конце телескопической стрелы находится рабочая площадь для грузов или корзина для людей. Во время работы шасси подъёмника-вышки амортизируется и стабилизируется при помощи его четырех поддержек опертых о твёрдую землю.

Введено следующие общие координаты:

- x, y, z - перемещения центра инерции платформы относительно неподвижных осей $Oxyz$,
- ψ_1, ψ_2, ψ_3 - угловое перемещения платформы относительно осей $Oxyz$ проходящих через её центр инерции,
- φ_1 - угловое перемещение оси первого сектора стрелы от вертикали,
- φ_2 - угловое перемещение оси второго сектора стрелы от вертикали,
- α - угловое перемещение плоскости стрелы относительно платформы.

$F_{A1}, F_{A2}, F_{B1}, F_{B2}$, - реакции поддержек соответствующие подножникам A_1, A_2, B_1 и B_2 платформы.

Введено тоже следующие обозначения для масс механической системы модели подъёмника-вышки:

- m, m_1, m_2, m_k - соответственные массы платформы, отрезков стрелы и корзины,
- J_{xc}, J_{yc}, J_{zc} - моменты инерции платформы относительно оси $Ox_cy_cz_c$ проходящих через её центр инерции,
- J_1, J_2 - моменты инерции стрелы относительно оси перпендикулярных к концам первого и второго отрезка балок стрелы.

Для так определенной модели физической системы подъёмника-вышки надо ввести направляющие косинусы осей соединенных с платформой во время её поворотов – угловых перемещений, ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Это является проблемой движения тела в пространстве. Наилучшим образом эту проблему можно разрешить используя эйлеровы углы, как это описано в [5].

Чтобы получить правильные направляющие косинусы осей для общей ротации платформы подъёмника-вышки представлены следующие матрицы ротации:

$\|R_{roll}\|$ для угла ψ_1 – угол наклона (по англ. *roll*)

$$\|R_{roll}\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_1 & -\sin \psi_1 \\ 0 & \sin \psi_1 & \cos \psi_1 \end{bmatrix} \quad \text{для маленьких углов } \psi_1 \quad \|R_{roll}\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\psi_1 \\ 0 & \psi_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\|R_{pitch}\|$ для угла ψ_2 – угол склонения (по англ. *pitch*)

$$\|R_{pitch}\| = \begin{bmatrix} \cos \psi_2 & 0 & \sin \psi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi_2 & 0 & \cos \psi_2 \end{bmatrix} \quad \text{для маленьких углов } \psi_2 \quad \|R_{pitch}\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \psi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\psi_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\|R_{yaw}\|$ для угла ψ_3 – угол скручивания (по англ. *yaw*)

$$\|R_{yaw}\| = \begin{bmatrix} \cos \psi_3 & -\sin \psi_3 & 0 \\ \sin \psi_3 & \cos \psi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{для маленьких углов } \psi_3 \quad \|R_{yaw}\| = \begin{bmatrix} 1 & -\psi_3 & 0 \\ \psi_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Возможных родов эйлеровых ротации является 12. Для решения настоящей задачи принято натуральную ротацию соблюдая очередность ψ_1, ψ_2, ψ_3 - *roll-pitch-yaw*.

Тогда матрица ротации имеет вид:

$$\|R_{roll-pitch-yaw}\| = \begin{bmatrix} (\cos \psi_2 \cos \psi_3) & (-\cos \psi_2 \sin \psi_3) & (\sin \psi_2) \\ (\sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_3 + \cos \psi_1 \sin \psi_3) & (-\sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3 + \cos \psi_1 \cos \psi_3) & (-\sin \psi_1 \cos \psi_2) \\ (-\cos \psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_3 + \sin \psi_1 \sin \psi_3) & (\cos \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3 + \sin \psi_1 \cos \psi_3) & (\cos \psi_1 \cos \psi_2) \end{bmatrix}$$

Теперь уже можно определить произвольным способом (которые описаны в [5,9]) координаты и скорости центров инерции платформы, стрелы и корзины.

Для так определенной механической системы подъемника-вышки сформулировано статические уравнения равновесия и динамические уравнения движения.

Их решение проведено нумерическими методами. Для исчисления этой проблемы использовано компьютерную программу *Mathematica 5.2* фирмы *Wolfram Research USA* [21].

Из точки зрения безопасной работы подъемника-вышки, самой главной задачей является разрешение реакционных сил, действующих в его подводимых опорах - подножниках.

Исчисления уравнений проведено для следующих, основных параметров механической системы.

Массы системы: $m = 12500$ кг, $m_1 = 3000$ кг, $m_2 = 2500$ кг, $m_k = 300$ кг.

Прямоугольник $A_1A_2B_1B_2$ расстановки подводимых опор платформы : длина 5.0 м, ширина 4.5 м. Первый промежуток балки стрелы имеет длину $l_1 = 7.0$ м а второй $l_2 = 5.0$ м.

Высота центра инерции платформы над землей $h = 1.5$ м

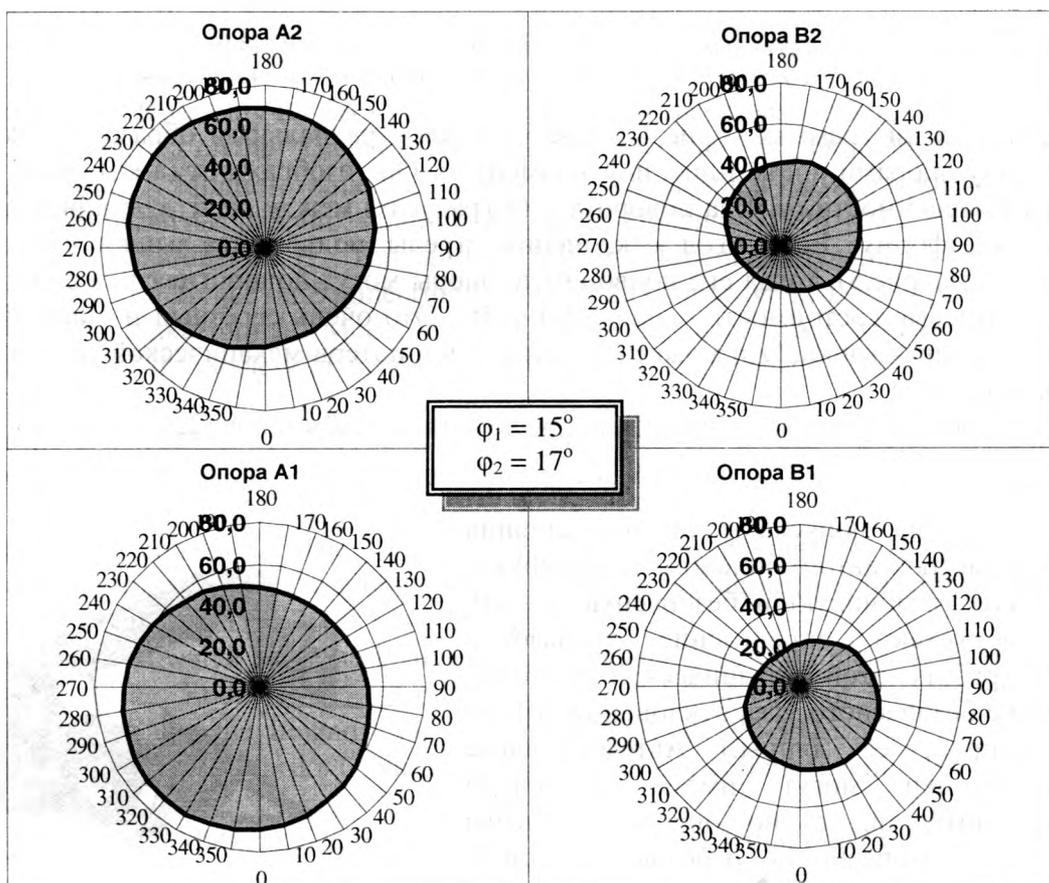


Рис. 4. Силы реакции в кн между опорами подъемника и фундаментом в функции угла α поворота стрелы для углов отклонения $\varphi_1 = 15^\circ$ и $\varphi_2 = 17^\circ$.

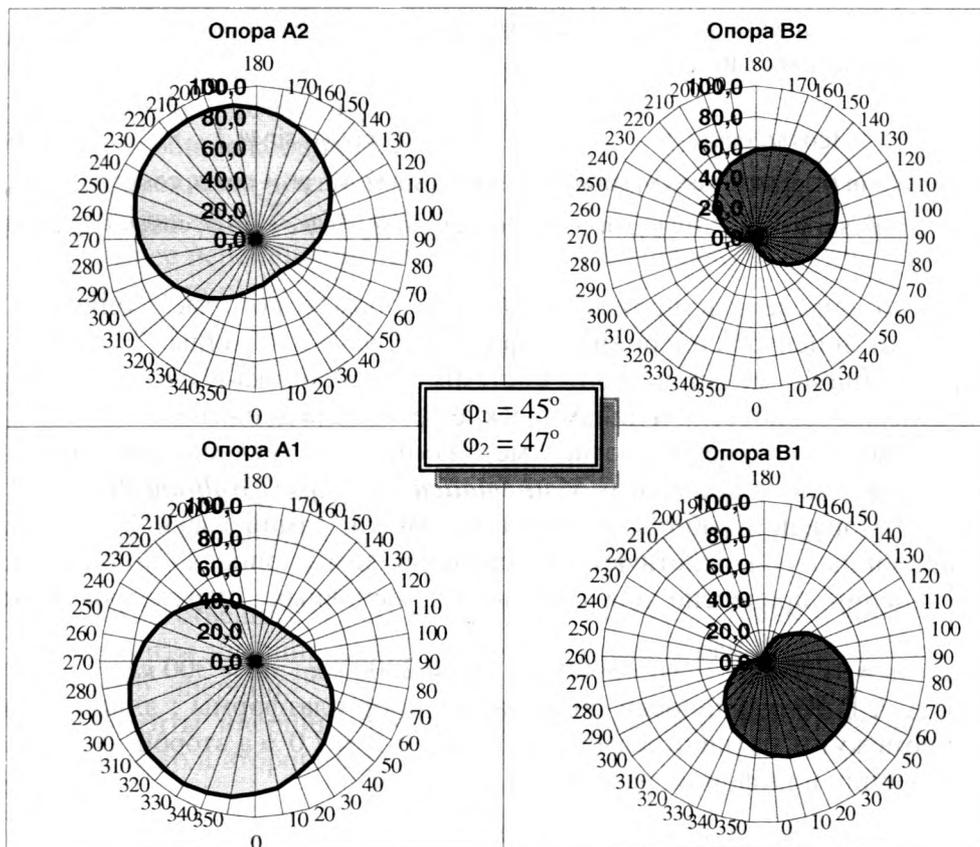


Рис. 5. Силы реакции в кн между опорами подъёмника и фундаментом в функции угла α поворота стрелы для углов отклонения $\varphi_1=45^\circ$ и $\varphi_2=47^\circ$.

На последующих диаграммах – рис.4 и рис.5, указаны радиальным образом функции сил реакции между опорами подъёмника и фундаментом. Оне изображают (в кн) силы, которые изменяется в зависимости от угла поворота α (в градусах) между осей x_c и линией проекции стрелы на платформу. Если угол отклонения стрелы подъёмника-вышки от вертикали является большим (рис.5), тогда его подводимые опоры могут подпригивать, а силы реакции принимают нулевые состоимости – опора B1 и B2. Это очень серьёзный и опасный случай работы подъёмника-вышки. Это может быть причиной потери механической устойчивости и разрушения машины.

Подобным же образом можно исчислить и другие типы подъёмников [22].

Резюме

Получены решения допускают анализ влияния частных параметров автомобильного подъёмника-вышки на его устойчивую и безопасную работу и тоже допускают определение диапазонов безопасной работу этой механической системы. (Определение безопасного угла отклонения стрелы от вертикали и её длины.) Автомобильные подъёмники-вышки могут иметь различный конструкционный вид (, но они все должны гарантировать безопасность работающим ними людям.



JGL Industries Inc.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aggarwal K. K. Reliability Engineering. //Kulver Academic Publishers, London – 1993. – 404с.
2. Bielecki Z., The application of computer data bases with safety requirements in the design of weightlifting module for all-terrain hydraulic crane. IX Конф. „Проблемы развития рабочих машин” Zakopane, Польша – 1996, №.1 – С. 23–30.
3. Boguszewski K., Malinowski J., Sobczykiewicz W. Operating safety of truck cranes. XIII Конф. „Проблемы развития рабочих машин” Zakopane, Польша – 2000– №1 – С. 57–62.
4. Cannon R. H. “Dynamics of Physical Systems”. - McGraw-Hill, Inc. 1967 (pl. transl. WNT Warszawa 1973). – 932 с.
5. Craig J.J. “Introduction to Robotics Mechanic and Control” NY, Addison-Wesley. – 1989. – 450 с.
6. Dickie D.: Mobile Crane Manual. - London, Durban, Singapore, Sydney, Toronto.– 1985. –403 с.
7. Grabski J., Strzałko J.: „Dynamic Analysis of Articulating Boom Lift”. XXI Симпозиум - Vibrations in Physical Systems, Poznan Poland, Май – 2006. – С. 135-138.
8. Hann M. Machine quality investigation of safety by the computer simulation method.. X Конф. „Проблемы развития рабочих машин” Zakopane, Польша - 1997.– №2. – С. 103-110.
9. Jakowluk A.: „Mechanika analityczna. Dynamika Maszyn i robotów.” Polit. Białostocka. – 1993.
10. Kivisto-Rachnasto J., Mattilla M. Integration of information on safety standards in machine design. International Conf. On Engineering Design – ICED’95 Praha – 1995. – С. 958-963.
11. Kukla St.: Free vibrations of a system of beams with discrete elements modeled a three-member telescopic boom. Journal of Transdisciplinary Systems Science Vol. 8, 2003. Polish Systems Society, Wrocław. – p. 308 – 313
12. Lubnauer W. A.: „Modelowanie dynamiki podnośnika koszowego”. // Przegląd Mechaniczny. April 2005. – С. 32–36
13. Maczyński A., Kościelny R.: “A dynamic model to optimizations working motions of a mobile crane”. X Congress on the “Theory of machines and Mechanisms”. Oulu, Finland, – 1999.
14. Oprzędkiewicz J. Monitorowanie niezawodności w eksploatacji maszyn i pojazdów. IX Конф. „Проблемы развития рабочих машин” Zakopane, Польша – 1996.– №1. – С. 155 – 162.
15. Posiadała B. Skalmierski B., Tomski L.: Universal kinematic-dynamical model of cranes. International Conference on Engineering Design, ICED, Dubrovnik, 1990. – p. 639 – 646.
16. Sakazawa Y., Nakazumi A.: Modeling and Control of Rotary Crane with Hydraulic Cylinder. Transactions of the Society of Instrument and Control Engineering, 21, 3. – 1985. – p. 298 – 304.
17. Sochacki W., Tomski L.: Free and parametric vibration of the system: telescopic boom-hydraulic cylinder changing the crane radius. - The Archive of Mechanical Engineering, Vol. XLVI, 3. – 1999. – p. 257 – 271.
18. Sochacki W., Tomski L.:”The Dynamic Stability of the System: A Telescopic Boom and Hydraulic Cylinder”. 13th Conference on the Problems of Engineering Machines Development. Zakopane, Poland. January 2000. – Vol.2. – pp. 163–170.
19. Trombski M., Towarek Z.: „The Dynamics of the Crane Placed on the Soil at the Time of the Rotation of the Boom”. 10th Conference on the Problems of Engineering Machines Development. Zakopane, Poland.– Vol.1. January 1997.– p. 292-302.
20. Ważyńska-Fiok K. Jazwiński J. Niezawodność systemów technicznych. - PWN Warszawa. – 1990.
21. Wolfram S.: “The Mathematica Book”. 4th Edit. - Wolfram Media, Cambridge Press – 2000.
22. JGL Industries, Inc. , USA ; JLG Poland – Szczecin.// Technical data. Brochures of the articulating & telescopic boom lifts.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕРОВ ДВУТАВРОВЫХ БАЛОК ИЗ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПО ДВУМ ПАРАМЕТРАМ.

Ершов В. И.

This work contains development of solution of the problem of optimization of the weight of beams from Hook's materials and also solution of this problem for nonlinear materials.

Проблем расчета стержневых систем из нелинейно-упругих материалов не существует. Если материал не подчиняется закону Гука и имеется диаграмма напряжений $\sigma = f(\epsilon)$, то решений будет столько, сколько вариантов имеем для функции $f(\epsilon)$.

Одной из немногих задач нелинейной прикладной механики, подлежащих решению, является задача об отыскании оптимальных по весу параметров составной балки. Для её решения формулируется в общем виде физическая зависимость σ - ϵ , детализируются вопросы расчета балок из нелинейно-упругих материалов, развивается для физически линейных систем существующая теория оптимального проектирования и распространяются далее основные идеи на вопрос оптимального проектирования составных балок из нелинейно-упругого материала по двум параметрам.

Рассмотрим задачу о чистом изгибе бруса прямоугольного сечения высотой h и шириной b , предполагая справедливой гипотезу плоских сечений и, следовательно, линейный закон измерения деформации по высоте балки. Известно, что эпюра напряжений в поперечном сечении балки при этом совпадает с точностью до некоторого масштабного коэффициента с соответствующей частью диаграммы напряжений. Если фибровая деформация равна $\bar{\epsilon}$, то эпюра напряжений совпадает с участком диаграммы напряжений от начала координат до $\bar{\epsilon}$, умножаемом по горизонтали на масштабный коэффициент $h/2 \bar{\epsilon}$ [1]. Для произвольной точки сечения с координатой y будем иметь:

$$\begin{aligned}\epsilon &= 2y\bar{\epsilon}/h; \\ y &= \epsilon h/2\bar{\epsilon}; \\ dy &= (h/2\bar{\epsilon})d\epsilon.\end{aligned}$$

Выражение для изгибающего момента

$$M = 2\bar{\epsilon} \int_0^{h/2} \sigma y dF = 2 \int_0^{\bar{\epsilon}} \sigma b \frac{h^2}{4\bar{\epsilon}^2} \epsilon d\epsilon.$$

Обозначим статический момент диаграммы напряжений на участке $(0 - \bar{\epsilon})$ через \bar{S} :

$$\bar{S} = \int_0^{\bar{\epsilon}} \sigma \epsilon d\epsilon$$

Тогда окончательно имеем выражение для изгибающего момента:

$$M = Sb h^2 / 2\bar{\epsilon}^2$$

Для линейно-упругого и жестко-пластического материалов это выражение приводит к известным результатам.

Введем обозначение:

$$m = \bar{S} / 2\bar{\epsilon}^2$$

Коэффициент m , равный изгибающему моменту для единичного квадратного сечения при известной фибровой деформации $\bar{\epsilon}$, будем называть коэффициентом изгиба. По аналогии эту зависимость можно назвать диаграммой изгиба. Для прямоугольного сечения изгибающий момент выражается через коэффициент изгиба следующим образом:

$$M = mbh^2 \quad (1)$$

При определении оптимальных размеров двутавровой балки из нелинейно-упругого материала опираемся на теорию оптимального проектирования балок из линейно-упругих материалов.

Вопросы определения двух оптимальных параметров при проектировании наименьшей по весу двутавровой балки из материала, подчиняющегося закону Гука, рассмотрены в работе [2]. Речь идет об исследовании функции двух переменных δ и h для площади поперечного сечения балки

$$F = 2W/h + 2\delta h/3, \quad (2)$$

где: F – площадь поперечного сечения;

W – требуемый момент сопротивления сечения;

h – высота сечения;

δ – толщина стенки.

В существующей литературе по металлическим конструкциям [3], [4], [5], этой задаче посвящены несколько вариантов решения при исследовании разных по существу кривых, получаемых из (2). В работе [3], предполагая постоянной гибкость стенки $h/\delta = k = \text{const}$, справедливо получают из условия экстремума формулу для оптимальной высоты балки

$$h_{\text{opt}} = \sqrt[3]{\frac{3Wk}{2}}, \quad (\text{VII.15})$$

а затем пишут на стр. 125: "Если в формулу (VII.15) подставить значение $k = h/\delta_{\text{ст}}$, то можно выразить оптимальную высоту сечения в зависимости от толщины стенки $\delta_{\text{ст}}$:

$$h_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{3W}{2\delta_{\text{ст}}}}."$$

Здесь нарушено исходное положение о постоянстве гибкости, используемое при дифференцировании. Если строго соблюдать исходные положения, то в (VII.15) можно подставлять только некоторое число k , но не соотношение между высотой и толщиной стенки. Формула (VII.15) занимает достойное место в теории оптимального проектирования двутавровой балки, но дальнейшие выводы из нее ошибочны, поскольку противоречат математическим предпосылкам, принятым перед отысканием экстремума. Все существующие варианты оптимального проектирования двутавровой балки могут быть объединены, если исследовать поверхность (2) в осях F , h , δ . Это позволит создать строгую теорию оптимального проектирования.

1. *Оптимальное проектирование при постоянной высоте $h = h_1$.*

Этому случаю на поверхности (1) соответствуют прямые линии одной переменной δ :

$$F_1 = 2W/h_1 + 2\delta h_1/3.$$

Наименьшее значение функции F_1 соответствует наименьшему значению толщины стенки $\delta = \delta_{\text{min}}$, назначаемому либо по предельной гибкости стенки, либо из условия прочности по касательным напряжениям.

2. *Оптимальное проектирование при постоянной толщине стенки $\delta = t$.*

Этому случаю соответствует плоская кривая одной переменной h , которая лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости $F - h$:

$$F_2 = 2W/h + 2th/3.$$

Минимум исследуемой функции соответствует равенству нулю производной:

$$\frac{\partial F_2}{\partial h} = -\frac{2W}{h^2} + \frac{2t}{3}; h_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{3W}{t}} \quad (3)$$

Зная $h_{\text{опт}}$ и t , следует проверить условие прочности по касательным напряжениям и сопоставить гибкость стенки с предельной гибкостью.

3. *Оптимальное проектирование при постоянной гибкости стенки.*

В этом случае поверхности соответствует плоская кривая, лежащая в плоскости $F - \rho$, где ρ – полярная ось. ($\rho^2 = h^2 + \delta^2 = \delta^2 (1 + k^2)$), полярный угол θ $\text{tg}\theta = \delta/h$

Для малых углов $\theta = \delta/h = 1/k$; $\sin\theta = 1/k$; $\cos\theta = 1$

Выражаем переменные δ и h через переменные ρ и θ :

$$\begin{aligned} \delta &= \rho \sin\theta = \rho/k \\ h &= \rho \cos\theta = \rho \end{aligned}$$

Тогда имеем функцию одной переменной ρ

$$F_3 = 2W/\rho + 2\rho^2/3k.$$

и выражение для первой производной

$$\frac{\partial F_3}{\partial \rho} = -\frac{2W}{\rho^2} + \frac{4\rho}{3k}.$$

Приравнивая производную нулю, находим оптимальное значение переменной ρ :

$$\rho_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{3Wk}{2}}.$$

Возвращаясь к переменным δ и h , имеем:

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{3Wk}{2}}; \delta_{\text{опт}} = h_{\text{опт}}/k. \quad (4)$$

Перед окончательным назначением оптимальных размеров следует проверить условие прочности по касательным напряжениям.

4. *Оптимальное проектирование по двум параметрам двутавровой балки из нелинейно-упругого материала.*

Для двутавровой балки из нелинейно-упругого материала изгибающий момент можно представить как сумму моментов, приходящихся на полки и на стенку:

$$M = R F_n h + m \delta h^2, \quad (5)$$

Новые обозначения в выражении (5):

M - изгибающий момент;

R - условное расчетное сопротивление для нелинейно упругого материала;

F_n - площадь полки;

m - коэффициент, учитывающий нелинейность диаграммы напряжений.

Расчетное сопротивление названо условным, поскольку расчет при изгибе следует вести по допускаемому моменту, а расчетное сопротивление есть соответствующее фибровое напряжение. Для прямоугольного сечения размерами $\delta \times h$ изгибающий момент вычисляется следующим образом:

$$M_{cm} = m \delta h^2.$$

Для линейно-упругого материала $m = R/6$.

Все члены в (5) разделим на Rh и умножим на 2.

$$2M/Rh = 2F_n + 2m\delta h/R$$

В правую часть полученного выражения добавим и вычтем площадь стенки.

$$2M/Rh = 2F_n + \delta h - \delta h + 2m\delta h/R$$

Вводя условный момент сопротивления $W=M/R$ и учитывая, что площадь всего сечения F равна удвоенной площади полки, сложенной с площадью стенки, получим после преобразований:

$$F=2W/h+2\delta h \bar{m} /3, \quad (6)$$

Коэффициент нелинейности \bar{m} при заданном значении расчетного сопротивления и фибровой деформации является постоянной величиной и вычисляется следующим образом:

$$\bar{m}=3(1-2m/R)/2.$$

Для линейно-упругого материала этот коэффициент равен единице.

Полная аналогия поверхности (7) и поверхности (6) позволяет при отыскании оптимальных параметров сохранить без изменений изложенную выше методику для линейно-упругих задач, внимательно определяя положение в соответствующих формулах поправочного коэффициента \bar{m} .

Вместо формул (3) и (4) будем иметь соответственно:

$$h_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{3W}{t\bar{m}}} \quad (3a)$$

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{3Wk}{2\bar{m}}}; \quad \delta_{\text{опт}} = h_{\text{опт}} / k. \quad (4a)$$

Полученный результат есть первое приближение, поскольку условное расчетное сопротивление, зависящее от формы сечения и являющееся фибровым напряжением, соответствующим назначаемому допускаемому изгибающему моменту в зависимости от коэффициента запаса, нам неизвестно. Перебирая R , определяем размеры сечения, определяем предельный момент по формуле (12), подставляя туда вместо R предел прочности и соответствующий предельный коэффициент m , и находим коэффициент запаса по моментам делением предельного момента на расчетный изгибающий момент. Если в какой-то попытке найденный коэффициент запаса по моментам и заданный заказчиком совпадут с требуемой точностью, то расчет закончен.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.Ершов В.И. Определяющие соотношения нелинейной теории упругости на основе инвариантов тензора напряжений и тензора деформаций.– Гомель: Полесье, 1999.– 202 с.
- 2.Ершов В.И. Подбор оптимальных сечений стальной двутавровой балки по двум параметрам. //Изв. Вузов. Строительство и архитектура.– 1985.–№ 7.
- 3.Васильев А.А. Металлические конструкции.– М.: Стройиздат, 1975.
- 4.Муханов К.К. Металлические конструкции.– М.: Стройиздат, 1976.
- 5.Васильков Ф.В., Туманов В.А. Подбор оптимальных сечений и характеристики веса стальных двутавровых балок.//Изв. Вузов. Строительство и архитектура.– 1975.– № 3.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Дубровина О.В.

Results of the investigation integral wavelet transforms are given. Acting and boundedness conditions for the integral wavelet transforms with compact support are obtained. Theorems of an inversion of the integral wavelet transform in the space of square-summable functions and the pointwise convergence of the inverse wavelet transform under Dini condition are stated.

Теория вейвлет-преобразований является интенсивно развивающейся отраслью математики благодаря, в первую очередь, широкому спектру ее приложений. Вейвлет-анализ как отдельное научное направление сформировался в середине 80-х годов XX столетия. Математическая ветвь этой дисциплины представляет собой сплав результатов теории операторов, гармонического анализа, теории гильбертовых и банаховых пространств, дифференциальных уравнений, теории аппроксимации, линейной алгебры и т.д. (см., например, [1, 2]). Вейвлет-преобразования находят широкое применение в различных областях научных и прикладных исследованиях, например, при моделировании жидкостей, финансовом анализе, медицине, геофизике, обработке различного рода сигналов, компьютерной графике.

Определение. Вейвлетом называется функция $\psi : R \rightarrow R$, удовлетворяющая следующим условиям

1. $E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < +\infty$ (конечность энергии вейвлета).

2. Условию согласованности:

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|}{|f|} df < +\infty, \quad (1)$$

где $\hat{\psi}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{(2i\pi f)t} df < +\infty$ – преобразование Фурье функции ψ .

Из условия конечности константы C_{ψ} следует ограничение на функции, которые могут быть использованы в качестве базисных вейвлетов.

Примерами вейвлет-функций являются вейвлет Хаара $\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & t < 0, t \geq 1 \end{cases}$ вейвлет

"Французская шляпа" (French Hat, FHAT) $\psi_F(t) = \begin{cases} 1, & 0 < |t| < 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < |t| < 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$ Вещественные базисы

часто конструируются на основе производных функций Гаусса: $\psi_m(t) = (-1)^m \partial_t^m \left(\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right)$

(при $m=1$ вейвлет называют WAVE-вейвлетом, при $m=2$ – МНАТ-вейвлетом или вейвлетом "Мексиканская шляпа"). Из комплексных вейвлетов можно выделить хорошо локализованный как во временном, так и в частотном пространствах, вейвлет Морле

$\psi(r) = \exp(i\omega_0 t) \exp(-\frac{r^2}{2})$. Для построения дискретных базисов часто используется семейство биортогональных вейвлетов Добеши [2], не имеющих аналитического представления.

Интегральное вейвлет-преобразование имеет вид

$$(W_\psi x)(a, b) = c_0(a) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} x(t) dt. \quad (2)$$

Это преобразование определено для каждой функции $\psi: R \rightarrow R(C)$ некоторого семейства из $L_2(R)$ обладающих нулевым средним. Данное преобразование ставит в соответствие каждой функции $x \in L_2(R)$ (сигналу) функцию двух переменных (a, b) , играющих роль масштабирующего параметра и параметра сдвига (по времени) соответственно.

Формула (2) задает целое семейство преобразований (свое для каждого фиксированного вейвлета ψ), что позволяет получить определенные свойства W_ψ , подбирая соответствующий вейвлет. Величина $c_0(a)$ играет роль нормирующего параметра.

Стандартными значениями этого параметра являются $c_0(a) = \frac{1}{a}$ или $c_0(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Второе из этих значений позволяет удовлетворять условию сохранения энергии вейвлета при его масштабировании. Другими словами, если положить $\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, то

$$\|\psi_{ab}\|_{L_2(R)} = \text{const } a, b \in R.$$

Обратное вейвлет-преобразование в пространстве $L_2(R)$ записывается в терминах того же вейвлета, что и прямое:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi x)(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}, \quad (3)$$

где константа C_ψ в определена условием согласованности вейвлета (1).

Следующие свойства вейвлет-преобразования могут быть проверены непосредственно:

1. Линейность $W_\psi(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = W_\psi(\alpha x_1(t)) + W_\psi(\beta x_2(t))$.
2. Инвариантность относительно сдвига $(W_\psi x)(a, b)(-b_0) = (W_\psi x)(a, b - b_0)(\cdot)$.
3. Инвариантность относительно сжатия (растяжения) $(W_\psi x)(a, b)\left(\frac{\cdot}{a_0}\right) = (W_\psi x)\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right)(\cdot)$.
4. Частотно-временная локализация и наличие частотно-временного окна и угла влияния.
5. Нулевое среднее $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$. В приложениях бывает важно, чтобы нулю равнялись первые k моментов $\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0, k = 0, 1, 2, \dots$
6. Дифференцируемость $W(\partial_t^m x) = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \partial_t^m (\overline{\psi_{a,b}}) dt$.
7. Аналог равенства Парсеваля

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \overline{x_2(t)} dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi x_1)(a, b) \overline{(W_\psi x_2)(a, b)} \frac{dadb}{a^2}.$$

Рассмотрим интегральное вейвлет-преобразование (2) в случае, когда вейвлет ψ имеет компактный носитель. Тогда интегральное вейвлет-преобразование можно записать в виде

$$(W_\psi x)(a, b) = c_0(a) \int_A^B \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} x(t) dt, \quad a \in [\alpha, \beta], \quad b \in [\gamma, \delta], \quad \alpha > 0. \quad (4)$$

В этом случае оператор W_ψ является интегральным оператором по конечному промежутку, а преобразование (4) имеет вид свертки Дюамеля (сужение свертки Фурье на конечный промежуток) по переменной b и свертки Меллина по переменной a .

Из общих теорем о действии оператора типа свертки Фурье (см. [3]) вытекают следующие свойства оператора W_ψ :

Теорема 1. 1) Пусть $x \in L_1(A, B)$ и $\psi \in L_p([\gamma, \delta])$, $p \in [1, \infty]$, тогда интегральное вейвлет-преобразование $W_\psi(\cdot, b) \in L^p([\alpha, \beta])$ по переменной b при любом фиксированном $a \in [\alpha, \beta]$.

2) $x \in L_1(A, B)$ и ψ – измеримая по Борелю ограниченная функция по переменной b , тогда функция $W_\psi(\cdot, b)$ является соответственно измеримой по Борелю ограниченной функцией при любом фиксированном $a \in [\alpha, \beta]$.

3) $x \in L_1(A, B)$ и ψ – ограниченная непрерывная функция по переменной b , тогда функция $W_\psi(\cdot, b)$ является ограниченной непрерывной функцией при любом фиксированном $a \in [\alpha, \beta]$.

4) $x \in L_1(A, B)$ и ψ – ограниченная равномерно непрерывная функция по переменной b , тогда функция $W_\psi(\cdot, b)$ является ограниченной равномерно непрерывной функцией при любом фиксированном $a \in [\alpha, \beta]$.

5) $x \in L_1(A, B)$ и ψ – функция ограниченной вариации, тогда функция $W_\psi(\cdot, b)$ является функцией ограниченной вариации при любом фиксированном $a \in [\alpha, \beta]$.

Теорема 2. Пусть $x(t)$ измерима на R , $a \in [\alpha, \beta]$, фиксировано и выполняется одно из условий:

1) $W_\psi(\cdot, b) \in L([A, B])$ для любой функции $\psi \in L_\infty([A, B])$,

2) $W_\psi(\cdot, b) \in L_\infty([A, B])$ для любой ограниченной непрерывной функции ψ , для которой

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = 0,$$

3) $W_\psi(\cdot, b) \in L_1([A, B])$ для любой функции.

Тогда $x \in L_1([c, d])$.

С точки зрения приложений важным является изучение свойств интегрального вейвлет-преобразования в пространствах непрерывных функций.

Рассмотрим действие оператора, соответствующего интегральному вейвлет-преобразованию, в пространствах $C^{1,\lambda}[c, d]$ ($C^{1,\lambda}(\rho^{(j)})([c, d])$) непрерывно-дифференцируемых функций, производные которых удовлетворяют условию Гёльдера (соответственно весовому условию Гёльдера (см. [4])). Норма в пространстве $C^{1,\lambda}$

определяется равенством $\|\psi\|_{C^{1,\lambda}} = \sup_{u \in [A_1, B_1]} |\psi(u)| + \sup_{u \in [A_1, B_1]} |\psi'(u)| + \sup_{u_1, u_2 \in [A_1, B_1]} \frac{|\psi(u_1) - \psi(u_2)|}{|u_1 - u_2|^\lambda}$, а в пространстве $C^{1,\lambda}(\rho^{(j)})$ – равенством $\|\psi\|_{C^{1,\lambda}} = \sup_{u \in [A_1, B_1]} |\psi(u)(\rho^{(0)}(u))^\mu| + \sup_{u \in [A_1, B_1]} |\psi'(u)(\rho^{(1)}(u))^\mu| + \sup_{u_1, u_2 \in [A_1, B_1]} \frac{|\psi(u_1)(\rho^{(0)}(u_1))^\mu - \psi(u_2)(\rho^{(0)}(u_2))^\mu|}{|u_1 - u_2|^\lambda}$, где $\rho^{(j)}(t) = \left[\left(\frac{t-b}{a} - A \right) \left(B - \frac{t-b}{a} \right) \right]^{j+\mu}$, при этом $\psi(t) \in C_0^{1,\lambda}(\rho^{(0)}([c, d]))$, $\psi'(t) \in C_0^{0,\lambda}(\rho^{(1)}([c, d]))$, $\psi(c) = \psi(d) = 0$.

Теорема 3. 1) Пусть сигнал $x \in C[A, B]$, вейвлет $\psi \in C^{1,\lambda}[c, d]$. Тогда интегральное вейвлет-преобразование (4) принадлежит пространству $C^{1,\lambda}$ как функция двух переменных: $(W_\psi x)(a, b) \in C^{1,\lambda}([\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta])$.

2) Пусть сигнал $x \in C[A, B]$, вейвлет $\psi \in C_0^{1,\lambda}(\rho^{(j)})([c, d])$, $\rho^{(j)}(t) = \left[\left(\frac{t-b}{a} - A \right) \left(B - \frac{t-b}{a} \right) \right]^{j+\mu}$, $j=0, 1$, $0 < \mu < 1$, $\mu < 1 - \lambda$. Тогда интегральное вейвлет-преобразование (4) принадлежит пространству $C_0^{1,\lambda}$, т.е.

$$(W_\psi x)(a, b) \in C^{1,\lambda}(\rho_1^{(j)}(a), \rho_2^{(j)}(b))([\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]),$$

где $\rho_1^{(j)}(a) = [(a - \alpha)(\beta - 1)]^{j+\mu}$, $\rho_2^{(j)}(a) = [(b - \gamma)(\delta - b)]^{j+\mu}$, $j=0, 1$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству ограниченности оператора типа свертки в указанных пространствах (см. [4]) и установлено в [5].

Интегральное вейвлет-преобразование может быть применено, например, при решении интегральных уравнений. В этом случае важным является нахождение условий, при которых в соответствующих пространствах определено обратное вейвлет-преобразование.

Существование обратного вейвлет-преобразования в смысле сходимости в пространстве $L_2(R)$ установлена различными способами (см., например, [1, 2]).

Теорема 4. Пусть $\psi \in L_2(R)$ – базовый вейвлет, удовлетворяющий условию согласованности (1). $C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{|f|} df < \infty$. Тогда для любой функции $x \in L_2(R)$

выполняется включение $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2} \in L_2(R)$, и, кроме того, справедлива

формула обращения в смысле сходимости в пространстве $L_2(R)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2}.$$

Исследование поточечной сходимости обратного интегрального вейвлет-преобразования (3), как правило проводится при дополнительных условиях на базовый вейвлет ψ ([1, 2]). Однако в прикладных исследованиях бывает необходимо использовать вейвлет-функции, удовлетворяющие только условиям определения вейвлета 1-2 при

некоторых дополнительных условиях на анализируемую функцию (сигнал) $x(t)$. Установленное ниже утверждение является аналогом соответствующего классического результата для интегрального преобразования Фурье [1, с. 116] и дается в естественных предположениях на функцию x .

Теорема 5. Если функция $x \in L_2(\mathbb{R})$ удовлетворяет в некоторой точке $t_0 \in \mathbb{R}$ условию Дини, т.е. при некотором $\delta > 0$ интеграл $\int_0^\delta \frac{|x(t_0+h) - x(t_0)|}{h} dh < \infty$ конечен, то обратное интегральное вейвлет-преобразование (3) сходится в точке t_0 и имеет место равенство

$$x(t_0) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a, b) \overline{\psi\left(\frac{t_0 - b}{a}\right)} \frac{dadb}{a^2},$$

где преобразование W_ψ определено формулой (2).

Доказательство теоремы проводится с использованием условия согласованности (1), аналога равенства Парсеваля (свойство 7) и свойства инвариантности экспоненциальной функции относительно преобразования (1) (см. [6]).

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда Фундаментальных исследований Республики Беларусь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pinsky M. Introduction to Fourier Analysis and Wavelets. – Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 2002. – 376 p.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.-Ижевск: РХД, 2001. – 463 с.
3. Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O. Volterra Integral Equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. V. 34. – Cambridge-London-New York: Cambridge University Press, 1990. – 684 p.
4. Castro L.P., Duduchava R., Speck F.-O. Singular Integral Equation on Piecewise Curves in Spaces of Smooth Functions. – Basel: Birkhäuser – Oper. Theory, Adv. Appl. – 2002. V. 135. – P. 107-144.
5. Дубровина О.В. Интегральное вейвлет-преобразование для функций с компактным носителем и его свойства // Труды института математики. Минск. – 2004. Т. 12, № 1. – С. 59-63.
6. Дубровина О.В. Поточечная сходимость обратного интегрального вейвлет-преобразования в условиях Дини // Вестник БНТУ – 2006. № 2. – С. 68-72.

КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ МЕЗОСТРУКТУР ТИПА СВЕРХПРОВОДНИК/НОРМАЛЬНЫЙ МЕТАЛЛ

Кушнир В.Н.

The dependencies of the critical temperature on the thickness and on the number of layers for superconductor/normal metal multilayers (S/N) are calculated based on multimode solution of microscopic theory equations in diffusive limit. The finite transparency of S/N interfaces took into account. The theoretical curves reproduce satisfactory the experimental data.

Многослойные структуры типа сверхпроводник/нормальный металл (S/N) перспективны для использования в микронэлектронных устройствах [1,2]. Сверхпроводимость в S/N обусловлена эффектом близости, то есть проникновением (преимущественно диффузионным) куперовских пар из сверхпроводящего слоя в нормальный [3]. При этом толщина сверхпроводящего слоя d_S должна превосходить длину когерентности ξ_S сверхпроводящего материала. (Например, для структур Nb/Cu толщины слоев Nb составляют порядка 20 нм.) Исследование критического состояния предполагает определение термодинамических характеристик этого состояния (критической температуры T_c , верхних критических магнитных полей H_{c2} и т. д.) в зависимости от материальных параметров структуры – толщин слоев d_S , d_N , количества бислоев Nbl , длин свободного пробега электрона в металле l_S , l_N , скоростей Ферми v_{FS} , v_{FN} , плотностей числа состояний на уровне Ферми N_{FS} , N_{FN} . Кроме того, критические характеристики существенно зависят от параметров пограничных слоев между нормальными и сверхпроводящими слоями, в частности, от коэффициента квантовомеханического прохождения T (коэффициента прозрачности) потенциального барьера между сверхпроводящим (S) и нормальным (N) слоем. К настоящему времени достаточно подробно рассмотрены задачи об определении зависимостей $T_c(d_S)$, $T_c(d_N)$ в двух случаях: $Nbl = 1$ (трехслойная структура) и $Nbl = \infty$ (сверхрешетка) [2-6]. При этом при значениях коэффициента прозрачности $T < 1$ экспериментальные характеристики $T_c(d_S)$, $T_c(d_N)$ трехслойных структур моделируются обычно приближенными формулами теории S/N [7,8]. В данной работе получены точные матричные решения квазиклассических уравнений микроскопической теории S/N, на основе которых рассчитаны зависимости $T_c(d_S)$, $T_c(Nbl)$.

Рассматривается структура толщины L , состоящая из чередующихся плоских слоев сверхпроводящего и нормального металлов. Внешние слои структуры – из нормального металла. В соответствии с теорией S/N, их критическое состояние при отсутствии внешнего магнитного поля описывается интегральным уравнением Горькова [9] для параметра порядка $\Delta(z)$ ($z \in [0, L]$.) в следующей форме:

$$\Delta(z) = 4k_B T \cdot V(z) \sum_{\omega>0}^{\omega_D} \int_0^L dz' Q_{\omega}(z, z') \Delta(z') \quad (1)$$

Здесь T – температура, k_B – постоянная Больцмана; $\omega \equiv \omega(m) = \pi k_B T \cdot (2m + 1) / \hbar$ – мацубаровские частоты ($m = 0, 1, \dots, m_D$), ω_D – дебаевская частота, $m_D \equiv [\hbar \omega_D / 2\pi k_B T - 0.5]$.

$$V(z) = \begin{cases} 0, & z \in [l \cdot d, l \cdot d + d_N), l = 0, \dots, Nbl \\ V_S, & z \in (l \cdot d + d_N, (l+1) \cdot d], l = 0, \dots, Nbl - 1 \end{cases}$$

V_S – константа электрон-фононного взаимодействия, $d = d_S + d_N$;

Функции $Q_{\omega}(z, z')$, определяющие ядро интегрального уравнения (1), оказывается возможным задать обозримыми формулами в двух предельных случаях микроскопической теории: в т. н. «чистом» пределе (когда материалы сверхпроводящей структуры бездефектны), и в диффузионном пределе. Современные технологии приготовления сверхпроводящих структур таковы, что можно с достаточной уверенностью использовать диффузионный предел. В этом случае функции $Q_{\omega}(z, z')$ удовлетворяют дифференциальному уравнению [2,3]

$$\left(2\omega - D(z) \frac{d^2}{dz^2}\right) Q_{\omega}(z, z') = \frac{2\pi}{\hbar} N(z) \delta(z - z') \quad (2)$$

Здесь $D(z) = D_{S(N)}$ для $S(N)$ -слоев. Коэффициенты диффузии определяются через скорости Ферми и длины свободного пробега электрона: $D_{S(N)} = (1/3)v_{F,S(N)} l_{S(N)}$. Аналогично коэффициентная функция определяется через плотности числа состояний N_{FS} , N_{FN} на уровне Ферми.

Задача (1), (2) преобразуется к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) введением обозначения

$$\Delta_m(z) \equiv \int_0^L dz' Q_{\omega(m)}(z, z') \Delta(z') \quad (3)$$

Тогда вместо (2) получим

$$\left(m + \frac{1}{2} - \frac{\hbar D(z)}{4\pi k_B T} \frac{d^2}{dz^2}\right) \Delta_m(z) = N(z) V(z) \sum_{m'=0}^{m_D} \Delta_{m'}(z) \quad (4)$$

Система (4) дополняется естественными граничными условиями

$$\frac{d\Delta_m(0)}{dz} = \frac{d\Delta_m(L)}{dz} = 0 \quad (5)$$

Кроме граничных условий (5) система (4) должна быть дополнена условиями сшивания функций $\Delta_{\omega}(z)$ и их производных на плоскостях контакта S и N слоев, то есть в точках $z_{2k+1} = d_N + (k - 1)d$ и $z_{2k} = kd$ ($k = 1, \dots, Nbl$). Эти условия непосредственно следуют из условий Куприянова – Лукичева [10], полученных для «аномальных» функций Грина в диффузионном пределе:

$$D(z_i + 0) \frac{d\Delta_m(z_i + 0)}{dz} = D(z_i - 0) \frac{d\Delta_m(z_i - 0)}{dz} \quad (6.1)$$

$$D(z_i - 0) \frac{d\Delta_m(z_i - 0)}{dz} = \frac{v_{F,N} t_N N_{FN}}{2} \left(\frac{\Delta_m(z_i + 0)}{N(z_i + 0)} - \frac{\Delta_m(z_i - 0)}{N(z_i - 0)} \right) \quad (6.2)$$

В (6) t_N – параметр прозрачности границы, связанный с коэффициентом прозрачности оценочной формулой $t_N = T/(1 - T)$.

Поскольку коэффициентные функции в (4) – кусочно-постоянные, можем получить в явном виде общее решение задачи (4) – (6). Для этого строим точные решения для каждого из слоев структуры и сшиваем их посредством условий (6). Построив, таким образом, матрицант $\mathbf{R}(z)$ системы (4) [11], и используя далее граничные условия (5), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \Delta(L) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(L) \begin{pmatrix} \Delta(0) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где вектор-функция $\Delta(z) \equiv (\Delta_0(z), \Delta_1(z), \dots, \Delta_{mD}(z), \Delta_0'(z), \Delta_1'(z), \dots, \Delta_{mD}'(z))^T$.

Из условия существования нетривиальных решений системы (7) определяется набор значений T , наибольшее из которых и есть критическая температура T_c .

Выражение для матрицанта $\mathbf{R}(L)$ через матрицанты $\mathbf{M}(d_N)$ и $\mathbf{S}(d_S)$ N - и S -слоев, и через матрицы \mathbf{P}_{NS} , \mathbf{P}_{SN} условий сшивания (6), имеет вид:

$$\mathbf{R}(L) = \mathbf{M}(d_N) [\mathbf{P}_{NS} \mathbf{S}(d_S) \mathbf{P}_{SN} \mathbf{M}(d_N)]^{Nbl} \quad (8)$$

Для матриц $\mathbf{M}(d_N)$ и $\mathbf{S}(d_S)$ имеют место следующие формулы:

$$\mathbf{M}(d_N) = \begin{pmatrix} \text{diag} \left[ch \left(\frac{d_N}{\xi_N^{(m)}} \right) \right] & \text{diag} \left[\xi_N^{(m)} sh \left(\frac{d_N}{\xi_N^{(m)}} \right) \right] \\ \text{diag} \left[\frac{1}{\xi_N^{(m)}} sh \left(\frac{d_N}{\xi_N^{(m)}} \right) \right] & \text{diag} \left[ch \left(\frac{d_N}{\xi_N^{(m)}} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{S}(d_S) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \text{diag} \left[ch \left(\frac{d_S}{\xi_S^{(m)}} \right) \right] \mathbf{C}^T & \mathbf{C} \text{diag} \left[\xi_S^{(m)} sh \left(\frac{d_S}{\xi_S^{(m)}} \right) \right] \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} \text{diag} \left[\frac{1}{\xi_S^{(m)}} sh \left(\frac{d_S}{\xi_S^{(m)}} \right) \right] & \mathbf{C} \text{diag} \left[ch \left(\frac{d_S}{\xi_S^{(m)}} \right) \right] \mathbf{C}^T \end{pmatrix} \quad (10)$$

В (9), (10) использованы следующие обозначения:

$$\xi_N^{(m)} = \xi_N^{(m)}(T) = \xi_N \sqrt{\frac{T_S}{(2m+1)T}}, \quad \xi_N \equiv \sqrt{\frac{\hbar D_N}{2\pi k_B T_S}} \quad (11.1)$$

$$\xi_S^{(m)} = \xi_S^{(m)}(T) = \xi_S \sqrt{-\frac{T_S}{2T\mu^{(m)}(T)}}, \quad \xi_S \equiv \sqrt{\frac{\hbar D_S}{2\pi k_B T_S}} \quad (11.2)$$

$m = 0, 1, \dots, m_D$.

В (11) температурные функции $\mu^{(m)}(T)$ есть корни характеристического уравнения

$$\psi \left(\frac{\omega_D}{2\pi k_B T} + 1 + \mu^{(m)}(T) \right) - \psi \left(\frac{1}{2} + \mu^{(m)}(T) \right) = \psi \left(\frac{\omega_D}{2\pi k_B T_S} + 1 \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right), \quad (12)$$

T_S – критическая температура сверхпроводящего материала, $\psi(x)$ – ди-гамма функция. Матрицы \mathbf{C} в (10) определяются выражениями

$$C_j^{(m)} = \frac{s^{(m)}}{j+1/2+\mu^{(m)}}, \quad s^{(m)} = \left[\sum_{j=0}^{mD} \frac{1}{(j+1/2+\mu^{(m)})^2} \right]^{-1/2} \quad (13)$$

и являются ортогональными: $\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{C}^T = \mathbf{1}$.

Матрицы «сшивания» определяются формулами:

$$\mathbf{P}_{SN} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \gamma_b \xi_N \mathbf{1} \\ 0 & p \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{NS} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \gamma_b \xi_N p^{-1} \mathbf{1} \\ 0 & p^{-1} \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

В (14) использованы параметры $p = \rho_S / \rho_N$, $\gamma_b = 2l_N / (3\xi_N t_N)$, где ρ_S , ρ_N – удельные сопротивления сверхпроводящего и нормального материалов, l_N – длина свободного пробега электрона в нормальном металле.

Задачу (7) – (14) в случае $Nbl = 1$ (трехслойная структура) можно привести к значительно более удобному для численного решения виду. Можно показать, что критическая температура в этом случае соответствует нулевому (одновременно минимальному) собственному значению матрицы

$$\mathbf{R} \mathbf{1} = \mathbf{S}_i(d_S/2) + p \frac{\mathbf{M}_i(d_N)}{1 + \gamma_b \xi_N \mathbf{M}_i(d_N)} \quad (15)$$

В (15) использованы следующие обозначения:

$$\mathbf{S}_i(d_S/2) = C \text{diag} \left[\frac{1}{\xi_S^{(m)}} \text{th} \left(\frac{d_S}{2\xi_S^{(m)}} \right) \right] \mathbf{C}^T, \quad \mathbf{M}_i(d_N) = \text{diag} \left[\frac{1}{\xi_N^{(m)}} \text{th} \left(\frac{d_N}{\xi_N^{(m)}} \right) \right]. \quad (16)$$

Выражение (15) позволяет сразу же получить одномодовое приближение для критической температуры, оправданное при значениях толщины S -слоя $d_S > \xi_S$. В этом приближении критическая температура находится из уравнений

$$\text{tg} \left(\frac{d_S}{2\xi_S} \sqrt{\frac{2T\mu(T)}{T_S}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\mu(T)}} \frac{\gamma \cdot \text{th} \left(\frac{d_N}{\xi_N} \sqrt{\frac{T}{T_S}} \right)}{1 + \gamma_b \sqrt{\frac{T}{T_S}} \text{th} \left(\frac{d_N}{\xi_N} \sqrt{\frac{T}{T_S}} \right)} \quad (17)$$

$$\Psi \left(\frac{1}{2} + \mu(T) \right) - \Psi \left(\frac{1}{2} \right) = \ln \left(\frac{T_S}{T} \right) \quad (18)$$

где $\gamma = p\xi_S / \xi_N$, а из уравнения (18) находится наибольшее значение корня $\mu(T)$.

С помощью вышеизложенного метода были рассчитаны зависимости $T_c(d_S)$ S/N структур $Pd/Nb/Pd$ и $Cu/Nb/Cu$. Одна из таких зависимостей вместе с экспериментальным графиком [8] представлена на рисунке 1. Кроме того, по значениям параметров ρ_S , ρ_N , ξ_S , ξ_N взятым из эксперимента, и по найденному в результате фиттирования экспериментальных зависимостей параметру прозрачности, построены зависимости критической температуры от количества слоев. Результаты представлены на рисунке 2.

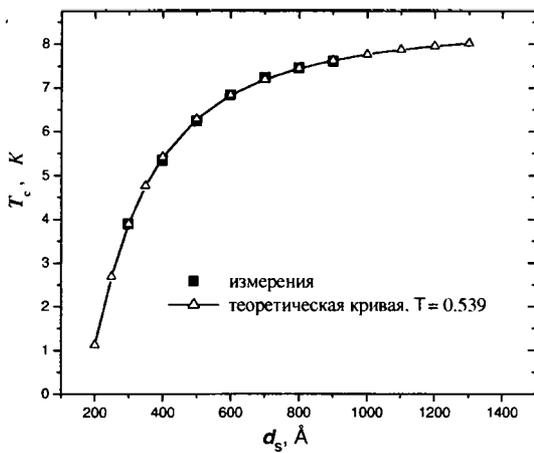


Рис.1. Экспериментальная и теоретическая зависимости $T_c(d_s)$ для структуры Pd/Nb/Pd.

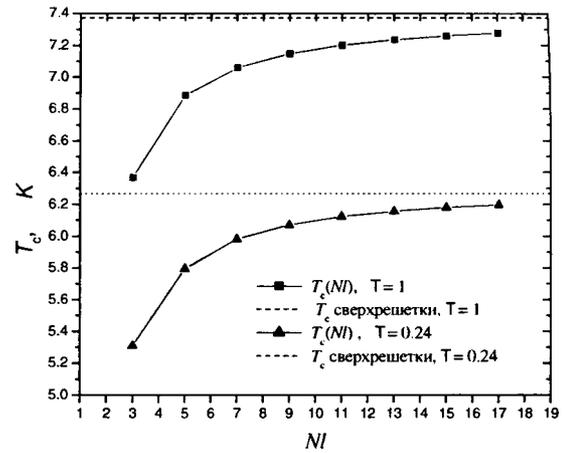


Рис.2. Зависимость критической температуры от количества слоев Nl структур Nb/Cu при двух значениях коэффициента прозрачности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прищепа С.Л. // Доклады БГУИР. - 2004. Т. 3(7). – С. 118.
2. Jin B.I. and Ketterson J.B. // Adv. Phys. - 1989. Vol. 38. - P. 189.
3. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. – М.: Мир, 1968. – 280с.
4. Lodder A. and Koperdraad R.P.W.// Physica C. - 1993. Vol. 212. - P. 81.
5. Koperdraad R.P.W. and A. Lodder // Phys. Rev. B. - 1995. Vol. 51. - P. 9026.
6. Brammertz G., A.A. Golubov, P. Verhoeve, R. Den Hartog, T. Peacock, H. Rogalla// Appl. Phys. Lett. – 2002. Vol. 80. – P. 2955.
7. Tesauro A., A. Aurigemma, C. Cirillo, S.L. Prischepa, M. Salvato and C. Attanasio // Supercond. Sci. Technol. - 2005. Vol. 18. - P. 152.
8. Cirillo C., S.L. Prischepa, M. Salvato and C. Attanasio // Euro. Phys. J. B - 2004. Vol. 38. - P.59.
9. Горьков Л. П. // ЖЭТФ. - 1959. Т. 37. - С.1407.
10. Куприянов М.Ю., В.Ф. Лукичев // ЖЭТФ. - 1988. Т. 94. - С. 139.
11. Якубович В.А., В.М. Старжинский. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. - М.: Наука, 1972. – 588с.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА НЕОДНОРОДНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Гладков П.А.

By using the asymptotic approach the solution of the Timoschenko-like equations governing the wave processes in the infinitely long elastic cylindrical shell lying on the non-homogeneous visco-elastic foundation has been constructed in the form of the wave packets traveling in the longitudinal direction. The solution represents the superposition of the bending and longitudinal waves.

Введение

Рассматривается задача о распространении осесимметричных локализованных волн в длинной цилиндрической оболочке. В работах [1,2] рассмотрена аналогичная задача для уравнений, основанных гипотезы Кирхгофа-Лява. В настоящей работе в качестве исходных используются уравнения в перемещениях [3] типа Тимошенко, учитывающие поперечные сдвиги.

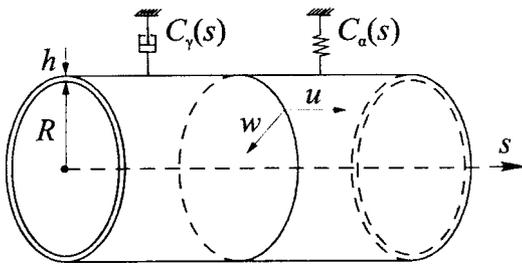


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка

Для построения решения задачи используется комплексная ВКБ-процедура [1,2], позволяющая свести двумерную задачу к последовательности одномерных задач, решение которых строится на подвижной параллели, называемой центром волнового пакета. Упомянутый метод применялся также для изучения бегущих волновых пакетов в прямом волноводе вращения [4], а также в волноводе с произвольным поперечным сечением [5].

1. Постановка задачи

Запишем безразмерную систему уравнений, описывающую осесимметричное движение цилиндрической оболочки типа Тимошенко, лежащей на вязкоупругом основании [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \mu \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{2\mu}{1-\mu} \frac{\partial u}{\partial s} - \left(\frac{2}{1-\mu} - C_\alpha(s) \right) w + C_\gamma(s) \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - 6 \frac{1-\mu}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \psi \right) - \frac{1-\mu}{2R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_\alpha(s) &= \frac{2R^2}{1-\mu} \alpha_w(s), \quad C_\gamma(s) = \frac{2R}{1-\mu} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}} \gamma_w(s), \\ u &= Ru^*, \quad w = Rw^*, \quad x = Rs, \quad t = \sqrt{\frac{2\rho R^2(1+\mu)}{E}} t^*, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где u^* , w^* – соответственно продольное и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки, ψ – угол поворота нормали, характеризующий поперечные сдвиги, R – радиус оболочки, x – продольная координата, t^* – время, ρ , E , μ – плотность, модуль Юнга и

коэффициент Пуассона материала соответственно, $\alpha_w(s)$, $\gamma_w(s)$ – коэффициенты постели и вязкости Винклеровского неоднородного основания, на котором лежит оболочка.

Предполагается, что C_α, C_γ – непрерывные и бесконечно дифференцируемые по s функции. Более того,

$$\theta, \frac{\partial^j \theta}{\partial s^j} \sim 1, j = 1, 2, \dots \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

где θ – любая из вышеупомянутых функций. Малый параметр ε введен для изучения семейств коротких волн, бегущих в направлении оси s , с мгновенной частотой $\varepsilon^{-1}\omega(t)$ и длиной волны порядка ε .

2. Пакеты изгибных волн

Рассмотрим изгибные волны, бегущие в продольном направлении. Из асимптотического анализа системы (1.1) следует, что для изгибных волн

$$u \sim \varepsilon, w \sim 1, \psi \sim \varepsilon \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Положим

$$u = \varepsilon u_n, w = w_n, \psi = \varepsilon \psi_n, \quad u_n, w_n, \psi_n \sim 1. \quad (2.2)$$

В соответствии с методом, предложенным в [1,2], решение системы (1.1) будем искать в виде пакета изгибных волн с центром на параллели $s_n = q_n(t)$, которую в дальнейшем будем называть центром волнового пакета (ВП). Перейдем к локальной системе координат, связанной с центром бегущего ВП:

$$s_n = q_n(t) + \varepsilon^{1/2} \xi_n. \quad (2.3)$$

Функции C_α, C_γ вблизи центра ВП раскладываются в ряд Тейлора. Пусть

$$\mathbf{V}_n = [u_n \quad w_n \quad \psi_n]. \quad (2.4)$$

Решение системы (1.1), с учетом (2.1), (2.2), будем искать в виде [1, 2]

$$\mathbf{V}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \mathbf{V}_{n,k} \exp\{i\varepsilon^{-1} S_n(\xi_n, t, \varepsilon)\}, \quad (2.5)$$

$$S_n = \int \omega_n(t) dt + \varepsilon^{1/2} p_n(t) \xi_n + \frac{1}{2} \varepsilon b_n(t) \xi_n^2, \quad \text{Im} b_n(t) > 0, \quad (2.6)$$

где $\omega_n(t)$ – мгновенная частота колебаний, $p_n(t)$ – волновое число, $\mathbf{V}_{n,k}(\xi_n, t)$ – полиномы аргумента ξ_n с коэффициентами, зависящими от t , а комплексная функция $b_n(t)$ характеризует ширину ВП.

Подстановка (2.2) – (2.6) в уравнение (1.1) приводит к последовательности уравнений

$$\sum_{j=0}^k \mathbf{L}_{n,j} \mathbf{V}_{n,k-j}^T = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

где элементы матрицы $\mathbf{L}_{n,0}$ имеют вид

$$l_{11} = -p_n^2 + \frac{1-\mu}{2} (\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2, \quad l_{12} = -\mu i p_n, \quad l_{22} = -p_n^2 + C_\alpha + (\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2, \\ l_{32} = -\frac{6R^2(1-\mu)}{h^2} i p_n, \quad l_{33} = -p_n^2 + \frac{1-\mu}{2} (\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2, \quad l_{13} = l_{21} = l_{23} = l_{31} = 0, \quad (2.8)$$

а операторы высших порядков записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{n,1} &= \left(b_n \frac{\partial \mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n} + \frac{\partial \mathbf{L}_{n,0}}{\partial q_n} + \dot{p}_n \frac{\partial \mathbf{L}_{n,0}}{\partial \omega_n} \right) \xi_n - i \frac{\partial \mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n}, \\ \mathbf{L}_{n,2} &= \frac{1}{2} \left(b_n^2 \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n^2} + 2b_n \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n \partial q_n} + \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial q_n^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial \omega_n^2} + 2\dot{p}_n \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial q_n \partial \omega_n} + 2\dot{p}_n b_n \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n \partial \omega_n} + \dot{b}_n \frac{\partial \mathbf{L}_{n,0}}{\partial \omega_n} \right) \xi_n^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} - i \left(b_n \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n \partial q_n} + \dot{p}_n \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n \partial \omega_n} \right) \xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} - i \frac{\partial \mathbf{L}_{n,0}}{\partial \omega_n} \frac{\partial}{\partial t} \\ &\quad - i \left(\frac{1}{2} b_n \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n^2} + \frac{1}{2} \dot{\omega}_n \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial \omega_n^2} + \dot{p}_n \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n \partial \omega_n} + \mathbf{N}_n \right), \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Элементы матрицы \mathbf{N}_n имеют вид:

$$\begin{aligned} n_{11} = n_{33} &= \frac{1-\mu}{2} \ddot{q}p, \quad n_{22} = \ddot{q}p + C_\gamma(\omega + \dot{q}p), \\ n_{12} = n_{13} &= n_{21} = n_{23} = n_{31} = n_{32} = 0. \end{aligned}$$

По аналогии с [1,2] задача в нулевом приближении влечет за собой соотношение

$$\omega_n = \dot{q}_n p_n - H_n^\pm(p_n, q_n), \quad (2.10)$$

где

$$H_n^\pm(p_n, q_n) = \pm \sqrt{p_n^2 - C_\alpha} \quad (2.11)$$

– функция Гамильтона. Знаки (\pm) указывают на наличие двух веток решения.

Из условия разрешимости неоднородной системы в первом приближении получаем [1]

$$\dot{q}_n = \partial H_n / \partial p_n, \quad \dot{p}_n = -\partial H_n / \partial q_n. \quad (2.12)$$

Условие разрешимости системы во втором приближении дает уравнение Риккати [1]

$$\dot{b}_n + \frac{\partial^2 H_n}{\partial p_n^2} b_n^2 + 2 \frac{\partial^2 H_n}{\partial p_n \partial q_n} b_n + \frac{\partial^2 H_n}{\partial q_n^2} = 0 \quad (2.13)$$

и амплитудное уравнение

$$\chi_{n,0}(t) \frac{\partial^2 P_{n,0}}{\partial \xi_n^2} + \chi_{n,1}(t) \xi_n \frac{\partial P_{n,0}}{\partial \xi_n} + \chi_{n,2} \frac{\partial P_{n,0}}{\partial t} + \chi_{n,3}(t) P_{n,0} = 0. \quad (2.14)$$

Коэффициенты уравнения (2.14) приведены в [1,2]. Решение уравнения (2.14) может быть построено в виде полинома аргумента ξ_n [2].

3. Пакеты продольных волн

Для продольных волн имеем $u \sim 1$, $w \sim \varepsilon$, $\psi \sim 1$. Пусть

$$u = u_s \sim 1, \quad w = \varepsilon w_s, \quad \psi = \psi_s \sim 1, \quad \mathbf{V}_s = (u_s, w_s, \psi_s). \quad (3.1)$$

Вектор-функцию \mathbf{V}_s ищем в том же виде (2.5), (2.6) с заменой индекса n на s . Процедура отыскания неизвестных функций, входящих в асимптотическое представление вектора \mathbf{V}_s

остается прежней. Отметим изменения, которые касаются формул и уравнений предыдущего пункта. Теперь матрица оператора $L_{s,0}$ имеет вид

$$l_{11} = -p_s^2 + \frac{1-\mu}{2}(\omega_s - \dot{q}_s p_s)^2, \quad l_{21} = \frac{2\mu}{1-\mu} i p_s, \quad l_{22} = -p_s^2 + C_\alpha + (\omega_s - \dot{q}_s p_s)^2, \\ l_{23} = i p_s, \quad l_{33} = -p_s^2 + \frac{1-\mu}{2}(\omega_s - \dot{q}_s p_s)^2, \quad l_{12} = l_{13} = l_{31} = l_{32} = 0. \quad (3.2)$$

Функция Гамильтона упрощается:

$$H_s^\pm(p_s, q_s) = \pm \sqrt{\frac{2}{1-\mu}} p_s. \quad (3.3)$$

Уравнение Риккати вырождается и принимает вид $\dot{b}_s = 0$, а амплитудное уравнение принимает вид

$$\chi_{s,2} \frac{\partial P_{s,0}}{\partial t} + \chi_{s,3}(t) P_{s,0} = 0. \quad (3.4)$$

4. Суперпозиция решений

Найденные выше разложения для изгибных и продольных волн представляют собой положительные ветви конструируемых решений. Для перехода к отрицательным ветвям необходимо знаки, стоящие перед гамильтонианами, сменить на противоположенные. Снабдим все найденные функции в разложении векторов \mathbf{V}_n , \mathbf{V}_s знаками (+) и (-), отвечающими положительным и отрицательным ветвям решения.

В силу линейности уравнений (1.1) вектор

$$\mathbf{V} = \left[\mathbf{E}_{\varepsilon 1 \varepsilon} (\mathbf{V}_n^+ + \mathbf{V}_n^-)^T + \mathbf{E}_{1 \varepsilon 1} (\mathbf{V}_s^+ + \mathbf{V}_s^-)^T \right]^T, \quad \text{где} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{E}_{\varepsilon 1 \varepsilon} = \text{diam}\{\varepsilon, 1, \varepsilon\}, \quad \mathbf{E}_{1 \varepsilon 1} = \text{diam}\{1, \varepsilon, 1\}, \quad (4.2)$$

является формальным асимптотическим решением в главном приближении уравнений (1.1).

5. Пример

Рассмотрим для примера оболочку, лежащую на неоднородном упругом основании с коэффициентом постели (здесь $\gamma_w(s) = 0$)

$$\alpha_w(s) = 3s^2. \quad (5.1)$$

На рис. 2 изображены результаты численного интегрирования системы Гамильтона для пакета изгибных волн, бегущего в сторону возрастания коэффициента постели основания для трех вариантов граничных условий:

$$p_n(0) = 0.8, \quad p_n(0) = 1.2, \quad p_n(0) = 1.4; \quad q_n(0) = 0. \quad (5.2)$$

Первому случаю соответствует штрихпунктирная линия, второму – штриховая, третьему – сплошная линия.

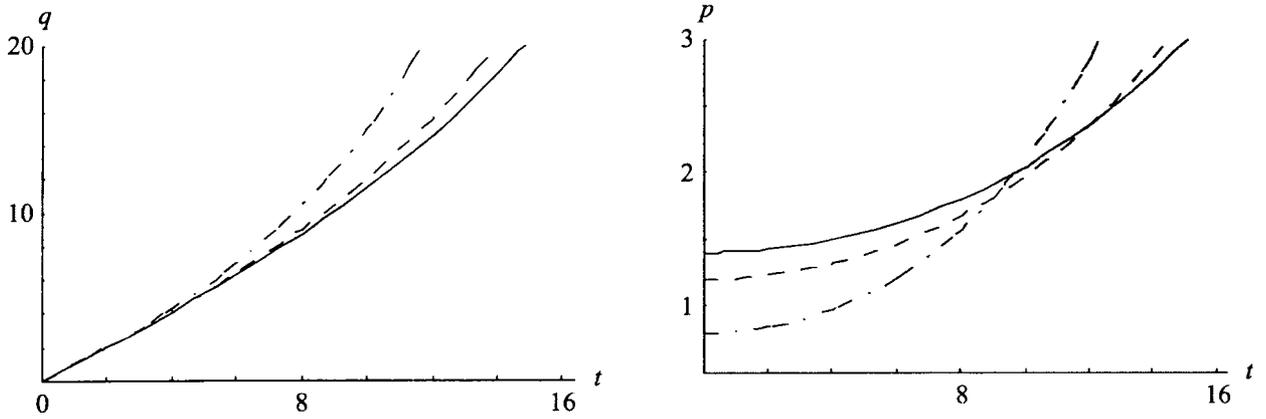


Рис. 2. Графики функций $q_n(t)$ и $p_n(t)$

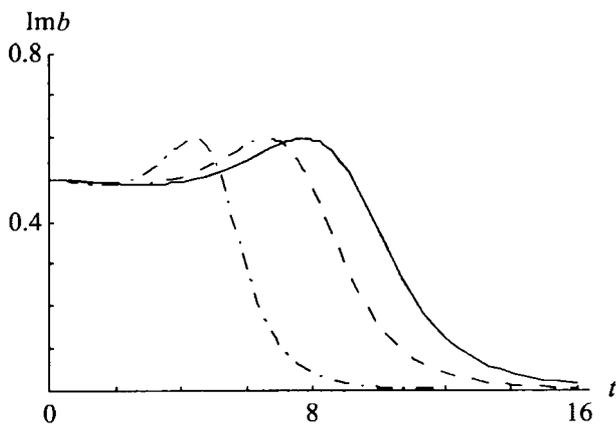


Рис. 3. График функции $\text{Im } b_n(t)$

График функции $b_n(t)$ представлен на рис. 3. Анализ выполненных расчетов показывает, что движение пакета изгибных волн сопровождается ростом волнового параметра $p_n(t)$ и групповой скорости $\dot{q}_n(t)$, а также увеличением ширины пакета, что свидетельствует о его «расползании».

Для продольных волн расчеты упрощаются. Здесь функция $q_s(t)$ линейно возрастает с течением времени, а p_s и b_s являются постоянными величинами, удовлетворяющими начальным условиям.

6. Заключение

В работе построено формальное асимптотическое решение уравнений движения оболочки типа Тимошенко, лежащей на неоднородном Винклеровском основании, в виде суперпозиции осесимметричных пакетов изгибных и продольных волн. Исследовано влияние неоднородности коэффициента постели на динамические характеристики волновых пакетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михасев Г.И. Локализованные волновые формы движения бесконечной оболочки вращения // Прикл. мат. и мех. – 1996. – Т. 60, №5. – С. 826–834.
2. Михасев Г.И. О волновых формах движения бесконечной цилиндрической оболочки с переменными параметрами // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – Т. 60, №6. – С. 129–137.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа (задачи аэроупругости). – М.: Наука, 1976. – 416 с.
4. Mikhasev G.I. Traveling wave packets in a non-homogeneous narrow medium bounded by a surface of revolution // Wave Motion. – 2003. – Vol. 37, No. 3. – P. 207–217.
5. Гладков П.А. Волновые пакеты в упругом волноводе произвольного сечения // Вестник ВГУ – 2005. – Вып. 36. – С. 125–129.

SOLVING THE UNSTEADY HEAT TRANSFER PROBLEM WITH PERIODIC BOUNDARY CONDITION BY THE BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS METHOD¹

Sorko S.A., Karpovich S.E.

In the paper, a solution of unsteady heat transfer problem with periodic boundary condition by means of boundary integral equations method was presented. Also was presented the results of numerical simulation of heat transfer in two dimensional area with oscillating temperature on the boundary.

1. Introduction

The phenomena of heat transfer with the periodical changes of temperature on physical boundaries of analysed objects takes place in many engineering mechanisms (engines, compressors), heating and cooling systems and hydraulic networks.

Also the heat transfer equations with conditions of oscillation temperature or heat flux on boundaries takes important role in mathematical description of many engineering, geothermal and biological problems.

2. Equation of the heat conduction

The processes in which the main mechanism of the heat transfer is the mechanism of heat conduction are described by Fourier-Kirchhoff equation.

The differential equation of unsteady heat conduction in homogeneous substance with constant thermal diffusion coefficient takes the form [1]:

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

with initial condition (1.a) and boundary conditions (1.b).

$$\mathbf{q} \in \Lambda : T(\mathbf{q}, t = 0) = T_{0L}(\mathbf{q}) \quad (1.a, 1.b)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} \in L_1 : T(\mathbf{p}, t) &= T_L(\mathbf{p}, t) \\ \mathbf{p} \in L_2 : \mathbf{q}(\mathbf{p}, t) &= -\lambda \frac{\partial T(\mathbf{p}, t)}{\partial n} = q_L(\mathbf{p}, t) \end{aligned} \right\}$$

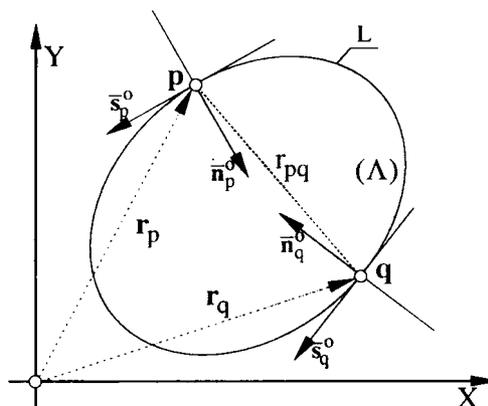


Fig. 1. Sketch for the two dimensional boundary problem analysis of Fourier equation

Particular form of the boundary condition is the condition of periodical changes of the temperature on the boundary:

$$T_L(\mathbf{p}, t) = T(\mathbf{p}) \exp(i\omega t) \quad (1.c)$$

¹ Technical University of Białystok, Research Work S/IIŚ/21/05

The first internal Fourier problem for differential equation (1) with conditions (1.a) and (1.b) in two dimensional area (Λ) has the general solution of the integral form [1]:

$$T(\mathbf{p}, t) + \alpha \int_{\tau_0}^t \int_{(L_1)} T(\mathbf{q}, \tau) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, \tau) dL_q d\tau + \iint_{(\Lambda)} T_{0L}(\mathbf{p}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, \tau) d\Lambda_q = 0 \quad (2)$$

where the kernels (fundamental solutions) have the form:

$$\left. \begin{aligned} K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, \tau) &= \frac{1}{4\pi\alpha(t-\tau)} \exp\left[-\frac{r(\mathbf{p}, \mathbf{q})^2}{4\alpha(t-\tau)}\right] \\ E(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, \tau) &= \frac{|r(\mathbf{p}, \mathbf{q})| \cos(r(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \bar{\mathbf{n}}_q)}{8\pi\alpha^2(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r(\mathbf{p}, \mathbf{q})^2}{4\alpha(t-\tau)}\right] \end{aligned} \right\} \quad (2.a)$$

Function $T(\mathbf{q}, \tau)$ satisfies integral equation:

$$-\frac{1}{2} T(\mathbf{p}, t) + \alpha \int_{\tau_0}^t \int_{(L_1)} q(\mathbf{q}, \tau) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, \tau) dL_q d\tau = g(\mathbf{p}, t) \quad (2')$$

where:

$$g(\mathbf{p}, t) = T_L(\mathbf{p}, t) - \iint_{(\Lambda)} T_{0L}(\mathbf{p}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, \tau) d\Lambda_q \quad (2'')$$

The second internal Fourier problem for differential equation (1) with conditions (1.a) and (1.c) in two dimensional area (Λ) has the general solution of the integral form [1]:

$$T(\mathbf{p}, t) + \alpha \int_{\tau_0}^t \int_{(L_1)} q(\mathbf{q}, \tau) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, \tau) dL_q d\tau + \iint_{(\Lambda)} T_{0L}(\mathbf{p}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, \tau) d\Lambda_q = 0 \quad (3)$$

Function $q(\mathbf{q}, \tau)$ satisfies integral equation:

$$+\frac{1}{2} q(\mathbf{p}, t) + \alpha \int_{\tau_0}^t \int_{(L_1)} q(\mathbf{q}, \tau) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, \tau) dL_q d\tau = h(\mathbf{p}, t) \quad (3')$$

where:

$$h(\mathbf{p}, t) = q_L(\mathbf{p}, t) - \iint_{(\Lambda)} T_{0L}(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, \tau) d\Lambda_q \quad (3'')$$

3. Solving the problem of the unsteady heat conduction with periodical boundary condition

The unsteady heat conduction in two dimensional object with condition of periodically changed temperature on boundary line is described by the equation:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad T_L(\mathbf{p}, t) = T^* \exp(-\omega t) \quad (4)$$

In this case the temperature may be treated as the function:

$$T = U \exp(-\omega t) \quad T = T(x, y, t); U = U(x, y) \quad (5)$$

The space and time derivatives of the temperature are equal respectively:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} \exp(-i\omega t), \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \exp(-i\omega t) \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} \exp(-i\omega t), \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \exp(-i\omega t) \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= U(-i\omega) \exp(-i\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

Introducing relations (5) to equation (4) leads to differential equation for function (U):

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \quad k^2 = \frac{i\omega}{\alpha} \quad (5')$$

The integral solution of differential equation has the form [2]:

$$U(\mathbf{p}) = - \int_{(L)} \bar{\mathbf{n}}_q \cdot U(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \int_{(L)} U(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q \quad ; \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in (\Lambda) \quad (6)$$

where the kernels $K(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)$ and $E(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)$ are expressed by spherical Hankel functions of the first kind of order zero and one [3]:

$$\left. \begin{aligned} K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{4} H_0^{(1)}(kr_{pq}) \\ E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \bar{\mathbf{n}}_q \cdot \nabla K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{4} k H_1^{(1)}(kr_{pq}) \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

$$r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$$

On the boundary line (Λ) function $U(\mathbf{q})$; $\mathbf{q} \in (\Lambda)$ satisfies the integral equation:

$$\int_{(L)} \bar{\mathbf{n}}_q \cdot U(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q = T^* \int_{(L)} E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q - \frac{T^*}{2} \quad ; \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in (L) \quad (7)$$

4. Numerical solution of integral equation of heat conduction with periodical boundary condition

Discrete solution of integral equation can be obtained approximating the boundary line by the finite set of partial lines. Under condition, that considered equations are satisfied together with boundary conditions on the partial lines (straight or curved elements) (fig. 2).

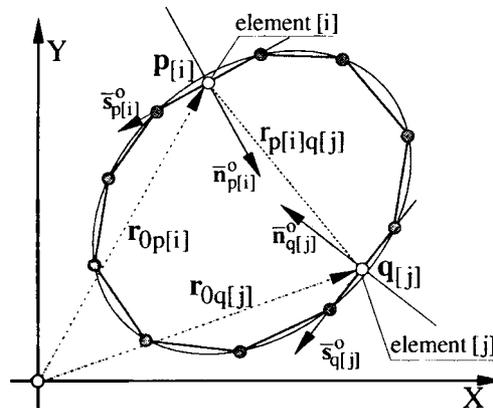


Fig. 2. Discretization of area (Λ)

Integral equation can be expressed as the system of algebraic linear equations for the function $\left(\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial n}\right)$ at collocation points on each element:

$$\Re\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{[i]} \Rightarrow \sum_{j=1}^I \left(\frac{\partial U(\mathbf{q}_{[j]})}{\partial n}\right)_{[j]} \Re \int_{(L_{[j]})} K(\mathbf{p}_{[i]}, \mathbf{q}_{[j]}) dL_q = \sum_{j=1}^J T^* \left[\left[\Re \int_{(L_{[j]})} E(\mathbf{p}_{[i]}, \mathbf{q}_{[j]}) dL_q \right] - 0.5 \right] ; \quad I = \overline{1, I} \quad (7.a)$$

$$\Im\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{[i]} \Rightarrow \sum_{j=1}^I \left(\frac{\partial U(\mathbf{q}_{[j]})}{\partial n}\right)_{[j]} \Im \int_{(L_{[j]})} K(\mathbf{p}_{[i]}, \mathbf{q}_{[j]}) dL_q = \sum_{j=1}^J T^* \left[\left[\Im \int_{(L_{[j]})} E(\mathbf{p}_{[i]}, \mathbf{q}_{[j]}) dL_q \right] - 0.5 \right] ; \quad I = \overline{1, I} \quad (7.b)$$

In equations (7.a), (7.b) symbols \Re and \Im denotes the real and imaginary part of kernels (6*).

5. Examples

Example (1) – Calculation temperature field in unitary square for the boundary temperature distribution (fig. 3.):

left hand side $T_L = 0^\circ$ [C] right hand side $T_R = 100^\circ$ [C] lower side $T_D = 100^\circ$ [C]

upper side $T_U = 0^\circ + 100^\circ \cos(\omega t)$ [C] and $\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} = 1.0$

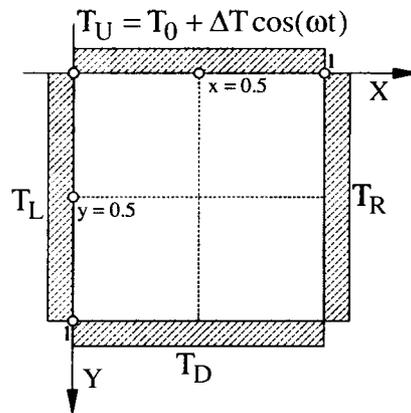


Fig. 3. 2D area

Figures (4.a) and (4.b) illustrated temperature profile respectively at $x=0.5$ and $y=0.5$ coordinates for period $(0, 2\pi)$. Figures (5) shows the evolution of the temperature field

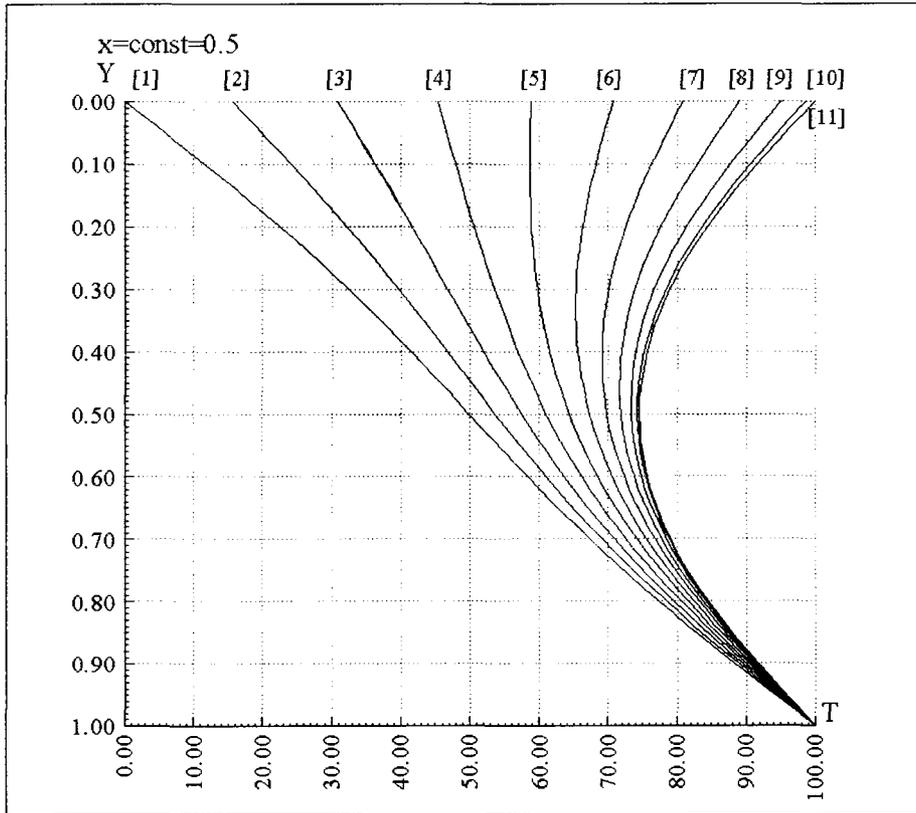


Fig. 4.a. Temperature profile $x=const=0.5$

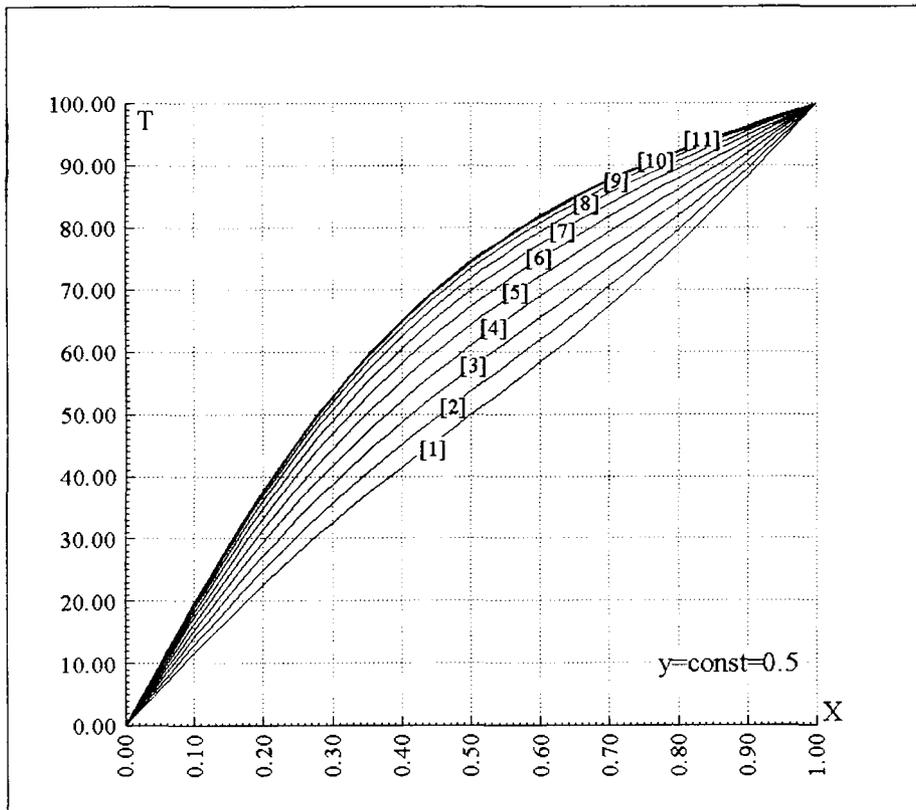


Fig. 4.b. Temperature profile $y=const=0.5$

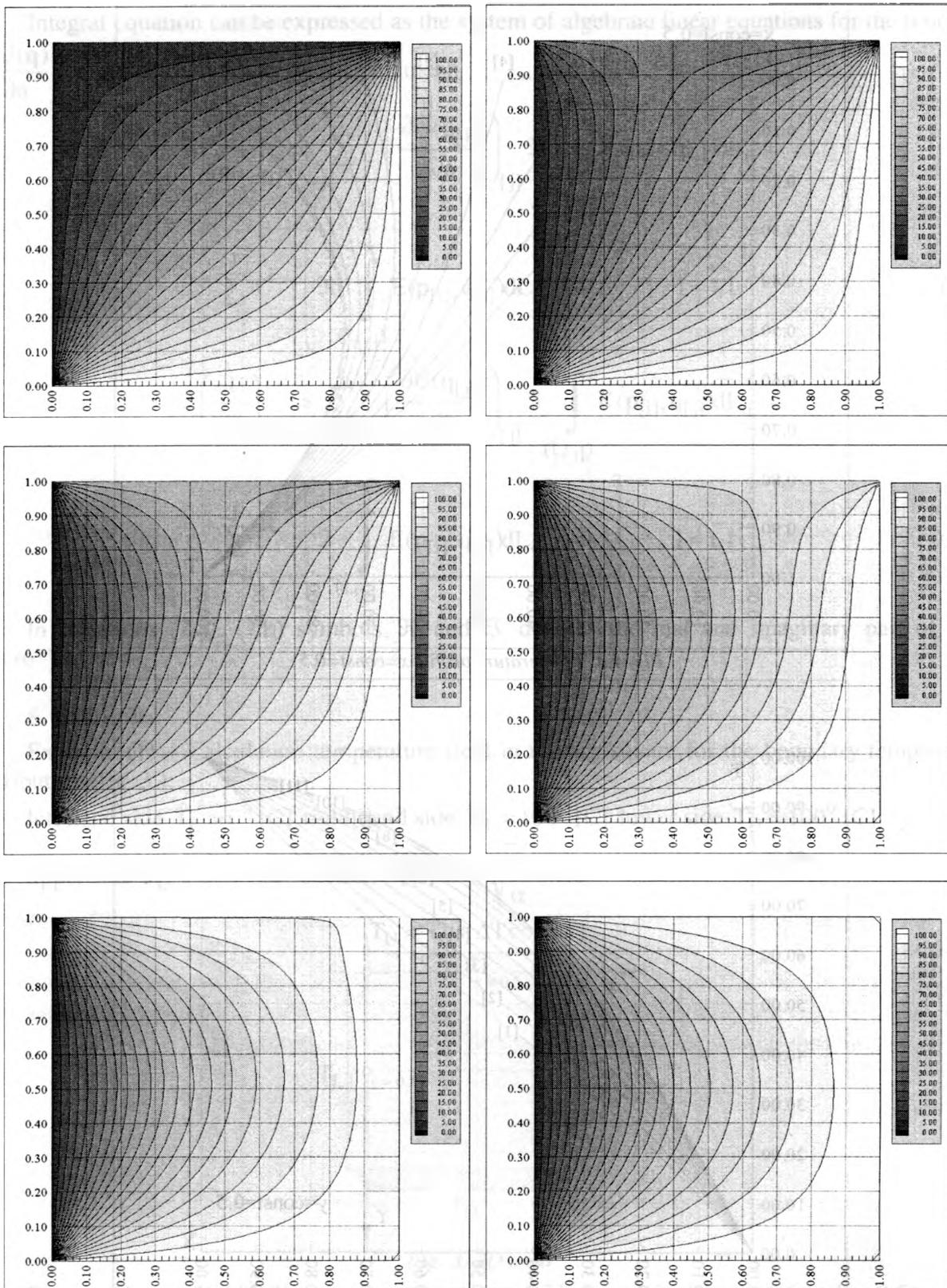


Fig. 5. Temperature field in rectangular area for boundary condition $T_U = T_0 + \Delta T \cos(\omega t)$

Example (2) – Calculation temperature field $\vartheta = f(z, t)$ in semi infinite area with periodical boundary condition $\vartheta = \vartheta^* \cos(\omega t)$ where non-dimensional surplus of the mean temperature of area (ground temperature example in the one year period).

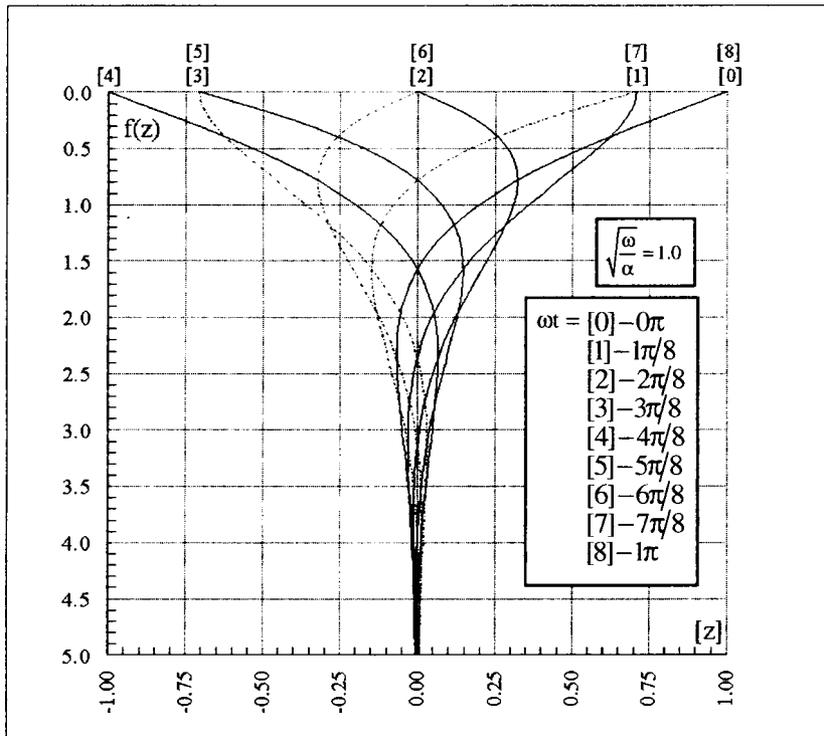


Fig. 6. Temperature field in semi infinite area for boundary condition $\vartheta = \vartheta^* \cos(\omega t)$

BIBLIOGRAPHY

1. Brebbia K., Telles J.C.F., Wrobel L.C. Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering – Springer-Verlag, 1984.
2. Krzyżański M. Partial differential equations of second order // PWN, 1971.
3. Hunter P. FEM/BEM Notes. – Auckland: 2002

УРАВНЕНИЕ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОЙ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Босяков С.М., Скляр О.Н.

The equation of characteristics for system of the equations of movement cubic anisotropic environment which thermal properties are described by the hyperbolic law of heat conductivity is obtained.

Исследованию закономерностей распространения плоских волн, поверхностей разрывов в изотропных и анизотропных средах, тепловые свойства которых описываются обобщенным (гиперболическим) законом теплопроводности, посвящено достаточно большое количество работ [1 - 3]. В настоящей работе представлены результаты реализации метода характеристик теории дифференциальных уравнений с частными производными [4, 5] применительно к системе уравнений движения термоупругой кубически анизотропной среды с учетом времени релаксации тепловых возмущений.

Разрешающую систему дифференциальных уравнений для термоупругих анизотропных материалов кубической системы симметрии, следуя работе [3], представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (A_4\Delta + (A_1 - A_2 - 2A_4)\partial_i^2)u_i + \\ & + (A_2 + A_4)\partial_i \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k = \rho \partial_t^2 u_i + \beta \partial_i T, \\ & c_\epsilon \partial_t T + \beta \sum_{k=1}^3 \partial_t \partial_k u_k = - \sum_{k=1}^3 \partial_k q_k, \\ & \tau \partial_t q_i + q_i = -\lambda \partial_i T, i = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_i - компоненты вектора перемещений, q_i - компоненты вектора теплового потока, T - изменение абсолютной температуры, A_1, A_2, A_4 - константы упругости, $\beta = (A_1 + 2A_2)\alpha_T$, α_T - коэффициент линейного теплового расширения, ρ - плотность, c_ϵ - удельная теплоемкость при постоянной деформации, τ - время релаксации тепловых возмущений, λ - теплопроводность, Δ - оператор Лапласа, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $i = \overline{1,3}$.

Начальные условия к системе (1) зададим на поверхности $z(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ и перейдем к новым переменным z, z_1, z_2, z_3 по следующей схеме:

$$g = z(x_1, x_2, x_3, t), g_i = z_i(x_1, x_2, x_3, t), i = \overline{1,3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_i|_{z=0} &= f_i^{(1)}(z_1, z_2, z_3), \frac{\partial u_i}{\partial z}|_{z=0} = f_i^{(2)}(z_1, z_2, z_3), \\ T|_{z=0} &= f^{(3)}(z_1, z_2, z_3), q_i|_{z=0} = f_i^{(4)}(z_1, z_2, z_3), i = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (2)$$

По правилам дифференцирования находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_m} &= \sum_{k=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial g_k} \frac{\partial z_k}{\partial x_m}, z_0 \equiv z, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_m \partial x_l} &= \sum_{k,p=0}^3 \frac{\partial^2 y}{\partial g_k \partial g_p} \frac{\partial z_k}{\partial x_m} \frac{\partial z_p}{\partial x_l} + \sum_{k=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial g_k} \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_m \partial x_l}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь y - непрерывная функция от пространственных координат z_1, z_2, z_3 и времени t .

Подставим выражения для производных (3) в систему уравнений (1) и выпишем выражения, содержащие частные производные второго порядка g . В результате получим:

$$\begin{aligned} &\left(A_4 \delta + (A_1 - A_2 - 2A_4) \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 - \rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial g^2} + \\ &+ (A_2 + A_4) \frac{\partial z}{\partial x_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial z}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_k}{\partial g^2} - \beta \frac{\partial T}{\partial g} \frac{\partial z}{\partial x_i} + \dots = 0, \\ c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial g} \frac{\partial z}{\partial t} + \beta \frac{\partial z}{\partial t} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial z}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_k}{\partial g^2} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial z}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial g} + \dots = 0, \\ \tau \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial q_i}{\partial g} + \lambda \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial g} + \dots = 0, i = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\delta = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial z}{\partial x_k} \right)^2$.

Из начальных условий (2) можно найти все частные производные первого и второго порядков, кроме производных по g . Недостающие производные можно определить из семи уравнений системы (4), которые можно рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно производных

$\frac{\partial^2 u_i}{\partial g^2}$ и $\frac{\partial T}{\partial g}, \frac{\partial q_i}{\partial g}, i = \overline{1,3}$. Эти частные производные могут иметь разрывы на поверхности $z(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ только в случае, если выполняется равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при этих производных. После несложных преобразований характеристический определитель представим в следующем виде:

$$\det \|w_{ij}\|_{7 \times 7} = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } w_{ii} = p_i^2 + (\delta - p_i^2)b - \frac{p_0^2}{c_1^2}, \quad w_{ij} = (a+b)p_i p_j, \quad w_{i+3,i+3} = n_* p_0, \quad w_{i7} = -p_i,$$

$$w_{i+3,7} = w_{7,i+3} = p_i, \quad w_{7i} = \varepsilon p_0 p_i, \quad w_{77} = p_0, \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad p_0 = \frac{\partial z}{\partial t}, \quad a = \frac{A_2}{A_1}, \quad b = \frac{A_4}{A_1},$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{A_1}{\rho}} - \text{ скорость распространения поперечной волны, } n_* = \tau \omega_* - \text{ характерное число ко-}$$

$$\text{лебаний, } \omega_* = \frac{c_\varepsilon A_1}{\lambda} - \text{ характерная величина, имеющая размерность частоты, } \varepsilon = \frac{\beta^2}{A_1 c_\varepsilon} - \text{ без-}$$

размерный коэффициент связанности, $i \neq j = \overline{1,3}$.

Раскрывая определитель (5), получим

$$p_0^2 \left(\frac{k_0 p_0^8}{c_1^8} + \frac{k_1 p_0^6}{c_1^6} + \frac{k_2 p_0^4}{c_1^4} + \frac{k_3 p_0^2}{c_1^2} + k_4 \right) = 0. \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} k_0 &= -n_*, \quad k_1 = (1 + n(1 + 2b + \varepsilon))\delta, \\ k_2 &= -\left(1 + b^2 n_* + 2b(1 + n_* + \varepsilon n_*)\right) \left(p_1^4 + p_2^4 + p_3^4\right) - \\ &\quad - \left(2 + 2b^2 n_* + b(4 - 2(a-1)n_*) - (a-1)n_*(1 + a + 2\varepsilon)\right) \times \\ &\quad \times \left(p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2\right), \\ k_3 &= b \left(2 + b(1 + n_* + \varepsilon n_*)\right) \left(p_1^6 + p_2^6 + p_3^6\right) + \\ &\quad + \left(4b^3 n_* + 6(a-1)(a n_* + \varepsilon n_* - 1) + 6b^2(a n_* + \varepsilon n_* + 1) - \right. \\ &\quad \left. - (a-1)(3 + n_* + 3\varepsilon n_* - 2a^2 n_* + a(3 + n_* - 3\varepsilon n_*))\right) p_1^2 p_2^2 p_3^2 + \\ &\quad + \left(1 - a^2(1 + b n_*) + b^2(3 + n_* - \varepsilon n_*) - 2ab(1 + b n_* + \varepsilon n_*) + \right. \\ &\quad \left. + b(4 + n_* + 2\varepsilon n_*)\right) \left(p_1^4(p_2^2 + p_3^2) + p_2^4(p_1^2 + p_3^2) + p_3^4(p_1^2 + p_2^2)\right), \\ k_4 &= -b^2 \left(p_1^8 + p_2^8 + p_3^8\right) + \\ &\quad + (a-1)(1 + a + 2b)b \left(p_1^6(p_2^2 + p_3^2) + p_2^6(p_1^2 + p_3^2) + p_3^6(p_1^2 + p_2^2)\right) + \\ &\quad + 2b \left(a^2 - 1 - b + 2ab\right) \left(p_1^4 p_2^4 + p_1^4 p_3^4 + p_2^4 p_3^4\right) - \\ &\quad - \left(1 + 2a^3 + 2b + 2ab(b-3) + 2b^2(1 + 2b) + a^2(4b-3)\right) p_1^2 p_2^2 p_3^2 \delta. \end{aligned}$$

Из характеристического уравнения (6) следует существование стационарной поверхности разрыва, а также четырех модифицированных упругих волн, на распространение которых влияет температурное поле. При коэффициенте связанности $\varepsilon = 0$ уравнение (6) описывает распространение трех упругих (квазипродольной и квазипоперечных) волн, а также тепловой волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход. – Мн.: Навука і тэхніка, 1993. - 279 с.
2. Sharma J. N., Singh H. Propagation of generalized thermoelastic waves in cubic crystals // Arch. Mech. – 1990. – Vol. 42, № 1. – P. 19 – 30.
3. Banarjee D. K., Pao Yih-Hsing. Thermoelastic waves in anisotropic solids // J. Acoust. Soc. Am. 1974. – Vol. 56, No. 5. – P. 1444 - 1454.
4. Курант Ф. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 600 с.
5. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Ленинград: Наука, 1980. – 284 с.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В СТЕНКЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Веремейчик А.И.

With use of a method of final differences distribution is investigated water temperatures in a wall of the hollow cylinder. The algorithm is developed and the program on the IBM for definition of temperatures in any point of the cylinder is made at the set temperature on internal and external surfaces. Analytically also the specific thermal stream on an external surface is approximately certain. The considered example of the numerical and analytical decision specifies high accuracy of the lead calculations.

Большинство задач теплопроводности сводятся к решению дифференциальных уравнений в частных производных, которые, как правило, весьма сложны, получить их решение в виде конечной формулы можно лишь в самых простых случаях. В связи с этим особое значение приобретают методы приближенного решения, в том числе и численные методы (конечных разностей, конечных элементов, граничных элементов и др.). В методе граничных элементов, например, дифференциальные уравнения (ДУ) заменяются интегральными, которые более удобны для реализации на ЭВМ. Для простых случаев геометрии границы области эффективным является использование метода конечных разностей, в котором дифференциальные уравнения заменяются их конечно-разностными аналогами, благодаря чему исходные ДУ сводятся к системам алгебраических уравнений, в которых неизвестны значения функции (температуры) в узлах сетки, вводимой вместо непрерывной области изменения аргумента (координаты). Хотя число неизвестных в этой системе бывает значительным, решение ее представляет более простую задачу, чем первоначальная, особенно благодаря использованию ЭВМ.

Рассмотрим распространение метода конечных разностей на решение задачи теплопроводности для полого цилиндра. Найдем распределение температурного поля в стенке цилиндра при заданных температурах на внутренней \dot{O}_{R_1} и внешней \dot{O}_{R_2} поверхностях. Запишем одномерное уравнение теплопроводности при наличии внутренних источников тепла:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dT}{dr} \right) + S = 0. \quad (1)$$

Проинтегрируем его по контрольному объему:

$$\int_V \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dT}{dr} \right) dV + \int_V S dV = 0. \quad (2)$$

Величина контрольного объема: $dV = dL \cdot dr \cdot r \cdot d\theta$. В одномерной постановке величины dL и $d\theta$ принимаются равными единице, поэтому исходное интегральное уравнение можно переписать в виде:

$$\int_r \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dT}{dr} \right) r dr + \int_r S r dr = 0. \quad (3)$$

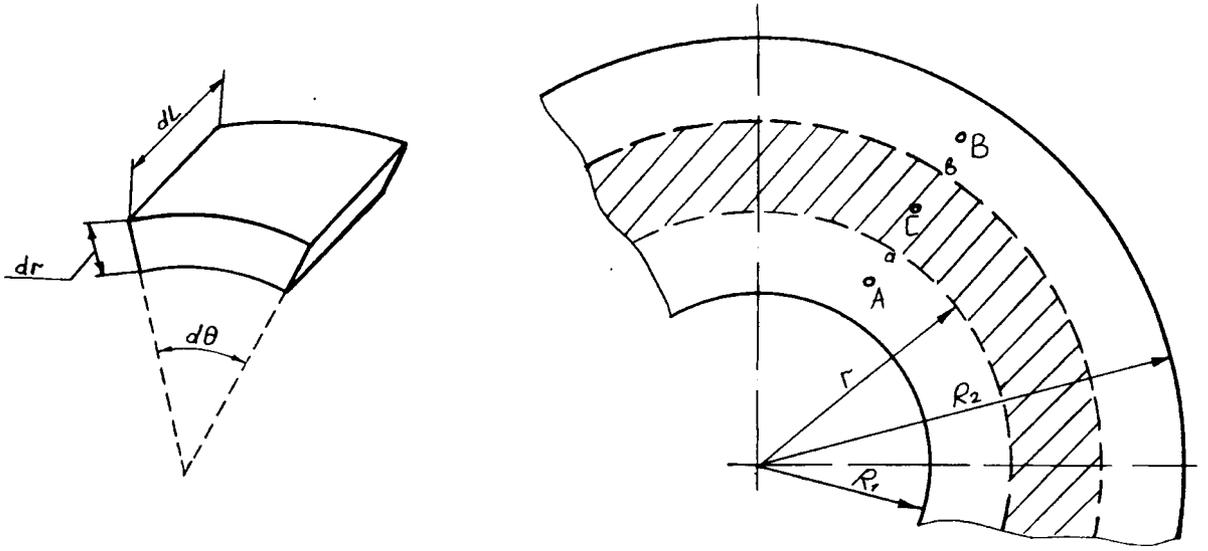


Рис. 1. Контрольная поверхность и контрольный объем.

Установим в качестве пределов интегрирования контрольного объема его границы a и b , т.е. $\int_a^b \frac{d}{dr} \left(r\lambda \frac{dT}{dr} \right) dr + \int_a^b S r dr = 0$. После интегрирования получим:

$$\left(r\lambda \frac{dT}{dr} \right)_b - \left(r\lambda \frac{dT}{dr} \right)_a + \frac{1}{2} \bar{S} (r_b^2 - r_a^2) = 0. \quad (4)$$

Величину \bar{S} , которая представляет собой среднее по объему значение источникового члена, представим в виде постоянной и линейно изменяемой части:

$$\bar{S} = S_0 + S_C T_C. \quad (5)$$

Задавшись линейным профилем распределения температуры между точками A и C , C и B , представим производные в виде следующих конечных разностей:

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_b = \frac{T_B - T_C}{\delta r_b}, \quad \left(\frac{dT}{dr} \right)_a = \frac{T_C - T_A}{\delta r_a}. \quad (6)$$

Тогда исходное уравнение можно записать как:

$$\lambda_b r_b \frac{T_B - T_C}{\delta r_b} - \lambda_a r_a \frac{T_C - T_A}{\delta r_a} + \frac{1}{2} (S_0 + S_C T_C) (r_b^2 - r_a^2) = 0, \text{ или, после при-}$$

ведения подобных членов:

$$\left(\frac{\lambda_b r_b}{\delta r_b} - \frac{\lambda_a r_a}{\delta r_a} - \frac{1}{2} S_C (r_b^2 - r_a^2) \right) T_C = \frac{\lambda_b r_b}{\delta r_b} T_B + \frac{\lambda_a r_a}{\delta r_a} T_A + \frac{1}{2} S_0 (r_b^2 - r_a^2). \quad (7)$$

Обозначив:

$$a_B = \frac{\lambda_b r_b}{\delta r_b}, \quad a_A = \frac{\lambda_a r_a}{\delta r_a}, \quad b = \frac{1}{2} S_0 (r_b^2 - r_a^2), \quad a_C = a_A + a_B - \frac{1}{2} S_0 (r_b^2 - r_a^2),$$

получим искомое алгебраическое уравнение, которое является дискретным аналогом дифференциального уравнения теплопроводности (1):

$$a_C \dot{T}_C = a_A T_A + a_B T_B + b. \quad (8)$$

Рассмотрим случай, когда внутренние источники тепла отсутствуют ($S=0$), а коэффициент теплопроводности материала $\lambda = l$. Тогда уравнение (7) примет следующий вид:

$$\left(\frac{r_b}{\delta r_b} + \frac{r_a}{\delta r_a} \right) T_P = \frac{r_b}{\delta r_b} T_B + \frac{r_a}{\delta r_a} T_A. \quad (9)$$

Разобьем контрольную область на n контрольных объемов. Отметим только, что границы контрольных объемов находятся посередине между узлами конечно-разностной сетки.

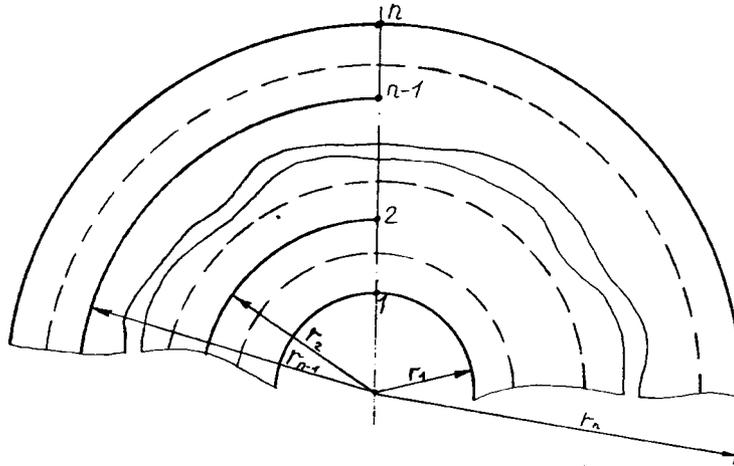


Рис. 2. Расчетная схема.

Поскольку $r_n = R_2$, а $r_1 = R_1$, то шаг между узлами сетки равен:

$$\Delta r = \frac{r_n - r_1}{n - 1} = \frac{R_2 - R_1}{n - 1}.$$

Величина радиуса узла № 2: $r_2 = r_1 + \Delta r = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{n - 1} = \frac{R_2 + R_1(n - 2)}{n - 1}$,

для узла № 3: $r_3 = r_2 + \Delta r = \frac{R_2 + R_1(n - 2)}{n - 1} + \frac{R_2 - R_1}{n - 1} = \frac{2R_2 + R_1(n - 3)}{n - 1}$,

для i -го узла:

$$r_i = r_{i-1} + \Delta r = \frac{(i - 1)R_2 + (n - i)R_1}{n - 1}, \quad i \leq n. \quad (10)$$

Для i -го узла сетки уравнение (9) может быть записано в виде:

$$\left(\frac{r_{i+1} + r_i}{2(r_{i+1} - r_i)} + \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})} \right) T_i = \frac{r_{i+1} + r_i}{2(r_{i+1} - r_i)} T_{i+1} + \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})} T_{i-1}, \quad (11)$$

где $\frac{r_b}{\delta r_b} = \frac{r_{i+1} + r_i}{2(r_{i+1} - r_i)}$, $\frac{r_a}{\delta r_a} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})}$.

Обозначив коэффициенты:

$$a_i = \frac{r_{i+1} + r_i}{2(r_{i+1} - r_i)} + \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})}, \quad b_i = \frac{r_{i+1} + r_i}{2(r_{i+1} - r_i)}, \quad c_i = \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})}, \quad (12)$$

получим уравнение в следующем виде:

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1}. \quad (13)$$

Таким образом, можно получить систему $(n-2)$ алгебраических уравнений, которая будет содержать n значений температур в соответствующих узлах сетки. Т.к. $T_1 = T_{R_1}, T_n = T_{R_2}$ известны из граничных условий, то могут быть определены искомые значения температур T_2, T_3, \dots, T_{n-1} в узлах.

На основании предложенной методики с использованием языка программирования Visual Basic разработана специальная программа, позволяющая проводить расчет температур в произвольной точке цилиндра. Пользователю необходимо лишь для заданной числом узлов n точности ввести размеры цилиндра и температуры на наружной и внутренней поверхностях. Диалоговое окно программы представлено на рис.3.

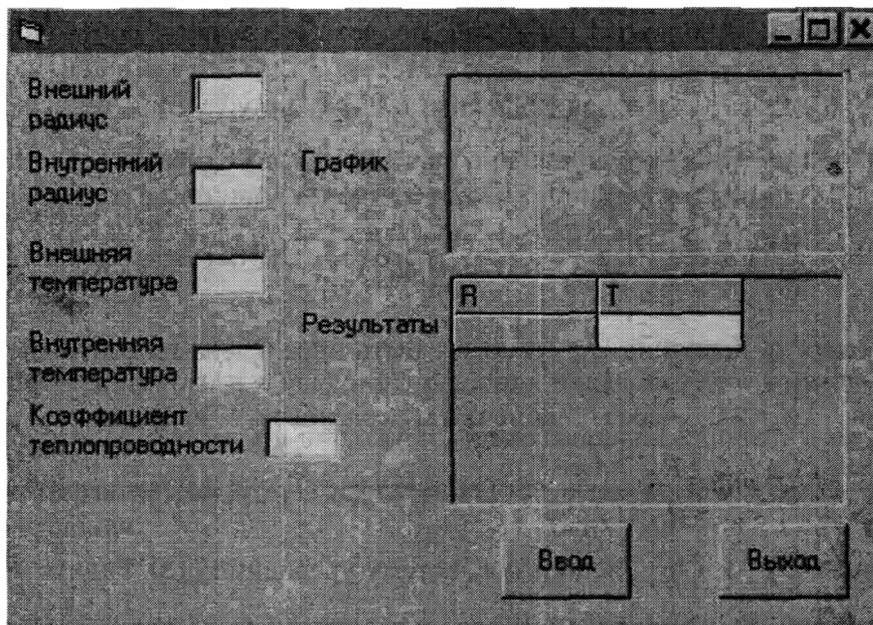


Рис. 3.- Диалоговое окно программы.

Разработанная программа позволяет получать график зависимости температуры от координаты по толщине стенки.

Полученные результаты сравнивались с результатами аналитического решения. Точное решение получается путем двойного интегрирования дифференциального уравнения (1), которое при $S=0$ и $\lambda = 1$ принимает вид:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0. \quad (14)$$

После двойного интегрирования получаем решение: $T = C_1 \ln r + C_2$. Для нахождения постоянных интегрирования C_1 и C_2 применим граничные условия: при $r = R_1: T = T_{R_1}$, $r = R_2: T = T_{R_2}$. Отсюда находим: $C_1 = \frac{T_{R_2} - T_{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$, и уравнение температурного поля примет вид:

$$T = T_{R_1} + \frac{T_{R_2} - T_{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1}. \quad (15)$$

Уравнение (15) позволяет аналитически определять температуру в любой точке цилиндра в зависимости от координаты.

Определим далее тепловые потери и покажем, что тепловой баланс соответствует тепловому балансу точного решения.

Поскольку количество теплоты Q , покидающее внешнюю поверхность контрольного объема вокруг точки $n-1$, равно количеству теплоты, проходящему через наружную поверхность цилиндра, то $Q = q_{R_2} F_{R_2} = q_{n-1} F_{n-1}$, где q_{R_2} - плотность теплового потока на внешней поверхности цилиндра радиусом R_2 , q_{n-1} - плотность теплового потока на внешней поверхности контрольного объема, построенного вокруг точки $n-1$, радиусом $\frac{r_{n-1} + r_n}{2}$. Поэтому

$$q_{R_2} = q_{n-1} \frac{F_{n-1}}{F_{R_2}} = \frac{2\pi l \frac{r_{n-1} + R_2}{2}}{2\pi l R_2} q_{n-1} = \frac{r_{n-1} + R_2}{2R_2} q_{n-1}. \quad (16)$$

В свою очередь величина q_{n-1} может быть определена из соотношения $q = -\lambda \frac{dT}{dr}$, которое при $\lambda = 1$ через конечные разности приводится к выражению: $q_{n-1} = -\frac{T_n - T_{n-1}}{r_n - r_{n-1}} = -\frac{T_{R_2} - T_{n-1}}{R_2 - r_{n-1}}$. Температуру T_{n-1} можно выразить через температуры на границах \dot{O}_{R_1} и \dot{O}_{R_2} , используя систему уравнений (13). Радиус R_{n-1} определяется через внутренний R_1 и наружный R_2 радиусы цилиндра по формуле (10). Таким образом, через размеры цилиндра и граничные значения температур можно получить зависимость теплового потока q_{R_2} , а затем из соотношения $Q = 2\pi R_2 l q_{R_2}$ и количество теплоты Q , проходящее через наружную поверхность.

Аналогичные зависимости можно получить аналитически. Для этого величину Q можно найти из выражения:

$$Q = -2\pi r l \cdot \lambda \frac{dT}{dr}. \quad (17)$$

Дифференцируя выражение (13) по координате, находим:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_{R_2} - T_{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r}. \quad (18)$$

Подставим (18) в (17):

$$Q = -2\pi l \frac{T_{R_2} - T_{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = 2\pi l \frac{T_{R_1} - T_{R_2}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (19)$$

Численный пример. Рассмотрим решение задачи на примере грубой конечно-разностной сетки, т.е. для 5 контрольных объемов. Примем также $R_2=50$ см, $R_1=10$ см. Шаг сетки $\Delta r = 10$ см, радиусы улов 2, 3 и 4 равны соответственно 20, 30 и 40 см. Определив коэффициенты $a_i, b_i, c_i, i=2...4$, представим систему уравнений (13) в следующем виде:

$$4T_2 - 2,5T_3 - 1,5T_1 = 0;$$

$$6T_3 - 3,5T_4 - 2,5T_2 = 0;$$

$$8T_4 - 4,5T_5 - 3,5T_3 = 0.$$

Учитывая, что $T_1 = T_{R_1}$, $T_5 = T_{R_2}$, определим искомые величины T_2, T_3 и T_4 :

$$T_2 = 0,577T_{R_1} + 0,423T_{R_2};$$

$$T_3 = 0,323T_{R_1} + 0,677T_{R_2}; \quad (20)$$

$$T_4 = 0,142T_{R_1} + 0,858T_{R_2}.$$

Определим с использованием аналитического решения значение температуры в узле 3 радиусом 30 см. Для этого подставим исходные данные примера в формулу (19):

$$T = T_{R_1} + \frac{T_{R_2} - T_{R_1}}{\ln \frac{50}{10}} \ln \frac{30}{10} = 0,317T_{R_1} + 0,683T_{R_2}.$$

Сравнение аналитического и численного решения показывает их хорошее совпадение. Например, при $T_{R_1} = 100^\circ\text{C}$ и $T_{R_2} = 200^\circ\text{C}$ относительная ошибка в определении T_2 составляет 0,4 %. Приведенный ниже график более наглядно демонстрирует высокую точность численного решения.

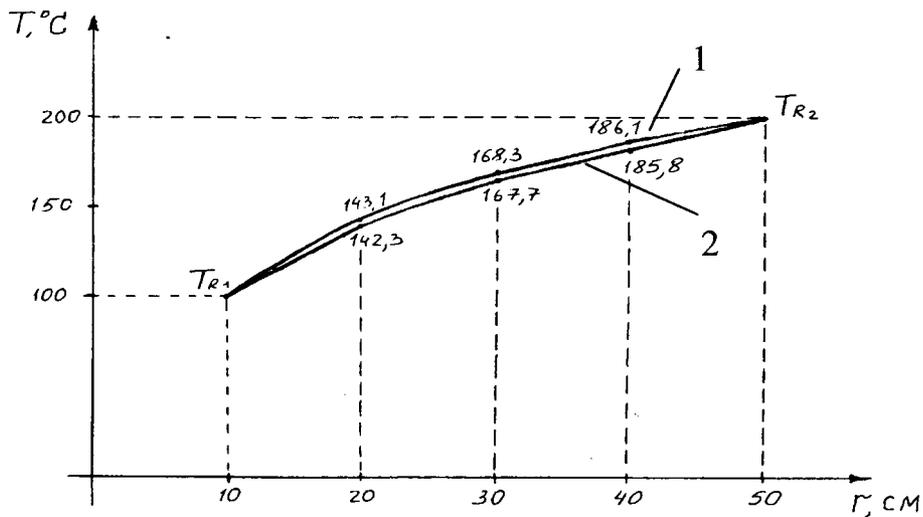


Рис. 4. График зависимости температуры от координаты:
1 – аналитическое решение;
2 – решение с помощью метода конечных разностей.

Определим на данном примере удельный тепловой поток на внешней поверхности.

Сначала находим плотность теплового потока q_{R_1} : $q_{R_2} = \frac{r_4 + R_2}{2R_2} q_4$, где

$q_4 = -\frac{T_{R_2} - T_4}{R_2 - r_4}$. Выражая T_4 через \dot{Q}_{R_1} и \dot{Q}_{R_2} из соотношения (20), находим:

$$q_{R_2} = -\frac{r_4 + R_2}{2R_2} \cdot \frac{0,142 \cdot (T_{R_2} - T_{R_1})}{R_2 - r_4} = \frac{40 + 50}{2 \cdot 50} \cdot \frac{0,142 \cdot (T_{R_1} - T_{R_2})}{50 - 40} = 0,0128 \cdot (T_{R_1} - T_{R_2})$$

Тогда количество теплоты Q , проходящее через наружную поверхность цилиндра:

$$Q = 2\pi R_2 l q_{R_2} = 2\pi l \cdot 0,640 (T_{R_1} - T_{R_2}). \quad (21)$$

Учитывая (19), находим величину Q аналитически:

$$Q = 2\pi l \frac{T_{R_1} - T_{R_2}}{\ln \frac{50}{10}} = 2\pi l \cdot 0,621 (T_{R_1} - T_{R_2}). \quad (22)$$

Величина относительной ошибки в определении тепловых потерь не превышает 3 %, поэтому общий тепловой баланс приближенного решения достаточно соответствует точному результату.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967 г.
2. Теория тепломассообмена. / Под ред. А.И.Леонтьева. - М.: Высшая школа, 1979. - 495 с.
3. Б.Н. Юдаев. Теплопередача. - М.: Высшая школа, 1981. - 319 с.
4. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. Коздоба Л.А. - М.: Наука.- 1975 г.

ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ БУССИНЕСКА В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Ершов В.И.

This work contains development of solution of the problems of theory of elasticity in curvilinear coordinates for displacement. For accurate solution of system of differential equations it is necessary to receive all equations for the same system for Euler's coordinates.

Развиваются основные положения работы автора [1] на примере определения перемещений в задаче Буссинеска в переменных Эйлера.

Задачи Фламана и Буссинеска, содержащие бесконечность в постановочной части, не могут быть решены исчерпывающим образом в принципе. Предлагается решение системы дифференциальных уравнений этой задачи в однородном базисе Эйлера в предположении, что бесконечное полупространство заменяется полупространством большого радиуса $R=N$. При формировании уравнений в задачах механики деформируемого твердого тела следует выполнить два важнейших требования:

1. Все выражения должны быть записаны для деформированного состояния в рассматриваемой точке (в любых системах координат и в любых системах отсчета).
2. Все члены системы уравнений следует перевести в однородный базис.

Такой подход есть естественный и необходимый этап познания задач МДГТ. Основная сложность задачи состоит в том, что геометрические соотношения записаны в переменных Лагранжа (вывод сделан для деформированного состояния в переменных Лагранжа), а формулы для напряжений – в переменных Эйлера (постоянная, входящая в выражения для напряжений, тоже должна определяться для деформированного состояния; в противном случае получим непреодолимое методологическое противоречие: деформации получены для деформируемого тела, а напряжения – для абсолютно жесткого), что требует при формировании исходных дифференциальных уравнений перехода к однородному базису. Необходимо все дифференциальные уравнения представить в переменных Эйлера с учетом теоремы об изменении первой производной по криволинейной координате при переходе от переменных Лагранжа к переменным Эйлера.

Выражения для компонент тензора деформаций в сферических координатах:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RR} &= \frac{\partial u_R}{\partial R}; \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_R}{R} + \operatorname{ctg} \theta \frac{u_\theta}{R}; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_R}{R}; \\ \varepsilon_{R\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{R} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} \right); \\ \varepsilon_{R\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} \right); \\ \varepsilon_{\varphi\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\varphi}{R} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right).\end{aligned}$$

Формулы для напряжений, полученные Буссинеском, имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (P/2\pi \check{R}^2)[1-2\mu-(4-2\mu)\cdot\cos\theta]; \\ \sigma_\theta &= (1-2\mu) (P/2\pi \check{R}^2) \cos^2\theta / (1+\cos\theta); \\ \sigma_\varphi &= (1-2\mu)(P/2\pi \check{R}^2)(\cos\theta-\sin^2\theta)/(1+\cos\theta); \\ \sigma_{R\theta} &= (1-2\mu)(P/2\pi \check{R}^2) \sin\theta\cdot\cos\theta / (1+\cos\theta); \\ \sigma_{R\varphi} &= 0; \sigma_{\varphi\theta} = 0.\end{aligned}$$

Где \check{R} -переменная Эйлера (далее символ «тильда» опущен).

В силу осевой симметрии для перемещений имеем:

$$u_\varphi=0; u_R = u_R(R,\theta); u_\theta=u_\theta(R,\theta).$$

Тогда в однородном базисе для переменных Эйлера, принимая при малых перемещениях связь между производными по криволинейной координате в переменных Эйлера и в переменных Лагранжа в соответствии с работой [1]

$$\partial U_\theta (S+ U_\theta)/\partial S=\partial U(S)/\partial S + U_\theta/R ,$$

$$\partial U_R (S+ U_\theta)/\partial S=\partial U_R(S)/\partial S + U_\theta/R ,$$

где криволинейная координата $S=\theta R$, будем иметь:

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial R}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_R}{R} + \operatorname{ctg}\theta \frac{u_\theta}{R}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R} + \frac{u_R}{R}; \quad (3)$$

$$\gamma_{R\theta} = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - 2 \frac{u_\theta}{R} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} \right); \quad (4)$$

Определяя деформации в соответствии с обобщенным законом Гука., будем иметь после интегрирования геометрического уравнения (1):

$$u_R = -\frac{P}{2E\pi R} \left[1-2\mu-(4-2\mu)\cos\theta - \mu(1-2\mu) \frac{\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta}{1+\cos\theta} \right] + F(\theta).$$

В соответствии с принятой расчетной схемой функция определяется из того условия, что при $R=H$ радиальные перемещения для всех точек отсутствуют:

$$u_R(R=H) = 0$$

Пользуясь этим условием, получим выражение для функции $F(\theta)$:

$$F(\theta) = \frac{P}{2E\pi H} \left[1-2\mu-(4-2\mu)\cos\theta - \mu(1-2\mu) \frac{\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta}{1+\cos\theta} \right].$$

С учетом полученного результата окончательно имеем следующее выражения для функции радиальных перемещений:

$$u_R = \frac{P}{2E\pi} \left[1 - 2\mu - (4 - 2\mu)\cos\theta - \mu(1 - 2\mu) \frac{\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + \cos\theta} \right] \frac{R - H}{RH}.$$

Исключаем из уравнений (2), (3) функцию радиальных перемещений u_R :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + (-1 - \operatorname{ctg}\theta) \frac{u_\theta}{R} = \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\varphi\varphi} \quad (5)$$

Правая часть имеет вид:

$$\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\varphi\varphi} = (1 + \mu)(1 - 2\mu) \frac{(P/2\pi R^2 E)(1 - \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)}.$$

Подставляя полученную разность линейных деформаций в уравнение (5), получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + P(\theta)u_\theta = Q(\theta).$$

Для правой части в этом уравнении принято следующее выражение:

$$Q(\theta) = R(\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) = (1 + \mu)(1 - 2\mu) \frac{(P/2\pi RE)(1 - \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{1 - \cos^2\theta}{(1 + \cos\theta)^2} = \frac{\sin^2\theta}{(1 + \cos\theta)^2},$$

можем записать удобное в дальнейшем выражение:

$$Q(\theta) = R(\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) = (1 + \mu)(1 - 2\mu) \frac{(P/2\pi RE) \sin^2\theta}{(1 + \cos\theta)^2}.$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$u_\theta(\theta) = \left[\int d\theta Q(\theta) e^{\int P(\theta) d\theta} + C_1 \right] e^{-\int P(\theta) d\theta}$$

Найдем интегралы, зависящие от функции

$$P(\theta) = -1 - \operatorname{ctg}\theta:$$

$$\int P(\theta) d\theta = -\int (1 + \operatorname{ctg}\theta) d\theta = -\theta - \ln \sin \theta,$$

$$\int -P(\theta) d\theta = \int (1 + \operatorname{ctg}\theta) d\theta = \theta + \ln \sin \theta.$$

Определяем соответствующие экспоненты:

$$e^{P(\theta)d\theta} = e^{-\theta - \ln \sin \theta} = \frac{e^{-\theta}}{e^{\ln \sin \theta}} = \frac{e^{-\theta}}{\sin \theta};$$

$$e^{-P(\theta)d\theta} = e^{\theta + \ln \sin \theta} = e^\theta \sin \theta.$$

Тогда решение будем искать в таком виде:

$$u_\theta(\theta) = \left[\int d\theta Q(\theta) \frac{e^{-\theta}}{\sin \theta} + C_1 \right] e^\theta \sin \theta$$

Вычислим интеграл, играющий исключительную роль при записи искомого решения:

$$I_4(\theta) = e^\theta \int e^{-\theta} \frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta. \quad (6)$$

Множественно используя процедуру интегрирования по частям, каждый раз, принимая в качестве функции $U = e^{-\theta}$ и $dU = -e^{-\theta} d\theta$, за пределами интеграла будем иметь равное единице произведение функции e^{θ} на функцию $e^{-\theta}$, которое сразу же опустим.

В первой попытке принимаем:

$$dV = \frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta;$$

$$V = \frac{1}{(1 + \cos \theta)}.$$

Тогда

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta} - e^{\theta} \int -e^{-\theta} \frac{1}{1 + \cos \theta} d\theta.$$

Во второй попытке принимаем

$$dV = \frac{1}{1 + \cos \theta} d\theta;$$

$$V = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Искомый интеграл примет следующий вид:

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta} + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - e^{\theta} \int -e^{-\theta} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta.$$

В третьей попытке:

$$dV = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta;$$

$$V = -2 \ln \cos \frac{\theta}{2};$$

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta} + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} - e^{\theta} \int -e^{-\theta} \left(-2 \ln \cos \frac{\theta}{2} \right) d\theta.$$

Четвертая попытка:

$$dV = -2 \ln \cos \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Осуществим замену переменной:

$$\theta/2 = x; d\theta = 2dx; dV = -4 \ln \cos x dx.$$

Вспользуемся табличным интегралом, предполагающим использование функциональных рядов:

$$\int \ln \cos x = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \dots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n+1)!} x^{2n+1} - \dots - *.,$$

где: -числа натурального ряда; B_n -первые числа Бернулли.

Возвращаясь к переменной θ , будем иметь:

$$V = -2 \int \ln \cos \frac{\theta}{2} d\theta = -4 \left[\frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^3}{6} - \frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^5}{60} - \frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^7}{315} - \dots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n+1)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n+1} - \dots - * \right] (7)$$

Искомый вспомогательный интеграл имеет вид:

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta} + tg \frac{\theta}{2} - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} - 4 \left[\sum_{n=1} \frac{2^{2n-1} (2^{2n} - 1) B_n \left(\frac{\theta}{2} \right)^{2n+1}}{n(2n+1)!} \right] +$$

$$+ e^\theta \int e^{-\theta} \left\{ -4 \left[\sum_{n=1} \frac{2^{2n-1} (2^{2n} - 1) B_n \left(\frac{\theta}{2} \right)^{2n+1}}{n(2n+1)!} \right] \right\} d\theta.$$

В этом интеграле присутствует функциональный ряд, что позволяет вычислить интеграл при любом n с использованием процедуры интегрирования по частям, но в этом случае роль функции V всегда будет играть функция $e^{-\theta}$. Это означает, что в искомом решении функциональный ряд в четвертой попытке будет умножаться на $(+e^{-\theta})$, а в пятой-на $(-e^{-\theta})$. После суммирования функциональный ряд удаляется из решения, а под знаком интеграла останется его производная:

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta} + tg \frac{\theta}{2} - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} + e^\theta \int e^{-\theta} \frac{d}{d\theta} \left\{ -4 \left[\sum_{n=1} \frac{2^{2n-1} (2^{2n} - 1) B_n \left(\frac{\theta}{2} \right)^{2n+1}}{n(2n+1)!} \right] \right\} d\theta.$$

Окончательный вид вспомогательного интеграла:

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta} + tg \frac{\theta}{2} - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} + e^\theta \int e^{-\theta} \left\{ -2 \left[\sum_{n=1} \frac{2^{2n-1} (2^{2n} - 1) B_n \left(\frac{\theta}{2} \right)^{2n}}{n(2n)!} \right] \right\} d\theta \quad (8)$$

Задача существенно упрощается, если принять во внимание, что область определения искомых функций перемещений для переменной θ лежит в таких пределах:

$$0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Это означает, что в функциональном ряду в нечетную степень возводится величина, меньшая $\pi/4$, и потому второй член составляет от первого меньше 5%, а третий от первого-гораздо меньше одного процента. Рассмотрим частный случай, сохраняя в (7) первый член функционального ряда в выражении для вспомогательного интеграла:

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta} + tg \frac{\theta}{2} - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} - \frac{2}{3} \left(-\frac{\theta}{2} \right)^3 + e^\theta \int e^{-\theta} \left[-\frac{2}{3} \left(-\frac{\theta}{2} \right)^3 \right] d\theta.$$

В пятой попытке интегрирования по частям имеем:

$$dU = e^{-\theta} d\theta;$$

$$U = -e^{-\theta};$$

$$V = \frac{\theta^3}{12};$$

$$dV = \frac{\theta^2}{4}.$$

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta} + tg \frac{\theta}{2} - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} - \frac{2}{3} \left(-\frac{\theta}{2} \right)^3 - \frac{\theta^3}{12} + e^\theta \int e^{-\theta} \frac{\theta^2}{4} d\theta. \quad (9)$$

Последний интеграл является табличным. Окончательно для рассматриваемого частного случая получим:

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta} + tg \frac{\theta}{2} - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} (-\theta^2 - 2\theta - 2).$$

Непосредственные вычисления по (8) сразу приводят к табличному интегралу:

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta} + tg \frac{\theta}{2} - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} + e^\theta \int e^{-\theta} \frac{\theta^2}{4} d\theta$$

Решение для функции меридиональных перемещений:

$$u_{\theta} = (1 + \mu)(1 - 2\mu) (P/2\pi RE) [I_4(\theta) \sin \theta + C_1 e^{\theta} \sin \theta]. \quad (10)$$

Функция C_1 переменной R может быть найдена из дифференциального уравнения для деформации сдвига, которое после подстановки в него u_R , u_{θ} примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dR} - 2\frac{1}{R}C_1 &= \Phi(R, \theta); \\ P(R) &= -2/R; \\ \Phi(R, \theta) &= \frac{Pe^{-\theta}}{\pi ER^2} \left[(1 + \mu)(1 - 2\mu) \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{3(1 - 2\mu)}{2} I_4(\theta) + 2(1 - \mu^2) \right] - \frac{2Pe^{-\theta}}{\pi ER} \frac{1 - \mu^2}{H}. \end{aligned} \quad (11)$$

Вновь полученное линейное дифференциальное уравнение имеет следующий интеграл (рассматриваются уравнения в частных производных и поэтому переменная θ не указана):

$$C_1(R) = \left[\int dR \Phi(R) e^{\int P(R) dR} + C_2 \right] e^{-\int P(R) dR}$$

Находим показатели степени и показательные функции:

$$\begin{aligned} \int P(R) dR &= \int -\frac{2}{R} dR = -2 \ln R = \ln R^{-2}; \quad e^{\int P(R) dR} = \frac{1}{R^2}; \\ \int -P(R) dR &= \int \frac{2}{R} dR = 2 \ln R = \ln R^2; \quad e^{\int -P(R) dR} = R^2. \end{aligned}$$

С учетом полученных результатов решение ищем в таком виде:

$$C_1(R) = \left[\int \Phi(R) \frac{1}{R^2} dR + C_2 \right] R^2$$

Для меридиональных перемещений будем иметь:

$$\begin{aligned} u_{\theta} &= (1 - 2\mu) \frac{P}{2\pi ER} I_4(\theta) \sin \theta - \frac{P}{3\pi ER} \left[(1 + \mu)(1 - 2\mu) \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{3(1 - 2\mu)}{2} I_4(\theta) + 2(1 - \mu^2) \right] \sin \theta + \\ &+ \frac{P}{\pi E} \frac{1 - \mu^2}{H} \sin \theta + C_2 R^2 \sin \theta e^{\theta}. \end{aligned}$$

Постоянную C_2 определяем из условия $u_{\theta}(R=H, \theta=\pi/2)=0$:

$$C_2 = \frac{2Pe^{\pi/2}}{\pi EH^3} \left[(1 - \mu^2) - (1 - 2\mu) I_4(\theta = \pi/2) \right]$$

Для точек горизонтальной поверхности получим:

$$\begin{aligned} u_{\theta}(\theta = \pi/2) &= (1 - 2\mu) \frac{P}{2\pi ER} I_4(\theta = \pi/2) - \frac{P}{3\pi ER} \left[\frac{3(1 - 2\mu)}{2} I_4(\theta = \pi/2) + 2(1 - \mu^2) \right] + \\ &+ \frac{P}{\pi E} \frac{1 - \mu^2}{H} + C_2 R^2 e^{\pi/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

ЛИТЕРАТУРА

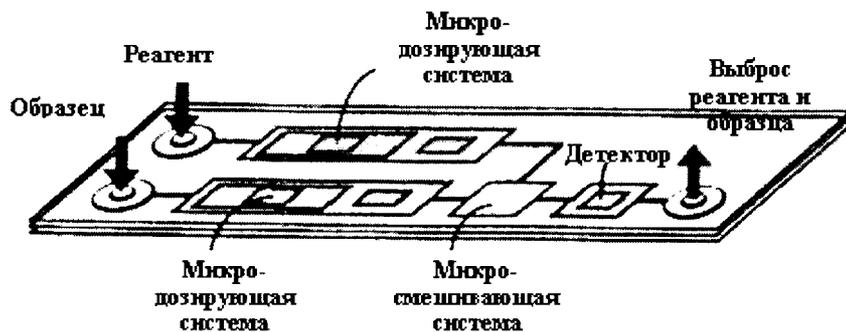
1. Ершов В.И. Формирование и решение системы дифференциальных уравнений в задаче Фламана в однородном базисе. // Теоретическая и прикладная механика. Межведомственный сборник научно-методических статей. - 2006. - №20. - С. 131-133.

СЕНСОРНЫЕ МОЛЕКУЛЯРНЫЕ МИКРОАНАЛИЗАТОРЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВЕЩЕСТВ

Колешко В.М., Чашинский А.С., Хмурович Н.В.

Results of research and modeling of adsorption-sensory interactions of carbon nanomaterial with dangerous gases and explosive materials are submitted. The design of laboratory on a chip is described.

Использование достижений микро- нанотехнологий и наноконструкций позволяет проектировать «лаборатории на чипе» (lab on a chip) по обнаружению и анализу сверхмалых количеств различных веществ. Адсорбция молекулы распознаваемого вещества к сенсору – рецептору выявляется электрическим, акустическим, оптическим и др. способами [1-3]. На одном микрочипе могут быть размещены многомерные сенсоры для определения многих тысяч веществ. На рис. 1 представлена схема «лаборатории на чипе». Такие «сенсорные лаборатории на микрочипе» способны обнаруживать отдельные молекулы, например, для определения последовательности оснований полинуклеотидов или аминокислот для целей идентификации, выявления генетических или онкологических инфекционных заболеваний, взрывчатых, наркотических, психотропных и отравляющих веществ [4]. Такими сенсорными микрочипами можно определить качество окружающей среды, качество продуктов питания и экологию одежды человека. Сенсорное микроустройство размером 4-5 мм может быть помещено на поверхности кожи (для анализа веществ, выделяемых с потом) или внутри организма (желудочно-кишечный тракт, под кожу или в мышцу), при этом оно сможет на расстоянии без проводов (RFID-система) сообщать о состоянии и идентифицировать отклонения от нормы.



Дозировочная система

Подача образца и реагента и передвижение через систему

Смешивающая система

Смешивание образца и реагента

Каталитические, ферментные или эндотермические реакции

Система обнаружения

Электрические свойства (Проводимость и т.д.)

Оптические свойства (Поглощение, флуоресценция и т.д.)

Физические свойства (Температура, поверхностное напряжение и т.д.)

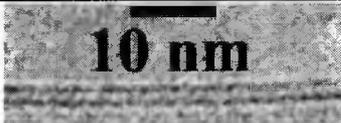
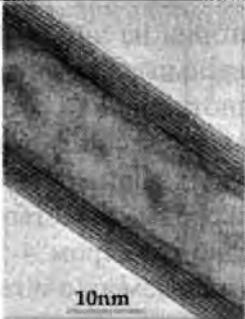
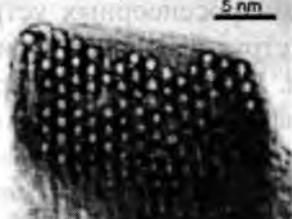
Рис. 1. Структурная схема «лаборатории на чипе»

В настоящее время большой интерес вызывает использование наноструктурированных материалов в качестве чувствительных элементов микросенсорных устройств, в частности углеродные нанотрубки. Углеродные нанотрубки – структуры, состоящие из свернутых гексагональных сеток с атомами углерода в узлах (табл. 1). Эта форма углерода по своей структуре занимает промежуточное положение между графитом и фуллереном. Свойства углеродных нанотрубок не имеют ничего общего ни с одним из указанных материалов. Большая площадь поверхности, доступная для адсорбции различных газов и веществ, сверхминиа-

торные размеры, хорошая электропроводность, высокие эмиссионные характеристики, высокая химическая стабильность при существующей пористости, высокая чувствительность свойств углеродного материала к сорбированным на их поверхности молекулам и радикалам дает возможность создания на основе углеродных нанотрубок высокочувствительных сверхминиатюрных сенсоров для контроля опасных веществ в атмосфере (H_2 , O_2 , CO и т.д.).

Таблица 1

Виды углеродных нанотрубок

Фото	Название	Ссылки
	Одностенная углеродная нанотрубка	[5]
	Многостенная углеродная нанотрубка	[6]
	Нановолокно из углеродных нанотрубок	[7]
	Углеродные наноструктурные башни	[8]
	Многостенная углеродная наноструктурная башня	[8]
	Лес из массива углеродных нанотрубок	[7]
	Пучок углеродных нанотрубок	[9]

Метод исследования. При моделировании адсорбционных свойств ОНТ использовался метод молекулярной динамики (ММД), суть которого состоит в решении систем уравнений Ньютона для множества атомов.

Классический ММД описывает динамику систем атомного масштаба, где атомы и молекулы движутся, взаимодействуя с многими атомами и молекулами вблизи себя. Развитие динамических систем определяется классическим уравнением движения Гамильтона из второго закона Ньютона:

$$M_i \times d^2 R_i / dt^2 = F_i(\{R_i\}) = -dV / dR_i \quad (1)$$

Каждый атом движется как частица в силовом поле подобных частиц, $F(\{R_i\})$, которое мы можем получить из более точных квантовых вычислений. Атомные и молекулярные взаимодействия описываются в динамике в соответствии с классическими функциями силовых полей многих тел, и мы можем записать функцию энергии атомного взаимодействия $V(\{R_i\})$ через элементы парного взаимодействия и взаимодействия нескольких тел, которое зависит от относительного расстояния между различными атомами. Атомные силы – это производные функций энергии взаимодействия: $F_i(\{R_i\}) = -dV / dR_i$, и используются для создания классических уравнений движения Гамильтона, которые являются простыми дифференциальными уравнениями второго порядка.

Мы используем потенциал Бреннера для описания атомных взаимосвязей в водород- и углерод-содержащих системах для численного описания углеродных нанотрубок. Главный отличительный признак потенциала Бреннера это то, что близкодействующие взаимодействия химически активны, так что химические связи могут образовываться и разрушаться во время моделирования. Однако вычислительные затраты таких взаимодействий относительно высоки по сравнению с затратами для потенциалов с химически не активными взаимодействиями, которые имеют более простые функциональные уравнения.

Потенциал Бреннера определяется как:

$$V^B = \sum_i \sum_{j>i} [V_R(r_{ij}) - \bar{B}_{ij} V_A(r_{ij})] \quad (2)$$

где r_{ij} – расстояние между атомами i и j , V_R и V_A описывают отталкивающую и притягивающую часть попарно связывающего потенциала, соответственно, вычисляющиеся в виде:

$$V_R(r_{ij}) = f_{ij}(r_{ij}) \frac{D^e S}{S-1} \times \exp \left[-\sqrt{2S} \beta (r - R^e) \right] \quad (3)$$

и

$$V_A(r_{ij}) = f_{ij}(r_{ij}) \frac{D^e S}{S-1} \times \exp \left[-\sqrt{\frac{2}{S}} \beta (r_{ij} - R^e) \right] \quad (4)$$

в которых $f_{ij}(r_{ij})$ - функция, которая явно ограничивает взаимодействие с близлежащими соседями. $f_{ij}(r_{ij})$ задается кусочно-непрерывной функцией:

$$f_{ij}(r_{ij}) = \begin{cases} 1, r \leq R^{(1)} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left[\frac{\pi (r - R^{(1)})}{R^{(2)} - R^{(1)}} \right], R^{(1)} < r < R^{(2)} \\ 0, r \geq R^{(2)} \end{cases} \quad (5)$$

где D^e , S , β и R^e т.д., набор параметров.

\bar{B}_{ij} в (2) - порядок связи между атомами i и j , который представляет условие взаимодействия с каждым атомом в зависимости от локальной координации и угла связи между атомами i и j , соответственно, вычисляющийся как

$$\bar{B}_{ij} = (B_{ij} + B_{ji})/2 + F_{ij}(N_i, N_j, N_{ij}^{conj})/2 \quad (6)$$

$$B_{ij} = \left(1 + \sum_{k \neq (i,j)} (G_c(\theta_{ijk}) f_{ik}(r_{ik})) \right)^{-\delta} \quad (7)$$

$$G_c(\theta_{ijk}) = a_0 \left(1 + \frac{c_0^2}{d_0^2} - \frac{c_0^2}{d_0^2 + (1 + \cos \theta_{ijk})^2} \right) \quad (8)$$

где θ_{ijk} - угол связи между атомами i и j и атомами i и k . $F_{ij}(N_i, N_j, N_{ij}^{conj})$ поправка к \bar{B}_{ij} , в котором N_i и N_j представляют номер атома углерода, который граничит с атомами i и j , соответственно.

$$N_i = \sum_{k \neq j} f_{ik}(r_{ik}), \quad N_j = \sum_{k \neq i} f_{jk}(r_{jk}) \quad (9)$$

N_{ij}^{conj} показывает, является ли связь частью парной системы, и задается в виде:

$$N_{ij}^{conj} = 1 + \sum_{k \neq (i,j)} f_{ik}(r_{ik}) F(x_{ik}) + \sum_{l \neq (i,j)} f_{jl}(r_{jl}) F(x_{jl}) \quad (10)$$

$$F(x_{ik}) = \begin{cases} 1, & x_{ik} \leq 2 \\ (1 + \cos(\pi(x_{ik} - 2))) / 2, & 2 < x_{ik} < 3 \\ 0, & x_{ik} \geq 3 \end{cases} \quad (11)$$

$$x_{ik} = \sum_{m \neq i} f_{mk}(r_{mk}) \quad (12)$$

Значения параметра потенциала приводятся в таблице 2.

Таблица 2

Значения параметров, используемых для потенциала Бренера [10]

D^e	S	β	R^e	δ	a_0	c_0	d_0	$R(1)$	$R(2)$
6.325eV	1.29	0.15нм ⁻¹	0.1315нм	0.80469	0.011304	19	2.5	0.17нм	0.2 нм

Результаты исследования. Было изучено сорбционное взаимодействие одностенных нанотрубок с H_2 , NO_2 , CO и O_2 . Показано, что в зависимости от вида адсорбированного газа на углеродный материал, энергия связи для NO_2 меньше, чем для CO и H_2 (разность глубины потенциальной ямы для H_2 и пучка нанотрубок 10×10 ($D \approx 1,36$ нм) составляет $\approx -0,73$ ккал/моль, для $NO_2 \approx -2,77$ ккал/моль, $CO \approx -1,81$ ккал/моль) (рис. 2).

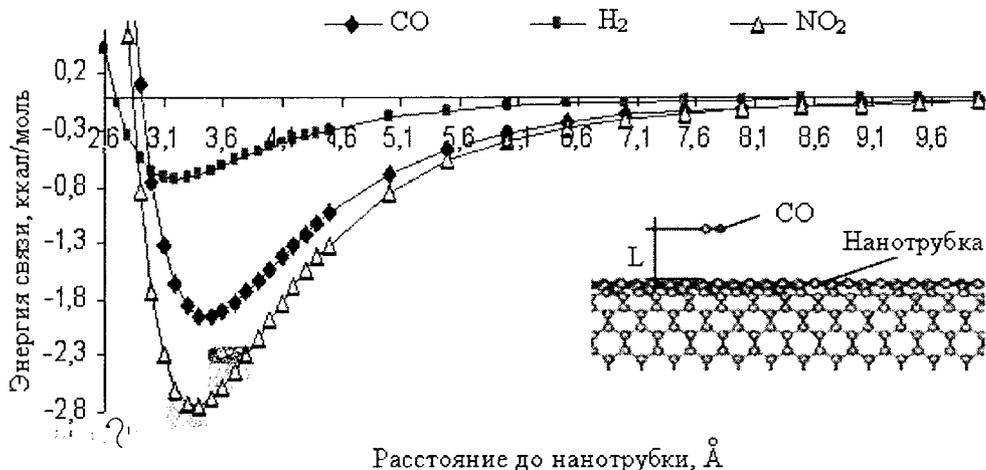


Рис. 2. Энергия связи при адсорбции на пучке нанотрубок 10×10 для различных газов

Можно ожидать, что нанотрубный материал будет обладать большей специфичностью по отношению к NO_2 в сравнении с CO и H_2 , что существенно с точки зрения разработки сенсорных элементов химических датчиков.

Также были получены зависимости глубины потенциальных ям от размера эффективного расстояния между углеродными нанотрубками. Анализируя их можно сделать вывод о том, при каких значениях r молекулы H_2 , NO_2 и CO не смогут проникнуть через пучок одностенных углеродных нанотрубок, т.е. будут отсеяны. Например, при $r(E_{\text{max}}) \sim 0,52 \text{ нм}$ водород может проходить через пучок нанотрубок и адсорбироваться в нем, диоксид азота в свою очередь при $r(E_{\text{max}}) \sim 0,54 \text{ нм}$, а оксид углерода при $r(E_{\text{max}}) \sim 0,56 \text{ нм}$. Значение $r(E_{\text{max}})$ зависит от вида и размера электронных оболочек адсорбированных газов.

Особое место при моделировании углеродных материалов занимает изучение чувствительности производных углерода, в частности сравнение адсорбционных свойств пучка ОНТ и графита. Рассматривая взаимодействия кислорода на пучке нанотрубок 10×10 и графите (рис. 3) можно сделать вывод о том, что газы будут предпочтительнее адсорбироваться на пучке нанотрубок по сравнению с графитом, т.к. максимальное значение потенциальной ямы на графите ($-2,89 \text{ ккал/моль}$) почти в 1.8 раза меньше максимального значения потенциальной ямы на пучке нанотрубок ($-5,18 \text{ ккал/моль}$).

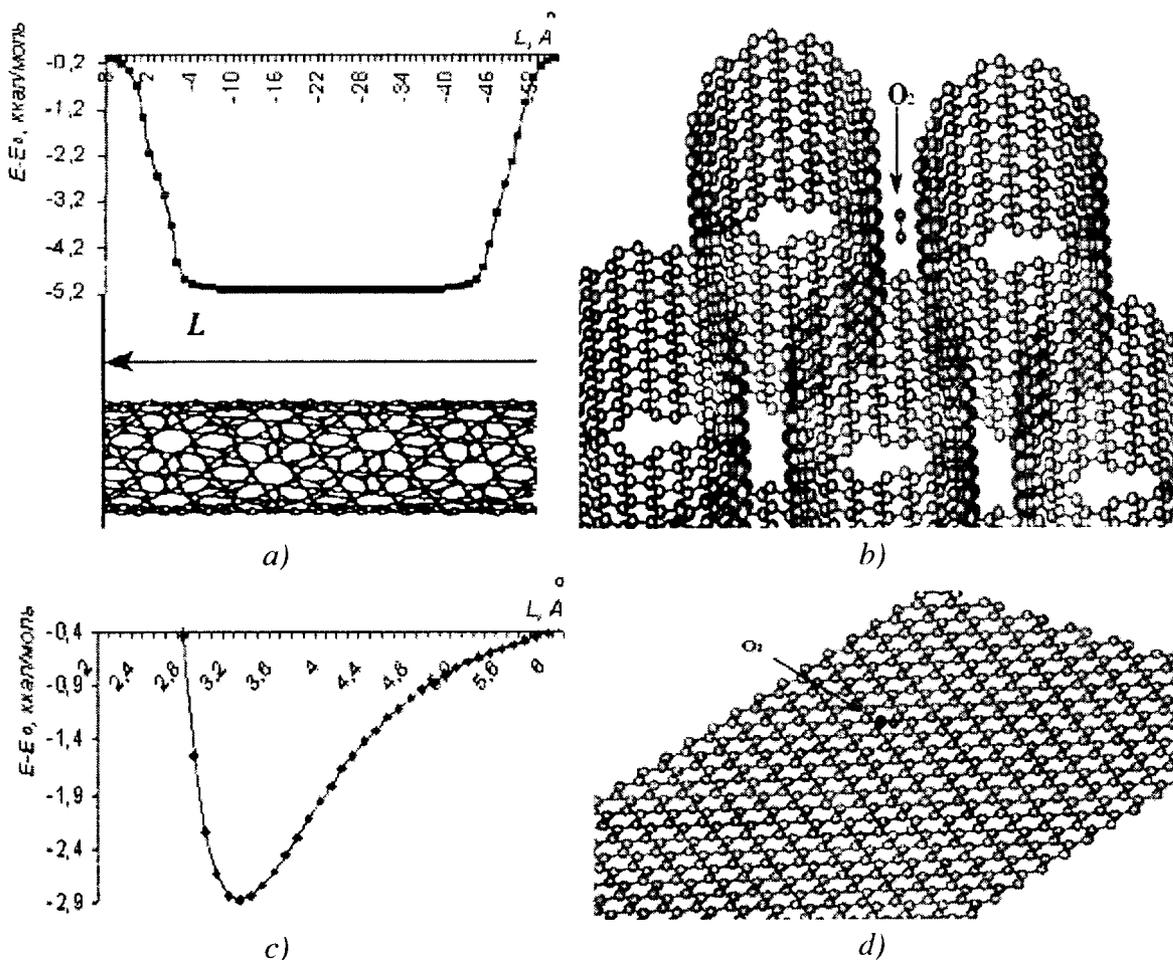


Рис. 3. Адсорбция кислорода на пучке нанотрубок (а, б) и графитовой пленке (с, д)

Исследуя адсорбцию кислорода на двухслойном графите, можно предположить, что адсорбционные свойства многостенных нанотрубок не существенно отличаются от свойств одностенных, т.к. разность между энергией связи для двухслойного и однослойного графита

составляет 0,26 ккал/моль, а разность между двух- и шестислойным графитом – 0,074 ккал/моль.

Рассматривая взаимодействие кислорода на двухслойном и шестислойном графите (рис. 4), можно предположить, что адсорбционные свойства многостенных нанотрубок не существенно отличаются от свойств одностенных, т.к. разность между энергией связи для двухслойного и однослойного графита составляет $\approx 0,27$ ккал/моль. А разность между адсорбцией двух- и шестислойного графита составляет всего 0,074 ккал/моль.

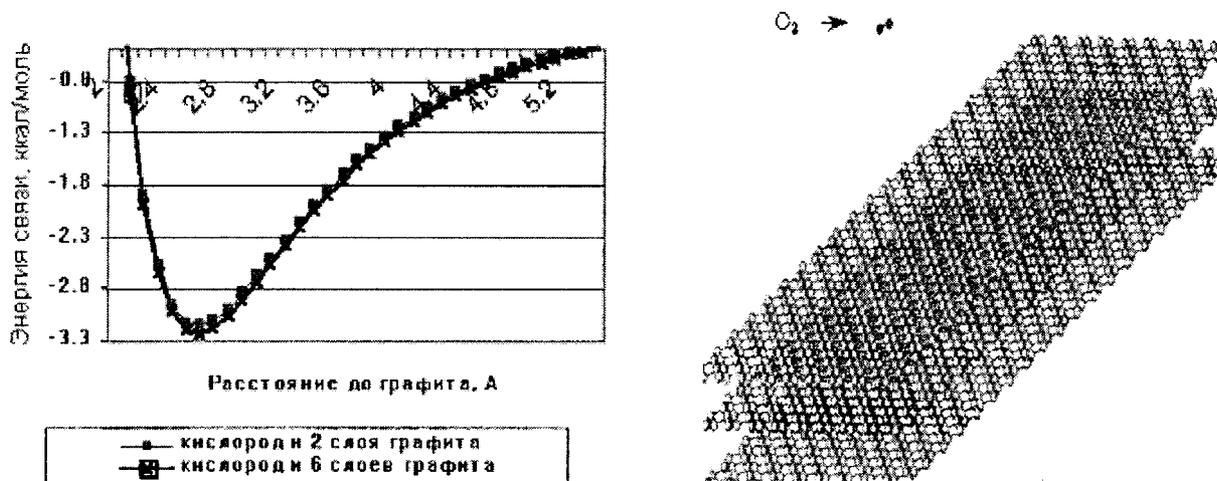


Рис. 4. Энергия связи кислорода на двухслойном и шестислойном графите

Из данных, представленных на рис. 5 и полученных при моделировании адсорбции на пучке одностенных нанотрубок 7×7 и 10×10 , установлено, что энергия связи системы зависит от диаметра трубок. При изменении диаметра на 0,4 нм энергия связи уменьшилась на 4.5 ккал/моль, т.е. нанотрубки обладают выборочной селективностью и могут служить каналами в устройствах селективной транспортировки, разделения и очистки газов.

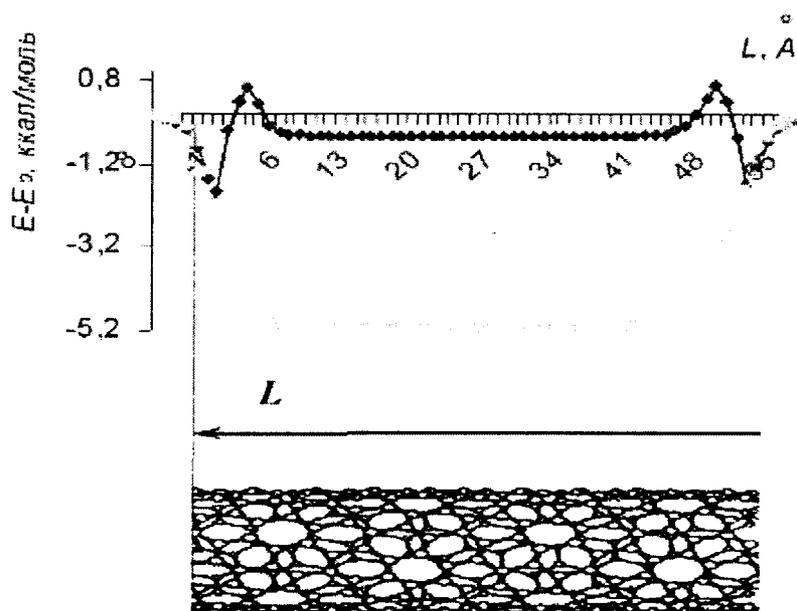


Рис. 5. Энергия связи при адсорбции кислорода по длине L ОНТ различных диаметров

Рассматривая адсорбцию кислорода (рис. 6), было обнаружено, что при адсорбции газа внутри трубки оказывает влияние присутствие соседних трубок. Причем разница энергии связи при этом составляет $\approx -0,17$ ккал/моль.

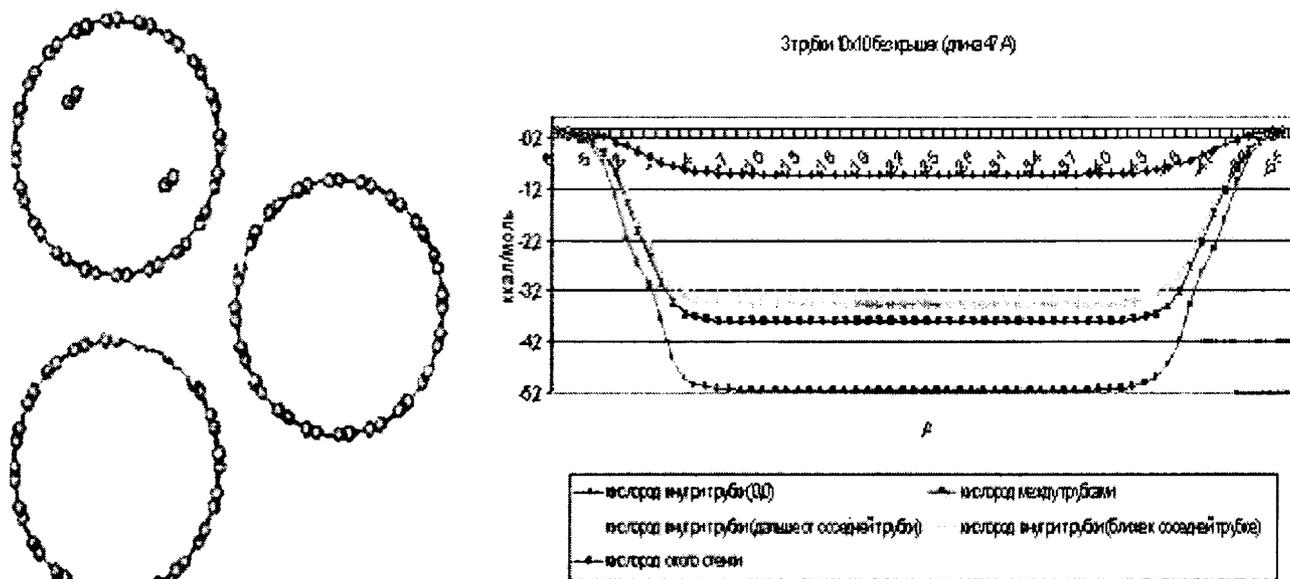


Рис. 6. Адсорбция кислорода на пучке нанотрубок

Следовательно, при моделировании адсорбции газов надо учитывать положение адсорбируемых газов по отношению к матрице нанотрубок.

Была рассмотрена сорбционная способность ОНТ с H_2 , O_2 и CO (рис. 7).

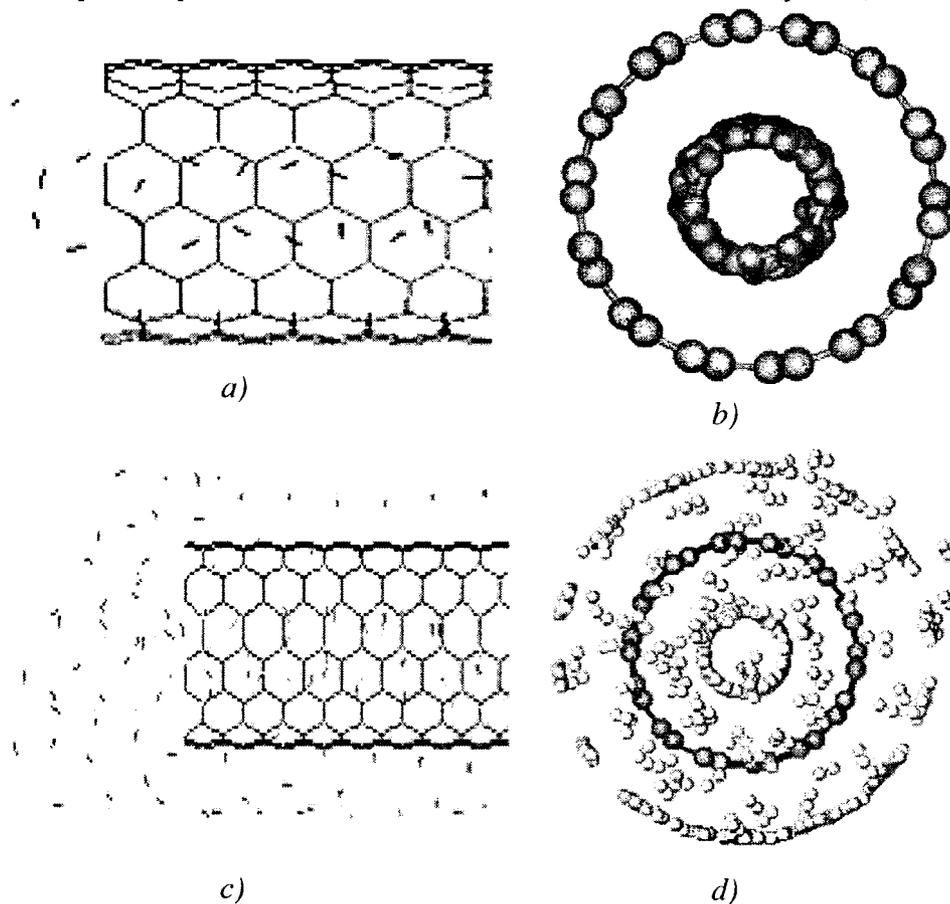


Рис. 7. Создание внутреннего (а, б) и внешнего (с, д) водородного слоя

При адсорбции молекулы газа заняли упорядоченное положение внутри трубки и создали дополнительный слой (рис. 7 а, б). При дальнейшем увеличении молекулы газа заполнили ОНТ и начали адсорбироваться на внешней поверхности трубки, образуя внешний водородный слой (рис. 7 с, d). В таблице 3 представлены результаты данного процесса.

Таблица 3

Сорбционные характеристики ОНТ

Вид трубок	Вид сорбционного газа	Число молекул на 1 нм ³	Энергия связи системы, ккал/моль
7x7	H ₂	29	289,4
	O ₂	21	169,1
	CO	15	139,8
10x10	H ₂	42	391,2
	O ₂	30	374,1
	CO	25	361,6

Следует отметить, что решение указанной проблемы далеко от завершения. Результаты расчетов и экспериментов у различных авторов довольно противоречивы. Это связано с трудностью проникновения газов внутрь ОНТ, имеющих замкнутую поверхность. Поэтому научиться эффективно модифицировать и удалять "крышки" с ОНТ - весьма актуальная задача.

Из результатов исследования взаимодействия опасных веществ (табл. 4) с пучком нанотрубок углеродного материала (рис. 8), следует, что нанотрубки обладают высокой чувствительностью к взрывчатым веществам (минимальная энергия взаимодействия одной молекулы $\approx 17,8$ ккал/моль) и, в отношении гексогена (RDX), тротила (TNT) и нитроглицерина (NG), селективной избирательностью (при примерно одинаковой молекулярной массе ≈ 230 а.е.м. энергия системы отличается $\approx 1,5-2$ ккал/моль).

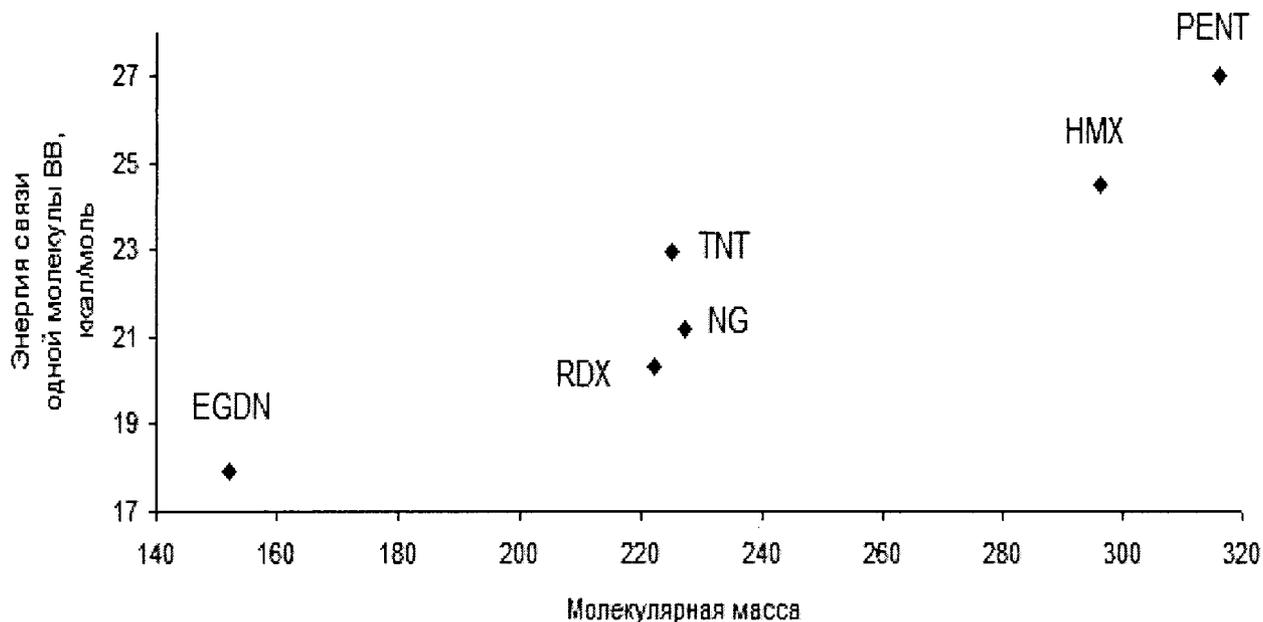


Рис. 8. Зависимость энергии взаимодействия опасных веществ с пучком нанотрубок от эффективного расстояния между нанотрубками

Виды адсорбируемых веществ.

Вещество	Молекулярная масса, а.е.м.
Октоген (<i>HMX</i>) $(\text{CH}_2)_4\text{N}_4(\text{NO}_2)_4$	296
Нитроглицерин (<i>NG</i>) $(\text{CH}_2)_2(\text{CH})(\text{ONO}_2)_3$	227
Гексоген (<i>RDX</i>) $(\text{CH}_2)_3\text{N}_3(\text{NO}_2)_3$	208
Пентаэритриттетранитрат (<i>PETN</i>) $\text{C}(\text{CH}_2)_4(\text{ONO}_2)_4$	316
Тротил (<i>TNT</i>) $\text{C}_6(\text{NO}_2)_3(\text{CH}_3)$	225
Этиленгликольдинитрат (<i>EGDN</i>) $(\text{CH}_2)_2(\text{ONO}_2)_2$	152

Результаты моделирования показывают, что нанотрубки обладают определенной специфичностью по отношению к адсорбции опасных газов и взрывчатых веществ и могут служить каналами в устройствах селективной диагностики, транспортировки, разделения и очистки газовых сред. Также углеродный наноматериал может служить основой чувствительных элементов для сенсорных микрочипов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колешко В.М., Мешков Ю.В. Микроэлектронные преобразователи информации на поверхностных акустических волнах. М.: ЦНИИ «Электроника», 1985. – 116с.
2. А. с. 1262317 СССР. Способ контроля параметров газовой среды и устройство для его осуществления / В.М. Колешко, А.В. Гулай // Бюл. изобр. – 1983. – № 17.
3. Колешко В.М., Таратын И.А., Сергейченко А.В. Матрица неселективных полупроводниковых сенсоров электронного носа. // Машиностроение. Сб. научных трудов. – Мн.: УП «Технопринт» – 2002. – вып. 18. – С. 555–559.
4. Колешко В.М., Карякин Ю.Д. Мультипроцессорная микросистема дистанционного обнаружения взрывчатых и наркотических веществ. // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – №18. – С. 79–83.
5. Suehiro J., Zhou G., Hara M. Fabrication of a carbon nanotube-based gas sensor using dielectrophoresis and its application for ammonia detection by impedance spectroscopy. // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2003. – №36. – p. 109–114.
6. Maser W.K., Munoz E., Benito A.M., Martinez M.T. Adsorption and desorption of weakly bonded adsorbates from single-wall carbon nanotube bundles. // Chem. Phys. Lett. – 1998. – №292. – p. 587–593.
7. Moonsub S., Nadine W., Robert J. C., Li Y., Dai H. Functionalization of carbon nanotubes for biocompatibility and biomolecular recognition. // Nano Letters. – 2002. – Vol.2 – №4. – p. 285–288.
8. Wei B.Q., Vajtai R., Jung Y., Wand J., Zhang R., Ramanath G., Ajayan P.M. Carbon nanotube-based sensor for CO₂ monitoring. // Nature. – 2002. – №416. – p. 495–496.
9. Wei B., Vajtaj R., Choi Y.Y., Ajayan P.M. Carbon nanotubes: present and future. // Nano Letters. – 2002. – Vol.2 – №10. – p. 1105–1107.
10. Los J.K., Fasolino A. Monte Carlo simulations of carbon-based structures based on an extended Brenner potential. // Computer Physics Communications. – 2002. – №147. – p. 178–181.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ГОМОГЕННЫХ ПЛАЗМОХИМИЧЕСКИХ КОНВЕРТОРОВ.

Цыганов Д.Л.

Введение

Современная энергетика, основанная на сжигании углеводородов, загрязняет атмосферу азотом, окислами серы, частицами сажи, двуокисью углерода, что приводит к парниковому эффекту. Следовательно, необходимо заменить прямое сжигание углеводородов (C_{solid} , C_nH_{2n} , CH_4) их конверсий в носители энергии, не содержащие углерод или содержащие его в меньшей степени.

Водород является одним из основных компонентов, используемых в топливных элементах – химических источниках тока. Топливные элементы в настоящее время приобретают всё большую и большую актуальность в связи с ростом экологической угрозы во всём мире. Содержание энергии на единицу массы у него выше, чем у любого органического топлива – 120.7 ГДж/Т (энтальпия окисления H_2 составляет ≈ 3 кВт.ч/м³ при нормальных условиях), сгорание водорода не приводит к загрязнению окружающей среды, т.к. в результате окисления водорода получается вода. Производство водорода в мире сейчас превышает 50 миллионов тонн в год и растёт на 10% в год.

Необходимость совершенствовать технологии данного процесса диктуется ограниченностью сырьевых и энергетических ресурсов, экологическими проблемами. Для совершенствования технологии предлагаются использование плазмохимические технологии.

Плазмохимические технологии получения водорода базируются на двух технологиях конверсии исходной смеси в водород. При первой технологии, в плазмохимических реакторах реагенты взаимодействуют с компактной, высокотемпературной областью разряда, за счет чего, в основном, и идут газофазные реакции пиролиза. При этом разряд выступает как эффективный нагреватель реагентов и источник энергии для покрытия энергозатрат эндотермического процесса конверсии. При второй технологии - разряд выступает как источник активных радикалов.

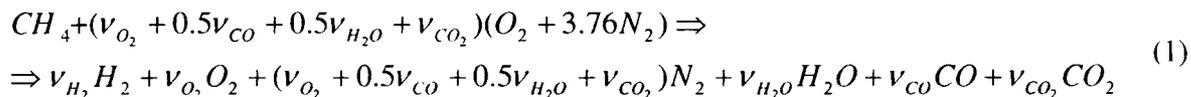
В качестве сырьевого источника перспективно использовать метан и некоторые его гомологи, так как считаются возобновимыми источниками (так как являются продуктами жизнедеятельности бактерий при брожении биомассы и, следовательно, метан может быть получен из биомассы городских свалок, очистных сооружений и отходов сельского хозяйства).

В настоящее время, не смотря на все достигнутые успехи в плазмохимической технологии получения водорода, не сформулированы, как разряду, так и к газодинамическому течению реагирующего газового потока. Не исследован анализ возможных факторов, влияющих на эффективность конверсии. Для ответа на поставленные вопросы было проведено 0D численное исследование. На основании 0D моделирования предложены технические требования к разряду. Для проверки выводов по 0D моделированию было произведено численное 2D моделирование осесимметричного потока для конвертора длиной около 40 мм.

1. Постановка задачи

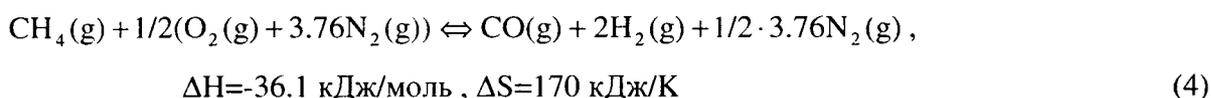
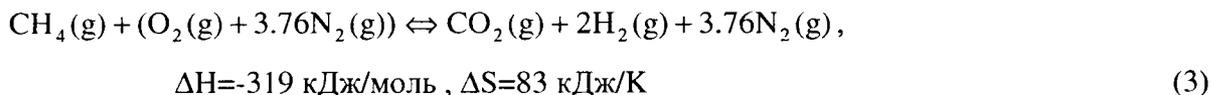
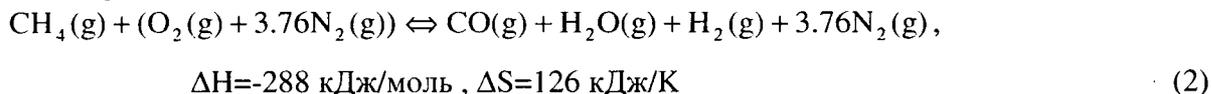
Анализ, для ответа на поставленные вопросы, проведен для условий, при которых работают большинство конверторов [1-3] или к которому должен стремиться идеальный конвертер. Давление $P \sim 1$ атм., температура от 500К до 2000К. Рабочая смесь – метан (CH_4) + воздух ($21\%O_2 + 0.79N_2$).

Процесс конверсии метана можно представить следующей брутто схемой.



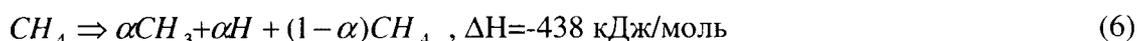
где v_i - мольная концентрация i -компоненты ($i=O_2, N_2, \dots$)

Для моделирования горения метана (1) для вышеприведенных условий наиболее выведена кинетическая схема на базе механизма GRI-3 [4]. В зависимости от содержания окислителя (кислорода) механизм GRI-3 моделирует протекания реакций для богатых смесей, которые можно представить следующими схемами:



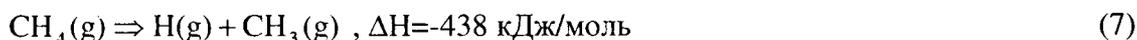
Для 2-го и 3-го уравнения стехиометрический фактор ϕ равен 2, для 4 уравнения – 4 и для 5 - бесконечности. При этом максимальная мольная доля наработки водорода составляет для 2, 3,4,5 уравнения 0.1479, 0.2959, 0.4098, 0.6667 соответственно, а процент конверсии (отношение число молей водорода на выходе к общему числу молей водородосодержащего газа в пересчете на водород) 3,4,5 уравнения – 100%, а для 2 уравнения – 50%.

Влияние разряда моделировалось двумя способами, что соответствует двум технология воздействия разряда на смесь - “мгновенная” и “объемная”. Для первой технологии (“мгновенная”) подразумевается, что воздействие разряда в начале привело к образованию радикалов CH_3 и H по следующей схеме:



где α - коэффициент диссоциации, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Для второй технологии (“объемная”) подразумевается, что воздействие разряда постоянно, и приводит к образованию радикалов по следующим схемам:



Из практических соображений время расчета принималось равным $\tau_{fin} = 1$ сек. В расчетах также использовалось понятие рекомендуемого времени для конверсии $\tau_{рек}$. Это время, когда концентрация водорода достигнет 90% от конечной концентрации.

CFD расчеты выполнены на основе модели совершенного вязкого газа. Осесимметричный вращающейся турбулентное течение описывался системой нестационарных уравнений Навье-Стокса и энергии, осредненных по Рейнольдсу. Турбулентная вязкость определялась с помощью стандартной $k-\epsilon$ модели [5]. Для замыкания вихревого рассеивания вихрей для моделирования химических реакций использовалась модель Eddy Dissipation Concept (EDC) [6]. Данная модель позволяет рассчитывать детальные химические схемы в турбулентные течения. В данной модели предполагает, что реакция происходит в малых турбулентных струк-

турах, которые определяются характерными размерами турбулентности. Объемная доля таких структур смоделирована по модели, предложенной в работе [7].

2. Способ решения уравнений.

Решение уравнений химической кинетики осуществлялось при помощи пакете Chemkin-II (Chemkin-IV) [9]. Chemkin - это набор прикладных программ, библиотек и баз данных. Уравнения скорости реакций и термодинамические данные были интегрированы входной файл. Используя программу для расчета дифференциальных уравнений (располагаемый в пакет Chemkin) производился расчет компонент по времени, в зависимости от давления, температуры, начальных концентраций вещества. Предполагалось, что константы скорости прямой реакции описывались обобщенной формулой Аррениуса.

Для численного моделирования (CFD-моделирование) газодинамических течений использовался пакет Fluent [8]. Fluent — современный, универсальный программный комплекс, предназначенный для решения задач механики жидкостей и газов. Более подробно об особенностях численного метода, реализованного в пакет Fluent изложены в [8].

Для CFD –моделирование использовался неявный Segregated решатель, расчетная сетка - Tri Primitive, построена при помощи программы Gambit, которая входит в пакет Fluent 6.1.22. Расчет производился на базе механизма GRI-1.2 (32 компоненты и 177 реакций) [4]. Механизм GRI-1.2 представляет более раннюю разработку механизма GRI-3, но по своей сути - это редуцированной схема для механизма GRI-3 (53 компоненты и 325 реакций).

Для расчетов использовался кластер со следующей архитектурой: 12 узлов PIV @ 3GHz, шина 800MHz, RAM 512Mb, HDD 40 Gb, 1 Gb Ethernet, кэширующий маршрутизатор. Операционная система - Linux.

3. Результаты численного анализа

3.1 0D-моделирование

Интегральный анализ путей окисления показывает, что окисления метана идет с образованием ацетилена, с последующим образованием CO и H₂. Более подробную схему интегрального анализа можно посмотреть в [11].

Моделирование окисления богатых смесей при термическом воздействии на поток хорошо изучено и представлено в литературе [10]. Конверсия метана и образование водорода начинается с температуры порядка 900 К (рис. 1). Скорость наработки водорода примерно одинакова при росте температуры до 2000 К. После 2000 К происходит уменьшение скорости наработки водорода.

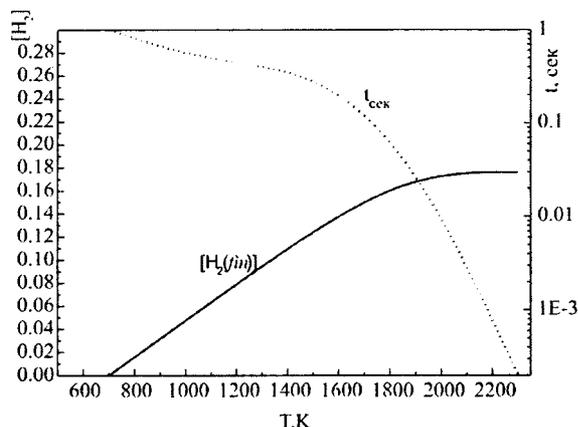


Рисунок 1. Время конверсии и мольная доля содержания водорода при $\phi=2$ в зависимости от температуры.

Если на метан воздействовать разрядом, так что в самом начале в смеси образуется радикалы (б), скоростной анализ показывает, что основная реакция – реакция образование ацетилена $CH_3 + CH_3 + M \Rightarrow C_2H_6 + M + Q$: Атомарный водород, как правило, окисляется кислородом. Характерное время протекания реакции $\sim 10^{-3}-10^{-4}$ сек. При протекании реакций происходит большое выделение тепла. Численные оценки показывают, при росте начальной степени диссоциации α на 1% температура возрастает примерно $\sim 20K$ (рис. 2).

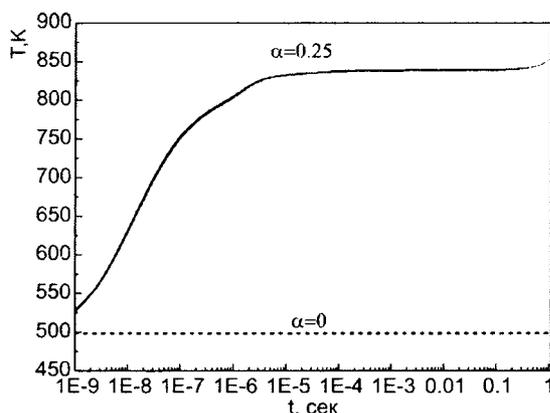


Рисунок 2. Влияние степени диссоциации метана на тепловыделение для стехиометрической смеси.

Дальнейшее окисление углеводородов будет определяться новой температурой. Соответственно “плазмохимическое” время индукции будет определяться временем протекания реакции плюс термодинамическое время индукции - происходит сокращение времени индукции исходной холодной смеси.

С учетом того, что образование водорода начинается с температуры порядка 800K для плазмохимического реактора с “мгновенным” вбросом радикалов, такое воздействие разряда малоэффективно и не приводит к значительному росту переработки углеводородного сырья. В технологии, которых будет реализован “мгновенным” вброс радикалов, будет происходить значительное сокращение рекомендуемого времени наработки водорода (рис. 3).

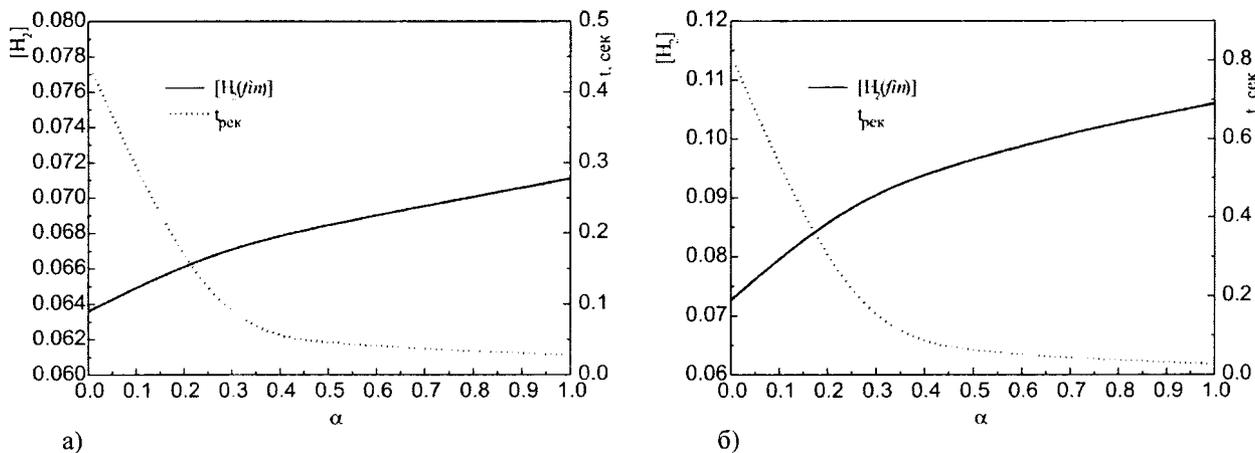


Рисунок 3. Время конверсии и мольная доля содержания водорода в зависимости от степени диссоциации для температуры $T=1100 K$. а) $\phi=2$ б) $\phi=4$

Оптимальный режим для получения максимума водорода потока не будет ни чем не отличаться от термического конвертора. Лучше всего такую технологию использовать для перевода жидкого топлива в газообразное (синтез газ) и производить непосредственное сжи-

гание синтез газа в топке. Но, данная технология обладает теми же недостатками, как и простое горение – высокая температура приводит к образованию окислов азота.

Для снижения окислов азота необходимо понизить рабочую температуру потока. Один из методов, это постоянное воздействие разряда на рабочую смесь. Моделирование разряда показала, что действительно возможно снижение рабочей температуры смеси. Мольная доля содержания водорода в смеси в зависимости скорости диссоциации и рабочей температуры смеси по схеме 6 и 7 приведены на рис. 4.

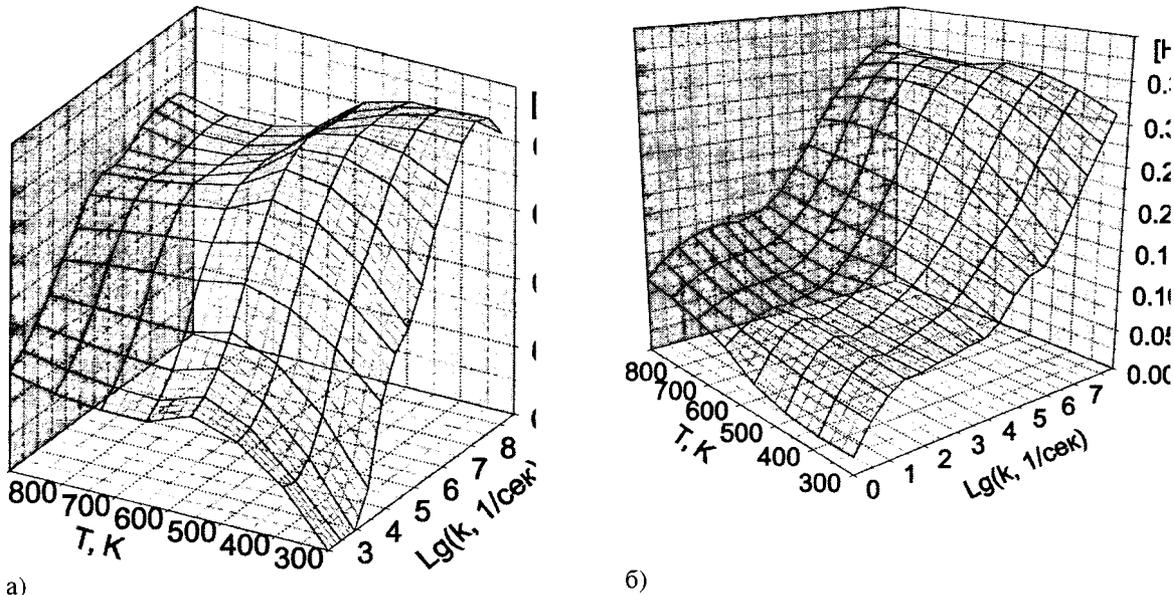


Рисунок 4. Мольная доля содержания водорода в смеси в зависимости скорости диссоциации и рабочей температуры смеси. а) $\phi=2$ б) $\phi=4$

С повышением температуры эффективность разряда снижается. Наибольшая эффективность достигается для рабочей температуры 600-1200 К (рис. 5).

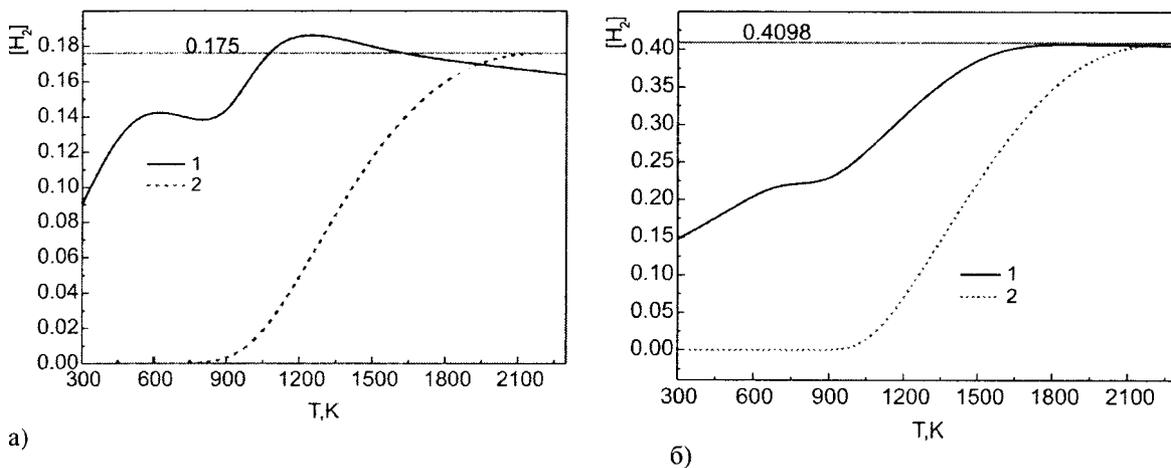


Рисунок 5. Эффективность плазмохимического (1) и термического (2) конвертора в зависимости от температуры для константы скорости равной $k \sim 10^5 \text{ сек}^{-1}$ а) $\phi=2$ б) $\phi=4$

Низкая эффективность для высоких температур приводит к тому, что наиболее эффективно использовать смесь с $\phi=4$. Тепла, которое выделяется в результате протекания химических реакций, хватает слегка разогреть смесь и не нет необходимости подогревать смесь, как $\phi=\infty$ (рис. 6).

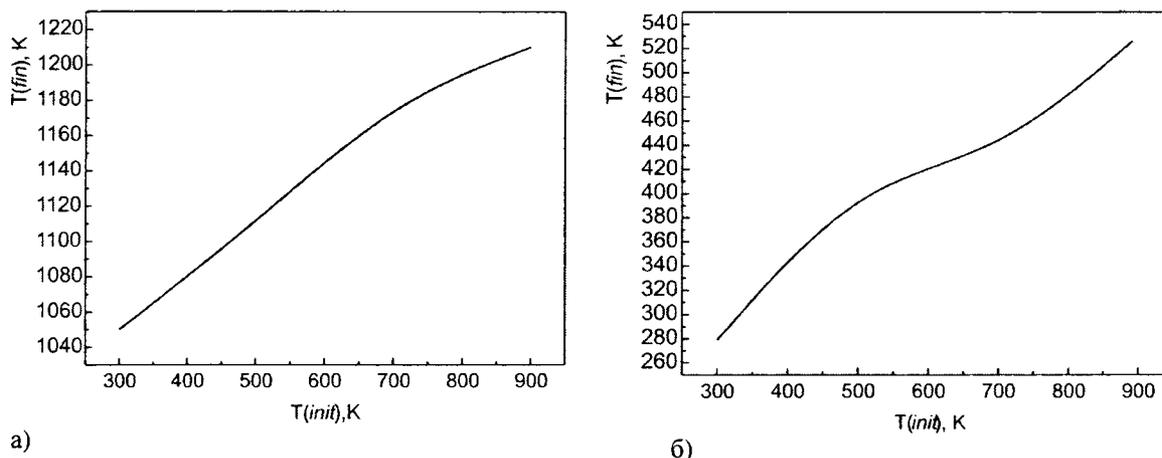


Рисунок 6. Конечная ($T(fin)$) температура потока в зависимости от начальной ($T(init)$) температуры а) $\phi=4$ б) $\phi=\infty$

Отметим также, что термодинамика для богатых смесей с $\phi=2$ и $\phi=4$ (рис. 5) не позволяет достигать максимума наработки водорода, что составляет примерно 0.175 и 0.4098 для $\phi=2$ и 4.

Эффективность влияния разряда распад метана или кислород носит нелинейный эффект и определяется разными путями образования водорода. Если воздействовать только на метан, так что он распадается со скоростью $k \sim 10^5 \text{сек}^{-1}$ при начальной температуре $T \sim 500\text{K}$, водорода образуется около 9%, для кислорода при тех же условиях - 8.6%. В то время как при суммарном воздействии водорода образуется около 24%, что меньше суммарного образования водорода при раздельном распаде метана и кислорода.

3.2 Выводы по 0D моделированию

Подводя краткий итог по 0D моделированию, можно сделать следующие выводы для разрабатываемого конвертора:

- 1) гомогенный термический конвектор надо постоянно подогревать смесь до температуры $\sim 2000\text{K}$. Лучше всего его использовать для перевода жидкого топлива в газообразное (синтез газ) и производить непосредственное сжигание синтез газа в топке.
- 2) конвертор с “мгновенным” вбросом радикалов не приводит к снижению рабочей температуры. Эффективность использования будет определяться, что эффективнее просто нагреть смесь или нагреть разрядом
- 3) постоянное воздействие разряда снижает рабочую температуру. Рекомендуемая частота разряда - 10^6 - 10^8 Гц, т.е. микросекундный или наносекундные разряды. Амплитуда разряда определяются эффективностью вкладывания энергии разряда VT-релаксацию.

3.4 CFD моделирование осесимметричного конвертора.

Общие выводы по 0D позволяют спроектировать “плазмохимический” конвертор позволяют разработать рекомендации по проектированию конверторов. Приведем пример разработки конвертора на базе CFD моделирования.

Проектирование конвертора целесообразно начинать с определения габаритных размеров. Допустим, нужно разработать конвертер длиной $L=50\text{мм}$ (рис. 7).

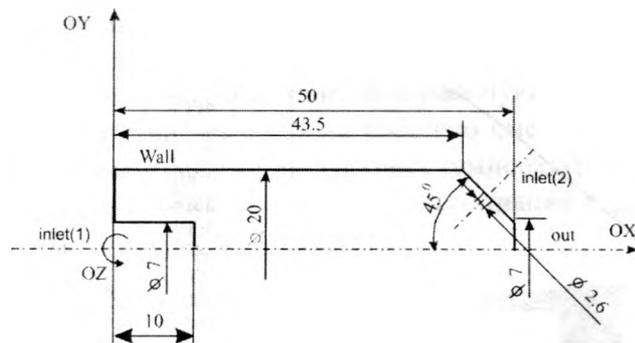


Рисунок 7. Эскиз конвертора

Исходя из 0D моделирования, решаем, что наиболее оптимально использовать богатую смесь с $\phi=4$. Выбираем оптимальную рабочую температуру смеси $T=900\text{K}$. Исходя из рабочей температуры, выбираем такой разряд, чтобы он обеспечивал скорость распада $k \sim 10^{5-7} \text{сек}^{-1}$. Можно уменьшить температуру протекания реакции, если увеличить скорость распада.

Исходя из 0D моделирования для рабочей температуры смеси и скорость распада метана и кислорода, определяем начальную температуру потока $T=300-500\text{K}$. Находим исходя из скорости распада CH_4 и O_2 максимальную скорость подачи холодной смеси. Например, для $k \sim 10^7 \text{сек}^{-1}$ - $v < k \cdot L \cong 10^5 \text{ м/сек}$. Принимаем $v=100 \text{ м/сек}$. Исходя из скорости, находим объем подачи газа Q . ($Q=7.6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{сек}=7.6 \text{ л/сек}$ (для нормальных условий)). Для защиты стенок и уменьшения потерь можно рекомендовать к использованию газовую завесу. Величину скорости закрутки уточняется исходя из CFD моделирования. На основании CFD моделирования, производим анализ по улучшению конвертора (убирания застойных зон, уменьшение тепловой нагрузки стенок...).

Произведенный CFD расчет конвертору (рис. 7) подтверждают сделанные предположения. Энергии, которая выделяется при протекании химических реакции для очень богатых смесей $\phi=4$, достаточно для выхода на рабочий режим (рис. 8). Это говорит о достаточно высокой эффективности использования газовой завесы.

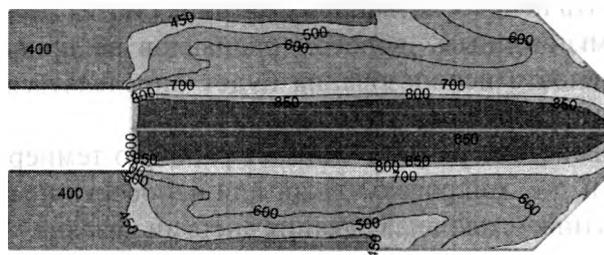


Рисунок 8. Распределение температуры в плоскости симметрии

Конверсия водорода высокая, и составляет до процентов от максимально возможного количества в данной смеси (рис. 9).

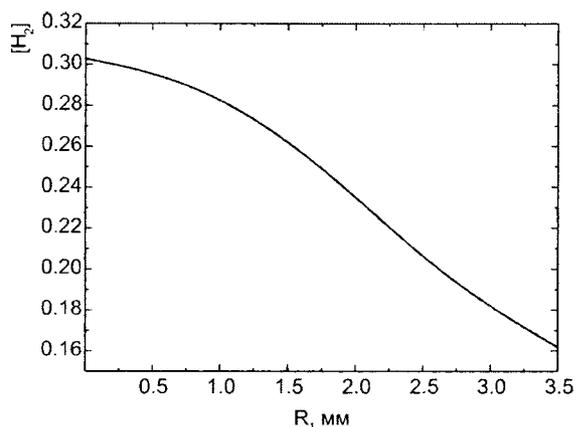


Рисунок 9. Распределение концентрации H_2 на выходе из сопла

Не конвертируемый водород остался в высших углеводородах (рис. 10) и немного в воде (рис. 11).

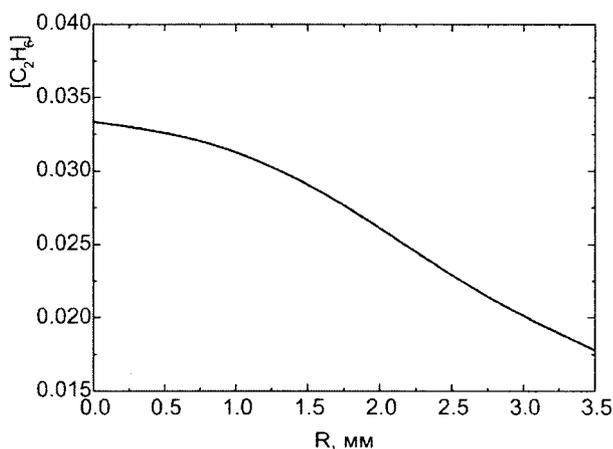


Рисунок 10. Распределение концентрации C_2H_6 на выходе из сопла

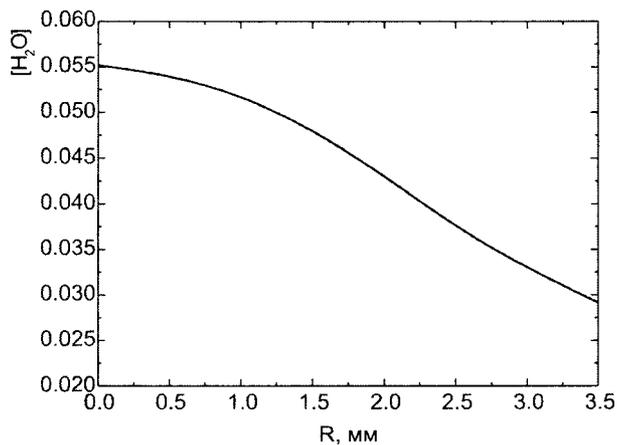


Рисунок 11. Распределение концентрации H_2O на выходе из сопла

4. Выводы

Моделирование позволяет рекомендовать методику проектирования любого конвертора, производит модернизацию существующих конверторов. Показано принципиальная возможность конверсии метана для рабочей температуры 900К при использовании плазмохимического реактора с “объемным” воздействием разряда.

Для получения максимального выхода водорода необходимо, чтобы разряд обеспечивал скорость распада метана и кислорода $k \sim 10^{5-7}$ 1/сек. Для плазмохимического реактора наибольшая эффективность достигается в диапазоне температур 600-1200К. Наиболее эффективно использовать очень богатые смеси с $\phi=4$.

CFD расчет позволяет получать поля - скоростей, температур, основных компонент CO_2 , CO , CH_4 , N_2 , H_2O , O_2 и проводить модернизацию конвертора на основании полученных данных. Использование газовой завесы обеспечивает высокую эффективность уменьшения тепловой нагрузки стенок и уменьшение тепловых нагрузок стенок конверторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Словецкий Д.И.* Плазмохимическая переработка углеводородов: современное состояние и перспективы./ 4 Международный симпозиум по теоретической и прикладной плазмохимии. 13-18 Мая 2005, г. Иваново, Россия.
2. *H.K.Song, H.Lee, J-WChoi, Na B.* Effect of electrical pulse forms on the CO₂ reforming of methane using atmospheric dielectric barrier discharge. *Plasma chemistry and Plasma Processing*, Vol. 24, No1, March 2004.
3. *Rusanov V., Jivotov V., Babaritsky A., Dyomkin S., Smirnov R., Tchebankov F., Moskovsky A., Bibikov M., Konovalov G.* Process of hydrocarbons particle oxidation stimulated by plasma of atmospheric pressure microwave discharge. 31-st EPS Conference on Plasma Phys. London, 28 June -2July 2004 ECA Vol.28G, P-4.061. 2004.
4. *Smith G.P., Golden D.M., Frenklach M., Moriarty N.W., Eiteneer B., Goldenberg M., Bowman C.T., Hanson R.K., Song, S., Gardiner W.C., Lissianski V.V., Qin Z* GRI-MECH 3.0 accessible at http://euler.me.berkeley.edu/gri_mech.
5. *Launder B.E., Spalding D. B.* *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*// Academic Press, London, England, 1972.
6. *Magnussen B. F.* On the Structure of Turbulence and a Generalized Eddy Dissipation Concept for Chemical Reaction in Turbulent Flow. Nineteenth AIAA Meeting, St. Louis, 1981.
7. *Gran I. R. and Magnussen B. F.* A numerical study of a bluff-body stabilized diffusion flame. part 2. influence of combustion modeling and finite-rate chemistry. *Combustion Science and Technology*, 119:191, 1996.
8. **URL** <http://www.fluent.com>
9. *Kee R.J., Rupley F.M., Meeks E., Miller J.A.* CHEMKIN-III: A Fortran chemical kinetics package for the analysis of gas phase chemical kinetics. // SAND96-8216, 1996. 23. **URL** <http://www.reactiondesign.com>
10. *Варнатц Ю., Масс У., Диббл Р.* Горение. Физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образование загрязняющих веществ. / Пер. с. англ. Г.Л. Агофонова. Под ред. П.А. Власова. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.-352с.
11. *Warnatz J.* Critical survey of elementary reaction rate coefficients in the C/H/O/ system// B: Gardiner W.C. jr. (ed). *Combustion chemistry*. Springer-Verlag, N.Y., 1984.

НАГРУЖЕННОСТЬ КУЗОВА ВАГОНА ПРИ ТРАНСПОРТИРОВКЕ СЫПУЧИХ ГРУЗОВ

Путяго А. В., Шимановский А. О.

Methods of computer simulation solve a problem of loading of a body of a bunker coach by a granular body. Different alternatives of exposition of behaviour of a material of granular medium surveyed

Сыпучие (или гранулированные) материалы уже давно и достаточно широко используются человеком в быту и производстве. В то же время, несмотря на огромное прикладное значение свойства сыпучих материалов изучены недостаточно.

Основным средством транспортировки сыпучих грузов в настоящее время является железнодорожный транспорт. Поэтому при анализе прочности грузовых вагонов к основным расчетным самоуравновешенным нагрузкам относят силы распора насыпных и скатывающихся грузов. Наиболее распространенным подходом при определении давления в кузове вагона от действия сыпучего тела является теория Кулона, при использовании которой исходят из ряда упрощающих предположений [3]. Основываясь на них, принимают, что находящееся в бункере сыпучее тело, ограниченное сверху горизонтальной плоскостью, целиком находится в состоянии предельного равновесия, при этом вертикальное σ_y и горизонтальное σ_x напряжения на глубине h определяются по формуле

$$\sigma_y = \gamma h; \sigma_x = \gamma t g^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

где γ – плотность сыпучего груза;

φ – угол естественного откоса сыпучего груза.

Из приведенных выражений следует, что эпюра давлений на бункер имеет вид треугольника на вертикальных стенках и трапеции на наклонных элементах. При этом в процессе создания расчетной модели вагона возникает необходимость приведения распределенной нагрузки к ее узлам, что во многих ситуациях выполняется весьма приближенно.

Среди существующих подходов к моделированию сыпучих (гранулированных) сред, можно выделить два основных направления:

- моделирование сыпучей среды как континуальной системы;
- моделирование сыпучей среды как системы твердых тел.

При реализации первого подхода широкое распространение получил метод конечных элементов с различными вариантами математического описания поведения материала сыпучей среды. К таким вариантам относятся представление сыпучей среды, описываемой уравнениями механики деформируемого твердого тела в упругой постановке с учетом «приведенных» характеристик материала (модуль упругости, плотность, коэффициент Пуассона); описание поведения сыпучего тела на основе уравнений гидромеханики [5]; применение модели материала Друкера-Прагера, описывающей пластическое деформирование среды [2] и прочие.

Второй подход основан на использование законов механики твердого тела. Здесь сыпучая, а в данном случае гранулированная среда, моделируется конечным числом взаимодействующих между собой гранул. Так встречаются работы, где все тела (гранулы), входящие в систему, представлены либо плоскими (круг, плоский многоугольник и др.), либо объемными (шар, объемный многоугольник и др.) [1, 4, 6]. Условием контакта между телами служит пересечение границ тел, что приводит к возникновению контактной силы, варианты описания которой, могут быть весьма различны (закон Герца, закон Кулона, упруго-диссипативное взаимодействие). При отсутствии контакта тела считаются невзаимодействующими.

Оба подхода имеют свои достоинства и недостатки. Первый подход ограничен в применении в виду того, что не учитывает напрямую геометрию частиц сыпучей среды, что необходимо в ряде задач. Однако второй подход в обычной постановке требует значительно больших вычислительных затрат.

При анализе прочности кузова транспортного средства, в котором находится мелкодисперсный груз, например песок, целесообразно применение метода конечных элементов. Задача об исследовании нагруженности кузова вагона сыпучим грузом решалась в несколько этапов. На первой стадии использована модель материала, подчиняющаяся законам упругого деформирования. С целью определения адекватности получаемых результатов по разработанной математической модели на втором этапе исследований создана конечно-элементная модель, основанная на использовании гипотезы Друкера-Прагера, описывающей упруго-идеальнопластическую среду. Применение условия прочности Друкера-Прагера позволяет выполнять расчеты пластического деформирования при течении материала, при этом поверхность текучести не изменяется в процессе пластического деформирования.

Для реализации численных решений использован программный комплекс конечно-элементного анализа ANSYS. При создании геометрической модели использовались чертежные размеры четырехосного вагона-хоппера для перевозки минеральных удобрений модели 19-9755. Формирование конечно-элементной сетки выполнено 4-х узловым конечным элементом PLANE42. Свойства материала представлены следующими характеристиками [2]: плотность сыпучего груза, 1000 кг/м^3 ; угол естественного откоса, 30° ; модуль упругости, 10^6 Н/м^2 ; коэффициент Пуассона, 0.27; величина когезии, 7200 Н/м^2 ; угол дилатантности, 0° .

Используя симметричность конструкции, создана плоская конечно-элементная модель $\frac{1}{2}$ части кузова бункерного вагона, заполненного сыпучим грузом, состоящая из 1564 конечных элементов.

Решена задача определения нагруженности стенок кузова при статической осадке сыпучего груза. На рис. 1 приведены эпюры распределения эквивалентных напряжений в плоскости сыпучего тела при решении задачи в упругой постановке и с использованием модели Друкера-Прагера. Результаты расчета показали, что картины распределения напряжений имеют принципиальные отличия. К наиболее напряженным областям при упругом решении следует отнести зону бункерного выступа, где ярко выражен концентратор напряжений. В то же время при учете свойств упруго-идеальнопластической среды максимальный уровень напряжений снизился в два раза и концентрация максимальных значений зафиксирована в области перехода вертикальной стенки кузова вагона на наклонную поверхность бункера.

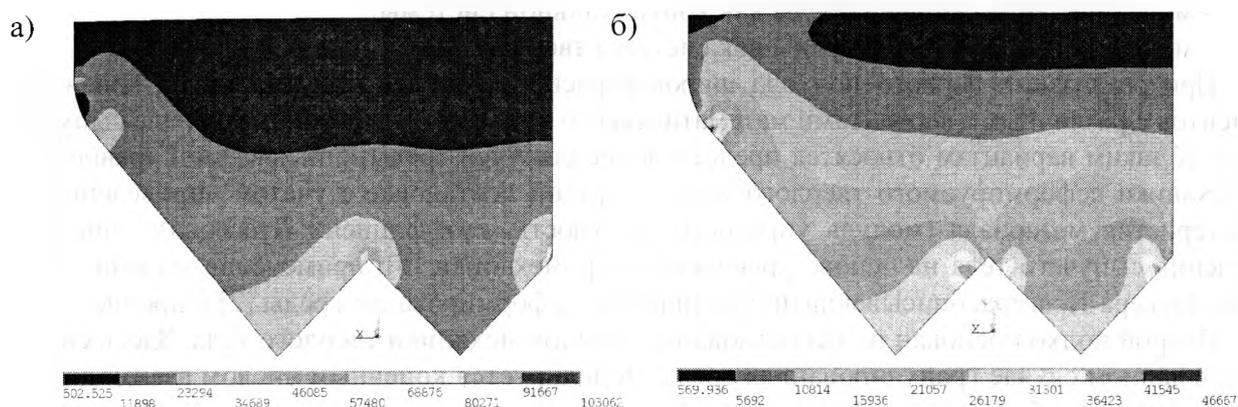


Рис. 1 Распределение эквивалентных напряжений в сыпучем теле: а – упругая среда; б – упруго-идеальнопластическая среда

Для определения характера распределения давления по внутренней поверхности кузова бункерного вагона определены значения узловых реакций. На рис. 2 приведены векторы узловых сил для обоих этапов исследования. Результаты расчета показали, что характер распределения нагруженности стенок кузова вагона несколько отличается от вида, характерного

при использовании теории Кулона. При решении задачи в упругой постановке (рис. 2, а) максимальные значения узловых реакций зафиксированы в местах геометрических концентраторов (вершина бункера, переход от вертикальной стенки на наклонную). В то же время при использовании гипотезы Друкера-Прагера получено, что максимальные значения узловых сил получены на некотором расстоянии от указанных выше геометрических концентраторов (рис. 2, б).

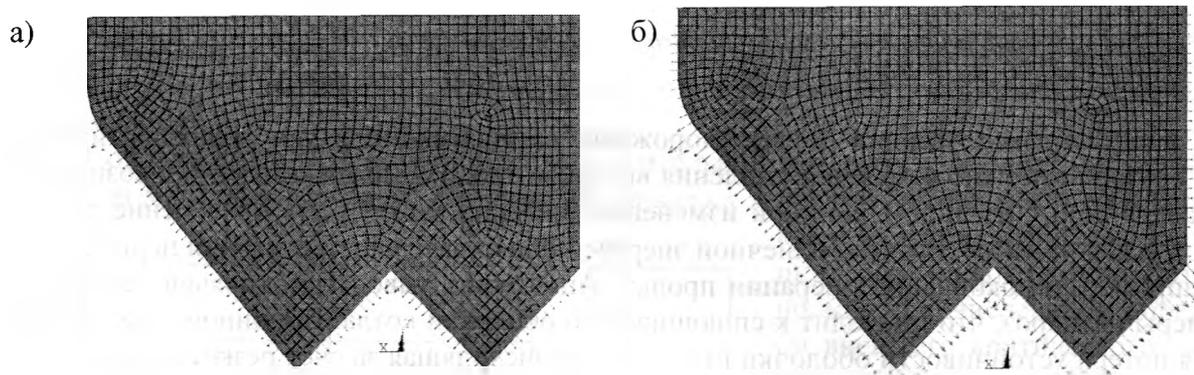


Рис. 2 Вектора узловых реакций при осадке сыпучего груза: а – упругая среда; б – упруго-идеальнопластическая среда

Полученные значения узловых сил могут быть использованы при проведении прочностных расчетов кузовов грузового подвижного состава, предназначенного для перевозки сыпучих грузов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бидуля, А. Л.** Компьютерное моделирование железнодорожного балласта в плоской твердотельной постановке [Электрон. ресурс] / А. Л. Бидуля, Д. Г. Агапов, Д. Ю. Погорелов – 2004. Режим доступа: http://umlab.ru/download/docs/rus/agapov_vestnik.pdf.
2. **Занкович, А. В.** Применение метода конечных элементов для моделирования сыпучего тела при исследовании нагруженности кузовов вагонов / А. В. Занкович, А. Э. Павлюков // Безопасность движения, совершенствование конструкций вагонов и ресурсосберегающие технологии в вагонном хозяйстве: сб. научн. тр. – Екатеринбург: УрГУПС, 2003. – С. 143 – 147.
3. **Зенков, Р. Л.** Механика насыпных грузов / Р. Л. Зенков. – М.: Машиностроение, 1964. – 251 с.
4. **Gavrilov, D.** Object-oriented library for simulation of granular-type materials / D. Gavrilov, O. G. Vinogradov // Proceedings of the 1994 Summer Computer Simulation Conference – San Diego: CA. – P. 51 – 56.
5. **Verruijt, A.** Soil mechanics / A. Verruijt. – Delft University of Technology, 2001. – 340 p.
6. **Vinogradov, O. G.** Explicit equation of motion of discrete system of disks in two dimensions / O. G. Vinogradov // Journal of Engineering Mechanics. Vol. 118, № 9 – P. 1850 – 1858.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНЕШНЕГО КРИТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ ОБОЛОЧКИ КОТЛА ВАГОНА-ЦИСТЕРНЫ

Путьято А.В.

Methods of computational mechanics solve a problem of definition of external critical pressure of an envelope of the boiler of the tankcar in view of change of its width

В процессе эксплуатации железнодорожных вагонов-цистерн при транспортировке жидких грузов возможно изменение давления внутри котла, что может привести к возникновению аварийной ситуации. Причиной изменения давления может быть повышение теплопритоков вследствие нагревания солнечной энергией или охлаждением в зимний период.

Например, по окончании операции пропарки цистерны выводят из горячей пропарочной камеры на мороз, что приводит к сплющиванию оболочки котла. Причиной этих аварий является потеря устойчивости оболочки цистерны, происходящая за счет резкого понижения температуры после выведения цистерны из горячей пропарочной камеры на мороз, уменьшения объема воздуха внутри цистерны и появления избыточного наружного давления. Все эти явления происходят вследствие односторонней работы перепускного клапана, предназначенного уравнивать давления внутри и снаружи оболочки цистерны. Кроме того, величина критического давления снижается со временем за счет коррозии металла и уменьшения толщины стенок цистерны [3, 4]. В результате чего цистерны становятся непригодными к эксплуатации, железные дороги теряют подвижной состав и несут убытки.

При проектировании одним из критериев работоспособности конструкции железнодорожных цистерн является проверка элементов котла на действие наружного давления и обеспечение коэффициента запаса устойчивости не менее 1,05. Согласно Критическое внешнее давление цилиндрической оболочки «Норм для расчета и проектирования вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных)» [5] определяется по формуле

$$P_{кр} = 0,6kE \cdot \frac{R}{L} \cdot \left(\frac{\delta}{R} \right)^{2,5},$$

где E – модуль упругости материала оболочки котла, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па;

R – внутренний радиус цилиндрической оболочки, $R = 1,49$ м;

L – длина цилиндрической оболочки, $L = 9,5$ м;

δ – наименьшая толщина цилиндрической оболочки;

k – коэффициент, определяемый по формуле

$$k = \frac{(1 - \alpha + \alpha \cdot t^2)^{0,25}}{1 - \alpha + \alpha \cdot t^3},$$

где α – отношение ширины броневых листов к длине внутренней окружности поперечного сечения оболочки, $\alpha = \alpha_1 / 360$;

α_1 – угол при вершине броневых листов, $\alpha_1 = 60^\circ$;

t – отношение наименьшей толщины цилиндрической оболочки котла к толщине броневых листов.

Воспользовавшись описанной методикой, для котла нефтебензиновой цистерны модели 15 – 1443 получена зависимость значений критического давления от толщины стенки оболочки котла цилиндрической части (рис. 1, кривая 1). Кривая 2 соответствует допускаемому наружному давлению согласно Нормам $P_{кр} = 50$ кПа. Анализируя полученные результаты

расчета верхнего критического давления по нормативной методике установлено, что предельное значение толщины цилиндрической части котла составляет $\delta_{lim} = 8,5$ мм. В то же время, при изготовлении листового проката для котлов железнодорожных цистерн минусовой допуск на толщину может составлять 0,8 мм. Кроме того, учитывая, что средняя скорость коррозии 0,02 мм/год оболочки котла, а средний возраст цистерны более 30 лет, утонение цилиндрической части может составлять 30 % и более от номинальной толщины, равной 9 мм.

Таким образом, исходя из результатов, полученных по нормативной методике, уже в первые годы эксплуатации возможна угроза потери устойчивости оболочки котла, что недопустимо.

Современный уровень развития вычислительной механики позволяет определять численными методами не только значения критических давлений конструкции, но и соответствующие формы.

С целью верификации полученного результата воспользуемся численным определением внешнего критического давления реализованного в методе конечных элементов, рекомендуемым для расчета элементов конструкций подвижного состава. С учетом допущений о жестких плоских днищах, предусмотренных Нормами, разработана конечно-элементная модель котла вагона цистерны с учетом особенностей, связанных с переменной толщиной листов в программном комплексе ANSYS. Модель аппроксимирована 4-х узловыми оболочечными конечными элементами с размерами сторон 0,15 м. и состоит из 5954 элементов.

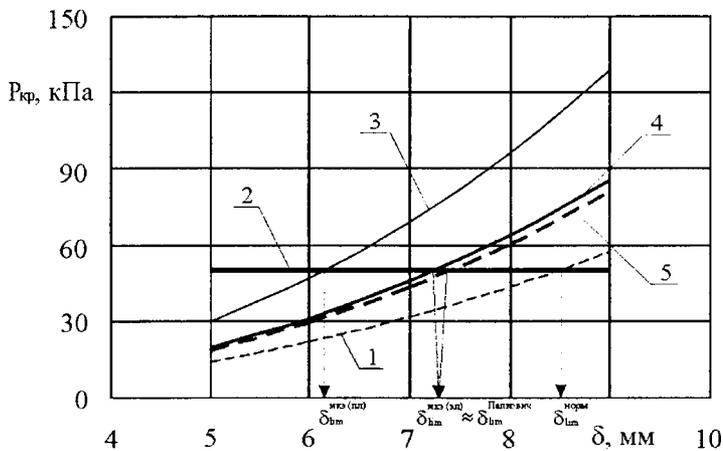


Рис. 1. Зависимости критического давления от толщины цилиндрической обечайки котла: 1 – расчет по нормативной методике; 2 – допускаемое наружное давление по Нормам; 3 – расчет по МКЭ (плоские жесткие днища); 4 – расчет по МКЭ (эллиптические днища); 5 – расчет по формуле П.Ф. Папковича

Кинематические граничные условия представляют собой ограничение всех степеней свободы узлов в области крепления котла к раме в средней части. Нагружена оболочка цистерны равномерно распределенным внешним давлением, равным 1 Па. На рис. 2,а представлена ½ часть расчетной модели с соответствующими симметричными граничными условиями.

Программный комплекс ANSYS предоставляет возможность для проведения двух видов конечно-элементного анализа задач устойчивости. Первый вариант состоит в построении линейного приближения и последующего определения точек бифуркации линеаризованных уравнений устойчивости. Построение линейного приближения состоит в работе решателя при статическом типе анализа и включенной опции «преднапряженного» состояния. Далее задаются условия закрепления и силовые факторы, которые могут вызвать потерю устойчивости. Величину разряженного давления принимают равной единице, поскольку рассматривается полная модель. При выполнении команды решателя формируется геометрическая или инкрементальная матрица жесткости S [1], пропорциональная приложенным силовым факторам. После выхода из решателя организуется второй этап, состоящий в решении задачи на собственные значения:

$$[K]\{u\} + \{\lambda\}[S]\{u\} = 0. \quad (1)$$

Уравнения (1) являются конечно-элементными аппроксимациями линеаризованных уравнений устойчивости для определения точек бифуркаций. Собственные числа λ_i являются приближенными значениями критических сил или нагрузок, а соответствующие собственные век-

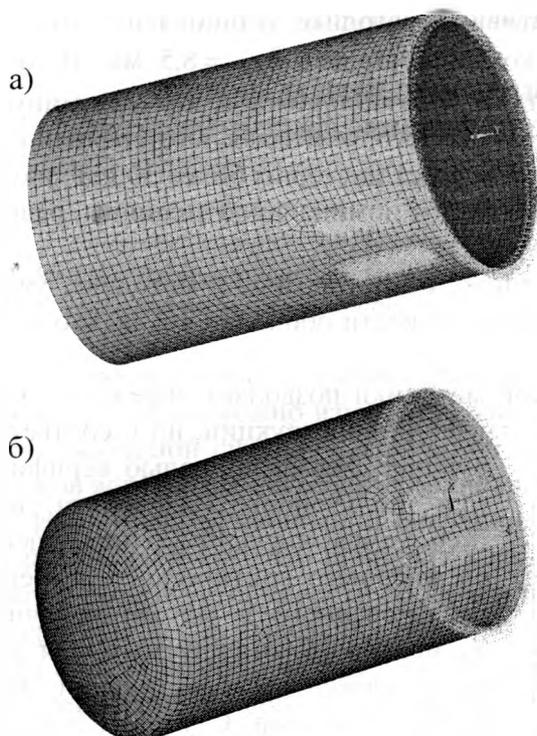


Рис. 2. Конечно-элементные модели котла вагона-цистерны

специальный метод – Arc-Length Method, в котором осуществляются явные сферические итерации по ортогональным к радиусам дуг направлениям.

Остановимся на первом варианте решения задачи устойчивости, хотя решение в линеаризованной постановке не всегда приемлемо, но для многих задач оно позволяет получать удовлетворительные оценки. Также при расчетах устойчивости будем пренебрегать наличием нижней горловины, поскольку согласно [6] они несущественно влияют на получаемый результат.

В результате оценки устойчивости котла при моделировании днищ жесткими пластинами получена зависимость критического давления от толщины цилиндрической части оболочки котла (рис. 1, кривая 3). Установлено, что для номинальной толщины значение давления составляет 120,7 кПа, что в 2 раза больше, полученного по аналитической зависимости, приведенной в Нормах.

Большая разница в результатах может быть вызвана изменением граничных условий на торцах цилиндрической части (в области перехода на сферические днища) при допущении о их плоской форме с высокой жесткостью материала. В связи с этим, на следующем этапе исследований конечно-элементная модель уточнена путем моделирования реальной геометрии сферических днищ. На рис. 2,б приведена $\frac{1}{2}$ часть расчетной модели котла со сферическими днищами, включающая 6248 конечных элементов. Результатом расчета устойчивости оболочки котла служит зависимость, приведенная на рис. 1 в виде кривой 4. Видно, что значения критического давления существенно уменьшились, хотя и отличны от значений, полученных аналитическим путем по Нормах. Форма потери устойчивости котла приведена на рис. 3,а. Следует отметить, что полученное равновесное состояние близко к истинной форме потерявшей устойчивость реальной цистерны (рис. 3,б).

Учитывая, что разработанная модель соответствует реальной геометрии котла и условиям закрепления на следующем этапе исследований поставлена задача определения достоверности полученных результатов из условий принятого типа конечного элемента и его размера. С этой целью решена классическая задача потери устойчивости цилиндрической оболочки, точное аналитическое решение которой известно.

тора u_i описывают формы потери устойчивости. Как правило, в задачах устойчивости ограничиваются только первой парой $\{\lambda_1, u_1\}$, но в ANSYS легко можно найти и последующие значения.

Второй вариант анализа задач устойчивости более точный, но и требует значительных затрат машинного времени. Этот анализ основывается на нелинейных соотношениях и состоит в определении траектории равновесных состояний, т. е. зависимости «нагрузка – перемещение». Нелинейные КЭ соотношения имеют вид

$$[K](\{u\}) \{u\} = \{F\}. \quad (2)$$

От других видов нелинейного анализа задачи устойчивости отличаются тем, что здесь по предыдущим значениям пар $\{u_i, F_i\}$ и (2) требуется определять последующие пары $\{u_{i+1}, F_{i+1}\}$ равновесных состояний, причем F_i и F_{i+1} считаются пропорциональными. Для решения задачи (2) применяется спе-

Для оценки верхнего критического внешнего давления, образующегося как разность атмосферного давления и давления внутри котла, воспользуемся линейным уравнением теории круговых цилиндрических оболочек [2, 3], которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{D}{\delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \beta^2} \right)^4 \omega + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + q \frac{R}{\delta} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \beta^2} \right)^2 \frac{\partial^2 \omega}{R^2 \partial \beta^2} = 0, \quad (3)$$

где $\omega = \omega(x, \beta)$ – радиальное перемещение точек срединной поверхности оболочки;

x – координата точки, отсчитываемая вдоль образующей цилиндра;

β – угловая координата точки на срединной поверхности, отсчитываемая от нижнего кольца вертикального диаметра поперечного сечения;

R – радиус кругового сечения срединной поверхности цилиндрической части котла;

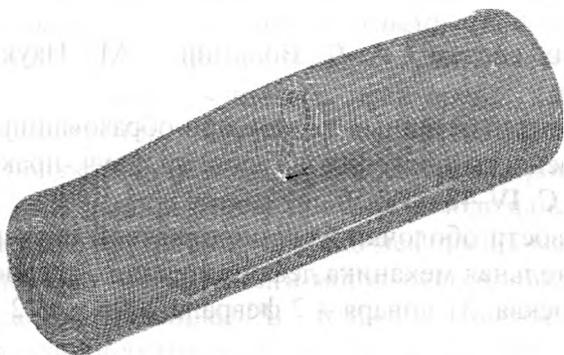
q – давление;

D – цилиндрическая жесткость оболочки котла; $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$;

E – модуль упругости материала оболочки;

μ – коэффициент Пуассона.

а)



б)

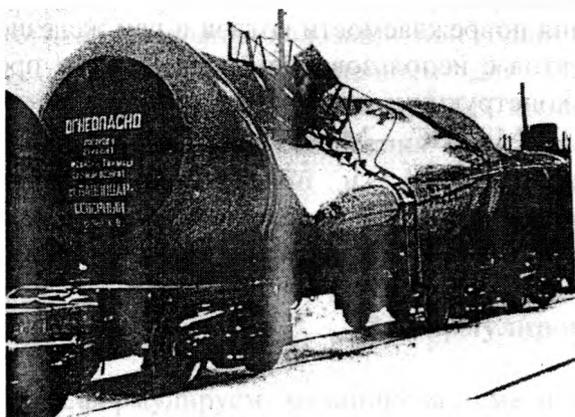


Рис. 3. Форма потери устойчивости оболочки котла

Как правило, принимается, что на днищах котла прогибы ω отсутствуют, а также вследствие высокой жесткости в плоскости поперечного сечения вторая производная от ω по x равна нулю, т. е. при длине котла L имеем при

$$x = 0 \text{ и } x = L \quad \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0.$$

Учитывая периодичность значения ω из-за формы поперечного сечения и принятые условия на днищах, прогиб представляется выражением

$$\omega = A \sin \frac{\pi x}{L} \cos n\beta. \quad (4)$$

При подстановке выражения (4) в (3) и выполнения операций, предусмотренных методом Бубнова–Галеркина, получаем следующее выражение

$$q_{кр} = \frac{D}{R} \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n^2}{R} \right)^2 \right]^2 \frac{R^2}{n^2} + \frac{\frac{E\delta}{R^3} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{R}{n} \right)^2}{\left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2},$$

В результате минимизации которого по числу волн n в поперечном сечении, получается формула П. Ф. Папковича

$$q_{кр} = 0,92E \frac{\delta^2}{RL} \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$

В результате расчета критического давления по формуле П. Ф. Папковича (рис. 1, кривая 5) и численного расчетов получено расхождение результатов в 2 % при применении вышеупомянутого типа конечного элемента с принятыми размерами для моделирования котла.

Таким образом, проведенные исследования показали, что результаты значения критического давления, полученные при моделировании реальной геометрии днищ можно считать наиболее близкими к действительным. В то же время возникает вопрос о том, каким геометрическим и кинематическим условиям соответствует результат, получаемый с использованием зависимости, рекомендуемой Нормами для расчета значения критического давления. Выполнив серию расчетов при варьировании граничными условиями, связанными с особенностью закрепления котла вагона-цистерны на раме, а также с геометрией области приварки сферических днищ к цилиндрической обечайке можно сделать вывод, о том, что зависимость, приведенная в Нормам, справедлива при расчете потери устойчивости элементов котла в случае представления днищ плоскими с характеристиками реального материала котла вагонов-цистерн и толщиной 12 мм.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Беликов, Н. В.** Определение давления срабатывания хлопающих предохранительных мембран с использованием «АСНИ-МЕМБРАНА» и конечно-элементного комплекса ANSYS: учеб.-метод. пособие для вузов / Н. В. Беликов, Ю. М. Занимонец, А. В. Наседкин. – Ростов н/Д: УПИ РГУ, 1998. – 30 с.
2. **Вольмир, А. С.** Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
3. К вопросу обеспечения устойчивости оболочки тонкостенных котлов при образовании в них вакуума / В. Н. Котуранов [и др.] // Безопасность движения поездов: тр. науч.-практ. конф. Москва, 16 – 18 апр. 2003 г. – М., 2003. – С. IV-48 – IV-50.
4. **Косицин, С. Б.** Исследование потери устойчивости оболочки железнодорожной цистерны / С. Б. Косицин, Г. А. Мануйлов // Вычислительная механика деформируемого твердого тела: труды междунар. науч.-техн. конф. Москва, 31 января – 2 февраля 2006 г. В 2 т. Т. 1 – М., 2006. – С. 236 – 240.
5. Нормы для расчета и проектирования вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных) / ГосНИИВ-ВНИИЖТ. – М., 1996. – 319 с.
6. **Овечников, М. Н.** Решение проблемы снижения повреждаемости котлов и рам железнодорожных цистерн для перевозки нефтепродуктов с использованием современных программных средств моделирования и расчета конструкции: автореф. дис. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук / М. Н. Овечников; МИИТ – МГУПС. – М., 2001. – 47 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАКРОТРЕЩИН В МАССИВАХ ГОРНЫХ ПОРОД

Журавков М.А., Чумак Н.Г.

In this paper the shape optimization problem of laminate discontinued rocks is considered. The paper presents some possible formulations of optimal structural design problem based on probabilistic approaches due to possible incompleteness of information concerning crack size, location and orientation. Using these approaches optimal designs for laminate rocks approximated to the beams with surface and internal cracks under fracture mechanics constraints have been found.

1. Введение

Рассмотрим задачу, заключающуюся в изучении различных ситуаций появления и последующего распространения поверхностных и внутренних макротрещин в массивах горных пород. Определяющим моментом при построении методики решения данной задачи является то, что, вследствие специфики среды распространения трещины, ее *положение трещины, размер и тип (открытые трещины, трещины сдвига и т.д.) предполагаются статистически неопределимыми (недетерминированными) параметрами*. То есть при выполнении исследований учитывается факт неполноты исходной информации относительно основных факторов, характеризующих макротрещину. Поэтому при рассмотрении сформулированного класса задач будем пользоваться подходами, основанными на дополнении детерминированных подходов вероятностными методами [1, 2].

В данной статье построим модельные задачи для условий слоистых массивов горных пород в постановке плоско-деформированного состояния. Такие модели имеют широкий диапазон применения и могут использоваться для изучения различных важных прикладных задач геомеханики [3]. К ним относятся, например, проблемы исследования устойчивости кровли подготовительных и капитальных выработок; условий появлений макротрещин в непосредственной и основной кровле очистных выработок; задачи исследования состояния породных образований в зоне трещиноватости, изучения состояния слоев в зоне плавного прогиба и состояния водозащитной толщи на предмет появления в них макротрещин и т.д.

Весьма распространенным для упомянутых типов прикладных задач является использование в качестве модельных таких конструкций, как балки и плиты. Например, при изучении процессов расслоения и разрушения кровли очистной выработки для пластовых месторождений, одной из наиболее распространенной модельной задачей является исследование процессов деформирования различных балочных конструкций под воздействием широкого класса внешних нагрузок и при разнообразных граничных условиях.

2. Формулировка модельных задач

Сформулируем механико-математическую постановку общей модельной задачи. В последующих разделах рассмотрим примеры некоторых классов модельных геомеханических задач, базирующихся на общей механико-математической формулировке.

Как указывалось ранее, рассматриваем модельные задачи в двухмерной постановке. Исследуем напряженно-деформируемое состояние (НДС) твердого деформируемого двумерного тела, занимающего область V и находящегося под воздействием внешнего (по отношению к рассматриваемому элементу) нагружения. НДС рассматриваемого тела описывается стандартной системой разрешающих уравнений теории упругости.

Пусть поведение материала рассматриваемого деформируемого тела можно описать как хрупкое или квазихрупкое, и пусть в теле имеется макротрещина длиной l . Трещина предполагается прямолинейной и малой по сравнению с характерным размером L тела, т.е. $l \ll L$. Координаты центра трещины обозначим как $(x_c, y_c) \in V$.

Рассмотрим ситуацию, когда координаты центра трещины (т.е. положение трещины в теле), угол наклона трещины по отношению к оси oX в глобальной системе координат, длина трещины или совокупность всех или некоторых из этих параметров являются неизвестными заранее. Поэтому для выполнения полного анализа НДС деформируемого тела необходимо рассмотреть различные случаи расположения трещины и значений ее основных параметров.

Решив соответствующую задачу теории упругости для деформируемого тела с трещиной и определив НДС в нем, можно выполнить оценку коэффициентов интенсивности напряжений K_1 и K_2 в соответствии со следующими асимптотическими представлениями [4].

$$K_1 = \sigma_n \sqrt{2\pi r} + O(1), \quad K_2 = \sigma_\tau \sqrt{2\pi r} + O(1), \quad (2.1)$$

где σ_n и σ_τ – соответственно нормальная и касательная компоненты вектора напряжений в точке, лежащей на оси трещины и находящейся около ее вершины (кончика) на расстоянии r . Оси τ и n являются осями локальной ортогональной системы координат, где ось τ параллельна оси трещины.

Как известно, условия, при выполнении которых трещина не распространяется, могут быть представлены в следующем виде:

$$K_i \leq K_{iC}, \quad (i=1,2) \quad (2.2)$$

для случаев трещины отрыва ($i=1$) и трещины сдвига ($i=2$), и

$$\frac{K_1^2 + K_2^2}{E} \leq G_C \quad (2.3)$$

для случаев сложно-напряженного состояния, когда общее напряженное состояние можно представить как композицию напряжений сдвига и растяжения.

Величины K_{iC} и G_C являются заданными прочностными характеристиками материала.

Если размеры трещины являются достаточно малыми по сравнению с характерными размерами тела и трещина расположена внутри тела (не выходит на поверхность), то для коэффициентов интенсивности напряжений можно использовать следующие выражения [5, 6]:

$$K_1 = \sigma_n^0 \sqrt{\pi l / 2}, \quad K_2 = \sigma_\tau^0 \sqrt{\pi l / 2}, \quad (2.4)$$

где $\sigma_n^0, \sigma_\tau^0$ – начальное напряженное состояние в теле без трещины.

В случае, когда трещина выходит на поверхность тела и расположена нормально к поверхности тела (наиболее распространенный на практике случай), выражение для коэффициента K_1 имеет вид [5, 6]:

$$K_1 = 1.12 \sigma_n^0 \sqrt{\pi l}. \quad (2.5)$$

Ведем следующее дополнительное положение (являющееся весьма распространенным на практике, но которое существенно осложняет модельную задачу): *один из определяющих параметров трещины рассматриваем как случайную переменную ξ с известной функцией плотности распределения $f(\xi)$, в то время как другие параметры трещины считаем заданными или определяемыми.*

Методику решения сформулированных модельных задач будем строить, основываясь на результатах исследований, изложенных в работе [7].

Предположим, что форма деформируемого тела описывается функцией h пространственных координат, которая принимается как неизвестная проектируемая переменная и которую рассматриваем как тип трещины i . Введем малый положительный параметр ε и в соответствии с этим параметром преобразуем значение коэффициента

интенсивности напряжений следующим образом: $K_{i\varepsilon} = K_{iC} - \varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$ [8, 9]. Тогда в терминах механики разрушения можно записать:

$$K_i(\xi, h) = K_{i\varepsilon}. \quad (2.6)$$

В общем случае коэффициент интенсивности $K_i(\xi, h)$ зависит непосредственно (через зависимость параметров трещины и решение уравнений теорий упругости) от случайной переменной ξ . В частных случаях представляется возможным упростить зависимость K_i от переменной ξ и выразить формулу для K_i в некотором упрощенном виде. Возможная функция плотности распределения переменной ξ позволяет в принципе определить моменты случайной величины K_i и в частности количественные показатели их математического ожидания и дисперсии. Это в свою очередь позволяет проконтролировать возможные нарушения искомой величины (2.6) и решить оптимизационную задачу, состоящую в определении функции h , удовлетворяющей системе неравенств:

$$K_i = E(K_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_i(\xi, h) f(\xi) d\xi \leq K_{i\varepsilon}, \quad (2.7)$$

$$D(K_i) = E\left((K_i - K_i)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (K(\xi, h) - K)^2 f(\xi) d\xi \leq \delta, \quad (2.8)$$

и минимизирующей функционал $V(h)$ (объем или вес структурного элемента), т.е.:

$$V = V(h) = \int_{\Omega} \gamma d\Omega \rightarrow \min_h. \quad (2.9)$$

В выражениях (2.7) и (2.8) E и D обозначают соответственно математическое ожидание и дисперсию для случайной переменной, а δ обозначает достаточно малое число, которое считается заданным. Соотношение механики разрушения (2.6) должно удовлетворяться в «среднем» и отклонение значения $K_i - K_{i\varepsilon}$ должно быть не больше достаточно малой выбранной величины.

Замечание. Следует отметить, что понятия «малая величина» и «большая величина» являются относительными и должны обязательно рассматриваться по отношению к размерностям основных параметров и величин рассматриваемых задач [3].

Приведенная формулировка оптимизационной задачи является достаточно общей. **Уточним общую оптимизационную задачу с учетом рассматриваемого класса прикладных задач** [7].

Примем дополнительно, что $K_i(\xi, h)$ является монотонной функцией от ξ и уравнение $K_i(\xi, h) = K_0$ имеет единственное решение $\xi_0 = \xi_0(h, K_0)$ для фиксированных значений h и K_0 . Вероятность P выполнения неравенства $K_i \leq K_0$ может быть оценена следующим соотношением:

$$P(K_i \leq K_0) = P(\xi \leq \xi_0) = \int_0^{\xi_0} f(\xi) d\xi. \quad (2.10)$$

Тогда, вероятностное выражение механики разрушения, описывающее состояние трещины, когда ее длина не увеличивается (трещина «не растет»), может быть записано в следующей форме:

$$P(K_i \leq K_{i\varepsilon}) = \int_0^{\xi_\varepsilon} f(\xi) d\xi \geq 1 - \nu, \quad (2.11)$$

где $K_{i\varepsilon} = K_{iC} - \varepsilon$; ν – достаточно малая положительная величина; ξ_ε – решение уравнения вида:

$$K_i(\xi, h) = K_{i\varepsilon}. \quad (2.12)$$

Итак, оптимизационная задача, базирующаяся на методах механики разрушения и вероятностном приближении, может быть сформулирована как задача минимизации функционала (2.9) при ограничении (2.11), взяв в расчет уравнения теории упругости, описывающие состояние рассматриваемых структурных элементов [3].

3. Исследование НДС кровли протяженных подземных выработок с макротрещинами

Используем описанную общую процедуру построения оптимизационной задачи для изучения НДС кровли протяженной выработки в случае наличия в ней макротрещины. Задачи будем решать как статистически определенные: силовая нагрузка является известной заранее. Например, может быть известны заранее изгибающие моменты M и перерезывающие силы Q от нагрузки, действующей на слой в кровле.

Пусть распределение напряжений по толщине слоя в кровле выработки не зависит от свойств материала слоя. Для оценки коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах (на кончиках) внутренних и поверхностных трещин введем в рассмотрение следующие дополнительные ограничения:

- внутренние трещины появляются далеко от граничных поверхностей слоя (рассматриваемого как балка);
- длины поверхностных трещин намного меньше, чем радиус кривизны поверхности.

3.1. Определение толщины слоя в случае, когда длина трещины рассматривается как случайная переменная

А. Рассматривается слой (балка), находящийся под воздействием поперечной нагрузки, в случае наличия в нем *трещины, выходящей на поверхность слоя*.

В модельной задаче в качестве объекта исследований выбираем балку длиной L , расположенную вдоль оси x ($0 \leq x \leq L$), имеющей прямоугольное поперечное сечение высотой $h=h(x)$ и постоянной ширины b . Нагрузки, действующие на слой-балку, представим как функции изгибающего момента $M(x)$ и перерезывающей силы $Q(x)$ в поперечном сечении балки и будем считать, что они не зависят от упругих свойств, а форма поперечного сечения считается известной для $0 \leq x \leq L$.

Максимальные растягивающие напряжения приводят к растяжению поверхности балки для любого поперечного сечения. Введем координату ζ , которая определяет расстояние от центра поперечного сечения до поверхности балки. Тогда данная координата изменяется в интервале $-h/2 \leq \zeta \leq h/2$, а поверхность определяется как $|\zeta| = h(x)/2$. Значение максимальных напряжений равно: $\sigma_x = 6|M(x)|/(bh^2(x))$.

Коэффициент интенсивности напряжений K_1 для поверхностной трещины в любом поперечном сечении может быть оценен по формуле [6, 9]:

$$K_1 = 1.12\sigma_x\sqrt{\pi\xi} = \varphi(x)\sqrt{\xi}, \quad (3.1)$$

где, в соответствии с условиями задачи, $\varphi(x) = k_1|M(x)|/(bh^2(x))$, $k_1 = 6.72\sqrt{\pi}$.

Длина поверхностной трещины ξ является случайной переменной, характеризуемой известной функцией плотности распределения $f(\xi)$.

Для коэффициента интенсивности напряжений K_1 выражения для математического ожидания $E(K_1)$ и дисперсии $D(K_1)$ имеют вид:

$$E(K_1) = \int_0^{+\infty} K_1 f(\xi) d\xi = \varphi(x)E(\sqrt{\xi}), \quad (3.2)$$

$$D(K_1) = \int_0^{+\infty} (K_1 - E(K_1))^2 f(\xi) d\xi = \varphi^2(x) D(\sqrt{\xi}). \quad (3.3)$$

Используя выражения (3.1) - (3.3), уравнения (2.7) и (2.8) могут быть представлены в следующей форме:

$$h(x) \geq h_E(x) \equiv \left[\frac{k_1 |M(x)|}{b K_{1\varepsilon}} E(\sqrt{\xi}) \right]^{1/2}, \quad (3.4)$$

$$h(x) \geq h_D(x) \equiv \left[\frac{k_1 |M(x)|}{b} \right]^{1/2} \left[\frac{D(\sqrt{\xi})}{\delta} \right]^{1/4}. \quad (3.5)$$

Здесь, согласно введенным обозначениям, $K_{1\varepsilon} = K_{1c} - \varepsilon$, где ε – малый параметр.

Задача оптимизации состоит в определении допустимого распределения толщины слоя при условии минимума его объема при выполнении прочностных ограничений (3.4) и (3.5).

Если взять в расчет условие геометрического ограничения для распределения толщины слоя (например, по условию прочности) $h(x) \geq h_{\min}(x)$, тогда *решение задачи определения оптимальной толщины слоя в приближении последнего балкой по условию отсутствия дальнейшего роста имеющейся в нем трещины, выходящей на поверхность слоя*, может быть записано следующим образом:

$$h(x) = \max \{ h_{\min}(x), h_E(x), h_D(x) \}. \quad (3.8)$$

Пример 1. В качестве примера рассмотрим слой (балку) с макротрещиной, выходящей на поверхность. Длина балки $L=100$ м, ширина $b=1.5$ м и высота $h(x)$. Балка находится под воздействием распределенной нагрузки интенсивности $q=1$ кН/м, сосредоточенной силы $F=50$ кН и момента $M=5$ кНм (рис.1).

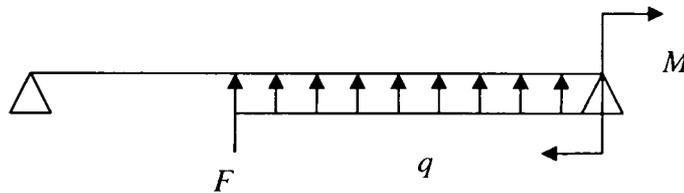


Рис.1. Условная схема действующей на слой нагрузки (пример 1)

Для сформулированных условий определим высоту слоя, при условии, что имеющаяся в нем макротрещина, выходящая на граничную поверхность, не будет распространяться. Рассмотрим такие горно-геологические условия, когда толщина слоев $h(x)$ изменяется в пределах $0.3\text{м} < h(x) < 0.5\text{м}$.

Общее выражение для изгибающего момента $M(x)$ для заданных условий нагружения имеет вид:

$$M(x) = R_A H_1(x) + P H_1(x-a) + q H_2(x-a) - M H_0(x-L) + R_B H_1(x-L),$$

где R_A, R_B – реакции опор на концах балки; $H_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ – семейство функций Хэвисайда; сосредоточенная сила F приложена на расстоянии a то начала координат.

Предположим, что функция изменения $h(x)$ соответствует нормальному закону распределения случайной величины с плотностью распределения $f(\xi) = \frac{1}{0.35\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\xi-0.1}{0.35} \right)^2}$.

Процедура численного решения задачи строилась, основываясь на формулах (3.1)-(3.8). При этом в выражениях (3.4) и (3.5), в соответствии с условиями рассматриваемого примера, принималось, что $K_{Ic} = 30 \times 10^6 \text{ МПа} / \sqrt{\text{м}}$, $\delta = K_{Ic}^2 / 4$. Результаты расчетов представлены в виде графика зависимости толщины слоя (высоты балки) $h_{\min}(x), h_{\epsilon}(x), h_D(x)$ от местоположения трещины (рис.2).

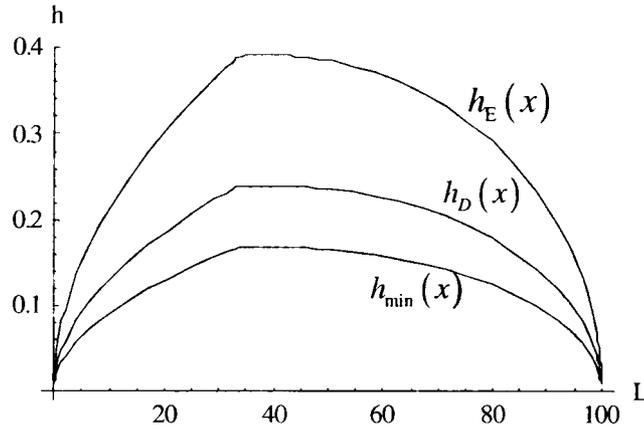


Рис. 2. Графики $h_{\min}(x), h_{\epsilon}(x), h_D(x)$ для закона нормального распределения случайной величины - длины трещины, выходящей на поверхность слоя

Как следует из графиков (рис.2), для того, чтобы макротрещина, имеющаяся в слое и выходящая на его поверхность, не распространялась при любом ее расположении по длине слоя, необходимо, чтобы высота слоя была не менее $h(x)=0.4$ м.

Б. В качестве следующей рассмотрим оптимизационную задачу для слоя-балки, поведение материала которого соответствует закону хрупкого (квасихрупкого) поведения, с низким предельным значением коэффициента интенсивности срезающих напряжений K_{2c} . Известно, что срезающие напряжения являются максимальными на нейтральной оси слоя-балки. Будем использовать известное выражение для срезающих напряжений $\sigma_{xy} = 3|Q(x)|/(2bh(x))$ для получения функциональной зависимости срезающих напряжений от переменных b, h и $Q(x)$.

Пусть в слое имеется *внутренняя трещина сдвига*, расположенная на оси x . При этом длина трещина намного меньше, чем минимальная толщина слоя-балки h_{\min} . Кроме того, пусть характеристический размер области срезающих напряжений варьируется для слоя без трещины.

Выражение для коэффициента интенсивности срезающих напряжений для изолированной трещины (тип II) имеет вид:

$$K_2 = \sigma_{xy} \sqrt{\pi \xi} = \varphi(x) \sqrt{\xi}, \quad (3.9)$$

где $\varphi(x) = k_2 \frac{|Q(x)|}{bh(x)}$, $k_2 = 3\sqrt{\pi}/2$.

Выполнив оценки, аналогичные при получении выражений (3.2)-(3.5), и введя обозначения

$$h_E(x) \equiv k_2 \frac{|Q(x)| E(\sqrt{\xi})}{b K_{2c}}, \quad h_D(x) \equiv k_2 \frac{|Q(x)| \left[\frac{D(\sqrt{\xi})}{\delta} \right]^{1/2}}{b}, \quad (3.10)$$

где $K_{2\varepsilon} = K_{2C} - \varepsilon$, а ε – малый параметр, получим оптимальное решение в форме (3.8), которое минимизирует объем слоя при ограничениях (2.7) и (2.8) и требовании $h(x) \geq h_{\min}(x)$, $0 \leq x \leq L$.

Пример 2. В качестве примера приведены результаты численного расчета, выполненные при следующих значениях: $K_{2C} = 10^5 \text{ МПа}/\sqrt{\text{м}}$; размеры слоя и нагрузка те же, что и в примере 1: длина $L=100$ м, ширина $b=1.5$ м, распределенная нагрузка $q=1$ кН/м, сосредоточенная сила $F=50$ кН, момент $M=5$ кНм.

Выражение для поперечной нагрузки $Q(x)$ имеет вид:

$$Q(x) = R_A H_0(x) + P H_0(x-a) + q H_1(x-a) + R_B H_0(x-L).$$

Оптимальное решение находится в соответствии с (3.8), где $h_\varepsilon(x)$ и $h_D(x)$ определяются в соответствии с (3.10) с учетом (3.9), а h_{\min} вычисляется по условию прочности.

На рис.3 представлены графики функций $h_{\min}(x)$, $h_\varepsilon(x)$, $h_D(x)$ для данного случая.

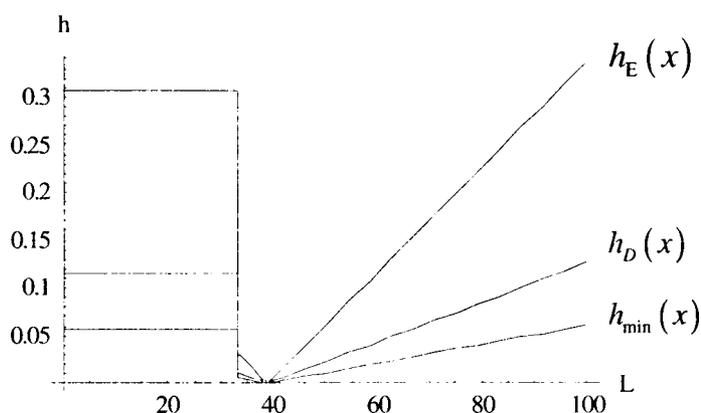


Рис 3. Графики функций $h_{\min}(x)$, $h_\varepsilon(x)$, $h_D(x)$ для закона нормального распределения случайной величины - длины внутренней трещины (по срезающим усилиям)

Из графиков, представленных на рис.3, следует, что для того, чтобы внутренняя макротрещина не распространялась далее в слое при воздействии срезающих усилий, необходимо, чтобы высота слоя была не менее $h(x)=0.34$ м.

3.2. Определение высоты слоя-балки в случае, когда расположение трещины является случайной величиной

Как и ранее рассматриваем задачу определения оптимальной толщины (высоты) слоя $h(x)$ ($0 \leq x \leq L$).

Пусть трещина расположена на нейтральной оси слоя и координата ее центра ξ считается случайной переменной с известной функцией плотности $f(\xi)$. Будем считать, что длина l трещины, которая может появиться в слое, является величиной заданной. Предполагаем, что породы, составляющие слой, обладают низким значением коэффициента интенсивности срезающих напряжений K_{2C} .

Замечание. Такая модельная задача является, например, аналогом такой прикладной задачи, когда требуется определить место появления трещины заданной длины в слое.

Для сформулированной задачи выражение для коэффициента интенсивности напряжений имеет вид [6, 8, 9]:

$$K_2 = K_2(\xi, h(\xi)) = k_2 \sqrt{l} \frac{|Q(\xi)|}{bh(\xi)},$$

где перерезывающая сила $Q(\xi)$ задана для интервала $0 \leq \xi \leq L$.

Для среднего значения и вариации коэффициента K_2 можно записать следующие выражения:

$$E(K_2) = \int_0^L K_2 f(\xi) d\xi \equiv J_1,$$

$$D(K_2) = \int_0^L (K_2 - \int_0^L K_2 f(\xi) d\xi)^2 \cdot f(x) dx = \int_0^L K_2^2 f(x) dx - (\int_0^L K_2 f(x) dx)^2 \equiv J_2 - J_1^2,$$

где J_1 и J_2 – однородные функционалы от h :

$$J_1(h) = \int_0^L \frac{\psi}{h} f(\xi) d\xi, \quad J_2(h) = \int_0^L \frac{\psi^2}{h^2} f(\xi) d\xi, \quad \psi = \psi(\xi) = k_2 \sqrt{l} \frac{|Q(\xi)|}{b}. \quad (3.11)$$

Соотношения механики разрушения для введенных интегральных функционалов можно записать как неравенства:

$$J_1(h) \leq K_{2\varepsilon}, \quad J_2(h) - J_1^2(h) \leq \delta, \quad (3.12)$$

где $K_{2\varepsilon} = K_{2c} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Задача оптимизации заключается в минимизации объемного функционала $V(h)$ в соответствии с проектируемой переменной h при условии выполнения (3.12).

Для удобства выполнения дальнейших вычислений заменим неравенства (3.12) равенствами (что усиливает условия ограничения). Используя вспомогательные неизвестные μ_1^2 , μ_2^2 неравенства (3.12) записываются в следующем виде:

$$J_1 - K_{2\varepsilon} + \mu_1^2 = 0, \quad J_2 - J_1^2 - \delta + \mu_2^2 = 0. \quad (3.13)$$

Отметим, что если неравенства (3.12) являются строгими, то $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$. Если же в (3.12) имеет место знак равенства, то $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$.

Взяв в расчет (3.13) расширим интеграл $V(h)$, используя множители λ_1, λ_2 [7].

Функция Лагранжа в данном случае имеет вид:

$$L = \int_0^L bh + \lambda_1 (J_1 - K_{2\varepsilon} + \mu_1^2) + \lambda_2 (J_2 - J_1^2 - \delta + \mu_2^2) dx.$$

Варьируя функцию L по h и μ_1, μ_2 , получаем:

$$\delta V = \delta L = \int_0^L \left[b + (2\lambda_2 J_1 - \lambda_1) \frac{\psi}{h^2} f - 2\lambda_2 \frac{\psi^2}{h^3} f \right] \delta h dx + 2\lambda_1 \mu_1 \delta \mu_1 + 2\lambda_2 \mu_2 \delta \mu_2. \quad (3.14)$$

Необходимым условием минимизации функционала $V(h)$ является требование $\delta V = 0$. Как следствие этого, необходимые условия оптимальности приобретают вид:

$$h^3 + (2\lambda_2 J_1 - \lambda_1) \frac{\psi}{b} fh - 2\lambda_2 \frac{\psi^2}{b} f = 0, \quad (3.15)$$

$$\lambda_1 \mu_1 = 0; \quad \lambda_2 \mu_2 = 0. \quad (3.16)$$

Как видно, вычисление второго коэффициента в условии оптимальности (3.15), зависит от величины J_1 , что соответствует экстремальному значению. Таким образом, решение уравнения (3.15) зависит от неизвестных параметров λ_1, λ_2 и β ($\beta = J_1$), т.е. $h = h(x, \lambda_1, \lambda_2, \beta)$. В свою очередь параметр β определяется из следующего условия:

$$\int_0^L \frac{\psi f}{h(x, \lambda_1, \lambda_2, \beta)} dx = \beta. \quad (3.17)$$

Величины λ_1 , λ_2 и μ_1 , μ_2 определяются из решения уравнений (3.13) и (3.16). Условия (3.16) подразумевают, что при неактивных ограничениях (принуждениях) $\mu_i \neq 0$. Соответствующие переменные Лагранжа λ_i должны быть равны нулю, и, следовательно, соответствующие ограничения могут быть проигнорированы при всех последующих перемещениях. Однако, если $\lambda_i \neq 0$, то $\mu_i = 0$ и индекс ограничения "i" преобразуется в "активный".

Для сохранения краткости рассмотрим только случай, в котором первое ограничение в (4.3) является активным, а второе – неактивным. То есть $\mu_1 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. В этом случае задача оптимизации решается с помощью системы уравнений, полученных из условий (3.13) и (3.15):

$$\begin{cases} h^2 = \lambda_1 \frac{\psi}{b} f \\ \int_0^L \frac{\psi}{h} f dx = K_{2\varepsilon} \end{cases}; \quad h^2 = \lambda_1 \frac{k_2 \sqrt{l} |Q|}{b^2} f; \quad \frac{k_2 \sqrt{l}}{b} \int_0^L \frac{|Q| f}{h} dx = K_{2\varepsilon}; \quad \frac{k_2 \sqrt{l}}{b} \int_0^L \frac{|Q| f b}{\sqrt{\lambda_1 k_2 \sqrt{l} Q f}} dx = K_{2\varepsilon}.$$

Введем обозначение: $\int_0^L \sqrt{|Q| f} dx = \alpha_1$. Тогда:

$$\frac{\sqrt{k_2 \sqrt{l}}}{\sqrt{\lambda_1}} \alpha_1 = K_{2\varepsilon}; \quad \sqrt{\lambda_1} = \frac{\sqrt{k_2 \sqrt{l}} \alpha_1}{K_{2\varepsilon}}; \quad h = \sqrt{\lambda_1 \frac{\psi}{b} f}; \quad h = \frac{\sqrt{k_2 \sqrt{l}} \alpha_1}{K_{2\varepsilon}} \cdot \sqrt{\frac{k_2 \sqrt{l} |Q| f}{b^2}} = \frac{k_2 \sqrt{l} \alpha_1}{K_{2\varepsilon} b} \sqrt{|Q| f}.$$

В результате, решение оптимизационной задачи имеет такой вид:

$$h_* = \frac{k_2 \sqrt{l} \alpha_1}{K_{2\varepsilon} b} \sqrt{|Q| f}, \quad V_* = \frac{k_2 \sqrt{l} \alpha_1^2}{K_{2\varepsilon}}. \quad (3.18)$$

Значения (3.18) реализуют точное равенство в первом неравенстве (3.12) ($\mu_1 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$). Подставим распределение толщины (мощности) (3.18) во второе неравенство (3.12) для получения условия относительно параметров задачи, соответствующих рассматриваемому случаю:

$$J_2 - J_1^2 \leq \delta; \quad \int_0^L \frac{\psi^2}{h^2} f dx \leq \delta + \left(\int_0^L \frac{\psi}{h} f dx \right)^2; \quad \int_0^L \frac{(k_2 \sqrt{l} |Q|)^2 b^2 K_{2\varepsilon}^2}{k_2^2 \sqrt{l}^2 \alpha_1^2 b^2 |Q| f} f dx \leq \delta + \left(\int_0^L \frac{k_2 \sqrt{l} |Q| b K_{2\varepsilon}}{k_2 \sqrt{l} \alpha_1 b \sqrt{|Q| f}} f dx \right)^2;$$

$$\int_0^L \frac{|Q|}{\alpha_1^2} dx \leq \frac{\delta}{K_{2\varepsilon}^2} + \left(\int_0^L \frac{\sqrt{|Q| f}}{\alpha_1} dx \right)^2; \quad \int_0^L |Q| dx \leq \frac{\delta}{K_{2\varepsilon}^2} \alpha_1^2 + \alpha_1^2.$$

В результате получим:

$$\alpha_2 \leq \left(1 + \frac{\delta}{K_{2\varepsilon}^2} \right) \alpha_1^2, \quad \alpha_2 \equiv \int_0^L |Q| dx. \quad (3.19)$$

Неравенство (3.19) является дополнительным условием на параметры задачи.

Пример 3. В модельной задаче для трещины, расположенной на нейтральной оси слоя, считаем, что координата ее центра ξ является случайной переменной, распределенной по нормальному закону с функцией плотности распределения $f(\xi) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\xi-50}{30} \right)^2}$. При расчете принимаем, что длина трещины, которая может появиться в слое, является заданной

$l=0.1$ м. Вид решения оптимизационной задачи в соответствии с формулами данного пункта, представлен на рис.4.

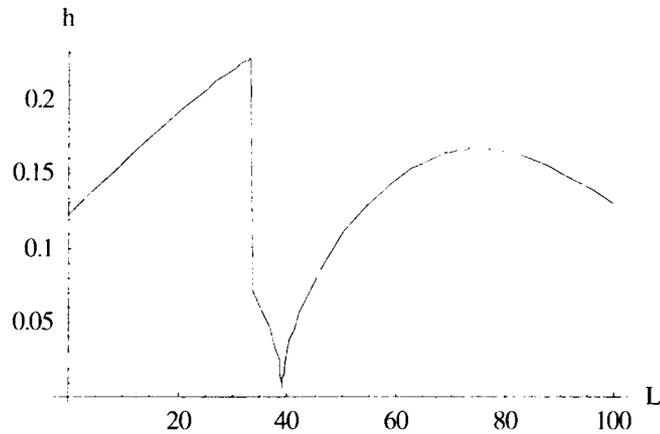


Рис. 4. График $h(x)$ для закона нормального распределения случайной величины - положения трещины (по срезающим усилиям)

Из рис.4 следует, что для того, чтобы макротрещина не распространялась при случайном ее расположении по длине слоя и при заданном нагружении, необходимо, чтобы высота слоя также была не менее $h(x)=0.23$ м.

4. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от случайной переменной

А. Рассмотрим ситуацию, когда коэффициент интенсивности напряжений характеризуется монотонной зависимостью от случайной переменной. Пусть балка длиной L , главная ось которой совмещена с осью x ($0 \leq x \leq L$), имеет переменное поперечное сечение с высотой $h = h(x)$ (проектируемая переменная) и постоянную ширину b . Предположим, что балка нагружена поперечной нагрузкой, и что трещина случайной длины ξ может появиться на граничных поверхностях балки. Функция плотности для переменной ξ предполагается известной. Коэффициент K_1 определяется в соответствии с выражением (3.1). Беря в расчет монотонность K_1 от случайной переменной ξ , получим единственное решение ξ_ϵ уравнения $K = K_{1\epsilon}$ для каждого поперечного сечения балки:

$$\xi_\epsilon = \frac{b^2 K_{1\epsilon}^2 h^4(x)}{k_1^2 M^2(x)}. \quad (4.1)$$

Для рассматриваемого случая вероятностное неравенство, соответствующее критерию хрупкого разрушения, может быть записано в такой форме:

$$P\{K_1 \leq K_{1\epsilon}\} = P\{\xi \leq \xi_\epsilon\} = \int_0^{\xi_\epsilon} f(\xi) d\xi \equiv F(\xi_\epsilon) \geq 1 - \nu, \quad (4.2)$$

где $\nu > 0$ – заданная малая величина; F – функция распределения, определяемая с помощью аналитического выражения или табулируемых данных для многих известных функций f .

Оптимизационная задача состоит в нахождении такого распределения толщины балки, когда ее объем является минимальным и при выполнении условия прочности (4.2).

Оптимальное решение задачи соответствует случаю выполнения точного равенства в (4.2) и может быть записано следующим образом:

$$h(x) = \left[\frac{k_1 |M(x)|}{bK_{1\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{4}}(1-\nu), \quad (4.3)$$

где $S(1-\nu)$ – функция, обратная к функции F , т.е. $S(F(\xi)) = \xi$ для любого ξ .

Б. Рассмотрим общий случай – немонотонной зависимости коэффициента интенсивности напряжений от случайной переменной. Исследуем оптимизационную задачу для балки с низким значением постоянной материала K_{2c} и предположим, что координата ξ центра трещины сдвига является случайной переменной с заданной функцией плотности $f(\xi)$. В этом случае для коэффициента интенсивности напряжений K_2 имеет место выражение (3.9). Рассмотрим следующую величину:

$$\Delta K_2 = K_{2\varepsilon} - K_2 = K_{2\varepsilon} - \frac{k_2 |Q(\xi)| \sqrt{l}}{bh(\xi)}. \quad (4.4)$$

Длина трещины l предполагается заданной. Неравенство $\Delta K_2 > 0$, выполнение которого гарантирует отсутствие роста трещины, записывается в таком виде:

$$h \geq \frac{k_2 |Q(\xi)| \sqrt{l}}{bK_{2\varepsilon}} \equiv \chi(x). \quad (4.5)$$

Соответствующая вероятность может быть оценена с помощью интеграла от функции плотности $f(\xi)$ по интервалу, где $\Delta K_2 \geq 0$ и записывается так:

$$P\{K_2 \leq K_{2\varepsilon}\} = \int_0^{\infty} g(\xi) f(\xi) d\xi, \quad g = 1 \text{ если } h \geq \chi, \quad g = 0 \text{ если } h < \chi. \quad (4.6)$$

Задача оптимизации состоит в определении функции распределения высоты $h(x)$ при ограничении вида

$$\int_0^{\infty} g(\xi) f(\xi) d\xi < 1 - \nu \quad (4.7)$$

так, что $h \geq h_{\min}$ (h_{\min} – заданная константа) и оптимум функции (2.9) принимает минимальное значение.

Замечание. Можно доказать, что для рассматриваемой задачи уменьшение объема материала имеет место для тех областей, где функция плотности f является малой [7].

Пример 4. Численный пример выполнялся для тех же условий, что и в предыдущих примерах. Кроме того, в модельной задаче предполагалось, что ξ изменяется по закону равномерного распределения на отрезке $[0, 0.2]$. Коэффициент интенсивности напряжений K_1 определялся по выражению (3.1).

Задача оптимизации состоит в нахождении такого распределения толщины слоя, чтобы объем балки являлся минимальным при выполнении условия прочности (4.2).

В соответствии с процедурой, приведенной в данном разделе, имеем:

$$K = K_{1\varepsilon} = 30 \times 10^6; \xi_\varepsilon = \frac{b^2 K_{1\varepsilon}^2 h^4(x)}{k_1^2 M^2(x)}.$$

При выбранных исходных данных и для $\nu = 0.3$ выражение (4.2) приобретает вид:

$$P\{K_1 \leq K_{1\varepsilon}\} = P\{\xi \leq \xi_\varepsilon\} = \int_0^{\xi_\varepsilon} f(\xi) d\xi = F(\xi_\varepsilon) = \frac{\xi}{0.2}.$$

Тогда, выражение, которому должна удовлетворять высота слоя-балки (4.3), в явном виде записывается так:

$$h(x) > \sqrt[4]{0.2(1-\nu)} \sqrt{\frac{k_1 |M(x)|}{b K_\varepsilon}}.$$

График данного выражения представлен на рис.5.

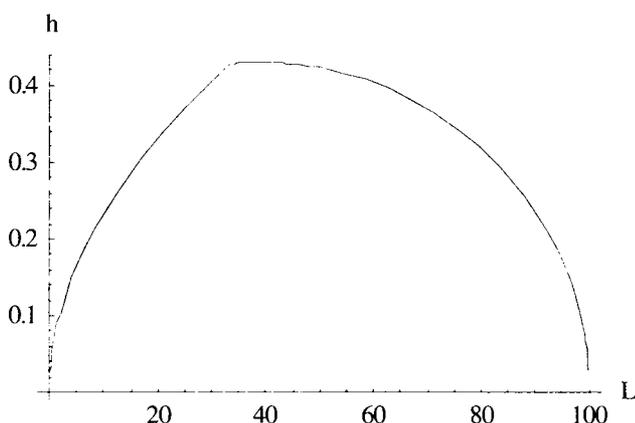


Рис.5. График функции $h(x)$ при законе равномерного распределения плотности случайной величины – длины трещины

Представленный график показывает, какова должна быть минимальная высота слоя, в случае расположения трещины в соответствующем месте по длине слоя.

5. Выводы

В статье представлены исследования, имеющие отношение к задачам структурной оптимизации, которые, в свою очередь, базируются на методах механики хрупкого разрушения. Эффективность метода продемонстрирована на решении оптимизационных задач для деформируемых тел, представляющих собой балки.

Общий подход, описанный в статье, может быть применен и к другим задачам оптимального проектирования различных деформируемых тел, в первую очередь к различным одномерным структурным элементам (стержни, колонны и т.д.) и двумерным тонким стеновым структурным элементам (пластины и оболочки).

Рассмотрены случаи, в которых характеристики трещины зависят только от скалярной случайной переменной. Очевидно, что предложенный подход вероятностных приближений может быть обобщен и применен к более сложным вариантам, когда параметры трещины являются функциями случайного вектора. В этом случае приближение будет так же включать ограничения для корреляционных моментов. И, как для прямого приближения, в

этой ситуации будет использоваться многомерный анализ областей, где $K_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \leq K_{ic}$ для оценки вероятности того, что трещины не будут далее распространяться.

Следует отметить, что в рассматриваемых случаях внешние нагрузки принимались постоянными. Для упрощения рассмотрены только статически детерминированные варианты, для которых уравнения равновесия могут быть интегрированы отдельно и распределение изгибающего момента M и перерезывающей силы Q может быть взято как известные заранее. Более сложные статически неопределимые случаи требуют взятия в расчет уравнения поведения, как дополнительной части сформулированной оптимизационной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Banichuk N.V. Introduction to Optimization of Structures. Springer-Verlag, New York, 1990.
2. Augusti G., Baratta A., Casciati F. Probabilistic Methods in Structural Engineering. Chapman and Hall. 1984.
3. Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Мн.:БГУ, 2002. 456с.
4. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.:Наука, 1974. 640 с.
5. Hutchinson J.W. A course of nonlinear fracture mechanics. Technical University of Denmark. 1979.
6. Kanninen M.F., Popelar C.H. Advanced Fracture mechanics. Oxford University Press. New York, 1985.
7. Banichuk N.V., Ragnedda F., Serra M. Probabilistic Approaches for optimal beam design based on fracture mechanics // Meccanica. No.1, Vol.34. 1999. Kluwer Academic Publishers. P.29–38.
8. Стрелецкий Н.С. К вопросу установления коэффициентов запаса сооружений // Изв. АН СССР, ОТН, 1, 1947.
9. Bolotin V.V. Statistical methods in structural mechanics. Holden-Day. San Francisco, 1969.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АДАптиРОВАННОГО ПОЧВООБРАБАТЫВАЮЩЕГО АГРЕГАТА

Каминьски Я.Р., Мишин П.А.

A mathematical operation model has been found expedient to determine the effectiveness of a tillage unit operation under specified soil conditions as well as operation parameters and modes when this unit is combined with a particular tractor. The model-based PC software supplies the production and specific fuel consumption rates within the whole range of working speeds and soil conditions for optimum tractor engine loading. Furthermore the offered software allows to determine optimal operating width of a tool, the working speed and corresponding, or minimal, fuel consumption per 1 hectare of tilled land.

Theoretically obtained results have been substantiated by separate investigations of tilling units consisting of K-701 and MTZ-82 tractors and plows with changable working width.

ВВЕДЕНИЕ

Работа почвообрабатывающих агрегатов на сельскохозяйственном поле или в целом система управления ими осуществляется по входным и выходным параметрам, которые являются переменными. Входные переменные описывают характеристики сельскохозяйственного поля и являются случайными величинами. Выходными переменными являются энергетические, скоростные, экологические, технико-экономические и другие параметры функционирования агрегата. Внешние входные переменные совместно с управляющими и возмущающими воздействиями определяют выходные оценочные параметры.

Анализ проведенных исследований показывает, что одним из основных внешних воздействий является твердость почвы T_B , которая наиболее полно и обобщенно характеризует сельскохозяйственное поле с позиции необходимости механической обработки. Твердость почвы является переменной и случайной величиной. Пространственную изменчивость твердости почвы в пределах поля можно представить в форме карт, содержащих изолинии - линии равных значений твердости почвы, с помощью специальных математических интерполяционных методов с применением ПЭВМ.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

В общем случае функционирование почвообрабатывающего агрегата при выполнении технологического процесса на сельскохозяйственном поле можно выразить через производительность W , которая зависит от твердости почвы T_B , и представить в виде модели (рис.1).

Выходные переменные функционирования агрегата: максимальная производительность и соответствующий ей минимальный расход топлива - $W_{\max i}$ и $q_{\min i}$, - определяются оптимальными значениями рабочей скорости V_p и рабочей ширины захвата B_p . Функционирование системы контролируется возмущающими воздействиями в виде ограничений: по качеству работы $П_{Кi}$; буксованию движителей $K_{б \max}$; пределам диапазона агротехнически допустимых рабочих скоростей $V_{p \min}, V_{p \max}$ и рациональной загрузки энергетического средства K_3 .

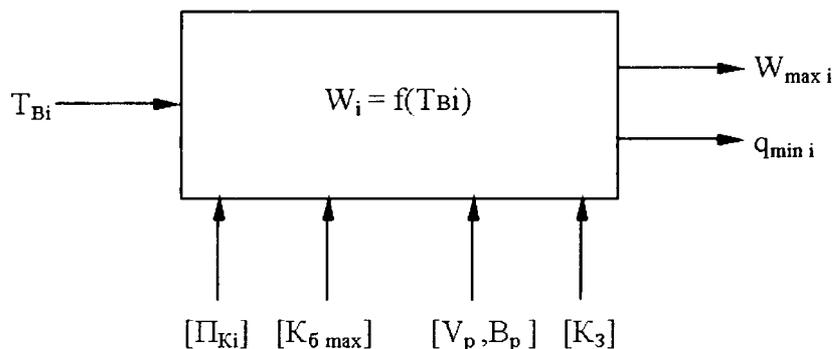


Рис. 1. Математическая модель функционирования почвообрабатывающего агрегата.

Входная переменная – твердость почвы T_{Bi} - влияет на удельное сопротивление рабочего органа. В результате проведенных экспериментальных исследований нами получена обобщенная зависимость, которая адекватно описывает изменение удельного сопротивления корпуса плуга $K_{кп}$ (частный случай) от твердости T_B всех типичных для Северо - Западного района почв полиномом второй степени

$$K_{кп} = a_1 + v_1 T_B + c_1 T_B^2, \quad (1)$$

где a_1 , v_1 и c_1 – коэффициенты уравнения регрессии.

Твердость почвы T_B зависит от глубины обработки h . По результатам экспериментов получена зависимость между ними в виде уравнения регрессии

$$T_B = a_2 + v_2 h + c_2 h^2, \quad (2)$$

где a_2 , v_2 и c_2 – коэффициенты уравнения.

Полученные зависимости позволяют установить конкретную взаимосвязь значений входного параметра T_{Bi} с производительностью W

$$W = C \cdot B_p \cdot V_p, \quad (3)$$

и удельным расходом топлива q

$$q = G / W, \quad (4)$$

где C – коэффициент размерности; B_p - рабочая ширина захвата агрегата; V_p - рабочая скорость; G – часовой расход топлива при максимальной тяговой мощности трактора.

Рабочую скорость агрегата V_p можно выразить через тяговое усилие трактора $P_{кр}$ аппроксимацией табличных значений тягового усилия по типовым тяговым характеристикам тракторов полиномом третьей степени, который дает наименьшую ошибку

$$V_p = a_3 + v_3 P_{кр} + c_3 P_{кр}^2 + d_3 P_{кр}^3, \quad (5)$$

где a_3 , v_3 , c_3 и d_3 – коэффициенты уравнения регрессии.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Адаптированным к конкретным условиям работы можно считать такой агрегат, который при заданных агротехнических показателях работы позволяет получить максимальную производительность и соответствующий ей минимальный расход топлива. Изменение рабочих параметров агрегата нарушает его адаптацию, уменьшая производительность и увеличивая погектарный расход топлива.

Определяя производительность и удельный расход топлива по вышеприведенным зависимостям, можно получить трехмерные поверхности отклика функционирования почвообрабатывающего агрегата (рис.2), которые выражают его потенциальную эксплуатационную характеристику и устанавливают взаимосвязь между рабочей шириной захвата B_p , скоростью движения V_p , производительностью W , удельным расходом топлива q и твердостью почвы T_B при работе в различных условиях на заданную глубину и изменении V_p от V_{\min} до V_{\max} .

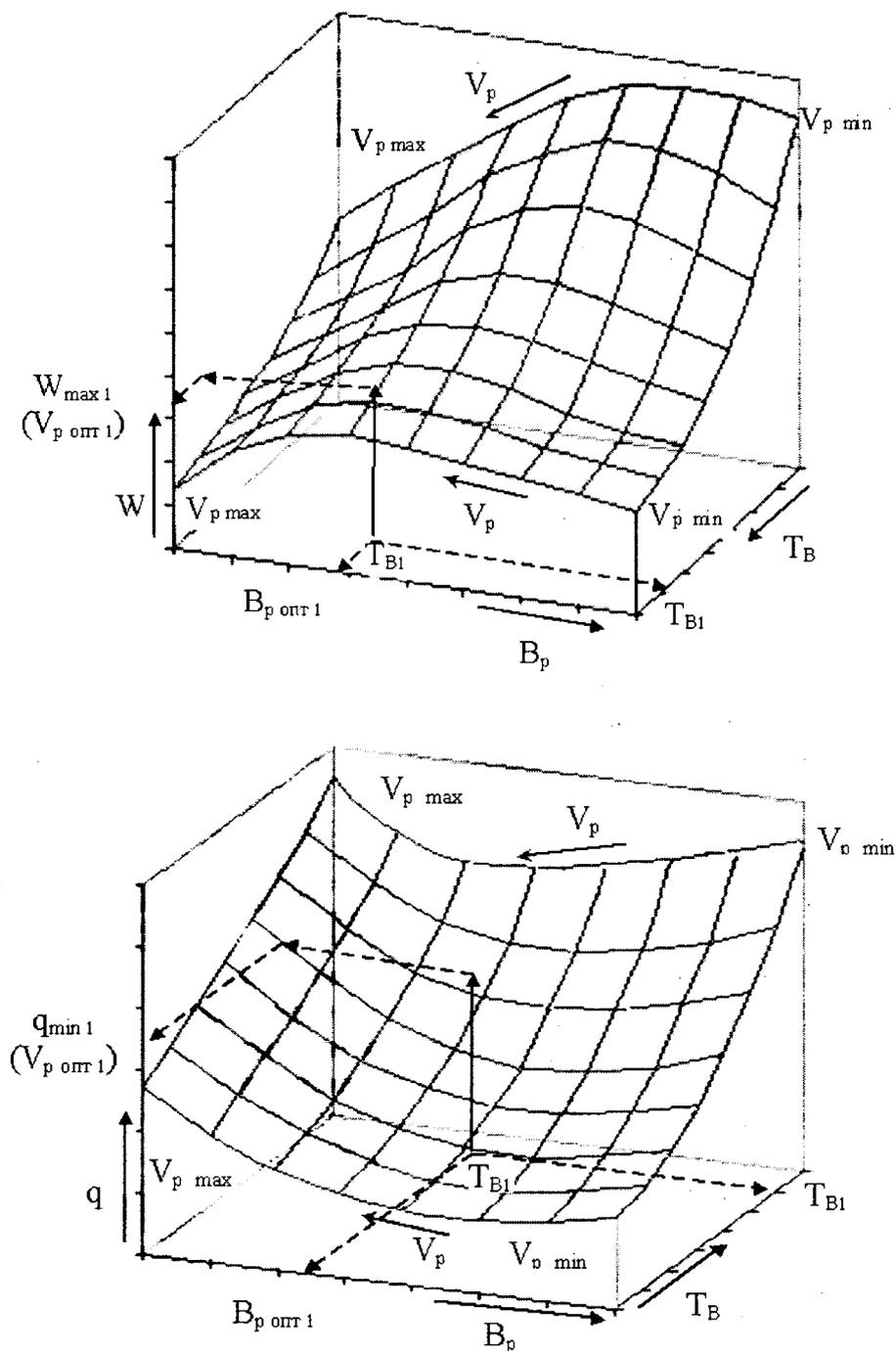


Рис.2. Потенциальная эксплуатационная характеристика почвообрабатывающего агрегата

Из рис.2 видно, что предложенная модель функционирования адаптированного почвообрабатывающего агрегата позволяет для каждого заданного значения твердости почвы T_{B_i} определить ожидаемые значения максимальной производительности $W_{\max i}$ и минимального удельного расхода топлива $q_{\min i}$, по которым с учетом ограничений $[P_{K_i}]$, $[K_{\delta \max}]$ устанавливаются оптимальные значения ширины захвата $B_{p \text{ опт } i}$ и скорости движения $V_{p \text{ опт } i}$ агрегата. Принципы построения потенциальных эксплуатационных характеристик более подробно изложены в [1,2].

ВЫВОДЫ

Предложенная математическая модель функционирования почвообрабатывающего агрегата и полученная на её основе потенциальная эксплуатационная характеристика позволяет адекватно описать показатели производительности и удельного (на 1 га) расхода топлива во всем диапазоне рабочих скоростей и почвенных условий при рациональной загрузке двигателя трактора. Данные выводы подтверждены на примере отдельно проведенных исследований пахотных агрегатов с тракторами К-701 и МТЗ-82 с плугами с изменяемой шириной захвата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнруб В.И. Оптимизация режима работы пахотного агрегата. - Механизация и электрификация сельского хозяйства. – 1980. №11. – С. 19–21.
2. Вайнруб В.И. Потенциальные эксплуатационные характеристики почвообрабатывающих агрегатов. - Сб.научных трудов НИИТИМЭСХ НЗ РСФСР. - вып.56. – Л.: 1990. – 9-13с.

РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОСТИ ХОДОВЫХ СИСТЕМ МНОГОПРИВОДНЫХ КОЛЕСНЫХ МАШИН

Дубовик Д.А.

The method for a quantitative estimation of efficiency of running systems of vehicles for curvilinear motion, taking into account the deviation of vectors of driving wheels tractive forces from the direction determined a driver by means of turning steering wheel, is offered. Results of application of the developed method for an estimation of efficiency of running systems AWD vehicle with mass and geometrical parameters, close to the off-road vehicle MZKT 79091 with wheel formula 8x8, are brought.

Введение. Эффективность систем в отношении преобразования энергии определяется отношением полезно использованной энергии к суммарному количеству энергии, переданной системе, и характеризуется коэффициентом полезного действия [1].

Известные из научно-технической литературы выражения для определения коэффициента полезного действия ходовых систем колесных машин получены для случая прямолинейного движения [2–4]. Они не учитывают отклонение векторов касательных сил тяги на ведущих колесах от требуемого направления передвижения многоприводной колесной машины, возникающего при совершении криволинейного движения, и соответственно не оценивают потери энергии, вызываемые этим отклонением.

Вместе с тем, многоприводные колесные машины практически все время движутся по криволинейным траекториям. Это объясняется не только тем, что очень мало абсолютно прямолинейных участков дорог, к которым в теории колесных машин принято относить участки с радиусом кривизны более 500...1000 м, но главное тем, что машине приходится поворачивать с одной дороги или улицы на другую, сторониться и объезжать препятствия по направлению движения, маневрировать в местах погрузки и разгрузки. Наконец, на машину почти всегда действуют боковые силы, которые изменяют или стремятся изменить траекторию движения, а водителю приходится ее корректировать.

По статистическим данным, на наиболее вероятных для эксплуатации многоприводных колесных машин грунтовых дорогах от 65 до 75 % времени движение осуществляется по траекториям с радиусами кривизны менее 300...400 м и средними скоростями порядка 15...20 км/ч. На городских перекрестках, отдельных грунтовых дорогах и местности радиусы поворота составляют всего 20...25 м, а скорость движения – 8...10 км/ч. В закрытых помещениях и при разворотах на ограниченных площадках радиусы поворота снижаются до минимально возможных по конструктивным и компоновочным возможностям, т.е. до единиц метров у двухосных машин с короткой базой и 10...15 м у машин с тремя и большим числом осей, а движение осуществляется со скоростью до 2...5 км/ч [5].

Необходимость движения любых колесных машин по криволинейным траекториям и обеспечения при этом безопасности транспортных потоков обуславливает актуальность разработки соответствующих методов оценки эффективности и проектирования ходовых систем.

Целью настоящей статьи является разработка метода для количественной оценки эффективности ходовых систем многоприводных колесных машин для общего случая их криволинейного движения.

Коэффициент полезного действия ходовой системы многоприводной колесной машины. Криволинейное движение многоприводных колесных машин из-за конструктивных особенностей их ходовых систем характеризуется отклонением векторов касательных сил тяги на ведущих колесах от задаваемого водителем направления движения (рис. 1).

Это связано в том числе с наличием у многоприводной колесной машины, как правило, двух и более неуправляемых ведущих мостов, кинематикой рулевого управления, не обеспечивающей выполнение условия качения колес без бокового скольжения:

$$\operatorname{ctg}\alpha_n - \operatorname{ctg}\alpha_e = \frac{l_0}{L},$$

где α_n и α_e – угол поворота соответственно наружного и внутреннего колеса управляемого моста по отношению к центру поворота машины, l_0 – расстояние между осями шкворней поворотных цапф, L – расстояние от управляемого моста до проекции полюса поворота на продольную ось машины.

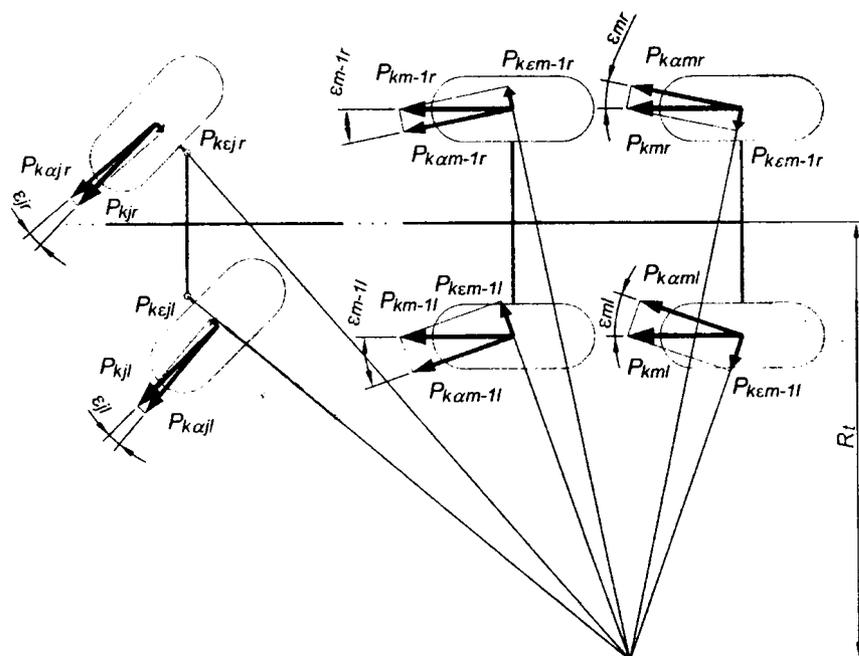


Рис. 1. Расчетная схема ходовой системы многоприводной колесной машины

В результате реализуемые ведущими колесами касательные силы тяги действуют в направлении, отличном от задаваемого направления передвижения машины, определяемого водителем поворотом рулевого колеса. На совершение движения машины в задаваемом водителем направлении расходуется лишь часть передаваемой ходовой системе энергии, направленной на реализацию составляющих касательных сил тяги, перпендикулярных отрезкам, соединяющим полюс поворота машины с точками приведения пятен контакта ведущих колес с опорной поверхностью.

Исходя из приведенного во введении определения эффективности систем, под эффективностью ходовых систем колесных машин будем понимать отношение энергии, использованной на передвижение машины в требуемом (задаваемом водителем) направлении, к суммарному количеству энергии, передаваемой ходовой системе.

В соответствии с данным определением выразим коэффициент полезного действия ходовой системы колесной машины через отношение соответствующих мощностей:

$$\eta_{r\alpha} = \frac{N_{k\alpha}}{N_k} = \frac{\sum_{i=1}^n (N_{k\alpha ir} + N_{k\alpha il})}{\sum_{i=1}^n (N_{kir} + N_{kil})}, \quad (1)$$

где $N_{k\alpha}$ – мощность, расходуемая ходовой системой на осуществление движения машины в направлении, задаваемом водителем поворотом рулевого колеса; N_k – мощность,

передаваемая ходовой системе; $N_{\alpha ir}$ и $N_{\alpha il}$ – мощность, расходуемая соответственно левым и правым колесами i -го моста на осуществление движения машины в направлении, задаваемом водителем поворотом рулевого колеса (знаки r и l относятся соответственно к правому и левому колесу моста); N_{kir} и N_{kil} – мощность, подводимая соответственно к левому и правому колесу i -го моста; n – число ведущих мостов колесной машины.

Числитель выражения (1) составляет алгебраическая сумма мощности, расходуемой ходовой системой на совершение полезной работы. В качестве полезной работы выступает работа, совершаемая касательными силами тяги по преодолению силы сопротивления разгону вращающихся масс, силы сопротивления движению воздушной среды, сил сопротивления качению колес, боковых реакций колес и других сил сопротивления движению машины в направлении, задаваемом водителем поворотом рулевого колеса.

Знаменатель выражения (1) составляет общая мощность, подводимая к ведущим колесам машины.

Выразив мощность через произведение касательных сил тяги P_{ki} на скорость движения машины v_a и подставив в формулу (1), получим более удобное выражение для расчета коэффициента полезного действия ходовой системы колесных машин:

$$\eta_{rs\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n (P_{k\alpha ir} + P_{k\alpha il})}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{kir}}{1-s_{\delta ir}} + \frac{P_{kil}}{1-s_{\delta il}} \right)} = \frac{\sum_{i=1}^n (P_{kir} \cos \epsilon_{ir} + P_{kil} \cos \epsilon_{il})}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{kir}}{1-s_{\delta ir}} + \frac{P_{kil}}{1-s_{\delta il}} \right)}, \quad (2)$$

где P_{kir} и P_{kil} – касательные силы тяги соответственно на левом и правом ведущем колесе i -го моста; ϵ_{ir} и ϵ_{il} – угол между направлением качения левого и правого ведущего колеса i -го моста и направлением движения, задаваемым водителем поворотом рулевого колеса; $s_{\delta ir}$ и $s_{\delta il}$ – буксования левого и правого ведущего колеса i -го моста.

Рассмотрим применение полученного показателя, определяемого выражением (2), для оценки эффективности ходовой системы полноприводной машины с колесной формулой 8x8, близкой по своим массовым и геометрическим параметрам к внедорожной машине МЗКТ-79091.

Для практической реализации предлагаемого метода и расчета численных значений КПД ходовой системы составим математическую модель криволинейного движения многоприводной колесной машины.

Математическое моделирование криволинейного движения многоприводной колесной машины. Составим уравнения движения колесной машины для общего случая ее криволинейного движения в форме Аппеля [6]:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_q} = Q_q, \quad q = 1 \dots 3, \quad (3)$$

где S – энергия ускорения; $\ddot{\pi}_q$ – квазиускорение; Q_q – обобщенная сила, соответствующая q -й квазикоординате.

Расчетная схема m -осной колесной машины с k управляемыми и n ведущими мостами в системе неподвижных координат XOY представлена на рис. 2. С центром масс машины свяжем систему подвижных координат xoy .

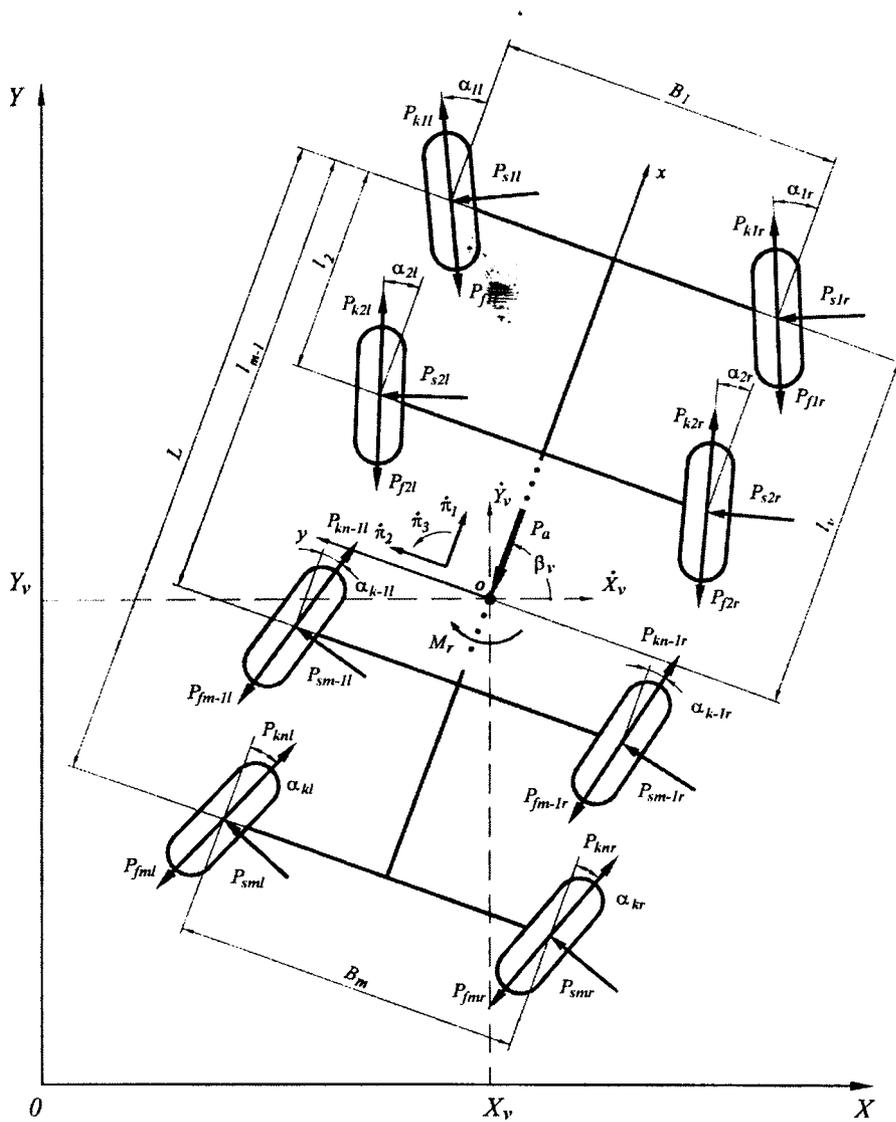


Рис. 2. Расчетная схема движения t -осной колесной машины с k управляемыми и n ведущими мостами

Движение машины характеризуется тремя координатами центра масс: X_v , Y_v и углом β_v между продольной осью машины и осью OX :

$$\begin{aligned} \dot{X}_v &= \dot{\pi}_1 \cos \beta_v - \dot{\pi}_2 \sin \beta_v; \\ \dot{Y}_v &= \dot{\pi}_1 \sin \beta_v + \dot{\pi}_2 \cos \beta_v; \\ \dot{\beta}_v &= \dot{\pi}_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения криволинейного движения машины при условии, что углы поворота колес в направлении, противоположном вращению часовой стрелки, положительны, а в направлении вращения часовой стрелки – отрицательны, принимают следующий вид:

$$m_v (\delta_v \ddot{\pi}_1 - \dot{\pi}_2 \dot{\pi}_3) = (P_{kjr} - P_{fjr}) \cos \alpha_{jr} - P_{sjr} \sin \alpha_{jr} + (P_{kjl} - P_{fjl}) \cos \alpha_{jl} - P_{sjl} \sin \alpha'_{jl} - P_a; \quad (5)$$

$$m_v (\ddot{\pi}_2 + \dot{\pi}_1 \dot{\pi}_3) = (P_{kjr} - P_{fjr}) \sin \alpha_{jr} + P_{sjr} \cos \alpha_{jr} + \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& + (P_{kjl} - P_{fjl}) \sin \alpha_{jl} + P_{sjl} \cos \alpha_{jl}; \\
m_v \rho_v^2 \ddot{\pi}_3 = 0,5 & (P_{kjr} \cos \alpha_{jr} - P_{kjl} \cos \alpha_{jl}) B_j + \\
& + (P_{kjr} \sin \alpha_{jr} + P_{kjl} \sin \alpha_{jl}) (l_a - l_j) - \\
& - 0,5 (P_{fjr} \cos \alpha_{jr} - P_{fjl} \cos \alpha_{jl}) B_j - \\
& - (P_{fjr} \sin \alpha_{jr} + P_{fjl} \sin \alpha_{jl}) (l_a - l_j) - \\
& - 0,5 (P_{sjr} \sin \alpha_{jr} - P_{sjl} \sin \alpha_{jl}) B_j + \\
& + (P_{sjr} \cos \alpha_{jr} + P_{sjl} \cos \alpha_{jl}) (l_a - l_j) - M_r,
\end{aligned} \tag{7}$$

где m_v , ρ_v и l_v – соответственно масса машины, ее радиус инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, и продольная координата центра масс (расстояние от первого моста до центра масс машины); l_j и B_j – расстояние от первого до j -го моста машины и колея j -го моста, соответственно; δ_v – коэффициент учета вращающихся масс; j – порядковый номер моста, $j = 1 \dots m$ ($m \geq n$).

Касательные силы тяги P_{kjr} и P_{kjl} , $j = 1 \dots n$, на ведущих колесах определяются в зависимости от моделируемого режима движения и характеристики привода ведущих колес по зависимостям, приведенным в работе [4].

Силы сопротивления качению колес P_{fjr} и P_{fjl} рассчитываются как произведение коэффициентов сопротивления качению на нормальные реакции колес в соответствии с выражениями:

$$P_{fj} = f_j P_{zj}, \quad j = 1 \dots m, \tag{8}$$

где f_j – коэффициенты сопротивления качению колес, определяемые с учетом поступательной скорости движения машины, количества проходов колес по колею и углов бокового увода колес; P_{zj} – нормальные реакции колес.

Нормальные реакции колес P_{zjr} и P_{zjl} , $j = 1 \dots m$, от которых во многом зависят их как продольные силы, так и боковые реакции, определяются кинематическими параметрами движения машины и рассчитываются по уравнениям, составленным на основе пространственной расчетной схемы конкретной машины. Зависимости для определения нормальных реакций колес составляются с учетом жесткосных и демпферных характеристик системы поддрессорования, применяемых шин и выбранной для моделирования движения опорной поверхности [5].

Боковые реакции колес P_{sjr} и P_{sjl} определяются в соответствии с теорией нелинейного увода [7]:

$$P_{sj} = K_{sj} \delta_j = q_j K_{s0} \delta_j, \quad j = 1 \dots m, \tag{9}$$

где K_{si} – коэффициент сопротивления боковому уводу колес, δ_j – угол увода колеса; K_{s0i} – тангенс угла наклона кривой $P_s = f(\delta)$ в начале координат; q_i – общий коэффициент коррекции, равный произведению девяти частных коэффициентов коррекции.

Сила сопротивления движению колесной машины воздушной среды P_a определяется по формулам [8].

Суммарный момент сопротивления повороту машины в контакте колес с опорной поверхностью движения M_p складывается из моментов сопротивления повороту отдельных колес. Моменты сопротивления повороту отдельных колес внедорожной машины состоят из моментов сопротивления колес от кинематического и силового увода, моментов сопротивления колес от углового перемещения отпечатков колес относительно поверхности грунта и сил реакции, действующих на боковины колес, когда последние идут в колею, и рассчитываются по выражениям [9].

В результате решения системы дифференциальных уравнений (5)-(7) для каждого значения угла поворота рулевого колеса или среднего угла поворота управляемых колес первого моста α_1 определяются силовые и кинематические параметры движения машины и по выражению (2) рассчитывается численное значение КПД ходовой системы.

Результаты исследований. С помощью показателя (2) оценивалась эффективность ходовой системы полноприводной машины с колесной формулой 8x8, близкой по своим массовым и геометрическим параметрам к внедорожной машине МЗКТ-79091 полной массой 43,5 тонн с двумя передними управляемыми мостами. Оценка проводилась при установившемся движении со скоростью 3,6 км/ч на сухой суглинистой целине со стабильными сцепными условиями (коэффициент сцепления 0,65, коэффициент сопротивления 0,05).

Для сравнительной оценки рассчитывались значения КПД ходовой системы по формуле [4], составленной для случая прямолинейного движения машины без учета отклонения векторов касательных сил тяги ведущих колес от заданного направления движения, определяемого углами поворота управляемых колес:

$$\eta_{rs} = \frac{\sum_{i=1}^n (P_{kir} + P_{kil})}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{kir}}{1 - s_{\delta ir}} + \frac{P_{kil}}{1 - s_{\delta il}} \right)}. \quad (10)$$

Результаты исследований представлены в виде графических зависимостей показателей (2) и (10) от среднего угла поворота управляемых колес первого моста α_1 на рис. 3.

Из рис. 3 следует, что при нейтральном положении рулевого колеса численное значение КПД ходовой системы составляет 0,988 при расчете как с учетом, так и без учета отклонения векторов касательных сил тяги от направления движения, определяемого поворотом рулевого и управляемых колес. С увеличением кривизны траектории движения машины возрастают составляющие касательных сил тяги в направлении, отличном от задаваемого водителем поворотом рулевого колеса, и при достижении среднего угла управляемых колес первого моста значения, равного 45 град, значения КПД ходовой системы $\eta_{rs\alpha}$ уменьшаются до 0,915.

С поворотом управляемых колес от нейтрального положения наблюдается различие в значениях КПД ходовой системы, полученных по выражениям (2) и (10). С увеличением угла поворота рулевого и управляемых колес разность между данными показателями растет и при повороте управляемых колес на угол, равный 45 град, составляет более 1 %.

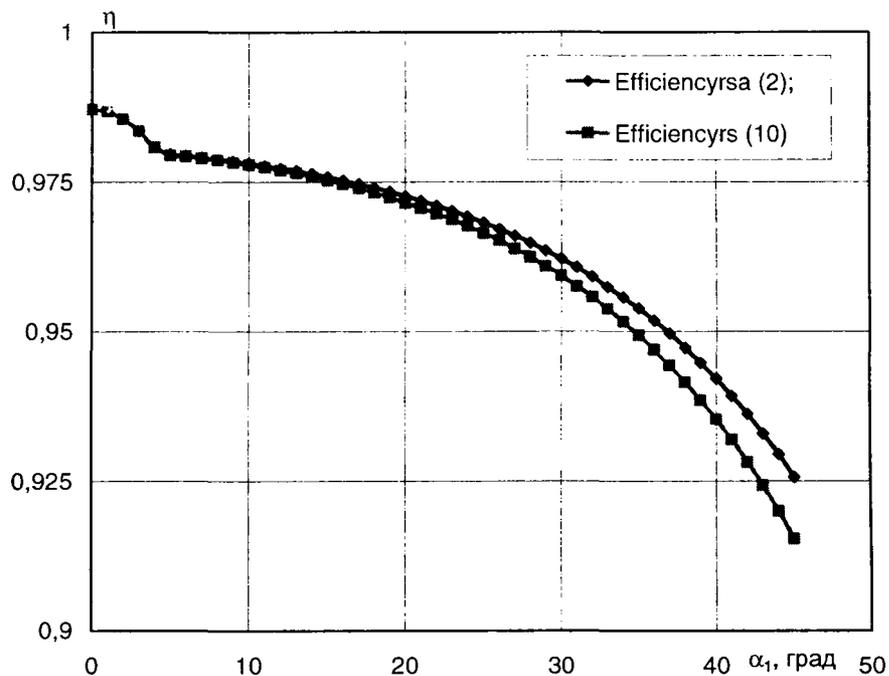


Рис. 3. Зависимости КПД, полученные по выражениям (2) и (10), от среднего угла поворота управляемых колес первого моста внедорожной машины МЗКТ-79091

Таким образом, результаты настоящего исследования подтверждают необходимость использования разработанного метода для расчета эффективности ходовых систем многоприводных колесных машин для общего случая их криволинейного движения.

Заключение. Разработан метод для количественной оценки эффективности ходовых систем многоприводных колесных машин для общего случая криволинейного движения, учитывающий отклонение векторов касательных сил тяги на ведущих колесах от требуемого направления передвижения машины, задаваемого водителем поворотом рулевого и управляемых колес.

Разработанный метод позволяет оценивать эффективность ходовых систем многоприводных колесных машин и осуществлять оптимизацию параметров привода ведущих колес и рулевого управления с позиции единого методологического подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Большая советская энциклопедия. (В 30 томах). Гл. ред. А.М. Прохоров. Изд. 3-е. М., Советская энциклопедия, 1973. Т. 13. Конда-Кун. 1973. – 608 с.
2. Тракторы. Теория / В.В. Гуськов, Н.Н. Велев, Ю.Е. Атаманов и др.; Под общ. ред. В.В. Гуськова. – М.: Машиностроение, 1988. – 376 с.
3. Скойбеда А.Т. Автоматизация ходовых систем колесных машин. – Минск: Наука и техника, 1979. – 280 с.
4. Энергонагруженность и надежность дифференциальных механизмов транспортно-тяговых машин / А.Х. Лефаров, М.С. Высоцкий, В.В. Ванцевич, В.И. Кабанов. – Минск: Наука и техника, 1991. – 240 с.

5. Смирнов Г.А. Теория движения колесных машин. – 2-е изд., переработ. и доп. – М.: Машиностроение, 1990. – 352 с.
6. Ванцевич В.В., Высоцкий М.С., Дубовик Д.А. Управление динамикой криволинейного движения колесных машин // Известия Национальной академии наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2001. – №3. – С. 123–128.
7. Антонов Д.А. Расчет устойчивости движения многоосных автомобилей. – М.: Машиностроение, 1984. – 168 с.
8. Евграфов А.Н., Высоцкий М.С. Аэродинамика колесных машин. – Минск: НИРУП "Белавтотракторостроение", 2001. – 368 с.
9. Фаробин Я.Е. Теория поворота транспортных машин. – М.: Машиностроение, 1970. – 176 с.

РАСЧЁТ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГРАФЕНА В МОДЕЛИ ВАЛЕНТНО-СИЛОВОГО ПОЛЯ

Нагорный Ю.Е., Репченков В.И., Сыроежкин С.В., Чижик С.А.

It was developed computer model of single graphite atomic layer (graphene) crystal lattice on basis of valence-force-field approach. One performed computational experiments to determine mechanical characteristics (linear elasticity modulus, crosscut compression coefficient, shear modulus) according to graphene particles dimensions. One realized comparison present results with results obtained within Urey-Bradley model.

Определение упругих постоянных природных и искусственно созданных конструкционных материалов является фундаментальной задачей. В макрообласти, теоретические проблемы, связанные со статическими исследованиями материалов с целью оценки их упругих постоянных в основном решены, а соответствующие практические процедуры стандартизованы. Для микро- и наноразмерных областей решение поставленной задачи находится на начальном этапе. В настоящий момент отсутствуют четкие и строгие определения для упругих постоянных в данном масштабе. Наиболее часто проводятся аналогии с механикой сплошной среды и делаются попытки в том или ином виде использовать закон Гука. Это естественно, и в качестве первого приближения вполне удовлетворительно. Можно отметить, что большинство работ данной области посвящено поиску связи между усилиями и деформациями для той или иной схемы нагружения. При этом в наноразмерной области, как правило, в качестве образца выступает регулярная наноструктура – частица графена, графита, алмаза, нанотрубка, фуллерен.

Квантовомеханические подходы к исследованию большого ($\sim 10^2 \div 10^3$) числа атомов, составляющих нано или микро структуру пока применить не представляется возможным из-за значительных технических трудностей. Поэтому задача о движении или равновесии системы связанных атомов может быть сформулирована и решена в рамках классической механики. При этом ядра моделируются материальными точками, а вид функции потенциальной энергии выбирается исходя из полуэмпирических соображений и данных, полученных в квантовой химии, молекулярной спектроскопии и других смежных областях науки. Исторически сложилось так, что для записи уравнений движения Ньютона применялись удобные в молекулярной спектроскопии, так называемые естественные координаты – изменения длин валентных связей, изменение углов между валентными связями и так далее. Была разработана техника формирования системы уравнений при малых приращениях естественных координат [1]. Силы, действующие на ядра в этом случае, оказывались пропорциональны соответствующим изменениям координат. Коэффициенты пропорциональности данной модели называют силовыми постоянными. По ним накоплен обширный и достаточно достоверный экспериментальный материал.

Исследование упругих и прочностных свойств наноструктур требует применения декартовых координат. Это влечет за собой необходимость решения двух основных задач: пересчет значений силовых постоянных и разработку методики формирования системы уравнений движения ядер с учетом регулярности строения наноразмерных объектов. Для решения второй задачи логично воспользоваться набором методик, разработанных в рамках МКЭ. Различные группы атомов (ядер) и связи между ними принимаются в качестве структурных элементов. Для них строятся матрицы жесткости и затем на основе метода векторной параметризации номеров степеней свободы и структурных элементов формируется правая часть системы уравнений движения (глобальная матрица жесткости) [2].

В работе [3] проведен расчет упругих постоянных для графена на основе модели молекулярного силового поля Юри-Бредли [1]. Она предполагает наряду с учетом наибольших сил действующих между атомами связанными валентными связями, так же учет ван-дер-ваальсовых сил, осуществляющих взаимодействие между ближайшими валентно не связанными атомами. Структурный элемент возникает здесь только один – пара атомов и связь [4]. Ему ставится в соответствие одномерный упругий элемент (рис. 1), работающий на растяжение – сжатие с матрицей жесткости

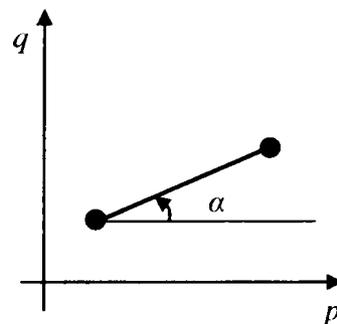


Рис. 1

$$[K_1] = k_1 \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cdot \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha \cdot \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \cdot \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \cdot \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ -\cos \alpha \cdot \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \cdot \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (1)$$

В данной работе решается та же задача, но уже в рамках модели валентно-силового поля разработанной в [1]. В этой модели взаимодействие ближайших валентно не связанных атомов заменяется деформацией валентных углов, а валентные силы учитываются так же как и в модели Юри-Бредли. Таким образом, модель будет содержать два структурных элемента: уже упоминавшийся одномерный упругий и угловой элемент, образованный тремя атомами и упругой системой между направленными валентностями (рис. 2).

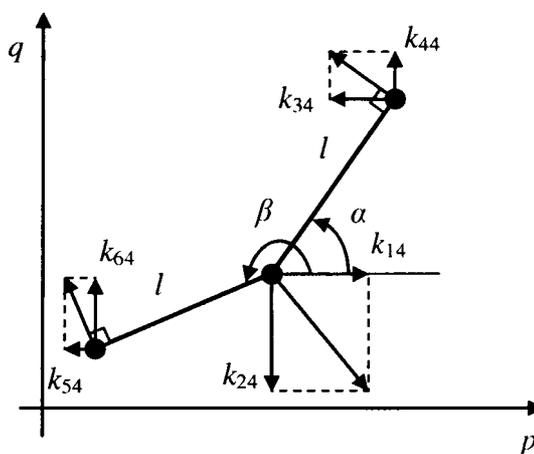


Рис. 2

Матрицу жесткости второго структурного элемента можно получить, воспользовавшись физическим смыслом ее отдельно взятого столбца. Его элементы k_{ij} представляют собой проекции сил, которые необходимо приложить к системе, чтобы изменилась только одна степень свободы на единицу. Элемент, изображенный на рис. 2 расположен в плоскости и, следовательно, имеет шесть степеней свободы. Рассмотрим в качестве примера четвертую степень свободы и, соответственно, четвертый столбец матрицы жесткости. Вызовем единичное приращение этой степени свободы. Запишем уравнения равновесия для возникших сил и их моментов:

$$\begin{aligned} k_{14} - k_{34} - k_{54} &= 0 \\ -k_{24} + k_{44} + k_{64} &= 0 \\ k_{34} \cdot l \sin \alpha + k_{44} \cdot l \cos \alpha - k_{54} \cdot l \sin \beta - k_{64} \cdot l \cos \beta &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Еще два уравнения получаются, если учесть, что равнодействующие сил в крайних узлах ортогональны к связям:

$$\frac{k_{54}}{k_{64}} = \operatorname{tg} \beta$$

$$\frac{k_{34}}{k_{44}} = \operatorname{tg} \alpha$$
(3)

Теперь пять элементов k_{14} , k_{24} , k_{34} , k_{54} , k_{64} выражаются через k_{44} . Он, в свою очередь, равен $k_{44} = \frac{k_2 \cos^2 \alpha}{l^2}$, где k_2 - жесткость упругой системы углового элемента. Таким образом, построен четвертый столбец матрицы жесткости. Транспонировав его, получим четвертую строку. Точно так же составляя для каждого из оставшихся столбцов систему из пяти уравнений и зная четвертый элемент, вычисляем остальные элементы матрицы. Как результат получим:

$$[K_2] = \frac{k_2}{l^2} \cdot \begin{bmatrix} (s_\alpha - s_\beta)^2 & (s_\alpha - s_\beta)(c_\beta - c_\alpha) & s_\alpha(s_\beta - s_\alpha) & c_\alpha(s_\alpha - s_\beta) & s_\beta(s_\alpha - s_\beta) & c_\beta(s_\beta - s_\alpha) \\ (c_\alpha - c_\beta)(s_\beta - s_\alpha) & (c_\beta - c_\alpha)^2 & s_\alpha(c_\alpha - c_\beta) & c_\alpha(c_\beta - c_\alpha) & s_\beta(c_\beta - c_\alpha) & c_\beta(c_\alpha - c_\beta) \\ s_\alpha(s_\beta - s_\alpha) & s_\alpha(c_\alpha - c_\beta) & s_\alpha^2 & -s_\alpha c_\alpha & -s_\alpha s_\beta & c_\beta s_\alpha \\ c_\alpha(s_\alpha - s_\beta) & c_\alpha(c_\beta - c_\alpha) & -c_\alpha s_\alpha & c_\alpha^2 & s_\beta c_\alpha & -c_\alpha c_\beta \\ s_\beta(s_\alpha - s_\beta) & s_\beta(c_\beta - c_\alpha) & -s_\alpha s_\beta & s_\beta c_\alpha & s_\beta^2 & -c_\beta s_\beta \\ c_\beta(s_\beta - s_\alpha) & c_\beta(c_\alpha - c_\beta) & c_\beta s_\alpha & -c_\alpha c_\beta & -c_\beta s_\beta & c_\beta^2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

здесь $s_\alpha = \sin \alpha$, $c_\alpha = \cos \alpha$, $s_\beta = \sin \beta$, $c_\beta = \cos \beta$.

На рис. 3 показана структура графена и схема нагружения. В каждой шестиугольной ячейке будет по шесть видов угловых структурных элементов и три линейных, отличающихся только ориентацией. Силовые постоянные k_1 , k_2 равны соответственно $938 \text{ kcal mol}^{-1} \text{ \AA}^{-2}$, $126 \text{ kcal mol}^{-1} \text{ rad}^{-2}$ [5].

Из матриц жесткости этих девяти структурных элементов с использованием векторной параметризации номеров строится матрица жесткости всей системы.

За деформации принимались средние значения соответствующих смещений атомов, расположенных на границах образца. Математическая модель реализована в пакете "Mathematica 5.1".

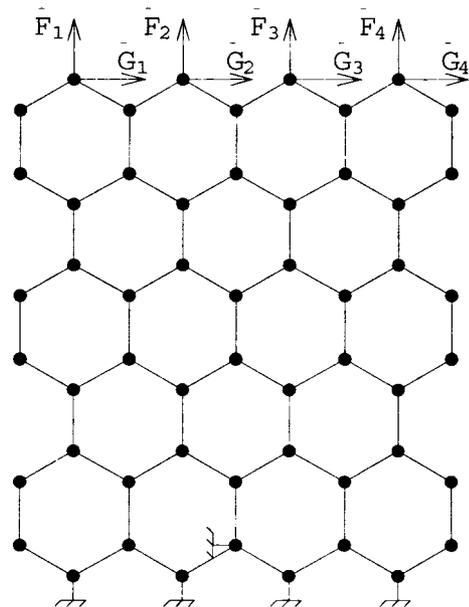


Рис. 3

На рис. 4-6 показаны результаты численных экспериментов из [3] (слева) и на основе модели валентно силового поля (справа). Горизонтальные оси соответствуют линейным раз-

мерам образца, вертикальная ось – значению упругого модуля. Максимальные отличия наблюдаются для коэффициента поперечного сжатия (Рис. 5). Отличия носят как качественный, так и количественный характер. Наиболее существенная разница в поведении графиков для “широких” частиц – возрастание ν_1 с увеличением их длины Y , в первом случае, против убывания ν_2 - во втором. Различны области изменения коэффициентов: $0.3 < \nu_1 < 0.7$ и $0.3 < \nu_2 < 0.4$. Поведение модулей продольной упругости E_1 и E_2 (рис. 4) носит сходный характер, но диапазоны изменения различны: $5 \cdot 10^{11} < E_1 < 1.2 \cdot 10^{12}$, $7 \cdot 10^{11} < E_2 < 7.8 \cdot 10^{11}$. Отличия в значениях модулей сдвига незначительны. Интервал изменения значений модуля продольной упругости и коэффициента поперечного сжатия намного меньше в случае второй модели.

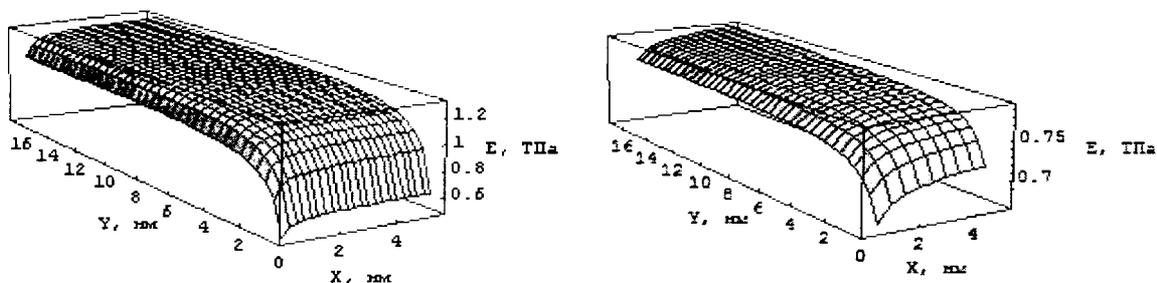


Рис. 4. Модуль продольной упругости.

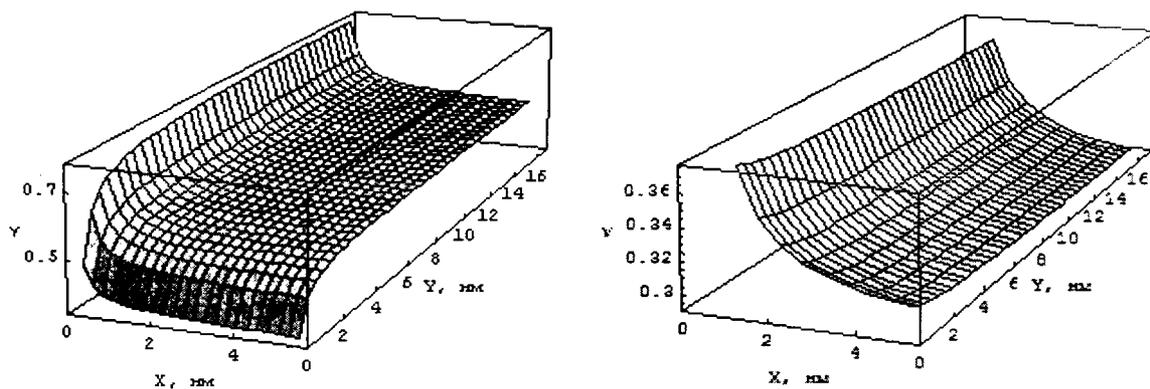


Рис. 5. Коэффициент поперечного сжатия

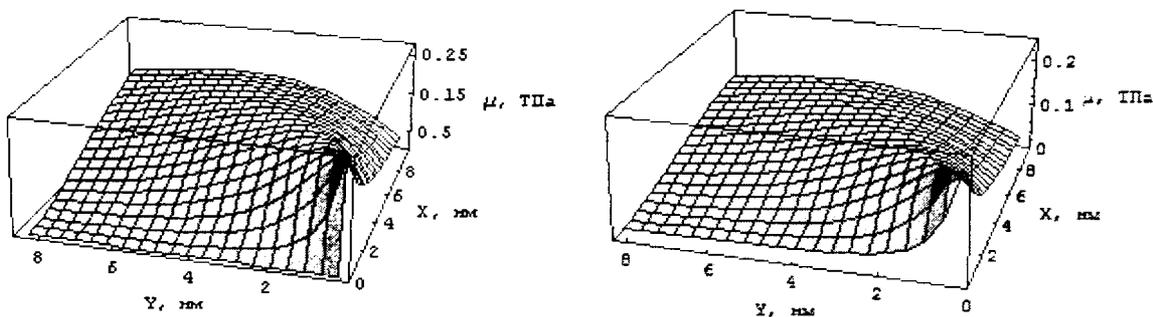


Рис. 6. Модуль сдвига

Полученные результаты свидетельствуют о том, что использование различных физических моделей межатомного и внутримолекулярного взаимодействия (Юри-Бредли и валентно-силового поля) приводит к существенно отличающимся численным значениям упругих постоянных, характеризующих нанообъект в целом. Это фактически ставит вопрос о применимости той или иной модели для подобного рода расчетов. Очевидно, что отправной точкой для дальнейшего уточнения наномеханических моделей должны стать экспериментально полученные данные о деформациях наночастиц при той или иной схеме нагружения. Эмпирические данные полученные для материалов с различной внутренней структурой межатомных взаимодействий позволят определить корректность использования теоретических моделей. Подобного рода эксперименты могут быть поставлены с использованием новейших разработок в области приборостроения, в частности сканирующей зондовой микроскопии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волькенштейн М., Ельяшевич М., Степанов Б. Колебания молекул. –М.-Л.: Гос. изд. технико–теоретической литературы, 1949. –600 с.
2. Репченков В.И., Нагорный Ю.Е., Репченкова Е.В. Векторная параметризация номеров степеней свободы и номеров элементов в МКЭ. Мн.: Белгосуниверситет, 2003. –13 с. Деп. в БелИСА.
3. В. И. Репченков, С. В. Сыроежкин, С. А. Чижик. Зависимость механических свойств наночастиц графена от доли граничных атомов// Тепло- и массоперенос: Сб. ст. – 2005. – С. 106-111.
4. Репченков В.И., Нагорный Ю.Е., Сыроежкин С.В.// Применение МКЭ к моделированию наноструктур. Мн.: Белгосуниверситет, 2005.– 19 с. Деп. в БелИСА.
5. A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes. Chunyu Li, Tsu-Wei Chou // // International journal of Solids and Structures. – 2003. – Vol. 40 – P. 2487-2499.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ВЕСОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕКТОРОВ НАПРАВЛЕНИЙ

Бокуть Л.В., Кулешов А.Я.

The correlation analysis of weight values of direction vectors and their order numbers of normalized vector model for objects under investigation is proposed. The experimental results of construction of the regression line are represented, as well as ones for calculation of theoretical-correlation ratio, similarity measure and classification of objects under investigation for a land plot of a space snap-shot are obtained.

Технология тематической обработки полутонновых изображений включает процедуры формирования полутонновых изображений, сегментации по однородным областям, описания объектов, идентификации и автоматической классификации [1, 2]. Распознавание (дешифрирование) объектов полутонновых изображений (ПТИ) по их контурному представлению актуально для решения различных прикладных задач цифровой обработки данных дистанционного зондирования Земли [3].

Для повышения точности идентификации и автоматической классификации объектов полутонновых изображений предлагается применить корреляционный анализ векторов направлений. В данной работе построение меры близости (сходства) исследуемых объектов осуществляется на основе теоретического корреляционного отношения, производится определение значений параметров линии регрессии весовых значений векторов направлений и их порядковых номеров, приводятся примеры вычисления меры сходства десяти синтезированных объектов, идентификации объектов космического снимка участка местности и их классификации. В качестве инвариантных информационных признаков используются весовые значения векторов направлений нормализованной векторной модели исследуемых объектов.

1. Классификация исследуемых объектов ПТИ.

Классификация включает в себя все процессы, заканчивающиеся указанием некоторого класса (или принадлежности классу) для рассматриваемого объекта или данных. Результат распознавания тоже можно представить как подобное указание класса - в таком смысле распознавание образов является одной из разновидностей классификации. В тех случаях, когда каждый класс содержит только один объект, классификация эквивалентна идентификации [4]. Специфика конкретных задач распознавания связана с числом m распознаваемых образов, а также с характером сведений о частотах w и вероятностях $P(u)$ получения измерения от j -го образа. В практической деятельности обычно точно неизвестна та или иная функция распределения и можно лишь априорно указать параметрический класс, к которому принадлежит распределение. Поэтому обучающая выборка при распознавании образов получила очень широкое применение. Наибольшее влияние на способ распознавания оказывают вид распределения $P(u)$ и точность исходных данных о них [5, 6]. При этом рассматриваются три ситуации: полностью описанные классы; использование обучающих выборок; отсутствие априорных сведений о $P(u)$.

Классификация в случае, когда распределения $P(u)$ классов определены полностью, базируется на лемме Неймана-Пирсона, байесовских решениях, минимаксных решениях, методах максимального правдоподобия [5, 6]. В общем случае отыскание минимаксного решения - довольно трудная задача. Однако облегчает положение результат Вальде, устанавливающий соответствие между минимаксным и байесовским решениями. Наряду с критерием отношения правдоподобия на практике широко используются правила классификации, крити-

ческие области которых находятся путем минимизации функции потерь при данных ограничениях на границе критической области.

Во втором случае распределения $P(u)$ неизвестны, но о них в той или иной степени можно судить по обучающим выборкам, каждая из которых является совокупностью измерений, выполненных для известного объекта. Теоретические результаты классификации при наличии обучающих выборок базируются на основе дискриминантного анализа (ДА) [5, 6]. Методы ДА основаны на параметрических, полупараметрических и непараметрических оценках правдоподобия. Предварительный анализ данных - один из наиболее ответственных этапов дискриминантного анализа. Теоретическим основанием для линейной дискриминантной функции (ЛДФ) служит модель Фишера, применяется же ЛДФ в значительно более широких условиях [5]. Еще не решена задача, полностью исключая субъективный фактор ДА. Оценка качества конкретного правила классификации проводится лишь на новой выборке, либо обучающей выборке.

В третьем случае отсутствует и обучающая выборка. Тогда невозможно проводить распознавание и можно пытаться определить лишь "схожесть" отдельных объектов между собой. Процедуры подобного вида обычно называют кластерным анализом [5, 6]. В общей (не строгой) постановке проблема классификации объектов заключается в том, чтобы всю анализируемую совокупность объектов $O = \{O_i\}$, $(1, m)$, статистически представленную в виде метрик χ и ρ , характеризующих либо расстояние между объектами, либо степень близости тех же объектов, разбить на сравнительно небольшое число (заранее известных или нет) однородных в определенном смысле групп или классов [5 – 7]. Наиболее трудным и наименее формализованным в задачах автоматической классификации является момент, связанный с определением понятия однородности объектов. В общем случае понятие однородности объекта определяется заданием правила вычисления величины r , характеризующей либо расстояние $d(O_i, O_j)$ между объектами O_i и O_j из исследуемой совокупности $O(i, j = 1, 2, \dots, n)$, либо степень близости (сходства) $r(O_i, O_j)$ тех же объектов [5].

2. Понятие теоретического корреляционного отношения.

Мера близости – один из важнейших инструментов анализа данных при их классификации, выборе средних, поиске закономерностей, связанных с оценкой сходства [7].

Одним из показателей меры близости и сходства исследуемых объектов является коэффициент корреляции. Широкое применение коэффициента корреляции в качестве меры сходства исследуемых объектов объясняется, прежде всего, тем, что он является достаточно устойчивой характеристикой при распознавании изображений, как при большом, так и при малом объеме выборки [5, 8]. Необходимо отметить, что только лишь при большом числе независимых наблюдений, подчиненных одному и тому же распределению близкому к нормальному, коэффициент корреляции близок к истинному. Во всех других случаях, характеризующихся ограниченным количеством экспериментальных данных и нелинейностью их зависимости, коэффициент корреляции может не отражать истинную меру сходства исследуемых объектов и поэтому в качестве такой характеристики рекомендуется использовать теоретическое корреляционное отношение, интерпретация которого не зависит от вида исследуемой зависимости [9 – 11]:

$$\eta_T = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}}, \quad (1)$$

где σ^2 - общая дисперсия, δ^2 - межгрупповая дисперсия, причем

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k y_i^2 n_i}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^k y_i n_i}{n} \right)^2; \quad (2)$$

y_i – весовые значения векторов направлений нормализованной векторной модели исследуемого объекта;

n_i – количество векторов направлений i -го весового значения в нормализованной векторной модели;

n – общее число векторов направлений. Межгрупповая дисперсия вычисляется по формуле:

$$\delta_i^2 = \sigma^2 - \sigma_{y(x)}^2; \quad (3)$$

где $\sigma_{y(x)}^2$ – средняя из частных дисперсий [10],

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y}_{x_i})^2 n_i}{n}; \quad (4)$$

\bar{y}_{x_i} – значения ординат линии регрессии.

Проведем экспериментальные исследования теоретического корреляционного отношения для классификации объектов полутоновых изображений по их контурному представлению. В качестве инвариантных информационных признаков воспользуемся весовыми значениями векторов направлений. Сформировать инвариантные информационные признаки позволяет нормализация векторной модели исследуемых объектов по масштабу и ориентации.

Процесс нахождения линии регрессии y_x заключается в обоснованном выборе аппроксимирующей кривой и расчете параметров ее уравнения. Чаще всего для этой цели используются кривые, уравнения которых выражаются многочленами целых положительных степеней [10]:

$$\bar{y}_x = a + bx; \quad (5)$$

$$\bar{y}_x = a + bx + cx^2; \quad (6)$$

$$\bar{y}_x = a + bx + cx^2 + dx^3. \quad (7)$$

Определим параметры a , b , c и d , пользуясь методом наименьших квадратов:

$$f = \sum (y - \bar{y}_x)^2 = (y - a - bx - cx^2 - dx^3)^2 \rightarrow \min \quad (8)$$

Условие обращения f в \min записывают в виде

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial c} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial d} = 0 \quad (9)$$

при

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} > 0.$$

Из выражений (8) и (9) получим систему нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} na + b \sum x + c \sum x^2 + d \sum x^3 &= \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 + d \sum x^4 &= \sum yx, \\ a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 + d \sum x^5 &= \sum yx^2, \\ a \sum x^3 + b \sum x^4 + c \sum x^5 + d \sum x^6 &= \sum yx^3, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Расчеты линии регрессии для векторной модели синтезированного объекта №1 (рис. 1), содержащей 13 векторов направлений ($n = 13$), произведем при помощи табл. 1. Значения координат x, y определяются порядковыми номерами x векторов направлений в векторной модели и весовыми значениями y векторов направлений синтезированного объекта №1.

Таблица 1

Определение числовых значений параметров системы

x	y	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	yx	yx^2	yx^3	\bar{y}_x
1	2	1	1	1	1	1	2	2	2	1.38186813
2	2	4	8	16	32	64	4	8	16	1.87912088
3	1	9	27	81	243	729	3	9	27	2.39210789
4	2	16	64	256	1024	4096	8	32	128	2.91908092
5	4	25	125	625	3125	15625	20	100	500	3.45829171
6	5	36	216	1296	7776	46656	30	180	1080	4.00799201
7	6	49	343	2401	16807	117649	42	294	2058	4.56643357
8	5	64	512	4096	32768	262144	40	320	2560	5.13186813
9	5	81	729	6561	59049	531441	45	405	3645	5.70254745
10	5	100	1000	10000	100000	1000000	50	500	5000	6.27672328
11	7	121	1331	14641	161051	1771561	77	847	9317	6.85264735
12	8	144	1728	20736	248832	2985984	96	1152	13824	7.42857143
13	8	169	2197	28561	371293	4826809	104	1352	17576	8.00274725
$\Sigma=91$	60	819	8281	89271	1002001	11562759	521	5201	55733	60

Подставляя числовые значения в систему нормальных уравнений (10), получим

$$\left. \begin{aligned} 13a + 91b + 819c + 8281d &= 60, \\ 91a + 819b + 8281c + 89271d &= 521, \\ 819a + 8281b + 89271c + 1002001d &= 5201, \\ 8281a + 89271b + 1002001c + 11562759d &= 55733. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Решив систему (11), определим значения коэффициентов a, b, c и d , получим уравнение линии регрессии

$$\bar{y}_x = 0.90209790 + 0.47044622x + 0.00961538x^2 - 0.00029138x^3 \quad (12)$$

3. Вычисление меры сходства синтезированных объектов.

Нормализованные векторные модели для десяти синтезированных объектов приведены в табл.2. Рассмотрим примеры определения теоретического корреляционного отношения наиболее близких синтезированных объектов № 4 и 7 относительно синтезированного объекта № 1, принимаемого за эталон (рис. 1).

Таблица 2

Определение теоретического корреляционного отношения синтезированных объектов

Номер объекта	Нормализованная векторная модель десяти синтезированных объектов	Теоретическое корреляционное отношение
1	2,2,1,2,4,5,6,5,5,5,7,8,8	0.92826879
2	1,2,1,1,1,2,3,4,4,4,6,6,5,6,6,8,8	0.96241508
3	1,3,3,1,1,2,4,5,6,5,5,5,7,8,8	0.90976365
4	2,1,2,2,4,5,6,5,5,5,7,8,8	0.93761493
5	2,2,1,1,3,4,5,6,5,5,5,7,8,8	0.93173142
6	2,2,1,2,1,4,5,6,5,5,5,5,7,8,8	0.91110948
7	2,2,1,2,4,5,5,6,5,5,7,8,8	0.93786049
8	2,1,3,4,4,6,6,5,7,7,1,2,8	0.57960723
9	1,1,3,4,3,3,1,4,5,6,6,8,8,7	0.89659741
10	2,2,1,2,4,5,6,5,5,4,7,7,8,8	0.91394603

Воспользуемся векторными моделями синтезированных объектов № 1, № 4, № 7 (табл. 2). Подставляя числовые данные из табл.1 в формулы (1) – (3), определим теоретическое корреляционное отношение синтезированных объектов №1, № 4, № 7:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= 5.00591716; & \bar{\delta}_1^2 &= 4.3135134; & \eta_1 &= 0.92826879; \\ \sigma_2^2 &= 5.00591716; & \bar{\delta}_2^2 &= 4.40081073; & \eta_2 &= 0.93761493; \\ \sigma_3^2 &= 5.00591716; & \bar{\delta}_3^2 &= 4.40311611; & \eta_3 &= 0.93786049. \end{aligned}$$

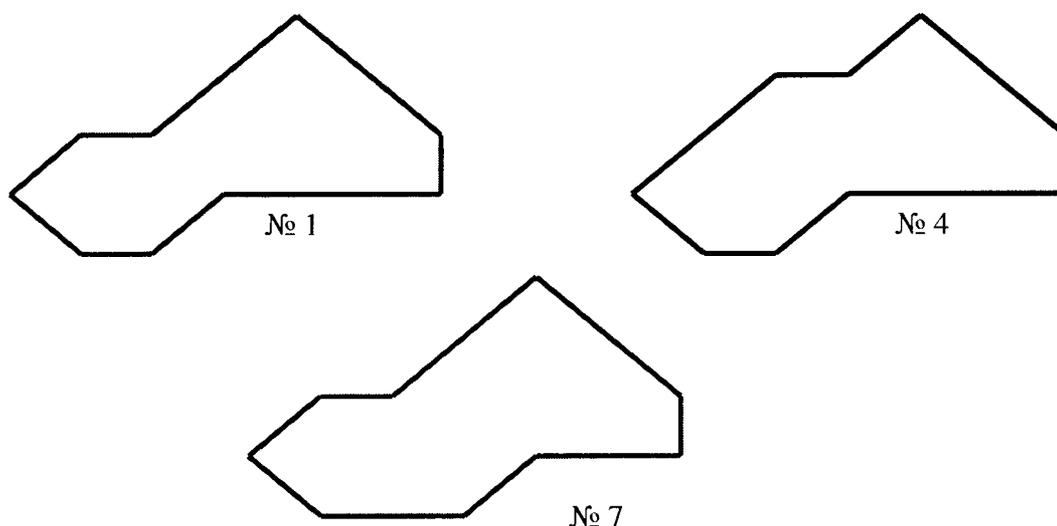


Рис.1. Контурное представление синтезированных объектов № 1, 4, 7.

Из табл.2 следует, что наиболее схожими объектами, имеющими наибольшее значение теоретического корреляционного отношения, являются объекты № 2, 7, 4, 5, 1, 10, 6, 3. Объекты № 9, 8 имеют меньшие значения теоретического корреляционного отношения.

Меру сходства исследуемого объекта I относительно объекта S, принимаемого за эталон, определим следующим образом:

$$M_{S,I} = (1 - Abs(\eta_S - \eta_I)). \quad (13)$$

Тогда мера сходства объекта № 4 относительно объекта № 7, принимаемого за эталон, на основании числовых данных табл. 2, равна:

$$M_{7,4} = (1 - Abs(0.93786049 - 0.93761493)) = 0.99975444.$$

Как известно, при задании меры близости $r(O_i, O_j)$ необходимо соблюдать следующие математические требования [7]:

- симметрии $r(O_i, O_j) = r(O_j, O_i)$;
- максимального сходства объекта с самим собой $r(O_i, O_j) = \max r(O_i, O_j)$;
- монотонного убывания $r(O_i, O_j)$.

Предложенная мера сходства (13) отвечает требованиям симметрии:

$$M_{7,4} = M_{4,7} = 0,99975444.$$

Она также отвечает математическим требованиям максимального сходства объекта с самим собой и монотонного убывания, что следует из определения теоретического корреляционного отношения [5, 7, 9].

Разработанный программный комплекс позволяет определить линию регрессии, вычислить теоретическое корреляционное отношение и меру сходства исследуемого объекта относительно эталона, за который может приниматься любой исследуемый объект.

Отличительной особенностью предлагаемого подхода вычисления меры сходства исследуемых объектов является определение теоретического корреляционного отношения весовых значений векторов направлений относительно их порядковых номеров в векторной модели. Последующее вычитание из единицы модуля разностного значения теоретических корреляционных отношений эталона и исследуемого объекта позволяет определить их меру сходства.

Преимущество предлагаемого подхода по сравнению с ранее используемым методом, основанным на вычислении значений модифицированного корреляционного отношения векторов направлений [3, 12], состоит в следующем. В данном случае исчезла необходимость формировать равномошное множество признаков, хотя число векторов направлений эталона и исследуемого объекта, как правило, различно. Тогда как при определении модифицированного корреляционного отношения необходимо дополнять недостающие весовые значения векторов направлений эталона или исследуемого объекта до равномошного множества признаков значениями математического ожидания и вводить коэффициенты ранжирования.

Экспериментальные исследования показали, что использование линейной зависимости (5) при нахождения линии регрессии не позволяет идентифицировать наиболее схожие объекты № 4 и № 7 (рис. 1) относительно объекта № 1, принимаемого за эталон. Действительно, в этом случае получаем равные значения меры сходства для объектов № 4 и № 7:

$$\sigma_1^2=5.00591716; \quad \bar{\delta}_1^2=4.31149620; \quad \eta_1=0.92805171; \quad M_{1,1}=1.00000000;$$

$$\sigma_4^2=5.00591716; \quad \bar{\delta}_4^2=4.39729501; \quad \eta_4=0.93724034. \quad M_{1,4}=0.99081137;$$

$$\sigma_7^2=5.00591716; \quad \bar{\delta}_7^2=4.39729501; \quad \eta_7=0.93724034. \quad M_{1,7}=0,99081137.$$

Для повышения точности идентификации исследуемых объектов при построении линии регрессии были использованы многочлены третьего порядка, что позволило получить более точные значения теоретического корреляционного отношения и произвести идентификацию наиболее схожих объектов № 4 и № 7 относительно объекта № 1, принимаемого за эталон:

$$\sigma_1^2=5.00591716; \quad \bar{\delta}_1^2=4.31351341; \quad \eta_1=0.92826879; \quad M_{1,1}=1.00000000;$$

$$\sigma_4^2=5.00591716; \quad \bar{\delta}_4^2=4.40081073; \quad \eta_4=0.93761493; \quad M_{1,4}=0.99065386;$$

$$\sigma_7^2=5.00591716; \quad \bar{\delta}_7^2=4.40311611; \quad \eta_7=0.93786049; \quad M_{1,7}=0,99040830.$$

На рис. 2 приведены примеры выравнивания эмпирической линии регрессии с помощью линейной (5) и нелинейной (7) зависимостей \bar{y}_x .

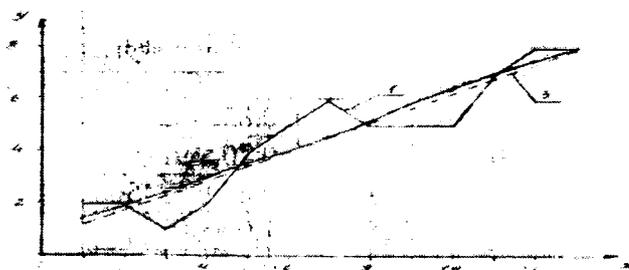


Рис. 2. Выравнивание эмпирической линии регрессии

(1 – весовые значения векторов направлений; 2 – $\bar{y}_x = a + bx + cx^2 + dx^3$; 3 – $\bar{y}_x = a + bx$).

4. Идентификация и классификация объектов космического снимка участка местности.

Произведем идентификацию объектов космического снимка участка местности земной поверхности (рис.3). Нормализованные векторные модели выделенных объектов участка земной поверхности космического снимка приведены в табл. 3.

Таблица 3

Нормализованные векторные модели исследуемых объектов

Номер объекта	Весовые значения векторов направлений	Угол ориентации α^0
1	1,2,2,4,2,1,8,2,2,5,5,5,5,5,6,4,5,6,8,8,8,8 (24)	0
2	1,2,2,3,4,4,4,6,6,6,6,7,6,7,8,2,2,2,8 (19)	270
3	2,1,1,2,1,1,1,3,3,2,1,1,8,2,4,4,4,4,4,5,6,6,6,4,5,6,6,7,6,6,7,8,1,1,7 (35)	180
4	1,1,1,1,1,1,1,4,4,4,4,4,6,6,7,7,7 (17)	180
5	2,2,2,8,8,3,3,3,4,3,3,5,6,4,4,4,5,7,7,8,7,6,8,6,8,8 (26)	180
6	1,1,1,1,1,2,1,1,1,2,2,2,5,5,5,5,5,5,5,5,7,6,6,6 (25)	0

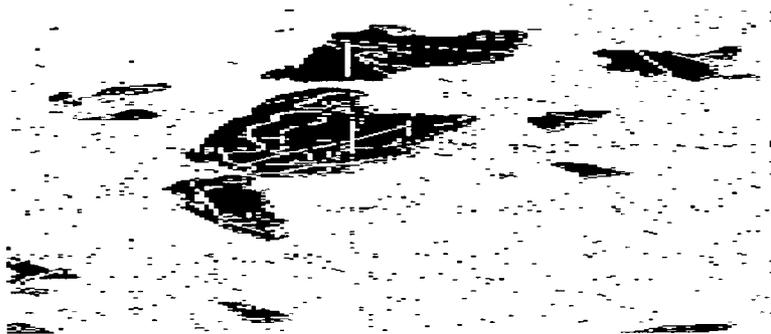


Рис.3. Космический снимок участка местности.

Значения теоретического корреляционного отношения исследуемых объектов участка местности космического снимка, вычисленные с помощью разработанного авторами программного комплекса, и значения меры сходства исследуемых объектов относительно объекта № 4, принимаемого за эталон, приведены в табл. 4.

Таблица 4
Теоретическое корреляционное отношение исследуемых объектов

Номер объекта	Теоретическое корреляционное отношение	Мера сходства
1	0.80581474	0.83746217
2	0.67105233	0.70269976
3	0.64919102	0.68083845
4	0.96835257	1.00000000
5	0.67225798	0.70390541
6	0.94842298	0.98007041

На рис. 4 представлены контурные представления исследуемых объектов космического снимка земной поверхности с указанием меры сходства относительно объекта № 4, принимаемого за эталон.

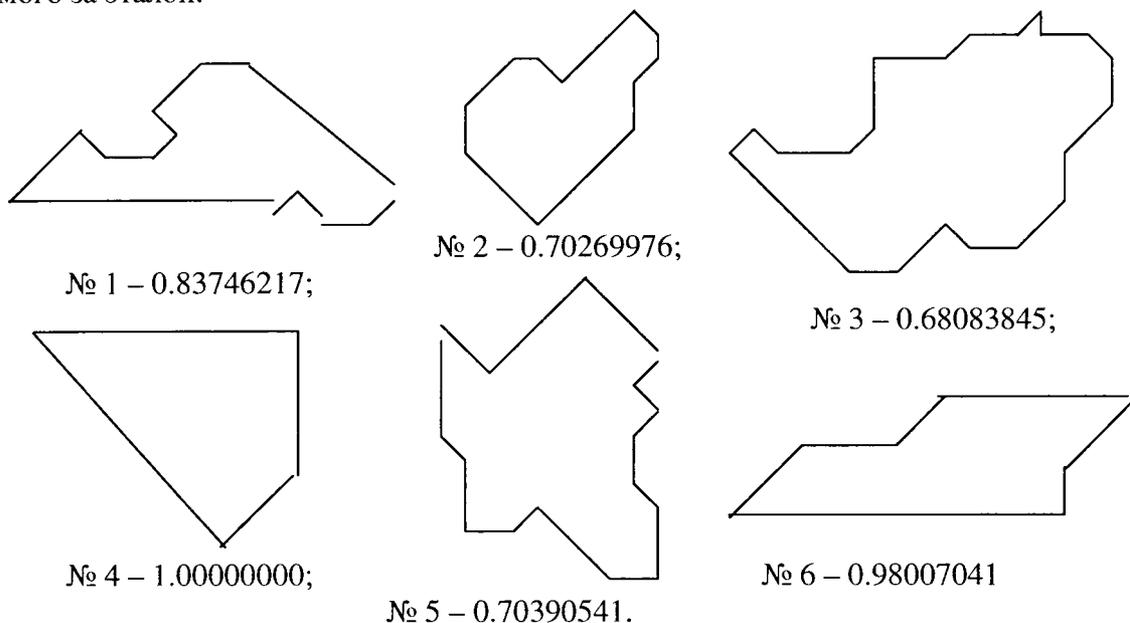


Рис. 4. Контурные представления исследуемых объектов космического снимка с указанием меры сходства.

Определение теоретического корреляционного отношения весовых значений векторов направлений и их порядковых номеров в векторной модели позволяет произвести соответствующее ранжирование объектов полутоновых изображений.

Автоматическую классификацию объектов полутоновых изображений при отсутствии обучающей выборки удобно производить, используя пороговые показатели мер сходства (табл. 5), задаваемые значениями интеграла вероятности, и меру сходства $M_{s..l}$ исследуемых объектов [13]. Совокупность объектов, мера сходства которых соответствует определенному пороговому значению, образует соответствующий кластер.

Таблица 5

Классификация исследуемых объектов

Номер кластера	Пороговое значение кластера принадлежности объекта	Номер объекта	Мера сходства исследуемых объектов, $M_{s..l}$	Кластер принадлежности объекта
1	0,99953 – 1,0000	1	0.85017008	9
2	0,99730 – 0,99952	2	0.70269976	11
3	0,99400 – 0,99729	3	0.68083845	12
4	0,98760 – 0,99399	4	1.00000000	1
5	0,97560 – 0,98759	5	0.70390541	11
6	0,95450 – 0,97559	6	0.98007041	5
7	0,92810 – 0,95450			
8	0,89040 – 0,92809			
9	0,83850 – 0,89039			
10	0,76990 – 0,83849			
11	0,68270 – 0,76989			
12	0,57630 – 0,68269			
13	0,45750 – 0,57689			
14	0,31080 – 0,45749			
15	0,15850 – 0,31079			
16	0,0800 – 0,15849			

Из табл. 5 следует хорошее совпадение меры сходства исследуемых объектов с определяемым кластером.

Заключение.

Для повышения точности идентификации исследуемых объектов при построении линии регрессии предложено использовать полиномы высших порядков. Увеличение порядка и числа параметров выравнивающей кривой хотя и способствует лучшему приближению к эмпирической линии, одновременно может привести к удалению от действительной теоретической. Этим налагается предел увеличения точности выравнивания при помощи повышения степени многочлена [10]. Для практической реализации предложенного подхода определения меры сходства исследуемых объектов использован полином третьего порядка, характеризующийся незначительными вычислительными затратами.

Проведенные авторами экспериментальные исследования показали, что подход, основанный на вычислении теоретического корреляционного отношения весовых значений векторов направлений и их порядковых номеров, позволяет повысить точность идентификации исследуемых объектов в 1,4 раза относительно модифицированного корреляционного отношения [3, 11] и не менее, чем в 1,039 раз относительно дисперсионного анализа весовых значений векторов направлений [11].

Классификация исследуемых объектов проведена на основе использования пороговых значений кластера принадлежности объекта, задаваемых значениями интеграла вероятностей [12], и вычисленных значений меры сходства исследуемых объектов относительно объекта № 4, принимаемого за эталон.

При увеличении порядка и числа параметров выравнивающей кривой повышение точности идентификации исследуемых объектов можно достигнуть путем использования современных высокопроизводительных суперсистем на базе суперкомпьютеров, например, СКИФ К-1000. В перспективе для выбора "наилучшей регрессии" вместо метода наименьших квадратов предлагается использовать метод группового учета аргумента, позволяющий определить в данном классе функций оптимальную структуру искомой зависимости и идентифицировать параметры по внешним критериям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров А.А. Алгоритмическое обеспечение информационно-управляющих систем адаптивных роботов. Алгоритмы технического зрения роботов // Техническая кибернетика. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ. – 1984. – т.17. – С. 251–294.
2. Бокуть Л.В., Кулешов А.Я. Тематическая обработка полутоновых изображений // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2003. – т.8. – №4. – С. 33–43.
3. Абламейко С.В., Боричев С.П., Крючков А.Н., Кулешов А.Я. Идентификация контурных объектов на космических снимках // Материалы Первого белорусского космического конгресса – Мн: ОИПИ НАН Беларуси 2003. – С. 143–145.
4. Распознавание образов: состояние и перспективы: Пер. с англ. / К. Верхаген, Р. Дейн, Ф. Грун и др. – М.: Радио и связь, 1985. – 104 с.
5. Прикладная статистика: классификация и снижение размерности: Справочное издание / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, М.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. Под ред. С.А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
6. Красиков В.А., Штарьков Ю.М. Распознавание природных образований при многозональном зондировании // Аэрокосмические исследования Земли. Обработка видеoinформации на ЭВМ. – М.: Наука, 1978. – С. 87–107.
7. Раушенбах Г.В. Меры близости и сходства. Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. – М.: Наука, 1985. – С. 169–203.
8. Бокуть Л.В., Кулешов А.Я. Адаптивный алгоритм классификации объектов полутоновых изображений по весовым значениям векторов направлений, сглаженных методом скользящего среднего // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2001. – т.6. – №2–3. – С.107–112.
9. Венецкий И.Г., Кильдишев Г.С. Основы теории вероятности и математической статистики. – М.: Статистика, 1975. – 358 с.
10. Лапа В.Г. Математические основы кибернетики. – Киев: Высшая школа, 1974. – 450 с.
11. Murashko N., Romanchik D., Kuleshov A., Fedulov Y. Classification of gray-scale image objects using variance analysis of their vectorial models // Pattern Recognition and Information Processing (PRIP'2005): Proceeding of the Eighth International Conference (18 - 20 May, Minsk, Republic of Belarus). – Мн.: Propilei, 2005. – P. 496–499.
12. Кулешов А.Я., Романчик Д.В. Классификация объектов полутоновых изображений при отсутствии обучающей выборки // Анализ цифровых изображений: Сб. науч. тр./ Под ред. С.В. Абламейко. – Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2002. – С. 59–68.
13. Yarmosh N., Bokut L., Kuleshov A. Smoothing of the direction vectors' weight values by method of moving average // Материалы 5-й Международной конф. "Распознавание образов и обработка информации". – т. 2. – Минск, 1999. – С.53–59.

ГИДРОПРЕССОВАЯ СБОРКА СОЕДИНЕНИЙ С ГАРАНТИРОВАННЫМ НАТЯГОМ

Чернин И. Л., Сенько Н. Г., Чернин Р. И.

The main limitation of assembly of the connections formed by mechanic pressing-in are noted, the new engineering solution on hydropress disassembly connections is described, the basic theoretical relations of process of a hydrothrust in a part jointing with guaranteed interference are adducedom

Цилиндрические соединения с гарантированным натягом нашли широкое применение в машиностроении. Качественно выполненные сборочные единицы машин с использованием продольно- и поперечно-прессовых соединений с гарантированным натягом позволяют повысить надежность и снизить трудоемкость изготовления конструкций. Вместе с тем опыт эксплуатации и многочисленные исследования свидетельствуют, что применяемый в вагоностроении и вагоноремонтном производстве способ сборки (демонтажа) соединений с натягом колесных пар механического формирования требует всемерного совершенствования. Наличие многочисленных и трудно учитываемых факторов, влияющих на исходную прочность сопряжения цельнокатаных колес и осей вагонов при механической запрессовке, снижает надежность и долговечность колесных пар, а недостатки механической распрессовки соединений с натягом последних значительно сокращают технический ресурс осей.

Известно, что на прочность получаемых механических напрессовок колесных пар оказывают влияние основные факторы: контактное давление под посадкой; состояние поверхностей сопряжения, которое они приобретают после запрессовки; степень пластических деформаций деталей в зоне контакта; уменьшение натяга в сопряжении в результате сглаживания микронеровностей контактирующих поверхностей деталей; количество и качество смазки; скорость перемещения плунжера гидроцилиндра используемого пресса (скорость запрессовки); несовпадение продольных геометрических осей элементов формируемых соединений и пр.

Процессы взаимодействия сопряженных деталей определяют их напряженно-деформированное состояние (НДС), обуславливающие возникновение дефектов соединения. Продольно-прессовые соединения механического формирования имеют существенно низкую нагрузочную способность при значительных энергетических затратах. Анализ состояния поверхностей контакта после распрессовки соединений с большими натягами в условиях полного разделения сопряженных поверхностей осей и цельнометаллических колес с прослойкой масла [1,2] показал, что имеющиеся задиры на поверхностях деталей возникают во время механической запрессовки. В самом процессе механической сборки кроются причины снижения прочности напрессовок и технического ресурса колесных пар подвижного состава рельсового транспорта. Измерения диаметров посадочных поверхностей деталей, проведенные после четырехкратных сборок-разборок соединений, показали, что величина натяга в сопряжении за одну запрессовку снижается на 16...21% в зависимости от материалов деталей соединений, т. е. наблюдается значительный износ поверхностей контакта [2]. Устранение задиры на посадочных поверхностях подступичных частей осей после распрессовки соединений с гарантированным натягом цельнокатаных колес на много снижает долговечность колесных пар грузовых и пассажирских железнодорожных вагонов.

Альтернативой механической запрессовке является гидропрессовая сборка соединений, допускающая выполнение многократного монтажа-демонтажа посадок при незначительном снижении величины натяга. Прочность соединений, собранных гидропрессовым методом, выше в 1.5 раза при испытаниях на проворачивание и в 2 раза при испытаниях на аксиальный сдвиг, чем у соединений, полученных механической запрессовкой. Отношение коэффи-

циентов трения гидропрессовых и прессовых (механической запрессовки) соединений изменяется в зависимости от величины натяга. Из-за пластических деформаций, вызываемых большим натягом, прочность гидропрессовых соединений будет несколько ниже, чем у соединений, сформированных тепловым методом. При использовании гидропрессовой сборки (демонтажа) соединений большое значение имеют:

- выбор рациональной схемы подвода жидкостной смазки в зону сопряжения;
- конструкция уплотнений, гарантирующая при высоких давлениях от утечек смазки во внешнюю среду;
- определение оптимальных параметров гидропрессования и возникающих усилий распора для обеспечения достаточной жесткости устройств.

Используемый в зарубежной практике гидросъем колес с осей [1] при нагнетании масла высокого давления в зону сопряжения через радиальное сверление в ступице колеса дает ощутимый технико-экономический эффект. При торцовом нагнетании масла в сопряжение [3] повышается эффективность использования технологии гидропрессования (ГПТ) при демонтаже и формировании соединений. При давлении нагнетания, превышающем величину контактного сжатия в зоне сопряжения деталей, со стороны подвода рабочей жидкости (РЖ) между контактирующими поверхностями образуется заполненный РЖ кольцевой сужающийся зазор. Теоретические положения по гидропрессовому распору в сопряжении [4] позволяют оценить проницаемость соединения при осуществлении ГПТ и определить величину потребного давления нагнетания РЖ при относительном сдвиге деталей без повреждения их посадочных поверхностей. Зная закономерность падения давления применяемой при ГПТ рабочей жидкости, можно установить оптимальный режим процесса сборки (разборки) гидропрессового соединения с торцовым нагнетанием РЖ в зону сопряжения для осуществления гидрораспора между контактирующими поверхностями деталей. Гидропрессовое формирование соединений с торцовым нагнетанием масла позволяет реализовать безрамную технологию сборки – разборки крупногабаритных соединений с гарантированным натягом по принципу «станок-на-деталь», выполнять напрессовку (демонтаж) колец буксовых подшипников колесных пар, осуществлять гидрозапрессовку тонкостенных втулок в корпусные детали машин в глухих и сквозных отверстиях картеров, блоков и пр. [4]. Базирование на объекте сборки-разборки технологической оснастки и управление ее пространственным положением позволяет, в большинстве случаев, обеспечить более высокую функциональную точность, качество запрессовки и распрессовки соединений. Безрамная технология сборки-демонтажа соединений является перспективным конструктивно-технологическим мероприятием по совершенствованию производства во многих областях промышленности, в том числе и в вагоностроении и при ремонте вагонов. Навесные гидрофицированные устройства к применяемому оборудованию для формирования и демонтажа колесных пар железнодорожных вагонов [5] позволяют в несколько раз снизить потребное усилие сдвига при выпрессовке осей, обеспечив сохранность поверхностей их подступичных частей от механических повреждений и разгрузить несущие элементы прессового оборудования, применяемого в вагоноремонтном производстве.

Предложено решение задачи по созданию принципиально новой схемы сборки-разборки соединений с гарантированным натягом с применением навесной гидрофицированной технологической оснастки [5]. Принят вариант нагружения соединения давлением масла, обуславливающий возникновение только радиальных упругих деформаций деталей от расклинивающей масляной прослойки между поверхностями их контакта. Удельное давление РЖ в зоне контакта, обеспечивающее жидкостное терние, предопределяется величиной давления нагнетания и характером распределения давления гидросреды по длине посадки. С достаточным для практических целей приближением, считая удельное давление равномерно распределенным по длине l_0 создаваемого сборочного зазора и принимая давление РЖ на входе в сопряжение $p=1$ на основании установленной закономерности распределения давле-

ния гидросреды [5], получаем выражение для определения давления в зоне контакта на расстоянии l от входного торца посадки в виде $y = (1 - x)^{0.25}$, где $x = l/l_0$. Интегрированием находится площадь, эквивалентная площади эпюры распределения единичного давления в пределах от $x=0$ до $x=1$. Среднее удельное давление в зоне сопряжения под посадкой составит $p_{cp} = 0,8p_k$ и величина давления нагнетания определяется $p_{нагн} = 1.78p_k$, где p_k – величина контактного давления, обуславливаемая величиной натяга в соединении. При условии образования масляного клина потребной толщины на длине не менее 0,9 длины охватывающей детали соединения величина среднего удельного давления должна составлять $p_{cp} = 1.42p_k$. Если принять коэффициент относительного повышения давления $k_{п} = p_{нагн} / p_k$, то при диаметре сопряжения 130 мм (шейка оси колесной пары) и наружном диаметре охватывающей детали 158 мм (кольцо подшипника) в диапазоне величин рекомендуемых натягов величина $k_{п}$ составляет $k_{п} = 1,27 \dots 1,37$ при суммарной высоте микронеровностей 16 мкм и $k_{п} = 1,43 \dots 1,6$ при указанной высоте 26 мкм. В диапазоне рекомендуемых величин натягов для посадки буксовых подшипников на шейки осей колесных пар расчетные значения величин давления нагнетания $p_{нагн}$ гидросреды с торца сопряжения должна составлять от 28,1 до 40,8 МПа. Практически для осуществления ГПТ возможно воспользоваться отбором масла под давлением от гидросистем прессового оборудования, применяемого для формирования и распрессовки колесных пар вагонов на вагоноремонтных предприятиях. Реализация предложенных технических решений позволяет повысить надежность и технический ресурс буксовых узлов и колесных пар рельсового транспорта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ямаока, М. Содержание колесных пар вагонов. Синкасен//Железные дороги мира, 1983. – №7. – с. 58-61.
2. Щенятский, А. В., Турыгин, Ю. В., Лузгик, А. Л., Курлиш, В. В. Сборка колесных пар гидропрессовым методом // Труды V научн. практ. конф. «Безопасность движения поездов» – М.: МИИТ, 2004.– с41-42.
3. Авт. св. №258835 СССР МПК В 23 Р. Способ напрессовки цилиндрических втулок на оси / Чернин И. Л., Криворучко Н. З. – 1970. –Бюл №1.
4. Сенько В.И., Чернин И. Л., Бычек И. С. Техническое обслуживание вагонов. Организация ремонта грузовых вагонов в депо: Учебное пособие. – Гомель: БелГУТ, 2002 – с371.
5. Чернин И. Л., Сенько Н. Г Чернин Р. И. Устройство для разборки соединений колец буксовых подшипников с шейками осей колесных пар вагонов / Патент ВУ 7609 С1, 2005.12.30

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ И ТЕПЛОВЫХ СХЕМ ТЭЦ

Грибунов Г.А., Куликов И.С.

В теплоэнергетике приходится соприкасаться с большим разнообразием подлежащих оптимизации задач (например, выбор мощности и типа нового оборудования, рабочих и эксплуатационных параметров технологических циклов и процессов, тепловой схемы установки, параметров схемы теплоснабжения и др.). В зависимости от сложности рассматриваемых задач, цели исследования и уровня изученности исходных данных могут применяться частные либо комплексные методы оптимизации. Поскольку в энергетических установках большинство параметров и элементов взаимосвязаны, оптимальное решение по оптимизируемому объему в целом может быть получено лишь на основе комплексной оптимизации. В оптимизационных технико-экономических расчетах, как правило, используются два метода - вариантный и аналитический [1].

Вариантный метод прост, нагляден, не требует сложных математических зависимостей, однако без предварительной оптимизации каждого из рассматриваемых вариантов может приводить к искаженным результатам. Он применяется в основном при проектировании. В качестве критерия оптимума здесь используются приведенные расчетные затраты Z либо их переменная часть ΔZ .

Аналитические методы базируются на применении математических зависимостей, устанавливающих непосредственную взаимосвязь критериев оптимума и оптимизируемых параметров. Установление функциональной зависимости критерия оптимума от искомого параметра при аналитической оптимизации является достаточно сложной физической и математической задачей. Однако широкие возможности использования в исследованиях ЭВМ и разработка методов математического моделирования и анализа в энергетике сделали аналитические методы основными современными методами оптимизации. В аналитических методах оптимизации критериями оптимальности могут быть, например, коэффициент термодинамической эффективности $\eta_{Т.Э.}$ (термодинамическая оптимизация), приведенные затраты Z или их переменная часть ΔZ (технико-экономическая оптимизация). Оптимальное значение искомого параметра x_i соответствует экстремуму функции:

$$\left(\frac{\partial \eta_{Т.Э.}}{\partial x_i} \right)_j = 0; \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial x_i} \right)_j = 0$$

при условии

$$\left(\frac{\partial^2 \eta_{Т.Э.}}{\partial x_i^2} \right)_j = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2} \right)_j = 0$$

где j – фиксированные параметры, независимые от x_i .

Если осуществляется комплексная оптимизация нескольких параметров (x_1, x_2, \dots, x_n) , то критерий оптимальности дифференцируется отдельно по каждому из этих параметров:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1} \right)_{x_2, x_3, \dots, x_n} &= 0; \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial x_2} \right)_{x_1, x_3, \dots, x_n} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x_n} \right)_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}} = 0.$$

При наличии исходной взаимосвязи, влияющей на результаты оптимизации между оптимизируемыми параметрами, в систему (1) вводится уравнение связи

$$\Phi = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

В этом случае искомые параметры могут быть найдены, например, с помощью метода множителей Лагранжа:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0,$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

В практике оптимизации следует пользоваться следующими методическими рекомендациями. Если расчетные экономические и термодинамические зависимости оказываются слишком сложными, то можно находить относительное изменение приведенных затрат рассматриваемых вариантов ∂Z по отношению к какому-то исходному, так называемому базовому варианту (либо базовой точке). В качестве базового можно принять любой технически оправданный вариант, для которого известны технические характеристики и параметры, зависящие от искомого параметра, и рассматриваются все составляющие расчетных затрат при каком-то значении искомого параметра $x = x_0$, подлежащего в дальнейшем оптимизации. При оптимизации по базовому варианту существенно упрощаются расчетные зависимости, уменьшаются объемы вычислений и повышается точность расчетов. Этим методом удобно пользоваться при оптимизации эксплуатационных параметров энергетических установок [1].

При оптимизации параметров, характеристик и режимов работы оборудования необходимо принять возможные технические ограничения, от которых существенно зависят результаты оптимизации. В ряде случаев технические ограничения не позволяют применять комплексную оптимизацию. Под техническими ограничениями понимают такие, при которых ограничено изменение самих исследуемых параметров либо ограничены промежуточные величины, влияющие на выбор оптимизируемых параметров. В этом случае в аналитические методы оптимизации вводятся дополнительно условия, учитывающие технические ограничения.

В теплоэнергетике при оптимизации нужно учитывать технические ограничения в случае выбора числа ступеней подогрева питательной и сетевой воды, числа выхлопов турбины, промежуточного перегрева пара, числа трубопроводов (при оптимизации скорости движения рабочего тела и теплоносителя), характеристик тягодутьевых и водоохладительных устройств, числа типоразмеров унифицируемого оборудования (котлоагрегаты, подогреватели, насосы, ЦНД турбин и др.). Характеристики перечисленных объектов изменяются дискретно от одного целого числа к другому. Это значит, что при исследовании непрерывной функции на экстремум физический и экономический оптимумы будут иметь лишь те значения искомого параметра, которые равны целому числу.

Большое распространение получил в оптимизационных исследованиях **метод математического моделирования**. С помощью этого метода, основанного на использовании ком-

плексов алгоритмов и программ, решаются любые технико-экономические оптимизационные задачи. Применение ЭВМ позволяет решать систему из множества комплексных уравнений, описывающих с достаточной точностью зависимость физических параметров теплоносителей и рабочих тел, термодинамические, расходные, конструктивные, режимные и прочие характеристики объектов оптимизации, а также их взаимосвязь.

Математическое моделирование подразумевает неразрывную связь между экономико-математической моделью и методом решения ее. Первым этапом математического программирования является построение математической модели исследуемого объекта. Математическая модель – это система математических уравнений, описывающих наиболее характерные черты функционирования и развития моделируемого объекта. Математическая модель должна удовлетворять двум противоречивым требованиям: с одной стороны, она должна как можно точнее описывать экономическую систему; с другой – должна быть достаточно простой, чтобы ее можно было описать с помощью математических уравнений и чтобы получаемая система уравнений была доступна для использования имеющимися математическими методами и ЭВМ. Поэтому математическая модель описывает экономическую систему приближенно, выделяя одни ее свойства и пренебрегая другими. В общем случае для одного и того же объекта можно построить большое число различных математических моделей, так как построение модели зависит не только от природы и качества объекта, но и от цели (критерия эффективности), которой она должна соответствовать. В качестве критерия эффективности наибольшее распространение получил минимум расчетных затрат, хотя в ряде случаев могут быть использованы и другие критерии, например надежность, максимум прибыли, минимум себестоимости, минимум расхода топлива. Математическая формулировка зависимости критерия эффективности от параметров модели называется целевой функцией (целевым функционалом) модели. Часто в экономических задачах область изменения целевой функции или переменных стеснена рядом условий, имеющих вид равенств или неравенств. Такие условия называются ограничивающими, или ограничениями модели. Таким образом, математическая модель предполагает наличие целевой функции и системы ограничивающих условий.

Под оптимальностью понимается получение такого решения, которое экстремизирует (максимизирует или минимизирует) целевую функцию при выполнении заданных ограничений.

По характеру использования математического аппарата и с точки зрения принципов формирования различают следующие математические модели:

- *линейные*, в которых все математические зависимости, характеризующие объект, описываются линейными функциями, и *нелинейные*, в которых все или часть зависимостей описываются нелинейными функциями;

- *статические*, в которых рассматривается один фиксированный отрезок времени, и *динамические*, которые описывают развитие системы во времени;

- *детерминированные*, не учитывающие случайного характера реальных процессов, и *вероятностные (стохастические, статистические)*, которые учитывают случайный характер протекающих процессов;

- *непрерывные*, в которых параметры модели могут принимать любые численные значения, и *дискретные (целочисленные)*, в которых переменные могут быть лишь целыми числами;

- *оптимизационные*, в которых оптимальный вариант определяют исходя из экстремизации целевой функции, и *оценочные (расчетные)*, основанные на анализе нескольких возможных решений с целью выбора наилучшего;

- *глобальные*, непосредственно дающие экстремум целевой функции, и *блочные*, экстремум целевой функции которых достигается лишь при взаимодействии блоков модели [1].

Наибольшее развитие получили методы линейного программирования. Уровень разработки методов линейного программирования позволяет решать большинство практических задач. Однако применение линейного программирования требует линеаризации реальных зависимостей, имеющих, как правило, нелинейный характер.

Постановка задачи линейного программирования в общем виде записывается системой: минимизировать

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i - b_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где a, b, c – константы; x_i – искомые переменные.

Одним из универсальных методов решения задач линейного программирования является симплексный метод [2], называемый часто методом последовательного улучшения плана. Для решения задачи с помощью симплекс-метода необходимо прежде всего привести систему ограничений (2) к канонической форме, т. е.

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i + y_j = b_j. \quad (4)$$

Затем, решая полученную систему (4) относительно n переменных, найдем допустимое базисное решение:

$$y_j = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i.$$

Алгоритм симплекс-метода состоит из двух этапов: на первом находится допустимое базисное решение; на втором осуществляется переход от начального решения к другому, более близкому к оптимальному, затем к следующему, и так до тех пор, пока задача не будет решена. С геометрической точки зрения система ограничений представляет область выпуклого многогранника допустимых решений. Базисное решение является вершиной этого многогранника. Переход от одного решения к другому можно толковать как перемещение по ребрам от одной вершины многогранника к другой по направлению к той вершине, которая соответствует наилучшему решению.

Кроме симплекс-метода, существуют и другие вычислительные методы линейного программирования.

Обобщением задач линейного программирования является параметрическое программирование. Особенность задачи параметрического программирования состоит в том, что исходные данные являются не постоянными величинами, а функциями, зависящими от некоторых параметров. Рассмотрим случай, когда целевая функция линейно зависит от параметра p . Математическая формулировка задачи для параметра p , принадлежащего отрезку $kb, p \in (k, b)$, где k, b – произвольные действительные числа, выглядит так: найти для каждого p на отрезке (k, b) такой вектор $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$, который максимизировал бы целевую функцию

$$\sum_{i=1}^m (c_i + d_i p) x_i$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \leq a_j; \quad j = \overline{1, n}; \quad x_i \geq 0; \quad i = \overline{1, m}.$$

Решение задачи состоит из двух этапов. На первом этапе фиксируем значение параметра p , например, задаем $p = k$. Таким образом, получаем обычную задачу линейного программирования. Решая ее тем или иным методом, определяем значение x_i , максимизирующее целевую функцию при заданных ограничениях. На втором этапе определяется интервал изменений параметра p_i , для которого максимум целевой функции достигается в одной и той же вершине многогранника допустимых решений. Найденный интервал исключается из отрезка (k, b) . Для оставшейся части отрезка вновь повторяется процедура первого этапа задачи. Решение будет повторяться до тех пор, пока отрезок (k, b) не будет полностью разбит на интервалы.

Постановка задачи линейного программирования требует предварительной линеаризации реальных зависимостей, которые являются, как правило, нелинейными. Если линеаризация приводит к значительной погрешности, то для решения поставленной задачи необходимо использовать методы нелинейного программирования. Общая задача нелинейного программирования заключается в отыскании экстремума целевой функции при заданных ограничениях, причем либо оптимизируется функция, либо система ограничений, либо та и другая вместе нелинейные.

Обычно в качестве отдельной группы выделяют методы, разработанные в классической математике: метод поиска оптимума путем решения системы нелинейных уравнений, полученных при приравнении нулю частных производных исследуемой функции по оптимизируемым параметрам, и метод неопределенных множителей Лагранжа. Эти методы позволяют решать задачи поиска оптимума нелинейной функции многих переменных только при отсутствии ограничений на оптимизируемые параметры или при ограничениях в виде равенств. Поэтому указанные методы нельзя относить к методам нелинейного математического программирования.

Очень часто собственно методы нелинейного математического программирования, т. е. методы определения экстремума нелинейной функции при наличии ограничений на оптимизируемые параметры в виде неравенств, делят по признаку организации процесса поиска на методы слепого поиска и методы направленного поиска. К **методам слепого поиска** относятся метод сплошного перебора вариантов (метод прямого упорядочения вариантов по критерию эффективности) и метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). К **методам направленного поиска** относятся градиентный метод, метод наискорейшего спуска, метод покоординатного спуска и др. [3].

Согласно другой классификации все методы нелинейного программирования можно разделить на методы локального поиска и методы нелокального (глобального) поиска. В процессе решения задачи одним из **локальных методов** значения оптимизируемых параметров непрерывно меняются в направлении минимизации (или максимизации) рассматриваемой функции. Тем самым эти методы гарантируют нахождение только локального оптимума. К группе локальных методов относятся методы: градиентный, наискорейшего спуска, покоординатного спуска и др. Для методов **глобального поиска** характерно введение дискретности в процессе изменения оптимизируемых параметров, что способствует рассмотрению большей области изменения исследуемой функции и выявлению абсолютного оптимума среди локальных. К этой группе методов относятся метод случайного поиска, метод динамического программирования, а также сочетания для совместного использования ряда других методов.

Классические методы решения экстремальных задач. К числу классических математических методов определения экстремума функции многих переменных относятся:

1) метод поиска оптимума путем решения системы нелинейных уравнений, полученных при приравнении нулю частных производных минимизируемой функции по оптимизируемым параметрам;

2) метод неопределенных множителей Лагранжа.

В математическом плане оба метода достаточно хорошо известны, поэтому основное внимание при их анализе следует обратить на вопрос применимости этих методов к решению задач оптимизации теплоэнергетических установок.

Рассмотрим первый из указанных методов. Пусть имеем функцию цели $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Расположение экстремума внутри области можно определить по следующему правилу: непрерывная функция $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n достигает максимума или минимума внутри области только при таких значениях переменных x_i , для которых n частных производных $\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial Z}{\partial x_n}$ одновременно

обращаются в нуль. Согласно этому правилу необходимым условием определения экстремальных точек является решение системы n алгебраических или трансцендентных уравнений, получаемых приравнением нулю частных производных:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial x_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial Z}{\partial x_n} = 0. \quad (5)$$

На первый взгляд кажется, что использование этого метода позволяет достаточно просто решать задачу определения оптимума нелинейной функции многих переменных. Однако это не так. Существует ряд трудностей при его реализации и ограничений по сфере его применения. Во-первых, при большом числе оптимизируемых параметров рассматриваемый метод становится весьма сложным в части решения системы уравнений (5). Задача решения системы уравнений (5) только в простейших случаях оказывается легкой. В практических задачах оптимизации теплоэнергетических установок число переменных x_i , как правило, велико. Во-вторых, условие определения экстремума, выраженное зависимостью (5), является необходимым, но недостаточным для решения задачи. В самом деле, выражение (5) определяет положение стационарных точек внутри области, среди которых кроме экстремальных могут быть особые точки типа «седла». Учет достаточных условий нахождения экстремумов функции многих переменных является весьма сложным как в алгоритмическом, так и в вычислительном плане. В-третьих, рассматриваемый метод дает возможность найти экстремум только в том случае, если он лежит внутри, а не на границе области возможных значений аргументов. Между тем многие параметры и характеристики теплоэнергетических установок имеют свои оптимальные значения именно на границах допустимой области их изменения. Следовательно, требуется дополнительный анализ значений минимизируемой функции $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на границах допустимой области изменения параметров x_1, x_2, \dots, x_n . Наконец, четвертый недостаток рассматриваемого метода состоит в ограниченности его применения классом задач, в которых оптимизируемые параметры, определяющие значение минимума или максимума функции, независимы, т. е. x_1, x_2, \dots, x_n независимы друг от друга. В то же время для теплоэнергетических установок, отдельных агрегатов и элементов оборудования характерно наличие балансовых уравнений, связывающих между собой значительную часть параметров [4].

Все указанные недостатки приводят к выводу о том, что использование классического метода определения экстремумов функции многих переменных для решения задач оптимизации параметров теплоэнергетических установок или отдельных элементов является неэффективным, поскольку:

1) оно сводит первоначально поставленную задачу отыскания экстремума к таким вторичным задачам, которые оказываются не проще исходной, а зачастую и сложнее;

2) при этом возникает необходимость в значительном изменении условий постановки энергетической задачи, искажающем ее сущность.

Определение экстремальных точек функции многих переменных для весьма важного случая наличия дополнительных связей между оптимизируемыми параметрами может быть осуществлено с использованием классического математического метода множителей Лагранжа [1]. Пусть имеем функцию цели $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$, экстремум которой требуется найти, причем имеют место дополнительные условия

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (6)$$

где $j = 1, 2, \dots, m$; $m < n$.

Введя m дополнительных множителей, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и обозначив $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, получаем новую функцию:

$$L(X, \Lambda) = Z(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(X), \quad (7)$$

где λ_j – множитель Лагранжа.

Необходимые условия экстремума состоят в равенстве нулю всех первых частных производных от L . В результате получается $(n+m)$ уравнений с $(n+m)$ неизвестными X и Λ . Решение этих уравнений относительно переменных X и Λ позволяет определить положение стационарной точки. Таким образом, использование вспомогательной функции $L(X, \Lambda)$ и вспомогательных множителей Λ позволяет заменить задачу с дополнительными условиями вида (6) задачей без дополнительных условий.

Недостатком метода множителей Лагранжа является введение m дополнительных переменных, которые должны быть исключены с помощью m дополнительных уравнений. Если учесть, что при решении задачи комплексной оптимизации параметров теплоэнергетических установок число уравнений связи между оптимизируемыми параметрами достигает 100–200, то станет очевидной важность этого недостатка. Кроме отмеченного для метода множителей Лагранжа сохраняют свою силу и другие недостатки и трудности использования, указанные выше применительно к первому из рассмотренных методов.

Методы слепого поиска. Сущность решения задач на определение экстремума функции многих переменных $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с помощью методов слепого поиска заключается в организации просмотра (в определенном порядке или случайным образом) допустимой области изменения оптимизируемых параметров X и сравнении соответствующих значений функции Z . При этом информация о функции Z , полученная в результате какого-либо варианта расчета, используется при последующем расчете лишь в ограниченном объеме, а само определение экстремального значения функции Z не сопровождается последовательным улучшением промежуточных результатов.

К числу методов слепого поиска принадлежит *метод прямого упорядочения вариантов по критерию эффективности* (метод пространственной сетки). Суть его состоит в следующем. Для каждого независимого оптимизируемого параметра x_i технически допустимая зона определения делится на равные отрезки. Значения параметров на концах полученных отрезков образуют новую, уже дискретную область определения этих параметров. Число отрезков выбирается по допустимому количеству точек дискретной области определения функции Z :

$$N = m_1 m_2, \dots, m_i, \dots, m_n, \quad (8)$$

где m_i – количество точек дискретной области определения i -го параметра; n – число независимых оптимизируемых параметров.

Наибольшее значение N_{\max} определяется допустимым по техническим или экономическим соображениям временем работы ЭВМ:

$$t_{\text{доп}} = N_{\max} \tau, \quad (9)$$

где τ – время расчета одного варианта.

В процессе последовательного расчета вариантов очередное значение функции Z сравнивается с минимальным из ранее рассмотренных и в результате выбирается экстремальное значение (зона значений) целевой функции Z . Варианты, не удовлетворившие тем или иным ограничениям, поставленным в условиях задачи, из сопоставления исключаются. При решении задач выпуклого нелинейного программирования методом последовательного сравнения вариантов способ деления допустимой зоны определения каждого независимого оптимизируемого параметра на отрезки равной длины не является наилучшим. Целесообразнее проводить поиск экстремума при переменной длине отрезка, уменьшая его по мере приближения к зоне оптимума. Сопоставление ряда способов выбора размера отрезка показывает, что для задач этого класса оптимальным является способ деления, в основу которого положена последовательность чисел Фибоначчи.

К преимуществам метода прямого упорядочения вариантов по критерию эффективности следует отнести простоту алгоритма и программы оптимизации, малый объем необходимой машинной памяти и возможность нахождения абсолютного оптимума. Главным недостатком метода является большое время работы ЭВМ, так как приходится рассчитывать все возможные варианты сочетаний значений оптимизируемых параметров. Этот недостаток вытекает из самой сущности рассматриваемого метода, при котором в процессе поиска экстремального значения целевой функции Z результаты расчета предыдущих вариантов используются в очень малой степени. Кроме того, рассматриваемый метод позволяет определить лишь приближенное положение точки оптимума, соответствующее значению функции цели в узлах пространственной сетки.

Применение рассматриваемого метода целесообразно для оптимизации параметров элементов и групп элементов оборудования теплоэнергетических установок, имеющих относительно небольшое число независимых параметров и варьируемых внешних факторов.

Следующим методом слепого поиска, который может быть применен в процессе оптимизации параметров теплоэнергетических установок и их отдельных элементов для решения нелинейных, экстремальных, многофакторных задач, является *метод статистических испытаний* (метод Монте-Карло). Сущность этого метода заключается в том, что решение аналитической задачи заменяется моделированием некоторого случайного процесса. Его вероятностная характеристика, например вероятность определенного события или математического ожидания некоторой величины, имеет тесную связь с возможным решением исходной аналитической задачи. При использовании указанного метода необходимо большое число раз моделировать соответствующий случайный процесс и определять путем статистической обработки значение искомой характеристики – вероятности или математического ожидания. Поэтому метод статистических испытаний требует выполнения огромной вычислительной работы.

Метод статистических испытаний характеризуется простотой алгоритма и программы решения задачи. Ему свойственны все преимущества, присущие методу прямого упорядочения вариантов по критерию эффективности. Вместе с тем при использовании метода статистических испытаний количество рассчитываемых вариантов, а, следовательно, и время счета на ЭВМ зависят от требуемой вероятности решения задачи с погрешностью, не превышающей определенное значение. Для тех задач, где допустимо некоторое снижение вероятности получения решения с заданной точностью, число необходимых случайных испытаний может быть уменьшено.

Анализ возможностей использования двух методов слепого поиска для решения многофакторных экстремальных задач показал, с одной стороны, ряд их положительных свойств, а с другой – ограниченность их применения кругом задач с небольшим числом оптимизируемых параметров. Второй весьма важной областью применения методов слепого поиска является их использование в алгоритмах, сочетающих в себе ряд методов, в частности для определения абсолютного оптимума в многоэкстремальных задачах и для оптимизации дискретно изменяющихся параметров.

Методы направленного поиска. Для оптимизации теплоэнергетических установок и их отдельных элементов с большим числом оптимизируемых параметров и варьируемых факторов могут быть применены методы направленного поиска оптимума: градиентные, наискорейшего спуска, покоординатного спуска и др. Характерной чертой этих методов является использование в процессе решения задачи результатов каждого данного шага (иногда также и предыдущих шагов) поиска оптимальной точки для определения направления изменения оптимизируемых параметров на каждом следующем шаге. При этом значение минимизируемой функции систематически уменьшается. Тем самым вместо рассмотрения большого количества вариантов происходит направленный анализ относительно малого числа вариантов, что обеспечивает приемлемое время счета на современных ЭВМ среднего класса для задач, в которых число оптимизируемых параметров исчисляется десятками.

Рассмотрим *градиентный метод* для простейшего случая определения экстремума функции многих переменных $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при отсутствии каких-либо ограничений. Процесс оптимизации по методу градиента заключается в определении направления наискорейшего изменения функции Z и некотором перемещении по этому направлению в прямую или обратную сторону. Направление наискорейшего изменения функции определяется направлением вектор-градиента оптимизируемой функции, которое всегда совпадает с направлением возрастания функции. Компонентами градиента $\frac{\partial Z}{\partial X^0}$ в какой-либо точке рассматриваемой области заданной параметрами $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, являются частные производные функции $\frac{\partial Z}{\partial x_1^0}, \frac{\partial Z}{\partial x_2^0}, \dots, \frac{\partial Z}{\partial x_n^0}$.

Отметим, что градиент $\frac{\partial Z}{\partial X^0}$ всегда перпендикулярен к поверхности равных значений функции Z в рассматриваемой точке.

Каждый этап процесса градиентного спуска имеет две составляющие: определение направления наискорейшего спуска и осуществление шага по направлению спуска.

Наименьшее число шагов при градиентном спуске обеспечивает разновидность градиентного метода, называемая иногда *методом наискорейшего спуска*. Суть этой модификации градиентного метода в следующем. После определения градиента функции $Z(X)$ производится движение по направлению антиградиента до точки, в которой достигается минимальное значение функции $Z(X)$ на данном направлении. В найденной точке снова определяется градиент и движение совершается по прямой, соответствующей направлению нового антиградиента, и т. д. до нахождения экстремума функции $Z(X)$.

Для определения шага при использовании метода наискорейшего спуска могут быть применены два способа. Первый из них исходит из положения, что на каждом прямом участке линии антиградиента функция $Z(X)$ может рассматриваться как параметрическая функция одного параметра t , т. е. $Z = Z[X(t)]$. Тогда для вычисления шага, конец которого совпадает

ет с минимумом функции $Z[X(t)]$ на этой линии, достаточно найти минимум функции $Z[X(t)]$ по параметру t .

Второй способ определения шага в методе наискорейшего спуска базируется на интерполяции (экстраполяции) изменения функции $Z(X)$ вдоль направления антиградиента.

Рассматриваемый способ определения шага наискорейшего спуска имеет определенную погрешность, вызываемую неточностью описания действительной зависимости изменения функции $Z(X)$ по направлению антиградиента интерполирующим полиномом. Значение погрешности определения dX может быть снижено, если применить интерполяцию полиномом третьей или более высокой степени, но при этом потребуются вычислить значения $Z(X)$ для большого числа точек на направлении антиградиента.

Анализ приведенных способов выбора шага в градиентном методе спуска к точке минимума не позволяет сделать однозначного заключения о безусловных преимуществах какого-либо одного из них. Причины этого достаточно очевидны. С одной стороны, от выбранного способа определения шага зависят сходимость вычислительного процесса, выражающаяся через число шагов, необходимых для достижения точки оптимума, и соответственно время счета на ЭВМ. С этой точки зрения более целесообразными являются два последних из рассмотренных способов, обеспечивающие решение задачи оптимизации за минимальное число шагов. Но, с другой стороны, эти последние способы определения шага весьма сложны и могут потребовать значительного времени для расчета на ЭВМ собственно шага. Поэтому выбор способа определения шага должен производиться в каждом конкретном случае решения той или иной задачи с учетом инженерной специфики объекта оптимизации, объема задачи, требований к точности решения, характеристик используемой ЭВМ и других факторов.

Следующим достаточно эффективным методом направленного поиска является *метод покоординатного спуска* (метод Гаусса - Зейделя). Суть этого метода заключается в минимизации многопараметрической функции $Z = Z(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, где индекс 0 обозначает принадлежность параметра к исходной точке спуска, сначала по одному параметру x_1 , затем по второму x_2 и т. д. до последнего параметра x_n . На первом этапе решения задачи фиксируются значения всех параметров, кроме первого, и определяется оптимальное значение этого параметра, т. е. ищется минимум функции $Z = Z(x_1^0, x_{2\phi}^0, \dots, x_{n\phi}^0)$. Найденное оптимальное значение первого параметра обозначим x_1^1 . Далее ищется минимум функции $Z(x_{1\phi}^1, x_2, x_{3\phi}^0, \dots, x_{n\phi}^0)$ при изменении только второго параметра x_2 . При этом первый параметр x_1 фиксируется при найденном выше оптимальном значении, т. е. $x_1 = x_{1\phi}^1$.

Цикл оптимизации заканчивается после определения минимума функции $Z = Z(x_{1\phi}^1, x_{2\phi}^1, \dots, x_{(n-1)\phi}^1, x_n)$ при изменении параметра x_n , что соответствует установлению его оптимального значения. Один цикл поиска при использовании метода покоординатного спуска, т. е. однократная отдельная оптимизация значений всех параметров X , как правило, не позволяет найти состояние, соответствующее минимуму функции $Z(X)$. Поэтому необходимо повторение указанного цикла.

Способы выбора длины шага при покоординатном спуске совпадают со способами, рассмотренными применительно к градиентному методу. Последовательность, в которой

выбираются координатные оси, может быть различной. Обычно они берутся в фиксированном циклическом порядке (чаще всего просто поочередно). Иногда вначале определяется, какие из переменных x_1, x_2, \dots, x_n оказывают наибольшее влияние на изменение функции цели Z , в соответствии с чем и строится последовательность спуска по отдельным параметрам. Такое предварительное исследование и расстановка параметров в порядке их значимости безусловно повышают эффективность метода, улучшая его сходимость. Однако указанное предварительное исследование в свою очередь требует определенного усложнения алгоритма оптимизации и дополнительного времени счета на ЭВМ.

Имеющийся опыт применения метода покоординатного спуска показывает, что по условию сходимости он при малом числе переменных может дать лучшие результаты, чем градиентный метод. Однако при решении задач с большим числом переменных и сложной системой ограничений метод покоординатного спуска существенно уступает градиентному методу.

При большом числе оптимизируемых параметров X иногда применяют модифицированный метод покоординатного спуска. В этом случае полное число параметров X разбивается на некоторое число групп. Вначале одним из рассмотренных методов оптимизируются параметры первой группы при фиксированных значениях параметров остальных групп. Далее осуществляется поиск оптимума по параметрам второй группы и т. д. Таким образом, отличие этого метода от простого покоординатного спуска состоит в том, что при простом покоординатном спуске поиск экстремума идет поочередно по каждой переменной, а при модифицированном методе поочередно по группам переменных.

Следует остановиться еще на одной модификации метода покоординатного спуска – методе грубого поиска минимума, также нашедшем применение для решения задач большой размерности. Согласно этому методу первоначально производится спуск по всем переменным поочередно. Далее выбирается несколько координат, по которым спуск наиболее эффективен. Последующий спуск производится только по этим координатам (все остальные не меняются). Время от времени выбор этих ведущих координат повторяется заново.

Каждый из методов направленного поиска имеет упомянутые нами слабые и сильные стороны. Вместе с тем им свойственны общие для всех методов преимущества и недостатки. Основное их преимущество заключается в направленности поиска оптимума, что позволяет решать задачи с большим числом оптимизируемых параметров на ЭВМ среднего класса за приемлемое время. Именно это их достоинство обусловило широкое использование методов направленного поиска при решении экстремальных многофакторных задач. Среди недостатков методов направленного поиска следует выделить один основной – возможность нахождения только локального оптимума или особой точки типа седловой.

Метод случайного поиска. Общая их идея заключается в следующем. В процессе минимизации в окрестностях точки X^i определяется одно или несколько значений функции $Z(X)$, для чего делаются соответствующие пробные шаги. Затем на основании полученных значений функции $Z(X)$ вычисляется новая точка X^{i+1} , т. е. делается рабочий шаг. Далее процесс повторяется. При этом направления изменения компонент вектора X задаются случайными, причем все направления равновероятны, а движение к экстремуму будет осуществляться только в том случае, когда результат данного случайного движения приводит к уменьшению функции $Z(X)$.

Следует заметить, что в инженерных задачах оптимизации параметров теплоэнергетических установок, при постановке которых широко используются предшествующий опыт и знания о близких по типу установках, практически не бывает случаев, когда исходная точка отстоит от точки оптимума на очень большие расстояния.

Преимущества градиентного метода оптимизации по сравнению с методом случайного поиска возрастают в случае организации процесса спуска с переменным рабо-

чим шагом. Для этого случая в процессе случайного поиска среднее приращение функции $Z(X)$ на один расчет $\frac{2n}{n+1}$ раз меньше, чем при градиентном методе, где n – число оптимизируемых параметров X . Принцип случайного поиска обладает важными преимуществами: во-первых, алгоритмы, его реализующие, менее чувствительны, чем детерминированные методы, к наличию неглубоких локальных минимумов и, во-вторых, некоторые алгоритмы случайного поиска позволяют определять точку абсолютного минимума.

Методы учета ограничений. До сих пор рассматривалось применение методов направленного и случайного поиска для простейшего случая оптимизации нелинейной функции $Z(X)$ при отсутствии каких-либо ограничений. Более общим случаем является задача минимизации функции многих переменных при наличии ограничений в виде равенств. Эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Необходимо минимизировать нелинейную функцию цели

$$Z = Z[X, Y(X)] \quad (10)$$

при наличии нелинейных ограничений в виде равенств

$$\Phi[X, Y(X)] = 0. \quad (11)$$

Наиболее общим случаем задачи минимизации нелинейной функции $Z = Z[X, Y(X)]$ является случай, когда кроме ограничений в виде системы нелинейных равенств $\Phi[X, Y(X)] = 0$ и ограничений на совокупность независимых параметров X имеют место ограничения на зависимые параметры $Y^* \leq Y[X, Y(X)] \leq Y^{**}$ и некоторые дополнительные функции $F: F^* \leq F[X, Y(X)] \leq F^{**}$. Здесь в качестве дополнительных функций F выступают совокупность нелинейных технологических характеристик, имеющих ограничения. Принципиальное отличие ограничений на Y и F от ограничений на параметры X состоит в том, что параметры Y и характеристики F являются нелинейными функциями параметров X и Y . Именно это обстоятельство обуславливает особую сложность решения задачи в такой общей постановке. Процесс градиентного спуска должен быть организован таким образом, чтобы при выходе из допустимой области дальнейшее движение происходило вдоль нелинейных границ и одновременно в направлении снижения значения функции Z . В настоящее время известен ряд способов решения таких задач, некоторые из них будут рассмотрены ниже.

Способ зигзагообразного движения вдоль границ для простейшего случая двух переменных (x_1 и x_2) и одного ограничения (f_1^*) иллюстрируется рис. 1. Пусть при движении по направлению антиградиента из точки, расположенной в допустимой области изменения параметров (точка A_2 на рис. 1), сделан шаг, при котором нарушаются некоторые из ограничений по F , т. е. имеет место нарушение границы. Для возврата в допустимую область организуется движение в направлении вектора S , определяемого как сумма градиентов тех функций f_ρ , которые в точке A_3 вышли за ограничения:

$$S = \sum_{\rho=1}^N \frac{\partial f_\rho}{\partial X}. \quad (12)$$

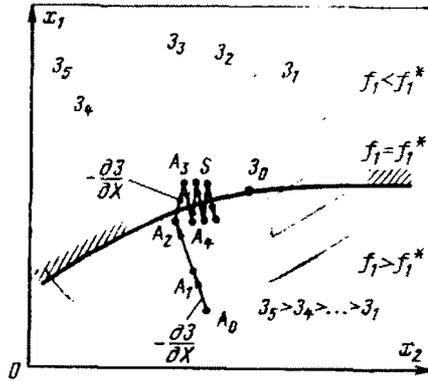


Рис.1. Зигзагообразное движение вдоль границы допустимой области

Это движение сменяется движением по направлению антиградиента, как только текущая точка поиска снова окажется в допустимой области и т. д. Из рис. 1 хорошо видно, что по мере приближения к цели (точка Z_0) снижение минимизируемой функции Z постепенно замедляется. Медленная сходимость вычислительного процесса является основным недостатком рассмотренного метода. Аналогичным образом изложенный способ может быть использован для движения вдоль границ ограничений по Y и при одновременном учете ограничений по F и Y .

Определенные возможности для движения по границам допустимой области представляет метод проектирования градиента. Рассмотрим основы этого метода на простейшем примере минимизации функции $Z(X)$ при наличии одного ограничения в виде неравенства на технологическую характеристику f_1 (рис. 2).

Пусть в процессе градиентного спуска мы оказались в точке A , лежащей на поверхности f_1^* , ограничивающей область изменения переменных. Антиградиент минимизируемой функции $\left(-\frac{\partial Z}{\partial X}\right)$, вычисленный в точке A , направлен за пределы допустимой области (вектор AA_1 на рис. 2). Допустимым направлением движения из точки A , соответствующим наибольшей скорости возрастания функции Z , является направление вектора AA_2 , совпадающего с проекцией антиградиента функции Z на плоскость L_1 , перпендикулярную к вектору градиента функции ограничения f_1 в рассматриваемой точке A . Обозначим эту проекцию антиградиента Q . Следовательно, в данном случае движение производится в плоскости L_1 , касательной в точке A к поверхности $f_1 = f_1^*$. Таким образом, при использовании метода проектирования градиента направление движения из точки, лежащей на границе допустимой области, определяется взаиморасположением вектора антиградиента функции $Z(X)$ в этой точке и вектора градиента функции ограничений f_p в этой же точке.

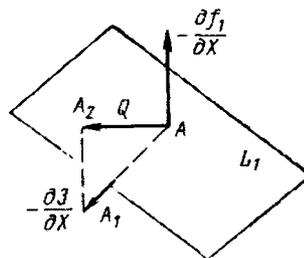


Рис.2. Графическая интерпретация метода проектирования градиента

Для более общего случая при наличии нескольких ограничивающих нелинейных неравенств движение из точки, расположенной на граничной поверхности f_ρ , препятствующей движению по направлению антиградиента $\left(-\frac{\partial Z}{\partial X}\right)$, производится по одному из следующих вариантов:

1) по направлению проекции Q_ρ антиградиента минимизируемой функции $\left(-\frac{\partial Z}{\partial X}\right)$ на соответствующую касательную плоскость L_ρ , если справедливо неравенство:

$$\left(Q \frac{\partial f_\rho}{\partial X}\right) > 0; \quad (13)$$

2) по направлению проекции вектора антиградиента функции $Z(X)$ на пересечение касательных плоскостей, если неравенство (13) не выполняется.

При перемещении из точки A^i , находящейся на поверхности ограничений, на шаг конечной длины в одном из указанных направлений следующая точка поиска A^{i+1} может оказаться вне области допустимых значений переменных. Возвращение из точки A^{i+1} на поверхность ограничения производится движением по направлению $S = \sum_{\rho=1}^N \frac{\partial f_\rho}{\partial X}$, т. е. по на-

правлению суммы градиентов функций ограничений, нарушенных в точке A^{i+1} . Заканчивая рассмотрение метода проектирования градиентов, следует отметить, что последовательности возможных движений при различных степенях ограничения весьма многочисленны и, очевидно, многократные проверки и проектирования при различных сочетаниях ограничений по F и Y приведут к весьма сложной программе счета, если придется иметь дело одновременно с несколькими ограничениями в виде неравенств. Метод проектирования градиента представляется весьма перспективным в тех случаях, когда уравнения ограничений линейны или почти линейны. К сожалению, в задачах оптимизации параметров теплоэнергетических установок это условие не выдерживается.

Для решения задач минимизации функции многих переменных при наличии ограничений в виде нелинейных неравенств можно также применить весьма простой в части алгоритма и программы метод штрафов. Суть его заключается в том, что в случае нарушения указанных ограничений к минимизируемой функции прибавляется некоторая положительная величина, подсчитанная как функция нарушенных ограничений. Тем самым такая система штрафов воздействует на направление изменения тех независимых переменных, которые привели к нарушению системы нелинейных неравенств. При выборе штрафной функции необходимо соблюдать следующие условия:

- 1) она должна быстро возрастать по мере нарушения ограничений в виде неравенств;
- 2) она должна быть вогнутой, так как иначе могут появиться посторонние решения (локальные минимумы за пределами допустимой области изменения параметров).

В остальном вид штрафной функции может быть произвольным, с оговоркой, что от ее вида зависит сходимость итерационных процессов. В настоящее время чаще всего применяется следующее задание штрафной функции:

$$Z_{\text{штр}} = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^N \xi_\rho k_\rho \Delta f_\rho^2, \quad (14)$$

где $\xi_\rho = 0$, если ограничения по f_ρ выполняются, и $\xi_\rho = 1$, если ограничения по f_ρ не выполняются; N – число нарушенных ограничений; k_ρ – положительная константа;

$$\Delta f_\rho = \begin{cases} f_\rho - f_\rho^{**} & \text{при } f_\rho > f_\rho^{**}; \\ f_\rho^* - f_\rho & \text{при } f_\rho < f_\rho^*. \end{cases}$$

Применительно к задачам оптимизации теплоэнергетических установок для определения штрафа можно также применять функцию, достаточно точно отражающую сущность происходящего при нарушении ограничения по f_ρ процесса. Примером такого подхода может быть точное определение эрозионного ущерба, наносимого запыленным потоком при выходе его скорости за максимально допустимое значение. Указанный подход к выбору выражения штрафной функции позволяет в процессе решения задачи оптимизации уточнить предельные значения функций ограничения (в приведенном примере – максимально допустимое значение скорости потока), принимаемые в ряде случаев, особенно для теплоэнергетических установок новых типов, сугубо ориентировочно.

В случае использования метода штрафных функций задачу минимизации функции $Z(X)$ при наличии ограничений в форме нелинейных неравенств можно заменить задачей нахождения минимума более сложной функции, но лишенной ограничений в виде неравенств. Это новая минимизируемая функция имеет вид:

$$Z' = Z(X) + \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^N \xi_\rho k_\rho \Delta f_\rho^2. \quad (15)$$

Совершенно очевидно, что «штрафные» слагаемые во втором члене выражения (15), будучи неотрицательными, при нарушении границы какой-либо функции f_ρ приводят к резкому увеличению функции Z' и тем самым препятствуют движению в недопустимую область.

К настоящему времени накоплен положительный опыт применения метода штрафных функций для решения ряда практических задач оптимизации. Вместе с тем в сложных задачах при большом числе нелинейных ограничений в виде неравенств, когда точка оптимума может лежать на границах нескольких из этих ограничений, применение способа штрафных функций дало недостаточно хорошие результаты. Дело в том, что неоднозначное изменение минимизируемой функции вследствие периодического появления или исчезновения отдельных функций штрафа приводит к систематическому, очень резкому изменению направлений антиградиента; при этом истинное направление спуска теряется, скорость спуска замедляется, а время решения на ЭВМ интенсивно растет. Иногда методом штрафов вообще не удается преодолеть «зацикливания» и получить решение задачи [2].

Изложенные методы учета нелинейных границ в процессе оптимизации основываются на итерационном возвращении в допустимую область после установления факта выхода за ее границы. Они дают удовлетворительные результаты при минимизации целевой функции в выпуклой области допустимых значений переменных. В случае выпукло-вогнутых ограничений, как это имеет место в рассматриваемом классе задач, использование такого приема нарушило бы сходимость процесса оптимизации. В самом деле, точки пересечения границ при итерационном возвращении к ним из недопустимой области согласно одному из изложенных методов могут не совпасть с точками пересечения границ при их нарушении по направлению скорейшего спуска. В результате этого значение минимизируемой функции после возврата Z^{i+1} может оказаться выше, чем значение до выхода из допустимой области Z' , что противоречит основной цели решаемой задачи. Поэтому при оптимизации параметров теп-

лоэнергетических установок более целесообразно применение алгоритмов спуска точно до границ допустимой области (без их нарушения) и дальнейшего движения непосредственно вдоль нелинейных ограничивающих функций F и ограничивающих параметров X . Применительно к первым двум методам ввода в допустимую область такая модернизация алгоритмов достаточно легко осуществима путем корректировки шага.

Эффективным методом решения многих нелинейных задач является метод динамического программирования, не предъявляющий никаких требований к виду целевой функции, кроме требования аддитивности, т. е. представления в виде суммы однотипных составляющих на всех этапах процесса оптимизации. Основная идея метода заключается в разделении сложной многофакторной задачи на ряд последовательных шагов. В простейшем виде задача динамического программирования выглядит следующим образом: найти экстремум функции

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq A.$$

Решение задачи производится на основе рекуррентных соотношений Беллмана:

$$h(c) = \min [h_{k-1}(c - x_k) + f_k(x_k)].$$

Вычислительная схема метода сводится к получению последовательности функций $h_k(x)$ для $k = \overline{1, n}$. На последнем шаге отыскивается оптимальное значение целевой функции, а значения переменных, удовлетворяющих оптимальному решению, находятся "обратным ходом".

Недостатками метода динамического программирования можно считать большой объем вычислений и необходимость хранения в памяти машины значительной по объему информации.

Получает распространение геометрическое (критеральное) программирование. В общем виде задача геометрического программирования формулируется следующим образом: минимизировать

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^n c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots x_m^{a_{im}} = \sum_{i=1}^n c_i \prod_{j=1}^m x_j^{a_{ij}}$$

при ограничениях

$$f_k(x_1, \dots, x_m) \leq 1, \quad k = \overline{1, r};$$

$$x_j \leq 0; \quad j = \overline{1, m}.$$

Существенной особенностью геометрического программирования является то, что основное внимание акцентируется на слагаемых критерия оптимальности $c_i \prod_{j=1}^m x_j^{a_{ij}}$ и не предъявляется серьезных требований к виду оптимизируемой функции. Решение задач методом геометрического программирования базируется на понятии двойственности функции. Вследствие того, что метод геометрического программирования появился относительно недавно, он еще не получил широкого практического применения [1].

Таким образом, на основании вышеприведенного анализа можно сделать следующие выводы:

1. Все изложенные методы обладают определенными преимуществами и недостатками при оптимизации параметров теплоэнергетических установок. При использовании реальных

зависимостей между характеристиками теплоэнергетических установок, являющимися, как правило, нелинейными, следует использовать методы нелинейного программирования.

2. Методы пространственной сетки и Монте-Карло могут быть применены лишь для задач с небольшим числом оптимизируемых параметров теплоэнергетических установок. При решении задач с большим числом оптимизируемых параметров наиболее приемлемым является градиентный метод.

3. По сравнению с детерминированными методами метод случайного поиска обладает двумя важными преимуществами: во-первых, реализующие его алгоритмы менее чувствительны к наличию неглубоких локальных минимумов, во-вторых, в некоторых вариантах алгоритмы случайного поиска позволяют определять точку абсолютного минимума.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлев Б.В. Повышение эффективности систем теплофикации и теплоснабжения. – Мн.: Адук.і вух., 2002. – 447 с.
2. Анциферов Е.Г., Ащепков Л.Т., Булатов В.П. Методы оптимизации и их приложения. – Новосибирск: Наука, 1990. – 159 с.
3. Попырин Л.С. Математическое моделирование и оптимизация теплоэнергетических установок. – М.: Энергия, 1978. – 416 с.
4. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. – Мн.: Дизайн ПРО, 2004. – 639 с.

ТЕХНОЛОГИЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В УО «ВГТУ»

Локтионов А.В.

In work the technology of the control of knowledge of the students is stated at study of the theoretical mechanics. Are given an estimation and recommendations for use machine and without machine programmed of the control of knowledge of the students, the conditions are stated which should answer process of mastering and quality of preparation at independent work of the students.

Основными видами самостоятельной работы студентов являются: изучение теоретического материала, самостоятельное освоение некоторых вопросов учебной программы, решение задач на практических занятиях, проведение контрольных работ, консультаций, подготовка к участию в олимпиадах и научно-технических конференциях, навыки выполнения научно-исследовательской работы. Возбуждение всех видов памяти при проведении, например, экзамена также является составной частью самостоятельной работы студентов.

Обучение – это сложный многогранный процесс. Необходимо формирование новых типов образовательных структур и технологий, отвечающих требованиям интеграции в мировую образовательную систему.

На кафедре учебный процесс организован таким образом, чтобы в наибольшей степени обеспечивалось глубокое понимание студентом читаемой дисциплины. При этом преподаватели свободны в разработке и применении новых подходов, технологий обучения и приемов воспитания студентов. Переход на новые формы обучения и контроля направлен на практическое решение поставленных задач.

Самостоятельная работа студентов является основой процесса формирования будущего специалиста. Поэтому этот вид деятельности находит свое отражение в общеобразовательных стандартах для различных специальностей, где на самостоятельную работу предусмотрено до 30% учебного времени. Однако, ввиду существенного сокращения числа часов на изучение курса теоретической механики особенно актуальной является правильная организация самостоятельной работы студентов. Особую актуальность она приобретает в последнее время в связи с сокращением для ряда специальностей числа аудиторных часов, отводимых на теоретическую механику, и переходом на двухступенчатую подготовку специалистов и магистров. Для успешного изучения теоретической механики, кроме изучения теории, необходимы навыки в решении задач. Практика показывает, что курс теоретической механики является одним из труднейших, и что способы решения задач студентами усваиваются значительно труднее, чем теория предмета. Эти трудности состоят в неумении облекать конкретные физические задачи в абстрактную математическую форму. Поэтому возникает потребность в учебных руководствах и пособиях, которые облегчили бы студентам самостоятельную проработку теоретических разделов курса и помогли бы им научиться самостоятельно применять теорию к решению практических задач.

Все виды программного контроля можно разбить на две группы: безмашинный программированный контроль (с помощью программированных карточек) и машинный программный контроль (с помощью контролирующих машин).

Как при безмашинном программированном способе контроля, так и в случае применения машинного контроля главным является качество составленных программ, вопросов и ответов. Основное же различие между указанными группами проявляется в ходе проведения контроля, обработки результатов и доведения результатов контроля до студентов. Кроме того, при машинном программированном контроле можно проводить самообучение студентов, т.е. осуществить диалог «студент-машина». Критика в адрес машинного контроля обычно

вызывается недостаточно продуманными программами, применяемыми в этих контролируемых машинах.

Традиционный контроль по вопросам и билетам с необходимостью индивидуальной оценки качества работы каждого студента весьма трудоемок по времени. Большой расход времени на проверку текущего и итоговых знаний студентов по традиционному способу – с помощью вопросов и билетов – может быть существенно сокращен за счет унификации многих контрольных операций и широкого использования технических средств контроля.

Программированный контроль предусматривает разработку единой программы контроля и единых критериев оценки знаний студентов. Программированный контроль позволяет преподавателю за короткое время проверить знания группы студентов, автоматизировать многие контрольные операции, как то: постановку вопросов, анализ ответов, регистрацию результатов контроля, проведение многократного контроля с целью самообучения студентов. Что же представляет собой программированный контроль и каковы его основные принципы?

В сущности, если каждого студента оставить одного, дать ему хорошо продуманные задачи и вопросы, справочник и иной вспомогательный материал, то его ответы как раз и покажут, как идет процесс усвоения приобретаемых знаний. Контрольные программы моделируют такие условия. Контрольная программа представляет собой индивидуальный бланк с вопросами, разработанными преподавателем. В конце каждого вопроса имеется таблица с ответами. Студент должен продумать вопрос, выбрать правильный ответ и внести его в карточку, приложив листок с обоснованием такого ответа. Преподаватель в процессе обдумывания студентом ответа в зависимости от характера читаемого курса (теоретический, описательный, прикладной и т.д.) может разрешить или не разрешить пользоваться справочным материалом, но общение между самими студентами во время работы должно быть, безусловно, исключено. Студенты, давшие неправильные ответы, через некоторое время должны повторно пройти тот же контроль. Этим обеспечивается активность и воспитательная сторона контроля, заключающаяся в ознакомлении с его результатами, что помогает студентам понять ошибки, а возможность выполнить работу повторно обеспечивает проверку того, как устранены обнаруженные ошибки. При этом оперативность программированного контроля сочетается с экономией времени преподавателя и студентов.

Практика работы со студентами показывает, что исключительное значение для программированного контроля имеют темы вопросов, их содержание, формулировка условий. При составлении контрольных вопросов необходимо придерживаться следующих правил:

- вопросы не должны быть слишком трудными, как и не слишком легкими, иначе контроль либо усложняется, либо вообще теряет смысл;
- содержание вопроса должно быть подчинено главной цели – проверке знаний;
- в вопросе должны быть один-два элемента, требующие самостоятельного шага, умения применить изучаемые методы в несколько измененных условиях;
- к каждому вопросу дается ряд ответов, среди которых студент должен выбрать один, по его мнению, правильный. Число ответов должно быть достаточно большим, что уменьшает вероятность угадывания.

Применение программированного контроля позволяет не только оценивать усвоение знаний отдельными студентами, но и получать определенные категории, характеризующие уровень знаний в целом в контролируемой группе, в нескольких группах и в лекционном потоке студентов.

Применение безмашинного контроля знаний студентов – контрольных карточек – позволяет преподавателю получить хорошую информацию о работе каждого студента, о характере усвоения материала и на основании этого можно оперативно принять необходимые меры. Такой программированный контроль не нарушает традиционные формы обучения и не требует большой затраты времени. Контрольные карточки лучше всего рассчитывать на 10-15 минут работы [1]. Эта система достаточно простая, но требует с учетом анализа типичных

ошибок студентов большой подготовительной работы. Такой вид контроля не требует материальных затрат на приобретение машин и оснащение специальных аудиторий.

Преподаватель при оценке знаний студентов и приеме расчетно-графических работ физически и по времени не в состоянии задать каждому студенту 10-15 вопросов, чтобы проверить его подготовку по соответствующему разделу курса. Только машинный контроль знаний студентов обеспечивает охват всего нужного материала, ускоряется процесс оценки знаний студентов и приема расчетных работ. Главный элемент машинного контроля – контрольные карточки (тесты). Их составление – чрезвычайно трудоемкая работа. При их составлении следует избегать случайных и бессмысленных ответов, профанирующих предмет, ограничивая неверные ответы лишь типичными ошибками, наблюдаемыми при ответах студентов. Машинный контроль должен составлять лишь часть общего контроля текущей успеваемости студентов. Главная же роль контролирующих машин состоит в том, что «разговор» с машиной вынуждает студента систематически изучать теоретический материал, упражняться в решении примеров, что положительно влияет на результаты сессии. Однако, определяющая роль принадлежит преподавателю, только он вправе выносить окончательную оценку знаний студентов [2].

При подготовке бакалавров и магистров объем материала, подлежащего изучению, и весомость того или иного предмета характеризуются так называемыми кредитами. Считается нормальным, если студент на один час аудиторных занятий тратит два часа самостоятельной работы, которая нацелена на повышение личной ответственности студента. В случае провала повторная сдача экзамена не проводится, а студент должен в следующем семестре повторить материал данного предмета и заново внести соответствующую плату за обучение [3].

Для активизации обучения в Витебском государственном технологическом университете используются также тестовый контроль и программированные задачи по всем разделам курса теоретической механики. Разработаны соответствующие методические указания и учебные пособия [4-9]. По результатам проведенной работы можно сделать следующие выводы:

- тестирование является прогрессивной формой контроля уровня знаний студента, особенно на промежуточном этапе;

- использование тестовых программ позволяет охватить широкий круг теоретических и практических вопросов, ускорить процесс оценки уровня знаний и повысить его объективность;

- студент более спокойно воспринимает результаты тестирования – ведь его знания оценивает не преподаватель, а беспристрастный компьютер;

- тестирование должно применяться вместе с традиционными методами контроля и оценки знаний.

В целях текущего контроля учебной работы студентов проводятся аудиторные контрольные работы. Издано с грифом Министерства образования Республики Беларусь учебное пособие «Теоретическая механика. Сборник заданий для контрольных работ» [7]. В сборнике помещены не только контрольные работы, но и примеры их выполнения. Основываясь на этих примерах, студенты могут самостоятельно выполнять задания из сборника. В него включены 529 задач, в том числе по статике – 83, по кинематике – 114, по динамике – 332. Задания разработаны с учетом бюджета студенческого времени, не приводят к их перегрузке и недостаточному усвоению материала.

При разработке тестового контроля и программированных задач использовались рекомендации и указания, изложенные в работах [4-9]. При тестовом контроле знаний студентов по всем темам предлагается ряд вопросов, на которые приводится в произвольной последовательности однозначные ответы. Студент должен подобрать номер ответа на все вопросы; при этом ни один ответ не должен повторяться.

Программированные материалы целесообразно использовать для усвоения и контроля знаний студентов. При этом достигается активизация мысленной и творческой деятельности, обеспечение полноты и сокращение времени контроля знаний, проверка степени осмысленности ответа. Студенты, которые неправильно ответили на вопросы, устранив и осмыслив ранее обнаруженные ошибки, должны повторно пройти контроль. Программированная оценка знаний студентов позволяет экономить время преподавателей и эффективно его использовать при работе со студентами. Комплексные задачи для самостоятельного решения могут использоваться при защите расчетных заданий, проведении олимпиад и как экзаменационные задачи.

Рассмотрим кратко основные положения, которыми следует руководствоваться при проведении контроля знаний студентов, в частности, программированного контроля усвоения изложенного преподавателями материала.

Одним из существенных элементов в учебном процессе, безусловно, является усвоение сообщаемых студенту знаний. Способов итогового контроля, позволяющих составить представление о том, что и как усвоил студент из прочитанного курса, имеется достаточно много. Однако не менее важно своевременно и точно знать, как идет усвоение знаний в процессе самого обучения, какие трудности в понимании возникают перед обучаемыми. Контроль усвоения знаний студентов является методически заключительным этапом учебного процесса, как при изучении отдельных вопросов, так и всего курса в целом. Контроль способствует выполнению задачи управления, так как обеспечивает наличие «обратной связи» между студентом и преподавателем. Для студента наличие «обратной связи» позволяет анализировать и систематизировать свои знания, для преподавателя – активно управлять ходом обучения и усвоением изложенного материала.

Оценка знаний студента, как результат диагностической деятельности преподавателя, представляет собой отражение состояния знаний и навыков студента, выраженное символически – цифрой. Такая оценка существует лишь для множества сходных явлений, которым в разной степени присуще оцениваемое качество. Она либо фиксирует изменения в знаниях одного студента, либо позволяет сопоставить результаты ответов многих из них. Оценке подлежит некоторое сложное качество – подготовленность студентов, интегрально представляющее набор простых признаков, выявляемых и измеряемых преподавателем во время контроля, - качество, производное от этих признаков.

Контроль за процессом усвоения приобретенных знаний должен, по нашему мнению, отвечать следующим условиям:

1. Своевременность. Контроль должен быть своевременным, так как должен давать возможность преподавателю руководить учебным процессом, обеспечивая его управление.

2. Полнота и массовость. Полнота контроля должна быть двойной: охватывать всех студентов в данной группе и как можно большую часть изученного материала.

3. Выделение основного. Целесообразно оценивать весь излагаемый материал дифференцированно, подразделяя его, например, на три части: на то, что студенту достаточно лишь представить себе, что необходимо просто знать, что он должен знать и уметь применять. Контролировать в этом случае целесообразно то, что относится к двум последним пунктам.

4. Информативность. Контроль призван дать преподавателю содержательную информацию о знаниях каждого студента и его умениях в пределах одной или несколько тем курса (при аттестации) или всего курса в целом (при итоговом контроле – зачете, экзамене).

5. Объективность. Контроль за ходом усвоения знаний должен обеспечивать объективность результатов. Поэтому использование специально разработанных программ, аппарата теории вероятностей и математической статистики, а при необходимости ЭВМ, как средства обработки информации, весьма целесообразно.

6. Естественность условий. Во время контроля студент должен действовать так же, как в обычной обстановке, при этом должна отсутствовать внезапность (дата контрольной рабо-

ты должна быть известна заранее). Только при выполнении этого условия можно правильно проверить способность студента применять полученные знания.

7. Активность. Контроль должен быть таким, чтобы студент понимал свои ошибки и стремился их устранить.

8. Оперативность. Необходимо следить за тем, чтобы контроль не нарушал ритм учебного процесса, чтобы проверка знаний по одной дисциплине не проводилась в ущерб другим. Поэтому процесс текущего контроля, включая подготовку к нему, не должен отнимать у студентов много времени, быть длительным по срокам.

9. Экономичность. Контроль должен быть экономичным с точки зрения затрат времени студента и преподавателя на него.

10. Воспитательность. Контроль должен учить студента работать с литературой и конспектом, прививать уважение к теоретической и практической работе [10].

Для активизации обучения в Витебском государственном технологическом университете используется также тестовый контроль и программированные задачи по всем разделам курса теоретической механики. Разработаны соответствующие методические указания, а также тестовые программы по разделу «Статика», позволяющие проконтролировать уровень теоретических знаний студента с помощью ЭВМ.

На каждый вопрос студенту предлагаются три варианта ответа, из которых он должен выбрать правильный. По количеству правильных ответов компьютер выставляет студенту оценку. Данные тестовые программы внедрены в учебный процесс.

В настоящее время разрабатывается контролирующие-обучающая программа по теме «Плоскопараллельное движение твердого тела». В нее войдет теоретический материал, сведения по методике решения задач, проверка решения расчетной работы и контрольные вопросы (тест) для ее защиты. В процессе работы пользователь выбирает необходимый раздел программы. При проверке расчетной работы студент, введя номер варианта и результаты вычислений, проверяет правильность решения задач, который содержит основные используемые формулы и примеры выполнения задач. Для защиты расчетной работы используется тест, содержащий вопросы по данной теме. В разделе программы по теории вопроса пользователь находит ответы на предлагаемый тест.

Для приобретения навыков самостоятельного решения задач по статике, кинематике и динамике курса теоретической механики студентами дневной и заочной форм обучения в настоящее время подготовлены учебные пособия, в которых приведены краткие сведения по теории, основные формулы и уравнения, необходимые для решения задач статики, кинематики и динамики. Разумеется, учебные пособия не исключают необходимости глубокого изучения теории. В соответствующих местах пособия даются методические указания к решению задач и приводятся по каждой теме подробные решения. Они составлены в полном соответствии с программой курса теоретической механики и могут использоваться студентами как механических, так и технологических специальностей [8, 9].

Правильная организация самостоятельной работы позволяет компенсировать дефицит времени аудиторных занятий, повысить успеваемость и облегчает усвоение общетехнических дисциплин. При этом следует отметить, что плохо проведенные занятия могут породить отрицательное отношение к предмету. Квалифицированные консультации должны проводиться в сочетании с хорошо продуманным контролем изучаемой дисциплины. Использование современной технологии обучения, в частности, применение прикладных программ ЭВМ значительно повышает эффективность самостоятельной работы студентов и качество подготовки выпускников вузов. Глубокое изучение курса на основе новых технологий обучения позволит студентам на высоком уровне проводить научно-исследовательскую работу и достойно выступать на олимпиадах. Внедрение новых технологий при изучении теоретической механики позволяет значительно повысить интерес студента к изучаемым курсам, приблизить их к решению реальных производственных и технологических задач.

Таким образом, применение различных форм и видов самостоятельной работы студентов, а также своевременный контроль способствует повышению эффективности учебно-воспитательной процесса и создают прочный фундамент в сфере их дальнейшей профессиональной деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенова Е.Ф., Кузнецова Т.И. Об опыте безмашинного программированного контроля знаний студентов по теоретической механике//Сб. науч.-метод. ст. по теор. мех. Вып. 8. –М.–1977. – С. 13-16.
2. Будник Ф.Г., Зингерман Ю.М. Об опыте организации машинного контроля знаний студентов// Сб. науч.-метод. ст. по теор. мех. Вып. 8. –М. – 1977. – С. 32-38.
3. Кепе О.Э. Теоретическая механика в высшей школе США// Сб. науч.-метод. ст. по теор. мех. Вып. 10. –М.– 1980. – С. 74-76.
4. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Статика» курса теоретической механики: Метод. указания /ВГТУ; Сост. Локтионов А.В., Буткевич Л.Н. –Витебск, 1997. – 90 с.
5. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Кинематика» курса теоретической механики: Метод. указания /ВГТУ; Сост. Локтионов А.В., Буткевич Л.Н. –Витебск, 1998. – 84 с.
6. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Динамика» курса теоретической механики: Метод. указания /ВГТУ; Сост. Локтионов А.В., Буткевич Л.Н. –Витебск, 1999. – 105 с.
7. Локтионов А.В., Крыгина Л.Г. Теоретическая механика. Сборник заданий для контрольных работ: Учеб. пособие /ВГТУ. – Витебск, 1998. – 189 с.
8. Локтионов А.В., Крыгина Л.Г. Теоретическая механика. Динамика. Учебное пособие для студентов технических специальностей вузов: Учеб. пособие /ВГТУ. – Витебск, 2004. –171с .
9. Локтионов А.В., Крыгина Л.Г. Теоретическая механика. Статика и кинематика. : Учеб. пособие /ВГТУ. – Витебск, 2005. – 174 с.
10. Локтионов А.В. Теоретическая механика. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Динамика», ч. 2. Учеб. пособие /ВГТУ. – Витебск, 2005. – 205 с.

ПОСТРОЕНИЕ КАРТЫ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПОЛЯ В ИЗОЛИНИЯХ ТВЕРДОСТИ ПОЧВЫ МЕТОДОМ КРИГИНГА

Каминьски Я.Р., Мишин П.А.

Для повышения эффективности почвообрабатывающих агрегатов необходимо их адаптировать к условиям функционирования, то есть к почвенным условиям сельскохозяйственного поля. На основе анализа физико-механических и технологических свойств почвы установлено, что наиболее существенным, интегральным и одним из основных свойств является твердость, которая наиболее полно и обобщенно характеризует сельскохозяйственное поле с точки зрения энергоемкости механической обработки [1]. Твердость почвы в пределах поверхности сельскохозяйственного поля является переменной и случайной величиной [2]. Пространственную изменчивость твердости почвы на участках поля можно представить в форме карт, содержащих изолинии - линии равных значений твердости почвы, с помощью специальных математических интерполяционных методов с применением ПЭВМ.

ВВЕДЕНИЕ

Повысить эффективность работы почвообрабатывающих агрегатов можно путем их адаптации к почвенным условиям сельскохозяйственного поля. На основе анализа физико-механических и технологических свойств почвы установлено, что наиболее существенным, интегральным и одним из основных свойств является твердость, которая наиболее полно и обобщенно характеризует сельскохозяйственное поле с точки зрения энергоемкости механической обработки.

Твердость почвы в пределах поверхности поля является переменной и случайной величиной. Исследования ряда авторов показывают, что твердость почвы на одном и том же участке изменяется в несколько раз в зависимости от влажности, содержания гумуса, сроков и способов обработки, степени покрытия растениями и других факторов. Пространственную изменчивость твердости почвы можно представить в форме карт, содержащих изолинии - линии равных значений твердости почвы, с помощью специальных математических интерполяционных методов с применением ПЭВМ. Построение карт в изолиниях с помощью ПЭВМ должно содержать промежуточный этап - построение математической поверхности. Тогда соответствующая программа для ПЭВМ позволит вычертить изолинии интересующих нас величин на основе математических соотношений. Создание математической модели изменчивости твердости почвы необходимо для адаптации почвообрабатывающих агрегатов в системе «поле-машина-оператор» с применением в будущем бортовых компьютеров.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

Построение карт в изолиниях с помощью ПЭВМ ведут либо методом триангуляции, либо методом сетей [3,4]. Нами установлено, что метод сетей в сочетании с методом кригинга является наиболее оптимальным способом картирования в изолиниях пространственного распределения твердости почвы на исследуемых участках сельскохозяйственного поля. Для описания по этому методу математической поверхности исследуемой величины на каком-либо участке сельскохозяйственного поля пользуются выражением для оценки твердости почвы T_B в рассматриваемом узле сети p по k близким к нему контрольным точкам в общем виде

$$T_{Bp} = \sum_{i=1}^k Q_i \cdot T_{B_i} \quad , \quad (1)$$

где Q_i – вес i -го значения твердости почв T_{B_i} по отношению к оцениваемой p из k контрольных точек.

Веса Q_i определяют из системы уравнений в матричной форме

$$\begin{vmatrix} \gamma(\xi_{11}) & \gamma(\xi_{12}) & \dots & \gamma(\xi_{1k}) & 1 \\ \gamma(\xi_{12}) & \gamma(\xi_{22}) & \dots & \gamma(\xi_{2k}) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(\xi_{1k}) & \gamma(\xi_{2k}) & \dots & \gamma(\xi_{kk}) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_k \\ \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma(\xi_{1p}), \\ \gamma(\xi_{2p}), \\ \dots \\ \gamma(\xi_{kp}), \\ 1 \end{vmatrix} \dots \dots \quad (2)$$

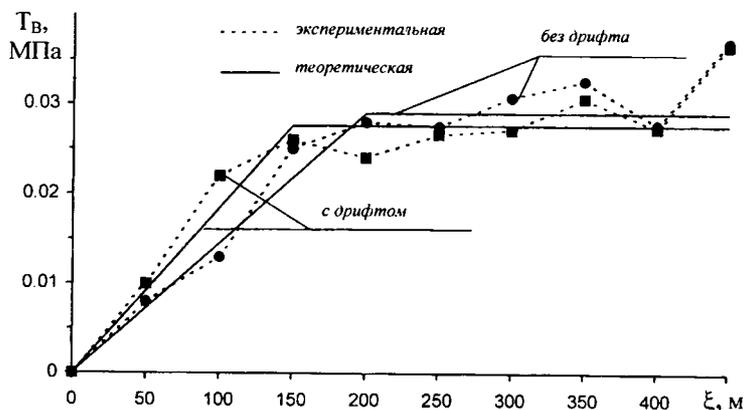
где $\gamma(\xi_{ij})$ - полувариограмма на расстоянии ξ , соответствующем интервалу между контрольными точками i и j ; $\gamma(\xi_{ip})$ - полувариограмма для расстояния между известной точкой i и точкой p , в которой производится оценка твердости; λ - множитель Лагранжа.

Полувариограмма показывает, как дисперсия разности значений твердости почвы в двух точках на участке поля изменяется от расстояния между ними, т.е. раскрывает пространственную структуру распределения твердости почвы. Обычно полувариограмма строится по результатам экспериментальных исследований и предшествует процедуре кригинга.

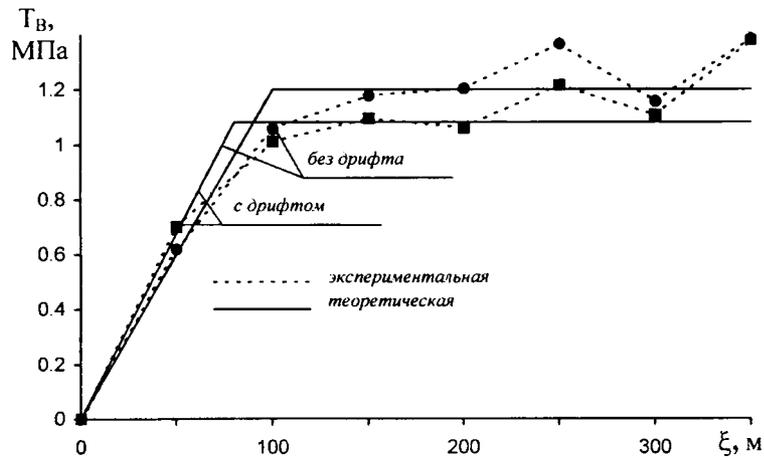
РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

С целью построения карт твердости почвы в изолиниях проведены опыты на разных агрофонах и получены экспериментальные и теоретические полувариограммы для исследуемых участков. Эксперименты подтвердили, что наименьшую дисперсию оценки твердости для исследуемых участков среди рассматриваемых моделей имеет линейная с изломом полувариограмма, принятая для аппроксимации экспериментальных значений твердости на участках. Результаты показывают, что на агрофоне пласт многолетних трав метод кригинга достоверно описывает оценку переменной твердости почвы при максимально допустимом расстоянии между точками измерения $\xi=150$ м без дрефта и $\xi=100$ м с учетом дрефта. Для агрофона поле, подготовленное под посев области влияния полувариограммы составляют соответственно $\xi=200$ м и $\xi=150$ м (рис. 1а), на многолетней залежи эти величины равны 100 и 80 м (рис. 1б).

Анализ показывает, что на многолетней залежи по сравнению с другими агрофонами дисперсия изменения твердости почвы наибольшая, что приводит к необходимости уменьшения аксимально допустимого расстояния между точками измерения ξ . Если на этом агрофоне увеличить расстояние $\xi > 80 \dots 100$ м, то регионализованная переменная γ_ξ становится нечувствительной.



а)



б)

Рис.1. Экспериментальная и теоретическая полувариограммы на агрофонах: а) – поле, подготовленное под посев (учхоз «Приволжское» ЧГСХА); б) – многолетняя залежь (учхоз «Пушкинское» СПб ГАУ).

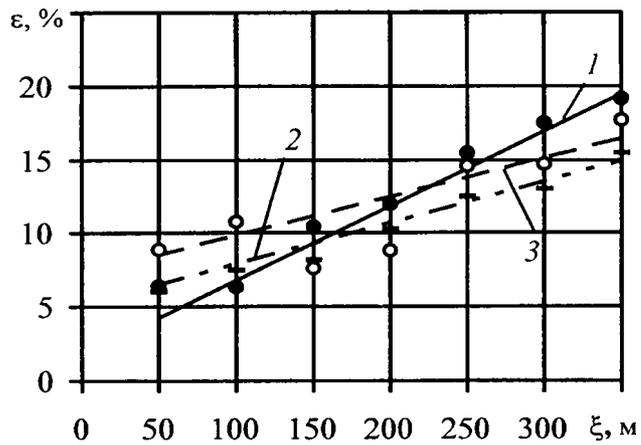


Рис.2 Оценка твердости почвы по методу кригинга на агрофонах: 1 – пласт многолетних трав (ЧГСХА); 2 – поле, подготовленное под посев (ЧГСХА); 3 – многолетняя залежь (СПб ГАУ)

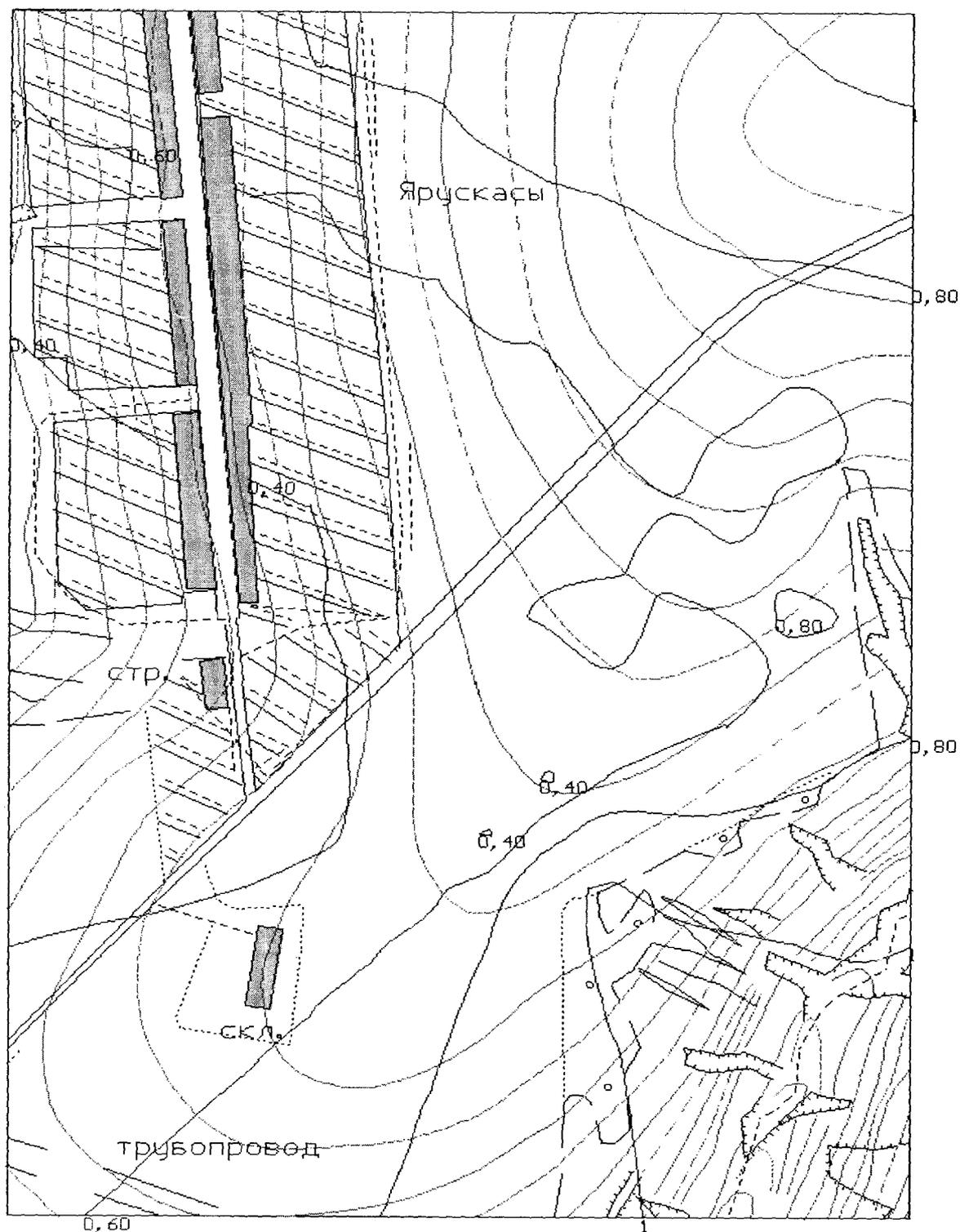


Рис.3 Карта твердости почвы в изолиниях на экспериментальном участке учхоза «Приволжское» Чувашской ГСХА (агрофон – поле, подготовленное под посев)

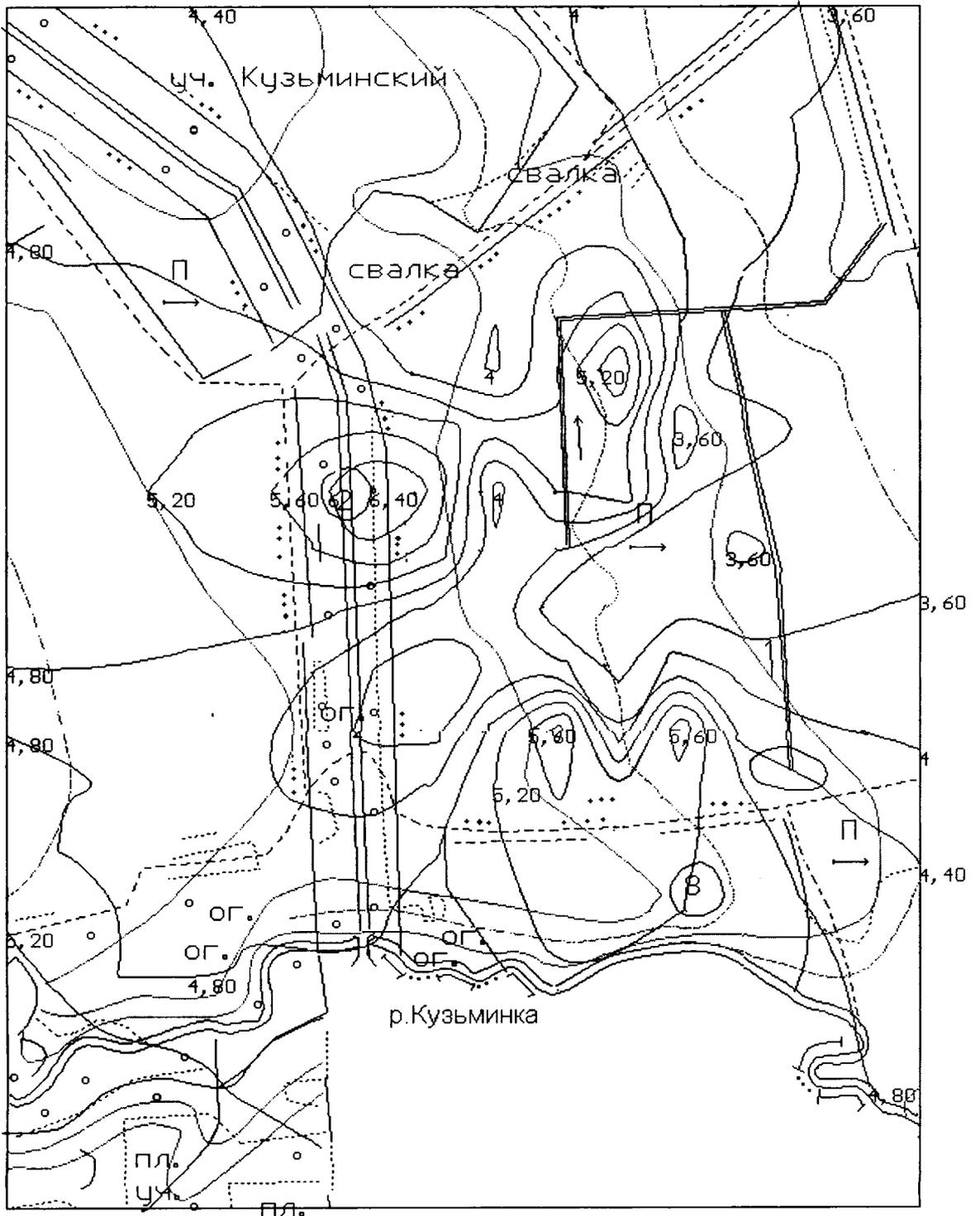


Рис.4 Карта твердости почвы в изолиниях на экспериментальном участке учхоза «Пушкинское» СПб ГАУ (агрофон – многолетняя залежь)

Сравнение результатов обработки экспериментальных данных на исследованных участках статистическим методом и методом кригинга показывает, что последний в зависимости от агрофона в 1,5...3,8 раза позволяет снизить стандартную ошибку и одновременно учесть пространственную вариабельность значений твердости почвы. Оценка твердости почвы по методу кригинга для различных агрофонов подтверждает

(рис.2), что на агрофоне поле, подготовленное под посев, значения относительной ошибки ϵ от минимального расстояния ξ между экспериментальными точками меньше, чем на других агрофонах. Сравнение прямых 1,2 и 3 на рис.2 показывает, что максимально допустимое расстояние ξ между ближайшими точками измерения при соблюдении относительной ошибки $\epsilon = 10...12\%$ не должно превышать на многолетней залежи 140 м, на пласте многолетних трав 200 м и на поле, подготовленном под посев, 240 м.

По приведенным результатам построены карты твердости почвы в изолиниях на экспериментальных участках (рис.3 и 4). Для построения карт использованы ПЭВМ, дигитайзер и плоттер. Анализ карт показывает, что на агрофоне многолетняя залежь (рис.4) по сравнению с агрофоном поле, подготовленное под посев (рис.3), твердость почвы имеет большие значения и изменяется в широких пределах. Это вызвано с многократными проходами по участку техники и живностей, а также отсутствием механической обработки почвы подряд несколько лет, в результате увеличиваются величина твердости и ее вариация. На агрофоне поле, подготовленное под посев в результате нескольких механических обработок перед посевом, структура почвы разрушается, а значения твердости выравниваются. Поэтому на агрофоне многолетняя залежь изолинии твердости насыщены, они расположены близко друг к другу и имеются много замкнутых изолиний, в которых твердость постоянная. На агрофоне поле, подготовленное под посев, изолинии изрезаны и происходит их более упорядоченное расположение.

ВЫВОДЫ

Сравнительный анализ карт показывает, что различие в твердости почвы в различных точках поля зависит от агрофона и вызвано в основном воздействием на нее движителей тракторов и колес машин при их передвижении по полю в период выращивания и уборки культур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мишин П.В. Исследования условий адаптивного функционирования почвообрабатывающих агрегатов. – В кн.: Плодородие почвы – основа высокоэффективного земледелия. – Матер. межрегиональной научно-практ. конф., посвященной 100-летию со дня рождения профессора С.И. Андреева, Чебоксары, 2000. – С.59...62.

2. Мишин П.В. Определение коэффициента использования номинальной силы тяги трактора с учетом вероятностного характера изменения твердости почвы. – В кн.: Ecological aspects of mechanization of plant production. – VIII international symposium, Warszawa, 2001. – С.163...169.

3. Девис Дж.С. Статистический анализ данных в геологии: Пер. с англ. В 2 кн./Пер. В.А. Голубевой; под. ред. Д.А. Родионова. Кн.1. – М.: Недра, 1990.-319 с.; Кн.2. – М.: Недра, 1990. – 427 с.

4. Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики. – М.: Мир, 1968. – 408 с.

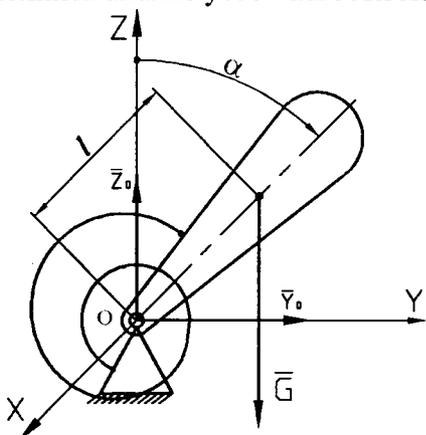
АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПОДПРУЖИНЕННОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА МЕТОДАМИ А.М. ЛЯПУНОВА

Гурвич Ю.А., Пащенко А.В., Сафронов К.И.

In a difference of usual stability definition methods of a spring physical pendulum, in this article stability of a spring physical pendulum defined using methods created by A.M. Lapunov. In the result, connection between different parameters of spring and pendulum was formalized, and defined a point of stable pendulum position.

В отличие от существующих подходов определения устойчивости подпружиненного физического маятника, в данной работе анализ устойчивости маятника выполнен методами А.М. Ляпунова, что может оказаться полезным студентам, изучающим различные дисциплины, связанные с анализом устойчивости различных систем.

Постановка задачи. Положение равновесия физического маятника, в котором его центр масс находится над опорой неустойчиво. Для стабилизации этого положения между телом и опорой помещена спиральная пружина, создающая восстанавливающий момент M , пропорциональный углу наклона маятника α и равный $M = c\alpha$, где c - жесткость пружины. Выполнить анализ устойчивости маятника методами А.М. Ляпунова.



Рассмотрим физический маятник с осью привеса, совпадающей с осью вращения X , перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку O . Положение маятника будем определять углом α , отсчитываемого от вертикальной оси Z . Расстояние от оси привеса до центра масс маятника обозначим через l . На маятник, отклоненный от вертикального положения, действуют силы: G , Y_0 , Z_0 и момент упругости пружины M . Трением в цилиндрическом шарнире пренебрегаем.

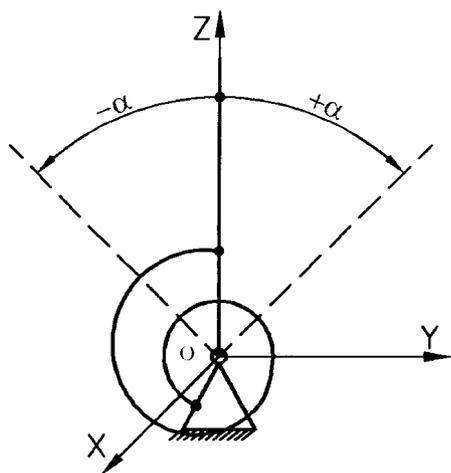
Определим кинетическую энергию маятника:

$T = J_x \frac{\dot{\alpha}^2}{2}$, где J_x - момент инерции маятника относительно оси OX .

Для определения потенциальной энергии консервативных сил, приложенных к маятнику, рассмотрим три его положения:

- первое положение - вертикальное $\alpha_1=0$, которое соответствует недеформированной спиральной пружине;
- второе и третье положения - $\pm\alpha$, соответствуют деформированной пружине.

Определим потенциальную энергию восстанавливающей силы спиральной пружины Π_1 , Π_2 , Π_3 в трех положениях маятника при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = +\alpha$, $\alpha_3 = -\alpha$.



$$A_{1 \rightarrow 2} = \frac{c\alpha_1^2}{2} - \frac{c\alpha_2^2}{2} = - \int_{\Pi_1}^{\Pi_2} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2,$$

$$A_{1 \rightarrow 3} = \frac{c\alpha_1^2}{2} - \frac{c\alpha_3^2}{2} = - \int_{\Pi_1}^{\Pi_3} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_3,$$

$$A_{1 \rightarrow 2} = A_{1 \rightarrow 3} = -\Pi_2 = -\Pi_3 = \frac{c\alpha^2}{2},$$

где $A_{1 \rightarrow 2}$, $A_{1 \rightarrow 3}$ – работа восстанавливающей силы пружины при перемещении ее конца вместе с маятником, соответственно, из положения 1 в положение 2 и из 1 в 3; $\Pi_1 = 0$.

Потенциальная энергия сил, приложенных к маятнику, равна:

$$\Pi = - \int_0^{\alpha} (mgl \sin \alpha - c\alpha) d\alpha = mgl \cos \alpha - mgl + \frac{c\alpha^2}{2}.$$

Полная энергия системы:

$$E = T + \Pi = J_x \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + mgl \cos \alpha - mgl + \frac{c\alpha^2}{2}.$$

Используя уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha},$$

составим дифференциальное уравнение движения маятника:

$$J_x \ddot{\alpha} = mgl \sin \alpha - c\alpha. \quad (1)$$

Приведем уравнение (1) к двум дифференциальным уравнениям первого порядка. Обозначим через вещественные переменные y_i ($i = 1, 2$) параметры, характеризующие состояние физического маятника $\alpha = y_1$, $\dot{\alpha} = y_2$.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= \frac{mgl}{J_x} \sin y_1 - \frac{c}{J_x} y_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда выражения (2) являются исходными уравнениями.

Одно из состояний равновесия физического маятника, расположенного вертикально при недеформированной пружине, характеризуются следующими значениями вещественных переменных $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Поэтому уравнения возмущенного движения совпадают с исходными.

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{mgl}{Jx} \sin x_1 - \frac{c}{Jx} x_1. \quad (3)$$

Первый метод Ляпунова [1-3]. Разлагая в ряд Маклорена правые части уравнений возмущенного движения (3) по степеням x_1, x_2 и ограничиваясь членами первого порядка малости, получим уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{mgl}{Jx} x_1 - \frac{c}{Jx} x_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Запишем уравнения первого приближения в матричной форме:

$$\dot{\vec{x}} = [A] \cdot \dot{\vec{x}} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [A] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl-c}{Jx} & 0 \end{bmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее системе (5):

$$\det([A] - \lambda[K]) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{mgl-c}{Jx} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

где $[K]$ - единичная матрица.

Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 + \frac{c-mgl}{Jx} = 0$. Характер корней характеристического уравнения зависит от знака свободного члена:

- Если $c > mgl$, то этот знак положительный и корни характеристического полинома

чисто мнимые $\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{c-mgl}{Jx}}$. В соответствии с теоремой первого метода Ляпунова

этот случай относится к критическому, т.к. вещественная часть корней равняется нулю ($\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 = 0$). Этот случай должен быть исследован дополнительно вторым методом Ляпунова.

- Если $c < mgl$, то свободный член отрицателен. Корни характеристического полинома вещественные и разных знаков. Они определяются по формуле $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c-mgl}{Jx}}$.

В соответствии с теоремой первого метода Ляпунова, при положительном значении одного из корней характеристического полинома, состояние равновесия неустойчиво независимо от нелинейных членов уравнения движения.

Второй метод Ляпунова. Рассмотрим подробнее критический случай. Для этого необходимо ввести функцию Ляпунова $V(x)$, которая должна обладать рядом свойств, описанных в литературе [1-3].

В качестве функции Ляпунова $V(x_1, x_2)$ предлагаем ввести определенно-положительную квадратичную форму, которую получим разложением в ряд полной энергии

$E = T + \Pi$ при условии, что $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots$. Тогда функция Ляпунова приобретает вид:

$$V(x_1, x_2) = Jx \frac{x_2^2}{2} + \frac{c - mgl}{2} x_1^2. \quad (6)$$

Функция (6) отвечает всем условиям функции Ляпунова: является вещественной, однозначной, непрерывной, знакоопределенной функцией, обращается в нуль при $x_1 = x_2 = 0$, $V(0,0) = 0$, $V(x_1, x_2) > 0$ при $c > mgl$.

Возьмем полную производную по времени от функции Ляпунова

$$\dot{V}(x_1, x_2) = Jx \cdot x_2 \cdot \dot{x}_2 + (c - mgl)x_1 \cdot \dot{x}_1. \quad (7)$$

Будем считать, что отклонения маятника от вертикального положения невелики. Тогда в качестве уравнений возмущенного движения используем уравнения первого приближения (4).

Теперь подставим в выражение полной производной по времени от функции Ляпунова (7) значения \dot{x}_1 и \dot{x}_2 , взятые из (4). В итоге получим выражение тождественно равное нулю

$$\dot{V}(x_1, x_2) = (mgl - c)x_1 \cdot \dot{x}_1 + (c - mgl)x_1 \cdot \dot{x}_1 \equiv 0.$$

Если производная по времени от функции Ляпунова тождественно равна нулю $\dot{V}(x_1, x_2) \equiv 0$, то согласно теореме об устойчивости по второму методу Ляпунова состояние равновесия маятника при его вертикальном положении - устойчиво.

Вывод. Система подпружиненного физического маятника имеет единственное состояние равновесия при $\alpha = 0$ (вертикальное положение маятника) в случае $c > mgl$, что доказано с помощью второго метода Ляпунова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472с.
2. Меркин, Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1976. – 319с.
3. Барбашин, Е.А. Введение в теорию устойчивости / Е.А. Барбашин. – М.: Наука, 1967. – 223с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МОБИЛЬНОЙ МАШИНЫ С МАХОВИЧНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

Астахов Э.И., Пирч А.И., Саболевский А.К.

For researching the movement of flywheel vehicles the physical model is proposed. Physical model as well as real car has a flywheel engine which rotates with high speed. In the article the main parameters of such model and flywheel engine are calculated. It is shown that the engine of the model has parameters which can easily be achieved while constructing.

В последнее время наблюдается повышенный интерес автомобильных компаний всего мира к новым видам автомобильной техники. Этот интерес появился не случайно – он вызван постоянным ростом цен на нефть, а также необходимостью уменьшить вредные выбросы. Немаловажным является и тот фактор, что запасы нефти и газа не безграничны (по прогнозам экспертов, разведанных запасов нефти хватит на ближайшие 30 – 50 лет).

Дефицитность топлива, экологическая опасность, а также шум при работе, низкий к.п.д., потребление кислорода воздуха – все это характеризует автомобили с двигателем внутреннего сгорания (ДВС) с отрицательной стороны. Особенно их недостатки ярко проявляются в городских условиях. Несомненно, ДВС еще десятилетия послужат людям, будут постоянно совершенствоваться, но уже сейчас пора думать, чем в будущем заменить его на автомобиле, чтобы не ощущать недостаток в этом мощном, компактном и практичном силовом агрегате.

Уже созданы альтернативные виды автомобилей, способные в будущем составить конкуренцию ДВС. Подавляющее большинство – это аккумуляторные транспортные средства, использующее в качестве источника энергии сжатый воздух, электрические и конденсаторные батареи, двигатели на водородном топливе и на топливных элементах, а также всевозможные их комбинации – так называемые гибридные силовые агрегаты. Приведенные альтернативные виды транспорта, без сомнения, перспективны, однако не полностью удовлетворяют требованиям, предъявляемым к автомобилям будущего и пока не могут составить достойную конкуренцию альтернативным двигателям.

Существует еще один альтернативный вид двигателей для автотранспорта, который незаслуженно был забыт. Это инерционный или маховичный двигатель, который обладает рядом ценных преимуществ. Маховик способен выделять огромную, практически неограниченную удельную мощность, а срок зарядки его может быть как угодно мал; срок консервации энергии в современных маховиках достаточно велик – более месяца; способность к рекуперации энергии позволяет экономично использовать накопленную энергию; такой силовой агрегат чрезвычайно долговечен, совершенно не выделяет никаких побочных продуктов и может стабилизировать кузов автомобиля [1].

Особо актуальны разработки маховичных двигателей для автотранспорта в Республике Беларусь, не имеющей достаточных источников добычи углеводородного сырья (нефти, газа), но имеющей еще недостаточно используемые источники органических материалов (древесного угля, щепы, соломы, растительного сырья, энергии ветра, воды и др.). Использование названных отходов и превращение их в электрическую энергию позволяет создать подзарядочные (или “раскруточные”) станции для раскрутки маховиков.

Вопросы, касающиеся устройства инерционного транспорта, разработки принципиальной схемы и определения параметров, динамики и безопасности маховичных автомобилей были рассмотрены в опубликованных ранее работах [2,3]. Для проверки теоретических выкладок, а также для наглядной демонстрации процессов, происходящих при движении маховичного автомобиля необходима физическая модель. Таким образом задачей работы является определение параметров маховика физической модели мобильной машины.

Физическая модель представляет собой радиоуправляемую модель автомобиля (рис.1), у которой электрический двигатель заменен на маховик. Для движения модели маховик заряжается, то есть раскручивается до заданной скорости. Модель имеет следующие основные части: корпус 1 автомобиля, маховик 2 в корпусе с эластичными подвесами 3, гибкая связь 6 для изменения направления вращения, редуктор 7, дистанционное сцепление 8, дифференциал 9, дистанционное рулевое управление 4 с питающими аккумуляторами 5.

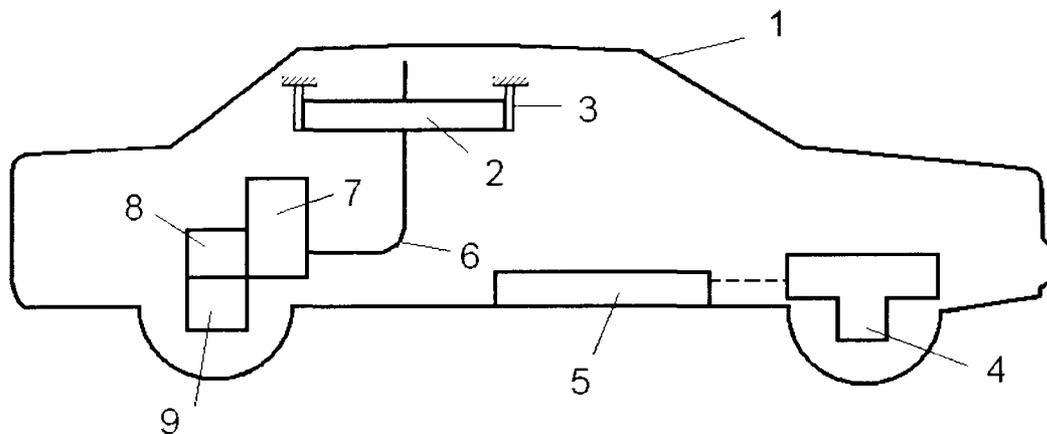


Рис. 1 Общий вид и узлы модели

Кинематическая схема трансмиссии представлена на рис.2. Цифрами обозначены: 1 - маховик, 2 - корпус маховика, 3 - эластичные подвесы корпуса, 4 - вал для раскрутки маховика, 5 - вал маховика, 6 - гибкая передача, 7 - двухступенчатый редуктор, 8 - сцепление, 9 - дифференциал, 10 - колесо

Расчетные параметры модели следующие: масса $m = 1$ кг, длина $L = 0,45$ м, ширина $B = 0,15$ м, высота $H = 0,13$ м.

Сначала необходимо определить энергию инерционного двигателя на реальном автомобиле. В качестве такового примем автомобиль Audi 80. Для определения запаса энергии определим силы сопротивления, на которые энергия расходуется. Также примем, что автомобиль без подзарядки должен проехать 100 км, сделав при этом 30 остановок и разгонов. При этом принимается, что энергия торможения не рекуперирована, т.е. не возвращается в маховик при торможении, что ставит более жесткие требования по отношению к маховику.

Сила сопротивления дороги по литературе [4]:

$$F_f = G_a \cdot f = 11968 \cdot 0,01 = 119,68 \approx 120 \text{ Н};$$

где F_f – сила сопротивления качению колес;

$$G_a = m \cdot g = 1220 \cdot 9,81 = 11968 \text{ Н} \text{ – вес автомобиля,}$$

$$f = f_o \cdot [1 + (0,006 \cdot v)^2] = 0,009 \cdot [1 + (0,006 \cdot 60)^2] = 0,01 \text{ – коэффициент сопротивления качению;}$$

где $f_o = 0,009$ – коэффициент сопротивления качению при движении автомобиля с малой скоростью.

Сила сопротивления воздуха:

$$F_g = k_g \cdot A_g \cdot v^2 = 0,25 \cdot 1,5 \cdot 16,67^2 = 104, \approx 104 \text{ Н};$$

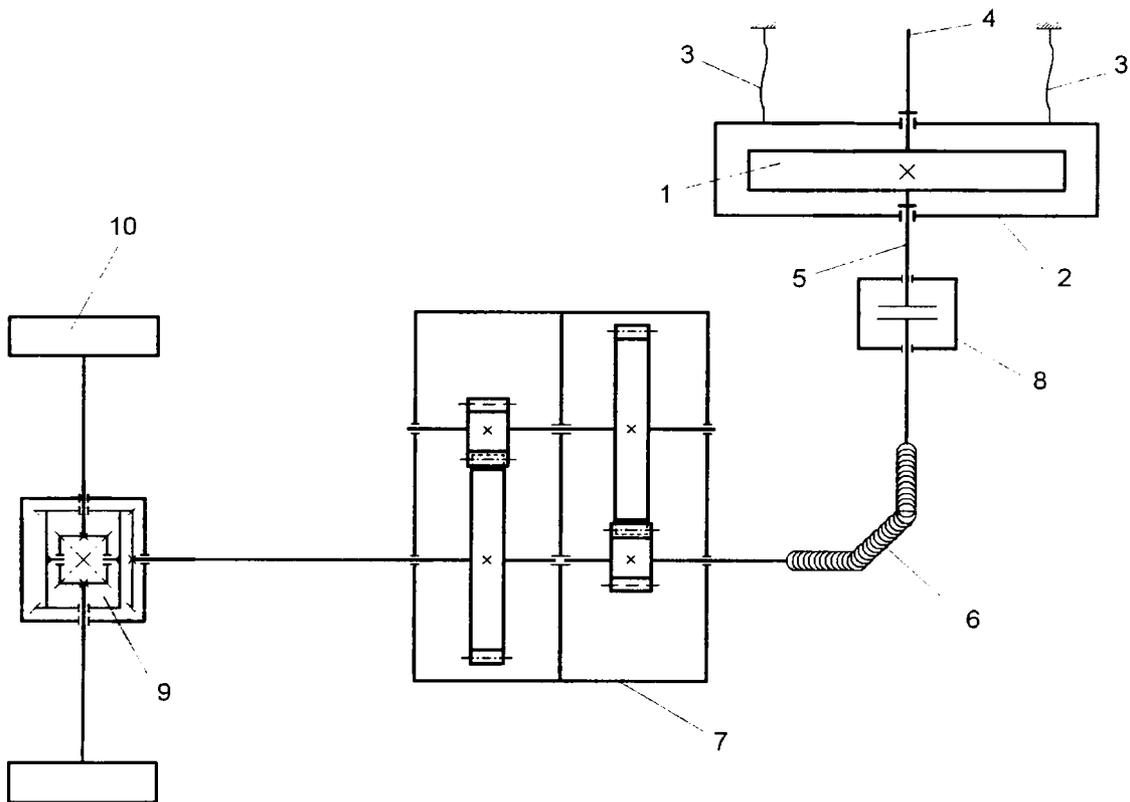


Рис. 2 Кинематическая схема трансмиссии модели

где $k_g = 0,25 \text{ Н} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^4$ – коэффициент сопротивления воздуха;

A_g – лобовая площадь автомобиля, которая вычисляется по формуле:

$$A_g = C \cdot [(H - h) \cdot B] + n_k \cdot h \cdot B_r = 0,89 \cdot [(1,4 - 0,31) \cdot 1,4] + 2 \cdot 0,31 \cdot 0,2 = 1,5 \text{ м}^2;$$

где $C=0,89$ – коэффициент формы для легковых автомобилей;

$H=1,4$ м – габаритная высота;

$B=1,6$ м – габаритная ширина;

$L=4,4$ м – длина автомобиля;

$B_r=0,2$ – ширина профиля шины;

$h=0,31$ м – расстояние от бампера до поверхности дороги;

$n_k=2$ – максимальное число колес одного моста автомобиля;

$v=16,67$ м/с – скорость автомобиля при $v=60$ км/ч.

Энергия, необходимая для движения на расстояние $L=100$ км с $n=30$ остановками определяется выражением:

$$T_{ог} = T_{100} + T_{30} = 23 + 5,1 = 28,1 \text{ МДж};$$

где $T_{100} = (F_f + F_g) \cdot 10^5 = (120 + 105) \cdot 10^5 \approx 23 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 23 \text{ МДж}$ – энергия, необходимая для равномерного движения с крейсерской скоростью на расстояние 100 км;

$$T_{30} = 30 \cdot \frac{m \cdot v^2}{2} = 30 \cdot \frac{1220 \cdot 16,67^2}{2} = 5,1 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 5,1 \text{ МДж} – \text{энергия, необходимая для 30 троганий с места,}$$

С учетом потерь в трансмиссии, а также принимая во внимание то, что полезно может использоваться только около 70% энергии маховика [1], получим полную энергию, необходимую для движения:

$$T = \frac{T_{\text{ос}}}{\eta_{\text{тр}} \cdot 0,7} = \frac{28,1}{0,8 \cdot 0,7} \approx 50 \text{ МДж};$$

где $\eta_{\text{тр}} = 0,8$ – приблизительный КПД трансмиссии.

Таким образом, для движения автомобиля маховик должен запастись $T=50$ МДж энергии при выбранных начальных условиях.

Пересчитаем полученные данные для физической модели.

Поскольку скорость движения не велика, то сопротивлением воздуха можно пренебречь. Остается сопротивление дороги:

$$F_f^M = G_M \cdot f = 9,8 \cdot 0,009 = 0,088 \text{ Н};$$

где F_f^M – сила сопротивления качению колес модели;

$$G_a = m \cdot g = 1 \cdot 9,8 = 9,8 \text{ Н} – \text{вес модели.}$$

Для определения расстояния, которое должна преодолевать модель, необходимо ввести поправочный коэффициент, который можно определить из различных условий.

По первому условию отношение путей реального автомобиля и модели должно быть пропорционально их объемам:

$$\frac{L_a}{L_M} = \frac{V_a}{V_M};$$

$$L_M = L_a \frac{V_M}{V_a} = 10^5 \frac{0,45 \cdot 0,15 \cdot 0,13}{4,4 \cdot 1,6 \cdot 1,4} \approx 90 \text{ м.}$$

По другому способу, отношение путей реального автомобиля и модели должно быть пропорционально их массам:

$$\frac{L_a}{L_M} = \frac{m_a}{m_M};$$

$$L_M = L_a \frac{m_M}{m_a} = 10^5 \frac{1}{1220} \approx 82 \text{ м};$$

Примем, что наша модель должна проехать 90 метров с одной раскрутки маховика.

Таким образом, энергия для движения модели равна:

$$T_{\text{ос}}^M = F_f^M \cdot L_M = 0,088 \cdot 90 = 7,92 \text{ Дж.}$$

С учетом потерь в трансмиссии, а также принимая во внимание то, что полезно может использоваться только около 70% энергии маховика, найдем энергию, которую должен запастись маховик:

$$T_M = \frac{T_{\text{ос}}^M}{\eta_{\text{тр}} \cdot 0,7} = \frac{7,92}{0,8 \cdot 0,7} = 14,14 \text{ Дж.}$$

Маховик для модели ввиду небольшого размера и скорости вращения будет сделан в виде стального диска без кожуха. Кинетическая энергия маховика:

$$T_M = 0,5 \cdot I \cdot \omega^2 ;$$

где $I = 0,5 \cdot m_M \cdot R^2$ -- момент инерции диска;

$$\omega = \frac{n \cdot \pi}{30} \text{ -- угловая скорость диска;}$$

$$m = \rho \cdot V = \frac{\rho \cdot \pi \cdot D^2 \cdot h}{4} = \frac{7800 \cdot 3,14 \cdot 0,1^2 \cdot 0,005}{4} = 0,3 \text{ кг -- масса маховика;}$$

где $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ для стали, $D=0,1 \text{ м}$, $h=0,005 \text{ м}$ приняты по конструктивным соображениям.

После подстановки и преобразования, получим:

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{4 \cdot T_M}{m \cdot R^2}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{4 \cdot 14,14}{0,3 \cdot 0,05^2}} = 2630 \text{ об/мин.}$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Гулиа Н.В. Маховичные двигатели. - М., Машиностроение, 1976. - 176 с.
2. Пирч А.И., Астахов Э.И. Определение динамических параметров мобильной машины с маховичным двигателем// Машиностроение. – 2006. – Вып. 22. Т. 2. – С. 37 – 41.
3. Саболевский А.К., Астахов Э.И. Определение динамических моментов и реакций на корпусе мобильной машины с маховичным двигателем// Машиностроение. – 2006. – Вып. 22. Т.2. – С. 42 – 46.
4. Автомобили: конструкция, конструирование и расчет /под ред. д-ра техн. наук проф. А.И. Гришкевича. - Мн., Вышэйшая школа, 1987. - 200 с.

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАЗДЕЛА «ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ» В КУРСОВОМ ПРОЕКТЕ ПО ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.

The article describes the peculiarities of software and methodological complex "The Dynamic analysis of lever mechanisms", which is used in course designing at the rate "Theory of mechanisms and machines".

Предлагаемый программно-методический комплекс «Динамический анализ кривошипно-ползунных механизмов» является частью разрабатываемой на кафедре «Теория механизмов и машин» комплексной технологии обучения методам проектирования схем механизмов, машин и манипуляторов. Комплекс включает компьютерную программу и методические пособия по курсовому проектированию и используется студентами в процессе выполнения курсового проекта.

Программа «Динамический анализ кривошипно-ползунных механизмов» предназначена для динамического исследования кривошипно-ползунных механизмов технологических машин и машин-двигателей, выполняемого кинетостатическим методом. Конечным результатом работы программы являются значения реакций в кинематических парах и уравновешивающего момента. Алгоритмы расчетов, выполненных в программе, приведены в [1] – [3].

После запуска программы на экране появляется регистрационное окно. После регистрации предлагается выбрать схему исследуемого механизма (рис. 1).

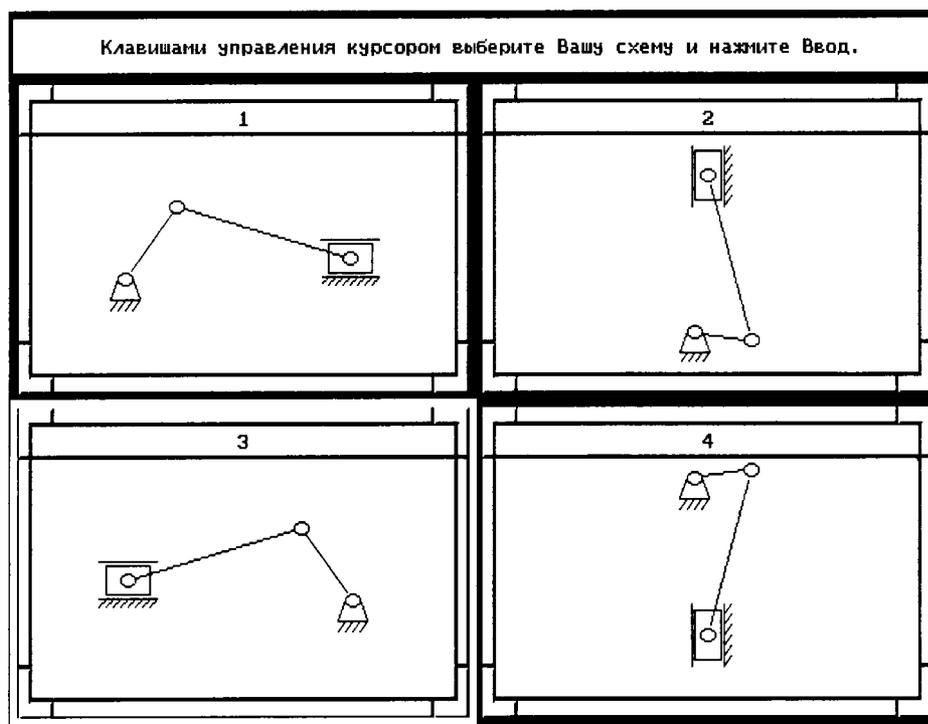


Рис.1. Выбор схемы проектируемого механизма

Это достигается установкой рамки на требуемую схему и нажатием клавиши «Enter», в результате чего появляется окно ввода геометрических параметров механизма (рис. 2). Активное поле ввода выделяется желтым цветом.

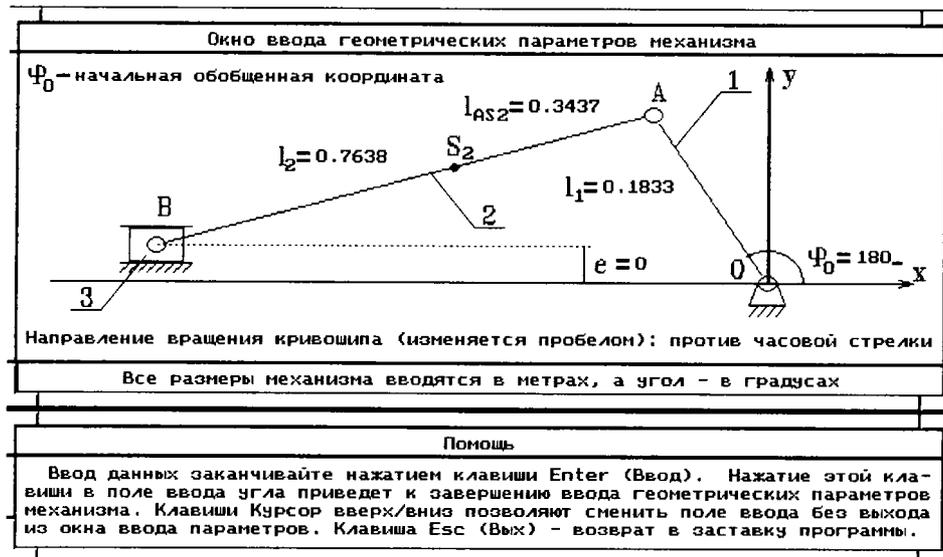


Рис.2. Окно ввода геометрических параметров

Введенное значение начальной обобщенной координаты механизма ϕ_0 , соответствующей наиболее удаленному крайнему положению ползуна 3 (когда кривошип 1 и шатун 2 вытягиваются в одну линию), контролируется в программе. В случае отклонения введенной величины от фактического значения выводится сообщение об ошибке и происходит выход в заставку программы.

Далее выполняется кинематический анализ механизма. Для этого в окне ввода кинематических характеристик необходимо ввести значения угловой скорости ω_1 и углового ускорения ε_1 начального звена (кривошипа), полученные в процессе динамического исследования машинного агрегата [4], для всех положений механизма от 1 до 13.

Затем в зависимости от готовности пользователя к дальнейшей работе происходит либо переход в раздел силового анализа механизма, либо прекращение работы программы. В случае продолжения расчетов в соответствующем окне необходимо ввести массово-геометрические параметры: массы звеньев m_1, m_2, m_3 , центральный момент инерции шатуна I_{S2} , а также постоянную составляющую приведенного момента инерции I_{Π}^I . После передачи программе всех массово-геометрических характеристик механизма появляется окно ввода сил полезного сопротивления $F_{\text{пс}}$, действующих на ползун. Значения сил $F_{\text{пс}}$ привязываются к правой системе координат XOY , в которой ось X горизонтальна, а ось Y вертикальна. Это означает, что силы $F_{\text{пс}}$ могут быть как со знаком “плюс”, так и со знаком “минус”.

Все значения сил полезного сопротивления необходимо получить до начала работы с программой путем обработки механической характеристики технологического процесса графическим или аналитическим методом [3], а величина постоянной составляющей приведенного момента инерции I_{Π}^I получается в результате работы программы по динамическому исследованию всего машинного агрегата.

После выполнения силового анализа появляется меню выбора дальнейшего режима работы (рис. 3). Так, опция «Графики» позволяет просмотреть графики реакций в кинематических парах механизма. В отдельном окне (рис. 4) изображается схема механизма, которую можно привести в движение клавишами управления курсором. При этом на ней в соответствующих кинематических парах показываются векторы реакций $-F_{21}$ (действие кривошипа 1 на шатун 2), F_{32} (действие шатуна 2 на ползун 3), F_{10} (действие стойки 0 на кривошип 1), F_{30} (действие стойки 0 на ползун 3).

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА СТЕНДА ДЛЯ ИСПЫТАНИЯ ГУСЕНИЦ

Гарах В.А., Астахов Э. И.

The dynamic analysis of motion of lever mechanism of drive of stand for the test of gusenits of tractors is resulted. Computation is conducted by the Mertsalova N.I. method for the set mode of operations. On results analysis of motion the recommendations are resulted on reduction of the dynamic workload on links and bearing of stand.

Постановка задачи. Проведенные на МТЗ исследования тракторной техники в 2005 году показали, что наиболее рентабельным трактором при выполнении сельскохозяйственных работ является именно гусеничный трактор, несмотря на его низкую конструктивную скорость. В связи с этим предприятие наладило выпуск серии новых гусеничных тракторов. Однако в ходе реализации данного проекта возникло ряд проблем, одна из которых - приличная масса трактора, что являлось следствием не только повышенного расхода топлива, но и повышенной массы некоторых узлов и агрегатов. Для решения данной проблемы был предложен перевод трактора на резиноармированные гусеницы, которые снижали не только массу трактора, но и инерционные нагрузки, давление на грунт, позволяли машине двигаться по любой поверхности, в том числе и асфальтобетону [1].

Для реализации контроля качества гусениц и проверки их на соответствие возникающему нагрузочному циклу на кафедре «Тракторы» автотракторного факультета была разработана схема и конструкция стенда для испытания гусениц, который имитирует натяжение гусеничной ленты и моделирует её работу при движении трактора. Стенд изготовлен и эксплуатируется на МТЗ; состоит из следующих основных узлов и агрегатов: электродвигателя, сцепления, коробки перемены передач, механизма привода рамы и натяжения гусеничных лент [2].

Задачей работы является динамический анализ движения механизмов поворота и натяжения стенда для дальнейшего определения инерционных нагрузок и анализа нагруженности подшипников.

Общий вид механизма натяжения представлен на рисунке 1.

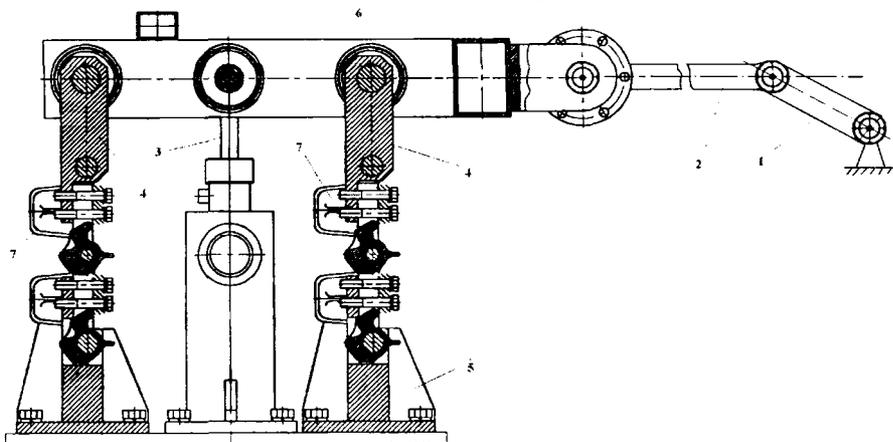


Рисунок 1. Механизм натяжения.

1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – коромысло натяжное; 4 – коромысла гусениц; 5 – корпус; 6 – подвижная рама; 7 – испытываемые звенья гусениц.

Кривошипно-шатунный механизм натяжения предназначен для преобразования вращательного движения кривошипа в возвратно-поступательное движение рамы 6 для получения максимальных амплитудных значений поворота звеньев гусениц. Удалив пассивные звенья

4, получим расчётную кинематическую схему механизма без избыточных (пассивных) связей (рис. 2) с обобщённой координатой φ_1 угла поворота ведущего кривошипа 1.

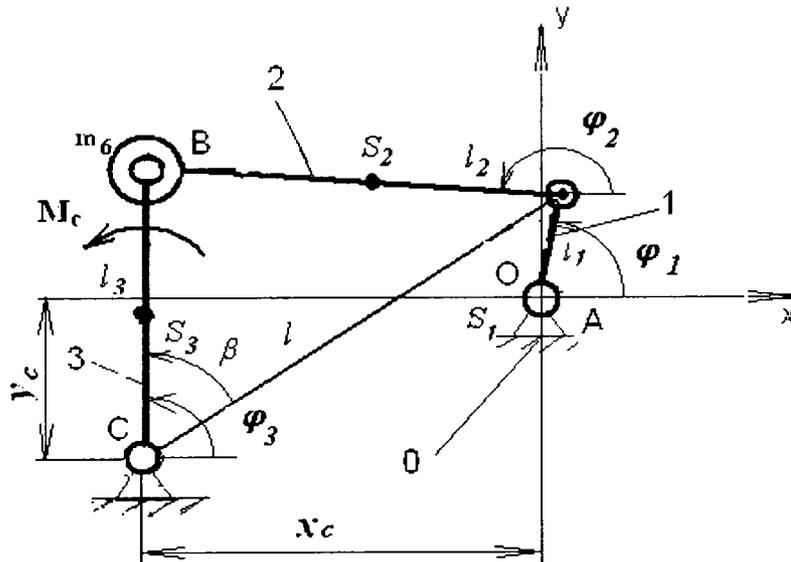


Рисунок 2. Кинематическая схема механизма без пассивных звеньев.

Кинематический анализ. Методом векторных контуров, определены кинематические характеристики механизма по методике литературы [3] при обобщенной координате φ_1 угла кривошипа. Уравнения проекций векторного контура OABC:

$$\begin{aligned} l_1 \cdot \cos \varphi_1 + l_2 \cdot \cos \varphi_2 - l_3 \cdot \cos \varphi_3 &= x_C; \\ l_1 \cdot \sin \varphi_1 + l_2 \cdot \sin \varphi_2 - l_3 \cdot \sin \varphi_3 &= y_C. \end{aligned} \quad (1)$$

Из уравнений (1): $\varphi_3 = \varphi - \beta$;

$$\text{где } \cos \varphi = \frac{x_A - x_C}{l}; \quad \sin \varphi = \frac{y_A - y_C}{l}; \quad \cos \beta = \frac{l_3^2 + l^2 - l_2^2}{2l_3l}; \quad \sin \beta = a \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \beta};$$

где a - признак сборки шарнирного четырёхзвенника.

Координаты точек и звеньев.

$$\begin{aligned} x_A &= l_1 \cdot \cos \varphi_1; & y_A &= l_1 \cdot \sin \varphi_1; \\ x_B &= x_C + l_3 \cdot \cos \varphi_3; & y_B &= y_C + l_3 \cdot \sin \varphi_3; \\ \cos \varphi_2 &= \frac{x_B - x_A}{l_2}; & \sin \varphi_2 &= \frac{y_B - y_A}{l_2}; \\ x_{S_2} &= l_1 \cdot \cos \varphi_1 + l_{AS_2} \cdot \cos \varphi_2; & y_{S_2} &= l_1 \cdot \sin \varphi_1 + l_{AS_2} \cdot \sin \varphi_2; \\ x_{S_3} &= x_C + l_{CS_3} \cdot \cos \varphi_3; & y_{S_3} &= y_C + l_{CS_3} \cdot \sin \varphi_3. \end{aligned}$$

Аналоги скоростей как производные координат по обобщенной координате φ_1 :

$$U_{21} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{l_1 \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}; \quad U_{31} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \frac{l_1 \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}; \quad U_B = l_3 \cdot U_{31};$$

$$U_{S_2^x} = x'_{S_2} = \frac{dx_{S_2}}{d\varphi_1} = -l_1 \cdot \sin \varphi_1 - U_{21} \cdot l_5 \cdot \sin \varphi_2; U_{S_2^y} = y'_{S_2} = \frac{dy_{S_2}}{d\varphi_1} = l_1 \cdot \cos \varphi_1 + U_{21} \cdot l_5 \cdot \cos \varphi_2;$$

$$U_{S_3^x} = x'_{S_3} = \frac{dx_{S_3}}{d\varphi_1} = -l_{CS_3} \cdot \sin \varphi_3 \cdot U_{31}; U_{S_3^y} = y'_{S_3} = \frac{dy_{S_3}}{d\varphi_1} = l_{CS_3} \cdot \cos \varphi_3 \cdot U_{31};$$

Аналоги ускорений как производные аналогов скоростей $U(\varphi_1)$ по обобщенной координате φ_1 :

$$U'_{21} = \frac{dU_{21}}{d\varphi_1} = \frac{-l_1 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - l_2 \cdot U_{21}^2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + l_3 \cdot U_{31}^2}{l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3)};$$

$$U'_{31} = \frac{dU_{31}}{d\varphi_1} = \frac{l_1 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2 \cdot U_{21}^2 - l_3 \cdot U_{31}^2 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2)};$$

$$U'_{S_2^x} = \frac{dU_{S_2^x}}{d\varphi_1} = -l_1 \cdot \cos \varphi_1 - U_{21}^2 \cdot l_5 \cdot \cos \varphi_2 - U'_{21} \cdot l_5 \cdot \sin \varphi_2;$$

$$U'_{S_2^y} = \frac{dU_{S_2^y}}{d\varphi_1} = -l_1 \cdot \sin \varphi_1 - U_{21}^2 \cdot l_5 \cdot \sin \varphi_2 - U'_{21} \cdot l_5 \cdot \cos \varphi_2;$$

$$U'_{S_3^x} = \frac{dU_{S_3^x}}{d\varphi_1} = -l_{CS_3} \cdot \cos \varphi_3 \cdot U_{31}^2 - U'_{31} \cdot l_{CS_3} \cdot \sin \varphi_3;$$

$$U'_{S_3^y} = \frac{dU_{S_3^y}}{d\varphi_1} = U'_{31} \cdot l_{CS_3} \cdot \cos \varphi_3 - l_{CS_3} \cdot \sin \varphi_3 \cdot U_{31}^2.$$

Динамический анализ. Динамический анализ движения кривошипно-коромыслового механизма велся по упрощенной одномассовой динамической модели (рис. 3) без учета упругости звеньев и зазоров в кинематических парах методом Мерцалова Н.И. по методике литературы [3].

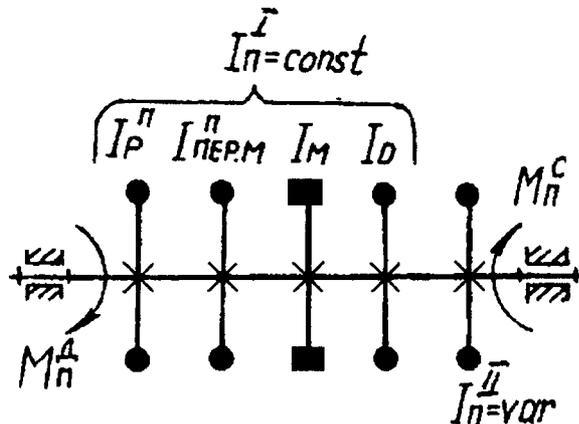


Рисунок 3. Одномассовая динамическая модель.

Рассматривается условное вращающееся звено – звено приведения, которое имеет момент инерции J_{II} относительно оси вращения (приведенный момент инерции) и находится

под действием сил M_{II} (приведенного момента сил). В свою очередь $M_{II} = M_{II}^D + M_{II}^C$, где M_{II}^D - приведенный момент движущих сил, принимаемый постоянным; M_{II}^C - приведенный момент сил сопротивления, создаваемый моментом сопротивления M_C на звене 3 и инерционными нагрузками звеньев. Кроме того, $J_{II} = J_{II}^I + J_{II}^{II}$, где J_{II}^I - постоянная составляющая приведенного момента инерции; J_{II}^{II} - переменная составляющая приведенного момента инерции. В величину J_{II}^I входят собственные моменты кривошипа J_0 , приведенные моменты инерции от вращающихся звеньев трансмиссии J_{np}^{6p} , а именно: приведенный момент инерции сцепления $J_{CЦ}$, приведенный момент инерции коробки перемены передач $J_{КПП}$ и приведенный момент инерции электродвигателя $J_{ЭД}$.

$$J_{II}^I = J_{01} + J_{np}^{\varepsilon\delta} + J_{np}^{c\eta} + J_{np}^{кпп} = 0,15 + 0,384 + 0,17 + 0,426 = 1,13 \text{ кг} \cdot \text{м},$$

где I_{01} - собственный момент инерции кривошипа.

$$\begin{aligned} I_{II}^{II} &= m_2 \cdot U_{S2}^2 + I_{S2} \cdot U_{21}^2 + 3 \cdot m_3 \cdot U_{S3}^2 + 3 \cdot I_{S3} \cdot U_{31}^2 + m_6 \cdot U_B^2 = \\ &= m_2 (U_{S2X}^2 + U_{S2Y}^2) + I_{S2} \cdot U_{21}^2 + 3 \cdot m_3 (U_{S3X}^2 + \\ &+ U_{S3Y}^2) + I_{S3} \cdot U_{31}^2 + m_6 \cdot U_{31}^2 = A + B + C + D + E, \end{aligned}$$

$$\text{где } A = m_2 (U_{S2X}^2 + U_{S2Y}^2),$$

$$B = I_{S2} \cdot U_{21}^2,$$

$$C = 3 \cdot m_3 (U_{S3X}^2 + U_{S3Y}^2),$$

$$D = 3 \cdot I_{S3} \cdot U_{31}^2,$$

$$E = m_6 \cdot U_{31}^2,$$

где m_i - массы звеньев, I_{S_i} - осевые моменты инерции звеньев.

$\frac{dI_{II}}{d\varphi_1}$ - производная от приведенного момента инерции:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{II}}{d\varphi_1} &= \frac{d}{d\varphi_1} (I_{II}^I + I_{II}^{II}) = \frac{dI_{II}^{II}}{d\varphi_1} = \frac{d}{d\varphi_1} \left[m_2 (U_{S2X}^2 + U_{S2Y}^2) + I_{S2} \cdot U_{21}^2 + 3 \cdot m_3 (U_{S3X}^2 + \right. \\ &\left. + U_{S3Y}^2) + I_{S3} \cdot U_{31}^2 + m_6 \cdot U_{31}^2 \right] = \\ &= 2 \left[m_2 (U_{S2X} \cdot W_{S2X} + U_{S2Y} \cdot W_{S2Y}) + I_{S2} \cdot U_{21} \cdot W_{21} + 3 \cdot m_3 (U_{S3X} \cdot W_{S3X} + \right. \\ &\left. + U_{S3Y} \cdot W_{S3Y}) + 3 \cdot I_{S3} \cdot U_{31} \cdot W_{31} + m_6 \cdot U_B \cdot W_B \right]; \end{aligned}$$

Кинетическая энергия от вращающихся звеньев:

$$T_{Ii} = T_{Icp} - \Delta T_{Icp} + \Delta T_{Ii}; \quad (2)$$

$$\text{где } T_{cp}^I = \frac{I_{\Pi}^I \omega_{1cp}^2}{2}; \Delta T_{cp}^I = \frac{\Delta T_{\max}^I + \Delta T_{\min}^I}{2};$$

ΔT_i^I - изменение кинетической энергии вращающихся звеньев в i положении.

Приведенный момент сопротивления определяется из равенства элементарных работ:

$$M_{\Pi}^C = (M \cdot i_{31} - G_2 \cdot y'_{S2} - 3 \cdot G_3 \cdot y'_{S3} - G_6 \cdot y'_B).$$

По значениям T_i^I определяем угловую скорость кривошипа:

$$\omega_{li} = \sqrt{\frac{2T_{li}^I}{I_{\Pi}^I}}.$$

$$\text{Из дифференциального уравнения движения - } \varepsilon_{li} = \frac{M_{\Pi}^D + M_{\Pi i}^C - \frac{\omega_{li}^2}{2} \frac{dI_{\Pi i}}{d\varphi_1}}{I_{\Pi}^I + I_{\Pi}^{II}}.$$

Результаты вычислений. Выполнив данные расчёты для углов поворота кривошипа за цикл (φ_1 от 0° до 360°), получены следующие графические зависимости приведенных моментов инерции $J_{\Pi}^{II}(\varphi_1)$, $J_{\Pi}^I(\varphi_1)$ (рис.4) и кинетических энергий $\Delta T(\varphi_1)$ и $\Delta T^I(\varphi_1)$ (рис.4) от угла φ_1 поворота кривошипа.

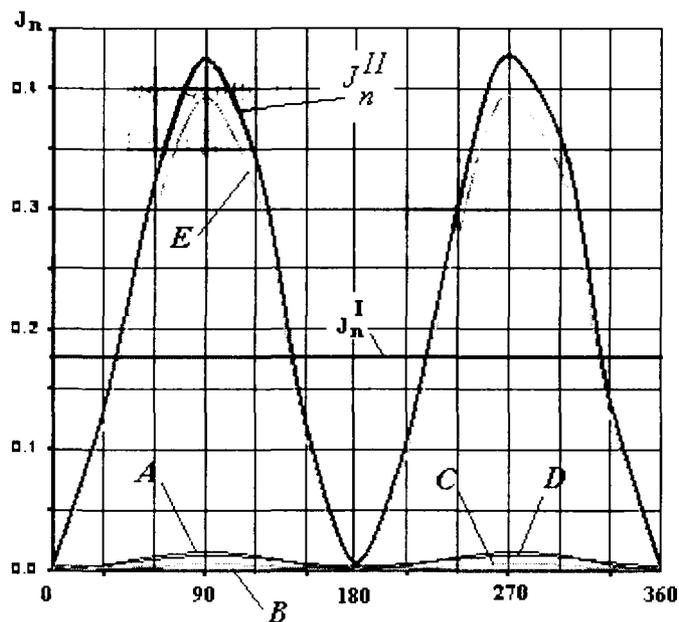


Рисунок 4. Графические зависимости $J_{\Pi}^{II}(\varphi_1)$, $J_{\Pi}^I(\varphi_1)$

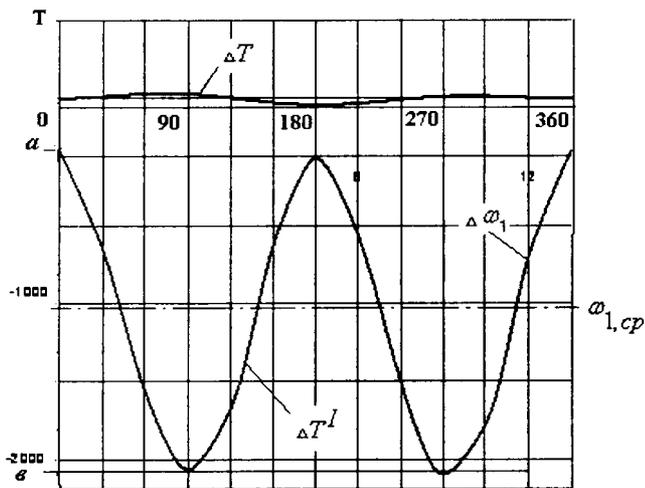


Рисунок 5. Графические зависимости $\Delta T(\varphi_1)$ и $\Delta T^I(\varphi_1)$

Анализ результатов. Из рис.4 следует, что в переменной составляющей J_{II}'' преобладает слагаемое $E = m_6 \cdot U_{31}^2$, зависящее от массы рамы m_6 . Слагаемые A, B, C, D от масс m_i звеньев несущественны.

Для уменьшения изменения слагаемого E и, соответственно, $J_{II}''(\varphi_1)$, $J_{II}(\varphi_1)$ рекомендуется уменьшить конструктивную массу рамы и уравновесить массы m_6 и m_3 добавлением противовесов на коромыслах, что приведет к уменьшению или ликвидации основного слагаемого E и к незначительному возрастанию слагаемого C от коромысла.

Из рис.5 следует, что изменение кинетической энергии агрегата $\Delta T(\varphi_1)$, зависящее от момента M_C на испытываемой гусенице, незначительно по сравнению с переменной составляющей $\Delta T^I(\varphi_1)$, определяемое величиной $J_{II}''(\varphi_1)$ (от масс m_i и моментов инерции J_{Si} звеньев механизма стенда).

Так как в методе Мерцалова Н.И. график $\Delta T^I(\varphi_1)$ на рис.5 является одновременно и графиком изменения угловой скорости кривошипа $\Delta \omega_1(\varphi_1)$, то для уменьшения изменений $\Delta \omega_1$ рекомендуется уменьшить по величине переменную составляющую J_{II}'' по сравнению с J_{II}' с помощью добавочной маховой массы на валу кривошипа 1 (или на валу электродвигателя).

Так как изменение угловой скорости $\Delta \omega_1$ определяет величины динамических нагрузок на звенья стенда и подшипники, то для их уменьшения рекомендуется в приводе стенда добавить маховик и, как было отмечено ранее, уравновесить раму 6 и коромысло 3 противовесами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стенд для испытания гусениц. Инструкция по эксплуатации. / Под ред. Ч.И. Ждановича. – Мн.: БНТУ, 2005.
2. Машиностроение. Энциклопедия. / Ред. совет: К.В. Фролов (пред.) и др. М.: Машиностроение. Колесные и гусеничные машины. Т. IV-15 / В.Ф. Платонов, В.С. Азаев, Е.Б. Александров и др.; Под общ. ред. В.Ф. Платонова. – 1997. – 688с.
3. Теория механизмов и машин: Учебник для втузов / К.В. Фролов, А.К. Мусатов и др.; Под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987. – 496с.: ил.

ОБУЧЕНИЕ СТУДЕНТОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ MATHCAD В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Анципорович П.П., Алейникова О.И., Булгак Т.И., Луцко Н.Я.

The article deals with some peculiarities of teaching calculating engineering task solutions to students on the bases of Mathcad.

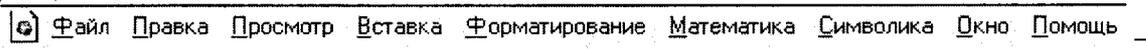
В современном проектировании и конструировании машин широко используются компьютерные технологии, требующие знания различных профессиональных пакетов. Одним из таких пакетов является Mathcad. В него заложен мощный математический аппарат, позволяющий выполнять стандартные математические операции: интегрирование, дифференцирование функций, построение графиков, операции с комплексными числами, аппроксимацию функций, вычисления по алгебраическим формулам, решение алгебраических и дифференциальных уравнений и систем. Mathcad позволяет создавать на одном рабочем листе математические вычисления, графические материалы и поясняющий текст.

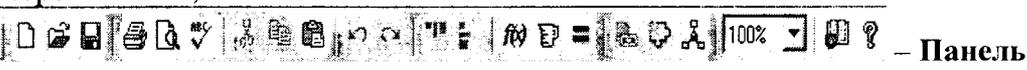
На кафедре «Теория механизмов и машин» БНТУ для изучения курса «Информатика» разработан и внедрен в учебный процесс электронный лабораторный практикум, один из разделов которого посвящен изучению математического пакета Mathcad при решении инженерных задач. Разработанный электронный вариант лабораторных работ содержит последовательность упражнений, позволяющих студенту изучить технологии, объекты и инструменты Mathcad.

Выполняется три лабораторные работы, позволяющие освоить вычисления выражений, табулирование функций, построение графиков в различных системах координат, операции над интегралами и матрицами, решение нелинейных уравнений.

Вначале осуществляется знакомство с пакетом Mathcad для приобретения навыков работы с панелями инструментов. Диалог обучаемого с электронной инструкцией можно продемонстрировать на нижеприведенных фрагментах. Предлагается выполнить:

2. Изучите окно **Mathcad Профессиональная версия - [Untitled:1]**. Обратите внимание на следующие элементы окна:

2.1  **Математика** **Символика** **Окно** **Помощь** — строка Меню;

2.2  — Панель Стандартная;

2.3  **В** **I** **U** — Панель Форматирование;

2.4  — Панель Математика.

Далее студент обучается вычислению математических выражений:

8. Введите поясняющий текст « Вычисление выражений ».

9. Вычислите значение выражения $6 + \frac{5}{8} - 3^2 + (1 + 3)^3$, используя шаблоны **Панели Калькулятор** и цифры с клавиатуры. Для этого:

9.1 переместите **Панель Математика** в правый верхний угол документа;

9.2 откройте **Панель Калькулятор**, нажав кнопку  на **Панели Математика**;

9.3 выполните LC в месте расположения выражения;

9.4 введите цифру 6;

9.5 нажмите на **Калькуляторе** кнопку ;

9.6 нажмите на **Калькуляторе** кнопку ;

9.7 заполните шаблон  в виде $\frac{5}{8}$;

9.8 нажмите клавишу пробел для завершения дроби;

9.9 нажмите на **Калькуляторе** кнопку ;

9.10 введите цифру 3;

9.11 нажмите на **Калькуляторе** кнопку ;

9.12 нажмите клавишу пробел для завершения степени;

9.13 нажмите на **Калькуляторе** кнопку ;

9.14 нажмите на **Калькуляторе** кнопку ;

9.15 заполните шаблон степени  в виде 3^3 ;

9.16 переведите синий уголок на основание;

9.17 нажмите на **Калькуляторе** кнопку ;

9.18 заполните шаблон $(\)^3$ в виде $(1 + 3)^3$;

9.19 нажмите на **Калькуляторе** кнопку ;

9.20 справа появится ответ, равный 61.625 ;

9.21 выполните LC вне поля формулы.

Затем предлагается научиться строить графики:

17. Введите с клавиатуры текст « Построение графика функции » .

18. Постройте график функции $f(z) = \sin z$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Для этого:

18.1 установите визир в место ввода функции;

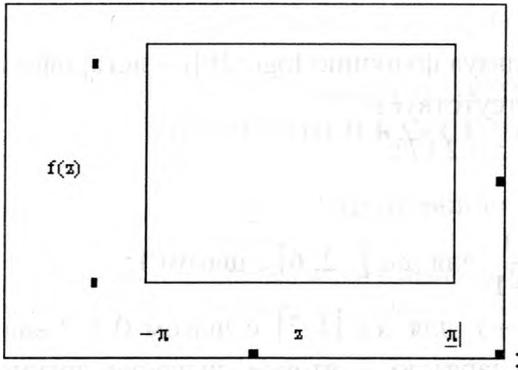
18.2 введите функцию $f(z) = \sin z$;

18.3 установите визир в место расположения графика ;

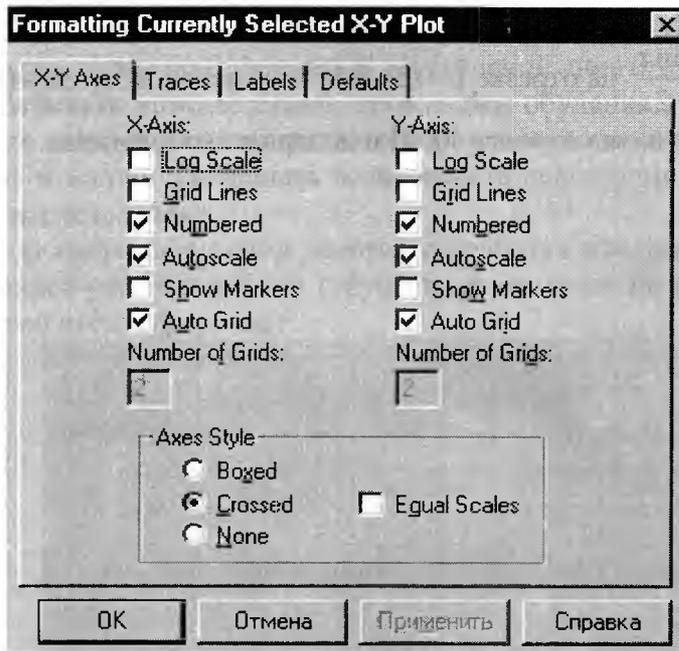
18.4 нажмите на **Панели Математика** кнопку  – **Панель графики**;

18.5 нажмите на **Панели Графики** кнопку  – **X:Y График**;

18.6 заполните поле графика по образцу



- 18.7 выполните LC вне поля графика;
 18.8 добавьте оси координат. Для этого:
 18.8.1 установите курсор на поле графика и выполните RC;
 18.8.2 выберите пункт **Format...**;
 18.8.3 заполните окно по образцу



- 18.9 нажмите кнопку **OK**;
 18.10 выполните LC вне поля графика.

В последующих лабораторных работах рассматриваются более сложные задачи по созданию Mathcad-документов:

1. Создайте документ Matematika_Ф_N.mcd.
2. Вычислите выражения:

$$a) \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{при } x = -5,028;$$

$$b) \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{a}{\sqrt{2}}} + 2 - \frac{a^2 \sqrt[4]{2} - 2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a} - \sqrt[4]{8a^4}} \quad \text{при } a = 42,7.$$

3. Определите значение функции

a) $F_1(z_1) = \lg(z_1 + 1) - \lg 6 - 1$ при $z_1 = 2$, используя функцию $\log(z, [b])$ – логарифм z по основанию b . Если основание равно 10, то b отсутствует.

b) $F_2(z) = \operatorname{tg} 2z \cdot \cos 3z + \sin 3z + \sqrt{2} \cdot \sin 5z$ при $z = 2,17$;

c) $F_3(t) = \operatorname{tg} 3t - \operatorname{tgt} - 4 \sin t$ при $t = 4,06$.

4. Постройте таблицу значений функции $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ для $x \in [-2, 6]$ с шагом 1.

5. Постройте таблицу значений функции $f(x) = x^2 + 1$ для $x \in [1, 3]$ с шагом 0,2. Укажите первое значение диапазона аргумента x , через запятую – второе значение аргумента (начальное плюс шаг), а через две точки – конечное значение диапазона.

6. Постройте график функции $f(\alpha) = \alpha \sin \alpha$ на отрезке $[-3\pi, 3\pi]$.

7. Постройте график функции $f(v) = \sin\left(\frac{1}{v}\right)$ на отрезке $[-2, 2]$ и растяните его по горизонтали.

8. Постройте график функции $r_1(\tau) = \frac{\sin \tau}{2}$ на отрезке $[-0,5; 0,5]$ в полярных координатах.

9. Постройте график функции $r_2 = 2 \sin 6u$ на отрезке $[0, 2]$ в полярных координатах.

10. Вычислите интегралы

a) $\int x^5 dx$;

b) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$;

c) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

d) $\int_m^n x dx$.

11. Решите уравнения и постройте графики функций в диапазоне, содержащем корни.

a) $t \ln(t+1) = 0$;

b) $\sin p = 2p + 0,5$;

c) $\frac{(1-b)b^2}{\sqrt{|b-2|}} = 0$.

Студент имеет возможность использовать приобретенные навыки в дальнейшем обучении специальным дисциплинам и профессиональной деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богумирский Б. Энциклопедия Windows 98. - СПб.: Питер, 1998. - 813с.
2. Дьяконов В. Mathcad 8/2000: справочник. - СПб.: Питер, 2002. - 590с.
3. Очков В.Ф. Mathcad 12 для студентов и инженеров - СПб : БХВ-Петербург, 2005. - 457 с.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В КУРСЕ «ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН»

Анципорович П.П., Дворянчикова А.Б.

These presented the particular features of developed software for organization all types of training work in the course «The theory of mechanisms and machines» - training, control of the knowledge, laboratory works, course designing.

Для сокращения разрыва между фактическим уровнем развития науки и техники и содержанием образования существует необходимость оптимизации учебного процесса за счет исключения из курсов устаревших материалов, формирования междисциплинарных связей, интенсификации процесса обучения. Применение компьютерных технологий обучения, использующих современное компьютерное оборудование, при обучении общетехническим дисциплинам оказывается в этом случае весьма эффективным.

Кафедра «Теория механизмов и машин» БНТУ имеет достаточный опыт использования вычислительной техники в инженерной подготовке, что позволило целенаправленно разрабатывать компьютерные технологии обучения. Для этого с целью формирования логичного и достаточно наглядного образа предмета четко структурирован курс теории механизмов и машин. Появилась возможность реализации аналитических методов проектирования и исследования.

В настоящее время ведется разработка программного обеспечения для организации всех видов учебной работы (обучение и контроль по разделам курса, лабораторные работы, курсовое проектирование).

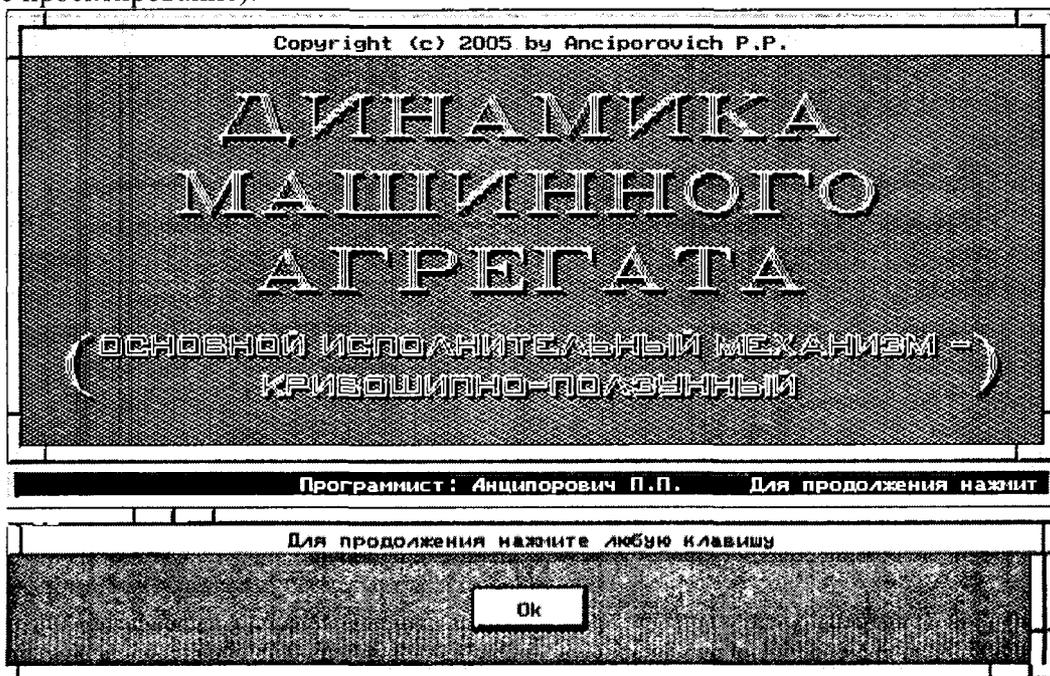


Рис. 1. Заставка программы «Динамика машинного агрегата»

В курсовом проекте выполняется динамическое исследование машин и входящих в их состав механизмов, для чего студент формирует динамическую модель машины, самостоятельно разрабатывает алгоритм расчетов, по которым производится расчет на

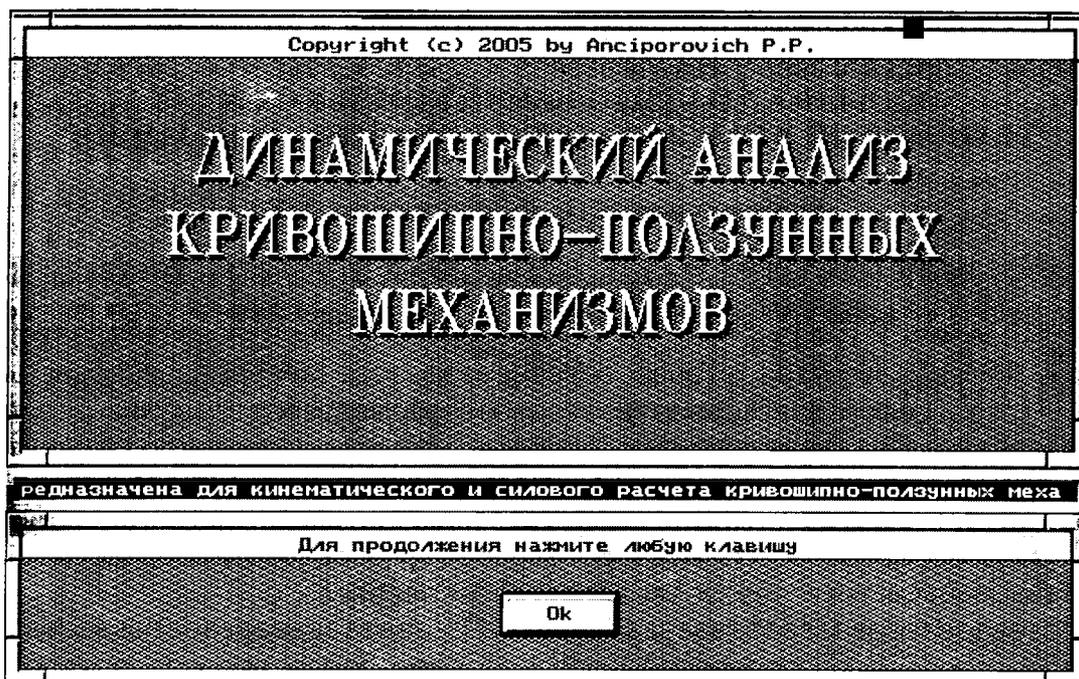


Рис.2. Заставка программы «Динамический анализ кривошипно-ползунных механизмов»

компьютере. Сценарии программ построены таким образом, что допускается поэтапный ввод исходных данных, позволяющий анализировать влияние их на динамические характеристики машин в интерактивном режиме. Допускается многовариантное выполнение расчетов с целью оптимизации выходных параметров. Хотя деятельность студента направлена на математический объект, за счет развитого диалога психологически вызывается ощущение непосредственного взаимодействия с этим объектом. Процесс получения знаний при работе с компьютером не сводится только к получению расчетов. Возможность более глубокого понимания физических явлений достигается построением графических зависимостей параметров и изображений объектов.

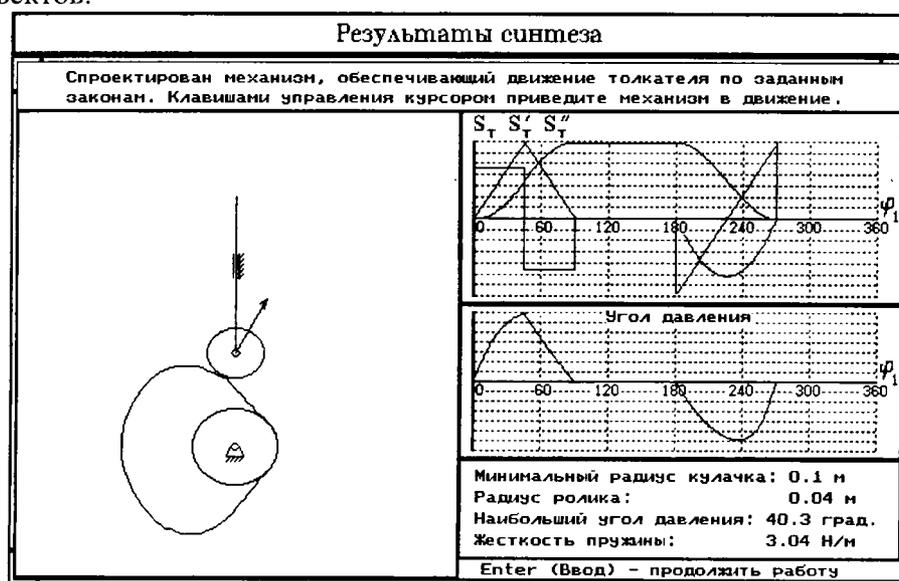


Рис.3. Результаты работы программы синтеза кулачковых механизмов

Наряду со значительным ускорением расчетов и повышением их достоверности, улучшением методики преподавания важным при, использовании ЭВМ является и чисто

психологический фактор - современный студент вряд ли будет серьезно относиться к изучаемому курсу, если в учебном процессе не будет использована та современная техника, информацию о которой он получает ежедневно по разным каналам. Благодаря заинтересованности обучаемых, курсовое проектирование стало проходить более ритмично.

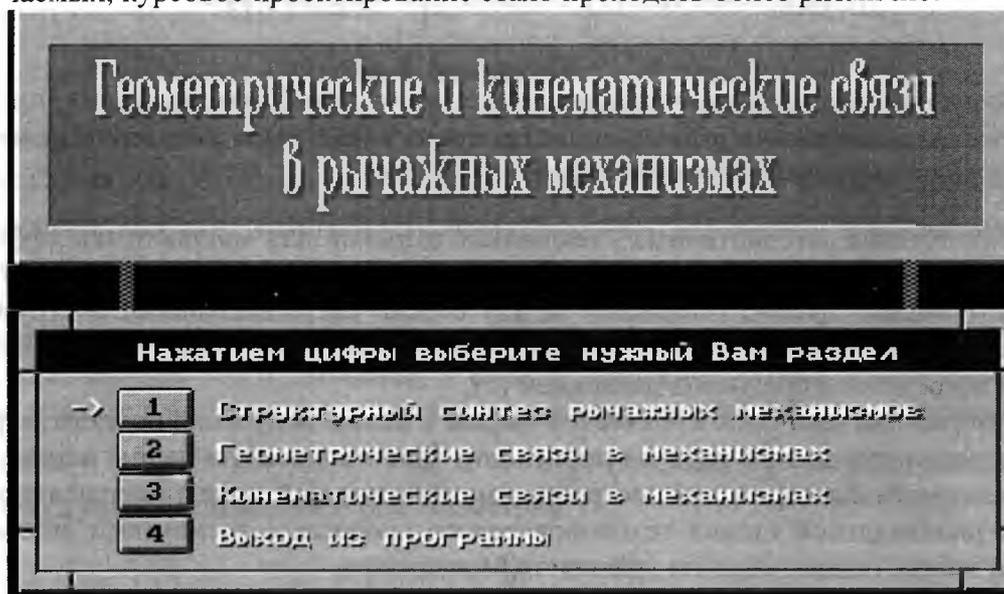


Рис. 4. Заставка обучающей программы

Важным направлением компьютеризации является создание обучающих и контролирующих программ, при разработке которых необходимо использовать в первую очередь свойства современного компьютера - быстродействие в расчетах, цветную графику с высокой разрешающей способностью. Появилась возможность создания на экране динамически изменяющихся объектов, например демонстрация движения механизмов, работы машин, систем управления машин и т.д. Это можно показать на примере раздела «Строение, геометрия и кинематика механизмов».

Поскольку обучение в основном происходит в аудиториях, где схемы механизмов вычерчиваются на доске, т.е. статично, а в лабораторном цикле не имеется возможности часто обращаться к подвижным моделям механизма (или они отсутствуют), не удастся добиться достаточного понимания движения отдельных частей механизмов друг относительно друга. Лабораторная база многих учебных заведений бедна, и продемонстрировать некоторые инженерные разработки в области проектирования схем механизмов невозможно. Названные трудности в значительной степени можно снять, используя компьютерную графику, «оживляющую» схемы механизма.

На кафедре разработана контролирующая программа по структуре механизмов. Работа с ней, как правило, увлекает студентов и вызывает живой интерес. Студенты без принуждения со стороны преподавателя стараются разобраться в теоретическом материале и получить более высокую рейтинговую оценку.

Введение ЭВМ в учебный процесс позволило значительно повысить научность курса и привести его в соответствие с современным уровнем науки и техники.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗАГОТОВКИ ВО ВРЕМЯ ПНЕВМОЦЕНТРОБЕЖНОЙ ОБРАБОТКИ

Сухоцкий А.А.

Various aspects of application of the differential equation for the description of character of movement of work part in the device for pneumocentrifugal processing are described

При получении высокоточных стеклянных шариков для микрооптики эффективным является метод пневмоцентробежной обработки. Сущность метода заключается в том, что заготовки кубической формы помещают между соосно расположенными инструментами с коническими рабочими поверхностями и сообщают им переносное движение вдоль этих поверхностей посредством среды под давлением [1].

При обработке заготовок кубической формы с целью получения полноразмерной сферической поверхности малого радиуса происходит значительное изменение массы, что является определяющим фактором для построения математической модели интенсивности обработки на первоначальной стадии технологического процесса с элементами динамики тела переменной массы, основываясь на уравнении Мещерского.

Дифференциальное уравнение вращения кубической заготовки с учетом изменения массы относительно оси O_z может быть записано в виде:

$$\frac{dI_z(t)}{dt} \omega(t) + I_z(t) \frac{d\omega(t)}{dt} = \sum |mom_z \vec{F}|,$$

где $I_z(t)$ - переменный момент инерции кубической заготовки; $\omega(t)$ - переменная угловая скорость заготовки; $mom_z \vec{F}$ - момент сил, действующей на заготовку. Дифференциальное уравнение описывает изменение угловой скорости вращения кубика при условии, что величины в правой части и переменный момент инерции известны. Однако их определение составляет научный и практический интерес. Момент инерции заготовки кубической формы, геометрия которой изменяется с течением времени, может быть определена по формуле

$$I_z(t) = \gamma \iiint_{T(t)} (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Здесь $T(t)$ - изменяемая поверхность, заключающая обрабатываемый кубик; γ - плотность стекла. Так как масса кубика $m(t)$ изменяется по известному соотношению $m(t) = \gamma V(t)$, где $V(t)$ - его объем, то для его определения предположим, что изменение

линейных размеров куба подчинено закону $\Gamma(t) = \Gamma e^{\frac{t}{t_k} \ln \frac{a}{\Gamma}}$. Здесь: t - текущее время процесса обработки; t_k - конечное время обработки; a - половина ребра куба; Γ - диагональ куба в начале обработки.

Для определения изменившейся массы кубика (а равно как и объема) с учетом $\gamma = \text{const}$, рассмотрим две стадии обработки, когда сьем материала заготовки происходит от вершин куба и до граней, а затем от граней до сферической поверхности. Соответствующие объемы обозначим через $V_1(t)$ и $V_2(t)$. Изменению объема (массы) $V_1(t)$ соответствует изменение половины диагонали куба $z(t) = \Gamma(t) / 2$. Итак, если происходит сьем поверх-

ности, соответствующей первой стадии обработки, то есть $a\sqrt{2} < z(t) < a\sqrt{3}$, то $V_1(t)$ определим по формуле

$$V_1(t) = 8 \int_{\sqrt{z^2(t)-2a^2}}^a \int_{\sqrt{z^2(t)-a^2-x^2}}^a \int_{\sqrt{z^2(t)-x^2-y^2}}^a dx dy dz.$$

На второй стадии обработки, когда съём припуска осуществляется по всей поверхности заготовки, изменение объема можно получить по аналогичным зависимостям. Полученные соотношения для $V(t)$ позволяют рассчитать объем снимаемого материала в каждый момент времени, что дает возможность прогнозировать параметры технологического процесса. Аналогичный подход положен в основу определения переменного момента инерции.

В процессе обработки заготовка кубической формы совершает сложное пространственное движение между инструментальными дисками, расположенными соосно. Рассмотрим одну из составляющих этого движения, а именно, вращение кубика вокруг своего ребра в плоскости, параллельной плоскости инструментальных дисков. Тогда по теореме Штейнера можно записать $I_Z(t) = m(t) \cdot 2a + I_Z^C(t)$, где I_Z^C - момент инерции кубической заготовки относительно своей оси симметрии

$$I_c(t) = 8 \gamma \left(\int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2) dx dy dz - \int_{\sqrt{z^2(t)-2a}}^a \int_{\sqrt{z^2(t)-x^2}}^a \int_{\sqrt{z^2(t)-x^2-y^2}}^a (x^2 + y^2) dx dy dz \right)$$

По методу пневмоцентробежной обработки заготовки кубической формы, помещенные между соосно расположенными инструментами с коническими рабочими поверхностями, вращаются вокруг оси последних посредством среды под давлением. Сжатый воздух от воздушной сети, проходя через тангенциальные сопла, воздействует на поверхность заготовки, в основном, в двух характерных направлениях – нормальном и тангенциальном. Момент от этих сил определяется на основании экспериментальных исследований распределения давления в струе сжатого воздуха, выходящего из тангенциального сопла и разработанной математической модели силового поля [2].

Таким образом, производя численной решение дифференциального уравнения вращения заготовки, определяем угловую скорость $\omega(t)$ в каждый момент времени. Тогда можно определить линейную скорость точки А как $V_A^{(t)} = \omega(t)2a$. Зная скорость точки А при соударении с коническими рабочими поверхностями инструментальных дисков, можно определить, сопоставляя с имеющимися экспериментальными данными, количество стекла, откалывающегося от заготовки. Это дает возможность прогнозировать изменение формы заготовки, рассчитывать линейную скорость при соударении кубика с инструментами и параметры технологического процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усовершенствованный инструмент для пневмоцентробежной обработки шариков / Филонов И.П., Козерук А.С., Филонова М.И., Сухоцкий А.А., Соболевский С.Б. - СТИН, 2000, №7.
2. Сухоцкий А.А. Исследование силового поля в рабочей зоне инструмента для пневмоцентробежной обработки шариков. - Вестник БНТУ, 2003, №1.

АЛГОРИТМЫ АНИМАЦИИ ФРИКЦИОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРИВодОВ ПОДАЧИ СТАНКОВ

Кудин В.В., Астахов Э.И., Кудин М.В.

The algorithm of animation of frictional auto-oscillations presented at a translational motion of a support of cutting machines, parameters of auto-oscillations are defined, the alternative of laboratory operation on examination of these oscillations is offered.

При обработке деталей динамическая система станка включает упругую систему станок–приспособление–инструмент–деталь, процессы в самой упругой системе, в механизмах (динамические, в том числе тепловые, электрические и др.) и рабочие процессы резания, трения, процессы приводов и т.д. (Рис. 1)

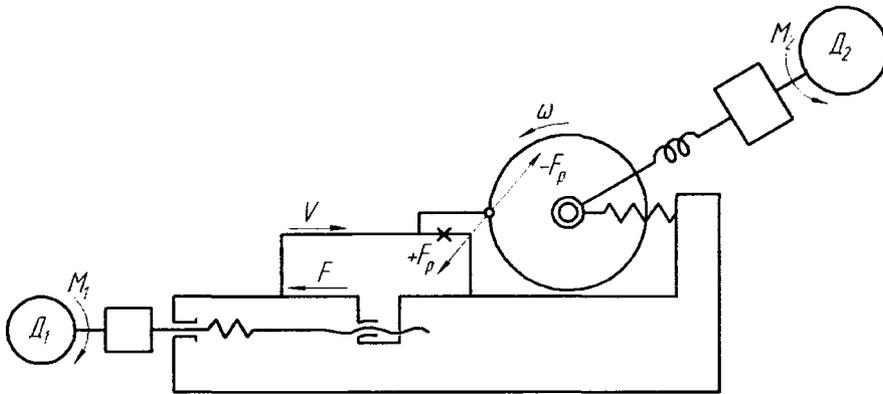


Рис. 1

На рис. 1 представлена простейшая схема станка, на которой воздействия на упругую систему процессов, происходящих в двигателях приводов, процессов трения суппорта и резания обозначены соответственно M_1 , M_2 , F и F_p [1].

Наличие трения (F) при поступательном перемещении суппорта со скоростью (V) может вызвать самовозбуждающиеся фрикционные автоколебания без периодических внешних воздействий.

В отличие от вынужденных или параметрических колебаний автоколебания возникают в системах при отсутствии внешнего периодического воздействия. Кроме того, необходимо наличие источника энергии и механизма, благодаря которому энергия этого источника превращается в колебательную энергию [2].

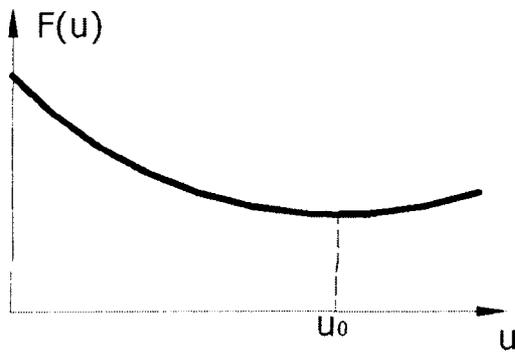


Рис.2

Фрикционные колебания представляют собой простейший пример автоколебаний в системе с одной степенью свободы.

Дифференциальное уравнение движения суппорта массой m имеет вид

$$m\ddot{x} + cx - F(U) = 0, \quad (1)$$

где $F(U)$ – сила трения, вид которой описывается графиком, изображенным на рис. 2.

Если $\left(\frac{dF}{dU}\right)_{U=v} > 0$, т.е. характеристика при данной скорости возрастающая, то по-

ложение статического равновесия $x = x_0 = F(V)/C$

является устойчивым по отношению к малым возмущениям. В противном случае положение равновесия неустойчиво.

Таким образом, при характеристике трения, изображенной на рис. 2, положение статического равновесия устойчиво.

Если сила трения сохраняет при скольжении величину постоянную, но меньшую, чем сила трения покоя, то возникают автоколебания. Такой случай характерен при резании металлов резцом на металлорежущих станках (токарных, строгальных), а также при поступательном перемещении суппорта по направляющим станины.

Рассмотрим алгоритм автоколебательного процесса, схема которого изображена на рис. 3.

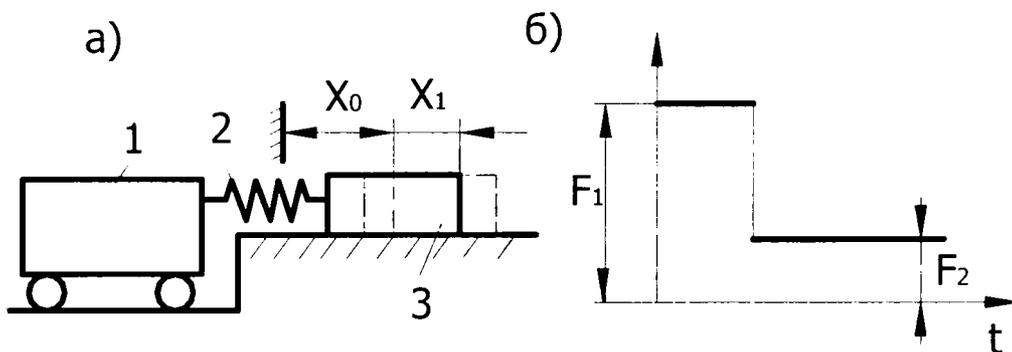


Рис. 3

Звено 1 движется с постоянной скоростью V_0 . Между суппортом 3 и плоскостью развивается сила сухого трения, характеристика которого изображена на рис. 3б, что схематически отражает известное из экспериментов различие между предельной силой трения покоя F_1 и силой трения движения F_2 (при этом $F_1 > F_2$).

Обозначим: $v_0 = \text{const}$ – скорость ведущего звена; m – масса ведомого звена 3; c – коэффициент жесткости пружины.

Частота собственных колебаний системы $K = \sqrt{c/m}$.

Очевидно, что если скорость звена 1 равна V_0 и мала, то любое малое препятствие может оказаться достаточным для остановки звена 3.

Рассмотрим дальнейшее состояние колебательной системы в горизонтальном направлении.

1-й этап. Ведущее звено 1, продолжая движение, будет сжимать пружину до тех пор, пока сила упругого сжатия сравняется с F_1 .

2-й этап. При $F_{\text{упр}} = F_1$ происходит срыв звена 3.

Приняв при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = 0$, получим уравнение движения ведомого звена 3:

$$\ddot{x} + \kappa^2 x = \kappa^2 \cdot v_0 \cdot t = \frac{F_1 - F_2}{m}. \quad (2)$$

Тогда перемещение звена 3 выражается зависимостью

$$x = v_0 t - \frac{v_0}{\kappa} \sin \kappa t + \frac{F_1 - F_2}{c} (1 - \cos \kappa t), \quad (3)$$

где первое слагаемое правой части выражает равномерное движение со скоростью v_0 , а два других – колебания звена 3.

В момент времени $t = t_1$ при $\dot{x} = 0$ наступает остановка ведомого звена 3, тогда

$$v_0(1 - \cos \kappa t_1) + \frac{\kappa(F_1 - F_2)}{c} \sin \kappa t_1 = 0. \quad (4)$$

Из уравнения (3) находим время t_1 :

$$t_1 = \frac{\pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{-2\alpha}{1 - \alpha^2} \right)}{\kappa} \quad \text{при } \alpha = \frac{\kappa(F_1 - F_2)}{cV_0} > 1, \quad (5)$$

$$t_1 = \frac{\frac{3}{2}\pi + \operatorname{arctg} \left| \frac{-2\alpha}{1 - \alpha^2} \right|}{\kappa} \quad \text{при } \alpha < 1. \quad (6)$$

Путь, пройденный звеном 3 за время t_1 :

$$x_1 = v_0 t_1 - \frac{V_0}{\kappa} \sin \kappa t_1 + \frac{F_1 - F_2}{c} (1 - \cos \kappa t_1). \quad (7)$$

3-й этап. Звено 3 находится в покое на протяжении времени t_2 , при этом

$$t_2 = \frac{2(F_1 - F_2)}{cV_0}. \quad (8)$$

При $t = t_1 + t_2$ наступает новый срыв и цикл автоколебаний звена 3 повторяется.

Таким образом, период автоколебаний равен:

$$T = t_1 + t_2, \quad (9)$$

а частота, с которой совершается автоколебательный процесс, $\nu = 1/T$ (Гц).

Моделирование фрикционных автоколебаний осуществляется с помощью пакета программ LP8K на персональном компьютере [3].

После регистрации на экране монитора появляется приглашение для ввода исходных данных. После ввода исходных данных производится расчет частоты свободных колебаний, интервалов времени t_1 и t_2 и периода автоколебаний. Результаты расчетов выводятся на экран монитора. В нижней части экрана моделируется автоколебательный процесс в виде зависимости от времени на интервалах движения t_1 и покоя – t_2 . Одновременно используя мультипликацию на экране, воспроизводят движение звена 1, сжатие пружины 2 и покой либо движение звена 3. На этом же экране воспроизводится фазовая траектория $v(x)$ движения звена 3 (суппорта станка).

С целью исследования влияния скорости v_0 на автоколебательный процесс имеется возможность задать $v'_0 < v_0$ и $v''_0 > v_0$ и повторить моделирование фрикционных автоколебаний в полном объеме.

По окончании моделирования производится распечатка результатов исследования фрикционных автоколебаний при трех значениях скорости v_0 ведущего звена 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудинов В.А., Динамика станков. – М.: Машиностроение, 1967.
2. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 272 с.
3. Колебания в машинах: лабораторные работы для студентов специальностей 1-36 01 01 и 1-36 01 03 / Сост.: Э.И. Астахов, В.В. Кудин, М.В. Кудин. – Мн.: БНТУ, 2005 – 95 с.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ФАКТОРОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ИЗНОСА В НИЗШИХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ

Авсиевич А.М., Николаев В.А., Герасименко С.А., Адаменко Д.В.

The problem of wear calculation with comprehensive allowance for factors is considered. The necessity of mechanism kinematics features accounting and wear factors dependence from parts displacement is shown.

Трение и вызываемое им изнашивание существенно влияют на эксплуатационные характеристики механизмов, поэтому при проектировании механизмов и машин все большее внимание уделяется расчету узлов и сопряжений на износ. В настоящее время исследованы основные виды изнашивания, имеющие место в подвижных сопряжениях машин, а также получены эмпирические зависимости, связывающие величину износа с кинематическими и силовыми параметрами.

В общем случае интенсивность изнашивания сопряжений I имеет вид /1/:

$$I = kp^m V^n, \quad (1)$$

где p – давление в контакте,

V – относительная скорость в сопряжении,

k , m и n – числовые коэффициенты.

В свою очередь величины давления и относительной скорости зависят от большого количества параметров, которые можно условно разделить на две группы: 1) факторы, зависящие от физико-механических свойств и состояния контактирующих поверхностей; 2) факторы, зависящие от кинематических характеристик и функциональных особенностей механизмов.

Факторы, входящие в первую группу и влияющие преимущественно на величину контактного давления, такие как механические характеристики материалов поверхностей, фактическая площадь контакта, шероховатость поверхностей, коэффициент трения подробно рассматриваются физикой и механикой твердого тела. В настоящее время получены сложные математические модели, позволяющие рассчитать напряженное состояние контактирующих поверхностей с высокой степенью точности /2/. Учет факторов второй группы не менее значим для адекватного расчета изнашивания сопряжений, что показано в работе /3/. Однако к настоящему моменту в триботехнике им уделено значительно меньше внимания. Важным, но недостаточно изученным является также вопрос о взаимосвязи факторов первой и второй группы. С данной точки зрения учет кинематических характеристик и динамической нагруженности пар трения необходим для рассмотрения факторов износа сопряжений в динамике, учесть области наибольших интенсивностей изнашивания в соединении и применить полученные данные к созданию конструкции с равноизнашиваемыми поверхностями.

В соответствии с подходом /4/ изнашивание точек сопряжения будет различаться из-за неравномерной их нагруженности. Поэтому при расчете на износ следует рассматривать в отдельности каждую элементарную площадку поверхности сопряжения. Тогда схема расчета, например, для цилиндрических сопряжений вращательных кинематических пар, будет иметь вид, представленный на рис. 1. Каждый блок представленной схемы представляет собой отдельную научно-инженерную задачу. При этом сохраняется необходимость эмпирического определения коэффициентов в формуле (1).

Расчет, проведенный в /4/, показывает, что с учетом передаточных функций и закона изменения внешних сил интенсивность износа различных участков достигает 3-х крат. Учет скорости изменения угла наклона реакции между звеньями во вращательной паре показывает, что относительная скорость скольжения для разных участков поверхности контакта может



Рис. 1. Схема расчета вращательных пар на износ

различаться на несколько порядков. В отдельных положениях имеет место скачкообразное изменение направления реакции, то есть данные участки испытывают ударные нагрузки. В этом случае вид изнашивания может отличаться от вида изнашивания прочих участков поверхности сопряжения, и для них следует применять иные формулы расчета величины износа и интенсивности изнашивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трение, износ и смазка: (Трибология и триботехника) / А.В. Чичинадзе, Э.М. Берлинер, Э.Д. Браун и др.; Под общ. ред. Чичинадзе А.В. - М.: Машиностроение, 2003. - 5785 с.
2. Кравчук А.С., Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия тел с круглыми границами. - Мн.: Технопринт, 2000. - 196 с.
3. Повышение долговечности трущихся элементов вращательных кинематических пар механизмов машин на основе моделирования их износа / Филонов И.П., Анципорович П.П., Акулич В.К., Булгак Т.И. // Современные методы проектирования машин: Респ. межведомств. сб науч. тр. Вып. 2. В 7 томах. Т. 4. / под общ. Ред. П.А. Витязя. - Мн.: УП «Технопринт», 2004. - С. 127 - 132.
4. Патент 2107902 С1 РФ, МКИ G 01 N 3/56. Способ повышения долговечности деталей подвижных соединений механизмов машин / И.П. Филонов, А.А. Черкас. - № 5030070/28; Заявл. 27.02.92; Опубл. 27.03.98, Бюл. № 9.

ИНТЕРАКТИВНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ ДВУХ ПЛАНАРНЫХ ПОЗИЦИОНЕРОВ

Карпович С.Е., Голдын Л., Поляковский В.В., Дайняк И.В.

The collision problem in the technological equipment with two and more planar positioners on the same stator is described. A geometric interpretation of problem is given, and the algorithm for analysis and excepting of collisions is proposed. The multimedia page for the modelling of two planar positioners' motions on the same stator is presented.

Введение

Достижения микроэлектроники и связанные с ними успехи микропроцессорной управляющей техники открыли возможность широкого внедрения достаточно совершенных и оперативных методов проектирования и управления на всех уровнях и приблизили технику управления непосредственно к объекту производства. Это обеспечило создание интегрированных электромагнитных устройств – координатных позиционеров для систем перемещения. Электромагнитные модули движения, komponуемые в линейные шаговые двигатели (ЛШД) для координатных позиционеров, и соответствующие цифровые системы управления позволяют обеспечить реализацию сложных многокоординатных и точно согласованных перемещений с широким варьированием параметров [1].

В спецтехнологическом автоматизированном оборудовании особую роль играют двухкоординатные планарные позиционеры. Для повышения эффективности функционирования автоматизированного оборудования используют совместную работу двух и более позиционеров на одном статоре [1]. При этом огромное значение имеет задача предотвращения столкновения этих позиционеров.

В работе рассмотрен один из алгоритмов анализа и предотвращения коллизий для двух планарных ЛШД на одном статоре.

1. Геометрическая интерпретация алгоритма предотвращения коллизий для двух планарных ЛШД на одном статоре

Алгоритм посвящен наиболее часто встречающемуся случаю – анализу столкновений двух координатных позиционеров в 2-D пространстве.

Декартова геометрия данного алгоритма может быть понята из рассмотрения рис. 1. Мы считаем априори, что инструмент не может выходить за границы площади основания координатного позиционера. Это допущение необходимо для того, чтобы быть уверенным в том, что при исключении столкновений координатных позиционеров мы также гарантируем, что не столкнутся и установленные на них инструменты. Малая площадь основания инструмента достигнута за счет освобождения координатного позиционера (и, как следствие, установленного на нем инструмента) от жестких кинематических связей, из-за того, что индуктор перемещается по статору, и присоединен к каркасу только через гибкий воздушный кабель. Никакой фиксированной связи не существует между перемещающейся частью инструмента и "мировой системой координат". Таким образом, только координатный позиционер может сталкиваться с другими координатными позиционерами. На рис. 1, показано, что декартовы координаты координатного позиционера с инструментом (роботом) R1 по пути его движения от позиции А до позиции В устанавливают область, в которую координатный позиционер R2 не должен входить, чтобы избежать столкновения.

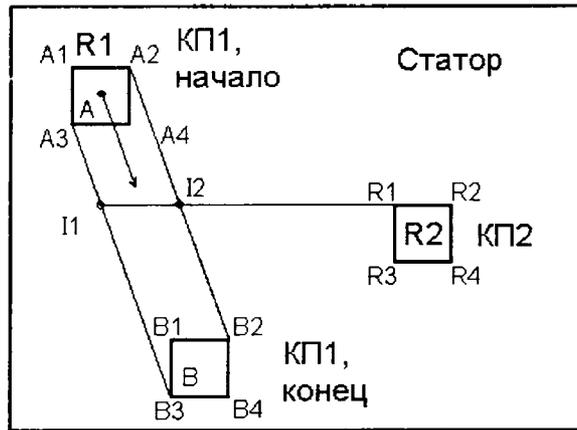


Рис. 1. Геометрическая модель коллизии двух планарных позиционеров

Использование координатных позиционеров значительно упрощает проблему анализа столкновений по сравнению с обычными робототехническими системами, в которых эта проблема является объемной, трехмерной. При использовании координатных позиционеров, 3-D проблема объемного перекрытия делится на проблему наложения 2-D областей, и на возможную 1-D проблему наложения высоты. На рис. 1 показано, что если проекция координатного позиционера R1 и координатного позиционера R2 на поверхность статора, начиная с области, определенной точками A1, A3, B3, B4, B2, A2, A1 не пересекается с областью, определенной точками R1-R4 КП2, то инструменты не будут сталкиваться и в трехмерном пространстве. Также допустимо и движение КП R1 от точки A к точке B. Зоны перекрытия, таким образом, легко рассчитываются решением уравнений пересечения прямых, формирующих границы областей и определения, если такие пересечения происходят в пределах конечных точек, определенных перемещенными областями.

Упомянутый подход к избеганию конфликтов является "статическим" в том смысле, что столкновения определены просмотром полной области перемещения в течение предложенного движения. Однако такой алгоритм может вызвать тупиковые ситуации, например, когда четыре координатных позиционера, размещаемые в четырех углах рабочей области, имеющей квадратную форму, желают двигаться по часовой стрелке в угол друг друга. "Статический" алгоритм "сделает вывод", что все планируемые движения заставляют координатные позиционеры сталкиваться и запретит их, не приняв во внимание тот факт, что одновременное движение всех четырех координатных позиционеров не приведет ни к каким столкновениям. Модификации алгоритма, который решает эту проблему, должна позволить анализировать возможность столкновения в процессе движения индукторов.

2. Вычислительный алгоритм анализа и предотвращения коллизий на двух планарных ЛШД на одном статоре

Разработанный алгоритм основан на том, что каждый позиционер представляется его проекцией на плоскость статора в виде геометрического места, ограниченного подвижным многоугольником. В частном случае геометрическое место представляет собой четырехугольник.

Для иллюстрации разработанного алгоритма анализа коллизий рассмотрим совместную работу двух планарных позиционеров R1 и R2, имеющих форму квадрата с длиной ребра L при их движении между начальными и конечными положениями в соответствии с рис. 2.

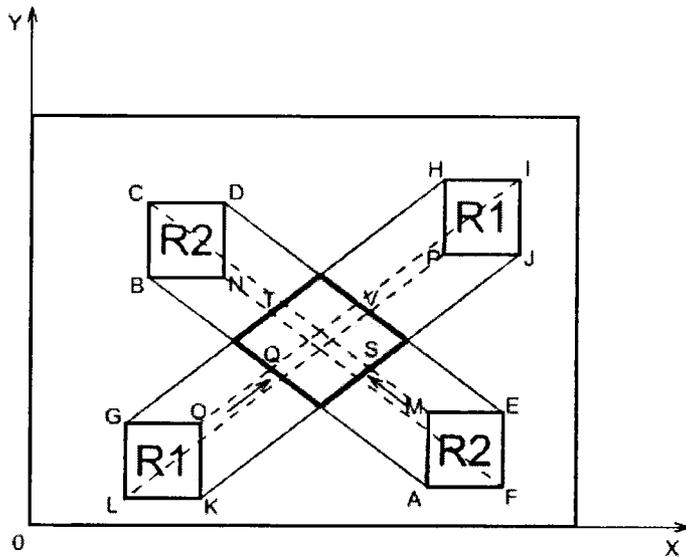


Рис. 2. Геометрическая модель анализа коллизий двух планарных позиционеров на одном статоре

Опасным участком, в котором возможно столкновение позиционеров является геометрическое место пересечения шестиугольников ABCDEF и GHIJKL (на рис. 2. этот участок показан серым цветом). При движении позиционеров производится анализ их местоположения относительно этого участка. При этом алгоритм построен таким образом, что при нахождении одного из позиционеров в этой зоне другому вход в нее запрещен.

Предположим, позиционер R2 первым входит в закрашенную область. Точкой входа будет являться точка пересечения прямых MC и KJ (точка S), а точкой выхода – точка пересечения прямых FN и GH (точка T). Координаты этих точек определяются по следующим формулам:

$$\begin{cases} X_S = \frac{b_{CM} - b_{KJ}}{k_1 - k_2}, \\ Y_S = \frac{b_{CM} - b_{KJ}}{k_1 - k_2} \cdot k_1 + b_{KJ}. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} X_T = \frac{b_{FN} - b_{GH}}{k_1 - k_2}, \\ Y_T = \frac{b_{FN} - b_{GH}}{k_1 - k_2} \cdot k_1 + b_{GH}. \end{cases} \quad (2)$$

где X_S, Y_S – координаты точки S; X_T, Y_T – координаты точки T; $b_{CM}, b_{KJ}, b_{FN}, b_{GH}$ – начальная ордината прямых CM, KJ, FN, GH соответственно; k_1, k_2 – коэффициент угла наклона траектории позиционеров R1 и R2 соответственно.

Условие нахождения позиционера R2 в опасной зоне, в которой возможно столкновение позиционеров, является выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} X_T - \frac{L}{2} \leq X_{R2} \leq X_S + \frac{L}{2}, \\ Y_S - \frac{L}{2} \leq Y_{R2} \leq Y_T + \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

где X_{R2}, Y_{R2} – координаты центра позиционера R2; L – длина ребра позиционера.

В соответствии с рис. 2, точкой входа позиционера R1 в запрещенную зону является точка Q. Условие входа позиционера R1 в запрещенную зону можно представить в виде следующего неравенства:

$$\begin{cases} X_{R1} + V_{x_{R1}} \cdot \Delta t \geq X_Q + \frac{L}{2}, \\ Y_{R1} + V_{y_{R1}} \cdot \Delta t \geq Y_Q + \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

где X_{R1} , Y_{R1} – координаты центра позиционера R1; X_Q , Y_Q – координаты точки Q; $V_{x_{R1}}$, $V_{y_{R1}}$ – проекции скорости движения позиционера R1 на оси X и Y соответственно; Δt – промежуток времени, через который производится анализ.

При одновременном выполнении неравенств (3) и (4) позиционер R1 должен остановиться. Продолжить свое движение он сможет только после выхода позиционера R2 из запрещенной зоны.

На практике позиционеры могут двигаться не только равномерно, но и с ускорением. В этом случае закон движения позиционера можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} X = X_0 + V_x \cdot t + a_x \cdot \frac{t^2}{2}, \\ Y = Y_0 + V_y \cdot t + a_y \cdot \frac{t^2}{2}. \end{cases} \quad (5)$$

где X , Y – текущие координаты центра позиционера; X_0 , Y_0 – начальные координаты центра позиционера; V_x , V_y – проекции скорости движения позиционера на оси X, Y соответственно; a_x , a_y – проекции ускорения позиционера на оси X, Y соответственно.

С учетом (5) на линейной траектории может быть реализован в общем случае любой закон движения. При этом при анализе коллизий видоизменится только неравенство, определяющее условие входа позиционера в запрещенную зону. Так, для позиционера R1, неравенство (4) примет вид:

$$\begin{cases} X_{R1} + V_{x_{R1}} \cdot \Delta t + a_{x_{R1}} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta X_{Ocm.} \geq X_Q + \frac{L}{2}, \\ Y_{R1} + V_{y_{R1}} \cdot \Delta t + a_{y_{R1}} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta Y_{Ocm.} \geq Y_Q + \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (6)$$

где $a_{x_{R1}}$, $a_{y_{R1}}$ – проекции ускорения позиционера R1 на оси X, Y соответственно; $S_{Ocm.} = \sqrt{\Delta X_{Ocm.} + \Delta Y_{Ocm.}}$ – расстояние, которое необходимо пройти позиционеру до полной остановки.

Таким образом, рассчитав точки входа и выхода в опасную зону для каждого из координатных позиционеров и анализируя местоположение их относительно этих точек, мы можем избегать возможности столкновения.

3. Мультимедийная страница моделирования движения двух планарных ЛШД на одном статоре

На основе вышеизложенного алгоритма в среде Macromedia Flash [2, 3] разработана мультимедийная страница, моделирующая движения двух планарных ЛШД на одном статоре. На рис. 3 представлен интерфейс разработанной мультимедийной страницы.

В качестве самих позиционеров в мультимедийной странице выступают два закрашенных квадрата А и В. Менее ярко тем же цветом и буквой обозначены начальная и конечная точки движения соответствующего позиционера. Данные точки можно располагать в любом

месте в пределах статора. В качестве параметров движения можно задавать максимальную скорость движения для каждого из позиционеров, ускорение разгона и торможения.

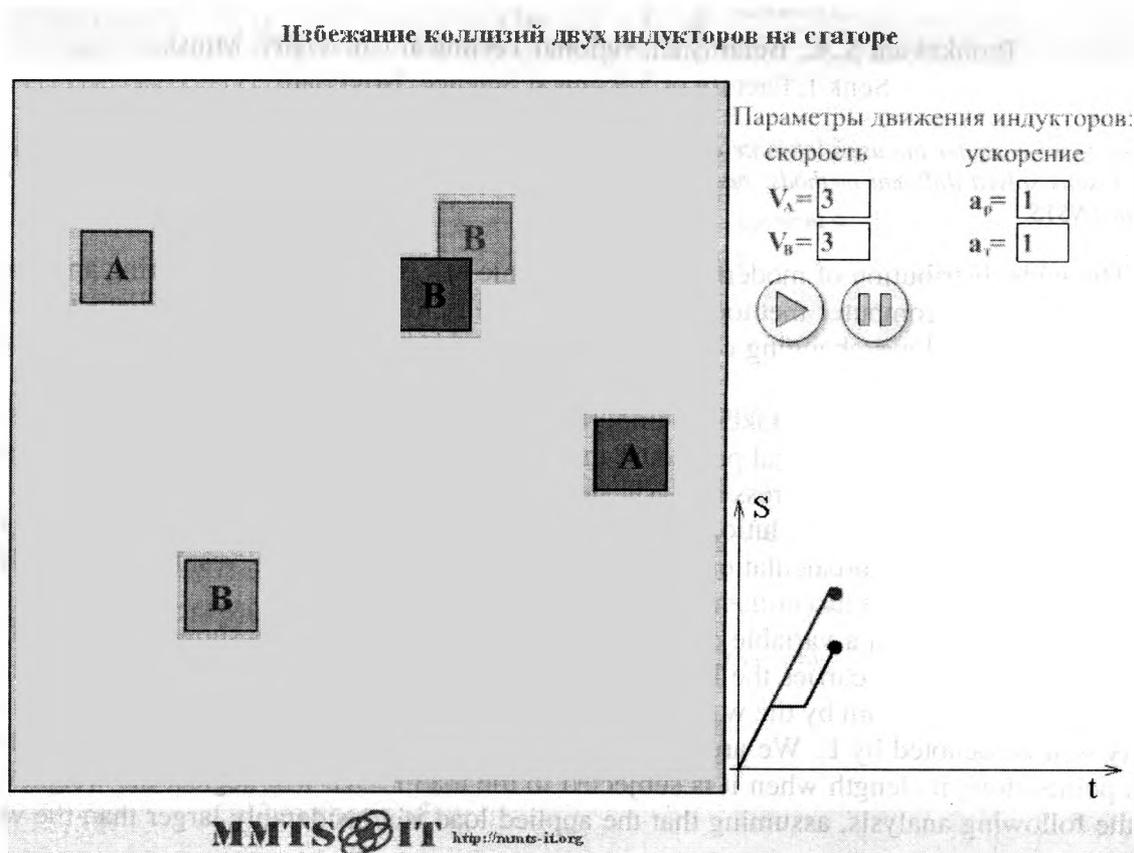


Рис. 3. Интерфейс мультимедийной страницы для моделирования движения двух планарных ЛШД на одном статоре

После нажатия на кнопку Play виртуальные позиционеры начинают циклическое движение от начальной точки к конечной. Одновременно с движением производится построение зависимости перемещения от времени.

Разработанная мультимедийная страница моделирования движения двух планарных ЛШД на одном статоре может быть использована не только в качестве демонстрации алгоритмов избежания коллизий, но также и как орган управления движением реальных ЛШД.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович С.Е., Яковлюк А., Чех М., Семеняко Ф., Ляшук Ю.Ф. Аналитическая механика и мехатронные системы перемещений. – Мн.: Технопринт, 2004. – 187 с.
2. Рейнхардт Р., Ленц Д. Flash 5. Библия пользователя. – М.: Изд. дом "Вильямс", 2001. – 1164 с.
3. Macromedia Flash MX 2004 ActionScript 2.0. Справочник разработчика. – М.: Изд. дом "Вильямс", 2005. – 896 с.

USING OF FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF THE RESISTANCE OF MATERIALS.

Pronkevich S.A., Belarusian National Technical University, Minsk;
Senk I, Faculty of Technical Science, Novi Sad.

In this article we consider the using of finite element method for solving problems of the resistance of materials and compare results solved different methods: analytic solution, hand-calculation solution by finite element method and solution in ANSYS.

The wide distribution of modern computer technic has changed the engineering appreciably. The using of modern computer methods provides capability to research different characteristics of projected objects. It allows changing construction of this objects without prototyping and long and expensive simulations.

The finite element method takes up important place among modern computing methods. The finite element method is a numerical procedure that can be used to obtain solution to a wide class of engineering problems involving stress analysis, heat transfer, fluid flow, etc.

Consider an example of solution of a simple problem of the resistance of materials by finite element method with hand-calculation, with ANSYS and compare the results with analytical solution.

Consider a bar with a variable cross section supporting a load P , as shown in Figure 1. The bar is fixed at one end and carries the load P at the other end. Let us designate the width of the bar at the top by w_1 at the bottom by the w_2 , its thickness by t , and its length by L . The bar's modulus of elasticity will be denoted by E . We are interested in determining how much the bar will deflect at various points along its length when it is subjected to the load P . We will neglect the weight of the bar in the following analysis, assuming that the applied load is considerably larger than the weight of the bar.

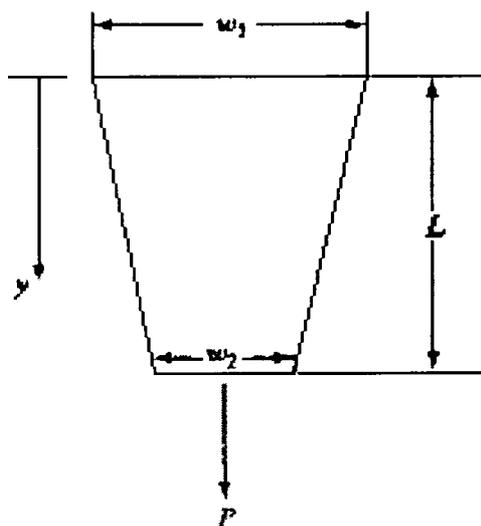


Figure 1. A bar under axial loading

The given bar is modeled using four individual segments, with each segment having a uniform cross section. The cross-sectional area of each element is represented by an average area of the cross section at the nodes that make up (define) the element. This model is shown in Figure 2.

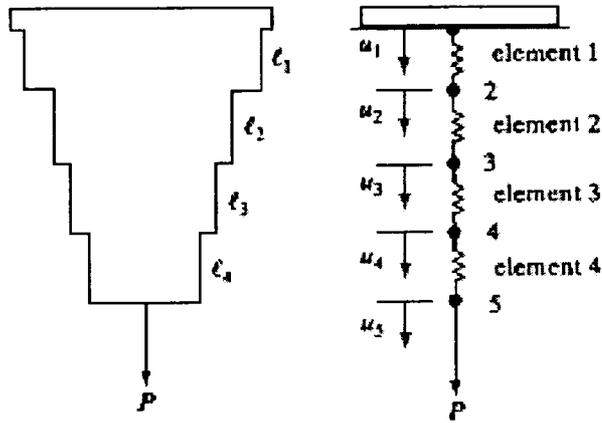


Figure 2. Subdividing the bar into elements and nodes

In order to obtain numerical values of the nodal displacement, let us assume that $E = 10.4 \cdot 10^6 \frac{lb}{in^2}$, $w_1 = 2 in$, $w_2 = 1 in$, $t = 0.125 in$, $L = 10 in$ ($l = 2.5 in$), $P = 1000 lb$

The variation of the cross-section area of the bar in the y – direction can be expressed by

$$A(y) = (w_1 + (\frac{w_2 - w_1}{L})y)t = (2 + \frac{(1-2)}{10}y) \cdot 0.125 = 0.25 - 0.0125y \quad (*)$$

Using (*) we can compute the cross-section areas at each node:

$$A_1 = 0.25 in^2 \quad A_2 = 0.21875 in^2$$

$$A_3 = 0.1875 in^2 \quad A_4 = 0.15625 in^2$$

$$A_5 = 0.125 in^2$$

Next, the equivalent stiffness coefficient for each element is computed from the equations

$$k_i = \frac{A_{i+1} + A_i}{2l} E$$

$$k_1 = 975 \cdot 10^3 \frac{lb}{in} \quad k_2 = 845 \cdot 10^3 \frac{lb}{in}$$

$$k_3 = 715 \cdot 10^3 \frac{lb}{in} \quad k_4 = 585 \cdot 10^3 \frac{lb}{in}$$

The global stiffness matrix is obtained by assembling, or adding, together each element's position in the global stiffness matrix:

$$[K]^{(G)} = [K]^{(1G)} + [K]^{(2G)} + [K]^{(3G)} + [K]^{(4G)}$$

$$[K]^{(G)} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

Applying the boundary conditions $u_1 = 0$ and the load $P = 1000 lb$ we get

$$10^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -975 & 1820 & -845 & 0 & 0 \\ 0 & -845 & 1560 & -715 & 0 \\ 0 & 0 & -715 & 1300 & -585 \\ 0 & 0 & 0 & -585 & 585 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10^3 \end{Bmatrix}$$

If we will have solved this matrix we find displacement:
 $u_1 = 0$, $u_2 = 0.001026in$, $u_3 = 0.002210in$, $u_4 = 0.003608in$, $u_5 = 0.005317in$

Modeling in ANSYS consists of the following steps:

1. to select the type of finite element – “link1”.
2. to set material properties. In this task we use elastic isotropic material and input modulus of elasticity and Poisson's ratio.
3. because the model consists of 4 finite elements with different cross-sections we have to set up an individual set of real constants for each element and apply it while creating the elements.
4. According to problem situation we fix rigidly the upper node and apply load P to the lower node.

Model is shown on Figure 3.

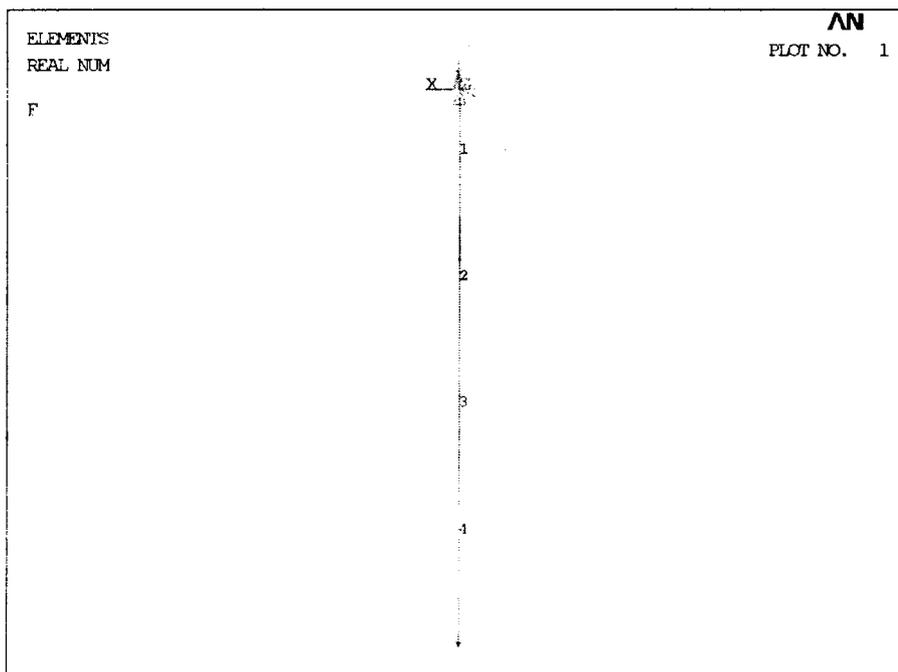


Figure 3. Finite elements model created in ANSYS.

The results of the nodes displacement are shown on Figure 4.

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UY
1	0.0000
2	-0.10256E-02
3	-0.22091E-02
4	-0.36077E-02
5	-0.53171E-02

Figure 4. The results of the nodes displacement.

Consider an analytic solution of this problem. Assuming that the material of the bar meets Hook's law we can use the following formulae to the calculation of bar displacement $\Delta l = \int \frac{Pdy}{EA(y)}$ or in

our model for each step $\Delta l_i = \int_0^{2.5i} \frac{1000}{10.4 \cdot 10^6 \cdot (0.25 - 0.0125y)} dy$

Calculating for each step we will find:

$\Delta l_1 = 0$ in

$\Delta l_2 = 0.00102716$ in

$\Delta l_3 = 0.00221294$ in

$\Delta l_4 = 0.00361541$ in

$\Delta l_5 = 0.0053319$ in

Compare results:

	1	2	3	4	5
FEA	0	0.001026	0.002210	0.003608	0.005317
ANSYS	0	0.0010256	0.0022091	0.0036077	0.0053171
Analytic	0	0.00102761	0.00221294	0.00361541	0.0053319

We can see the solution results of different methods are equal.

References

Миролюбов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. «Высшая школа» 1967 г.

Saeed Moaveni. Finite Element Analysis. Theory and Application with ANSYS. Minnesota State University, Mancato.

ANSYS User's Manual.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

И. М. Мартыненко

The formulae for asymptotic expression of eigenvalues and eigenfunctions of first boundary value problem for cubic anisotropy bodies are obtained.

Кубически анизотропными телами называются упругие тела, процессы деформирования в которых описываются следующим законом Гука [1,2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= (A_{11} - A_{12})\epsilon_{ii} + A_{12}\theta, & i \neq j = 1,2,3 \\ \sigma_{ij} &= 2A_{44}\epsilon_{ij} \end{aligned} \quad (1)$$

Компоненты тензора деформации ϵ_{ij} связаны с компонентами вектора перемещения u_i ($i = 1,2,3$) точек упругого тела формулами:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \theta = \sum_{i=1}^3 \partial_i u_i, j, i = 1,2,3 \quad (2)$$

Повсюду в работе предполагается, что A_{ij} (материальные константы) – постоянные величины. Разрешающая система уравнений равновесия выводится из уравнений Коши [1] после подстановки в них формул (1):

$$(\Delta + \epsilon \partial_\alpha^2) u_\alpha + \sigma \partial_\alpha \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k = 0, \alpha = \overline{1,3} \quad (3)$$

В матричном виде эта система записывается так:

$$Mu = 0$$

где

$$Mu = A_{44} \begin{vmatrix} \Delta + (\epsilon + \lambda) \partial_\alpha^2 + k^2 & \lambda \partial_\beta \partial_\alpha & \lambda \partial_\gamma \partial_\alpha \\ \lambda \partial_\beta \partial_\alpha & \Delta + (\epsilon + \lambda) \partial_\beta^2 + k^2 & \lambda \partial_\beta \partial_\alpha \\ \lambda \partial_\gamma \partial_\alpha & \lambda \partial_\beta \partial_\gamma & \Delta + (\epsilon + \lambda) \partial_\gamma^2 + k^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_\gamma \end{vmatrix}, u = \begin{vmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_\gamma \end{vmatrix}$$

Введем в рассмотрение такую операторную матрицу:

$\Phi(\partial_1, \partial_2, \partial_3) =$

$$\begin{vmatrix} (\Delta)^2 + \lambda\Delta(\partial_2^2 + \partial_3^2) + (\lambda^2 - \sigma^2)\partial_2^2\partial_3^2 & -\sigma\partial_1\partial_2[\Delta + (\lambda - \sigma)\partial_3^2] & -\sigma\partial_1\partial_3[\Delta + (\lambda - \sigma)\partial_2^2] \\ -\sigma\partial_1\partial_2[\Delta + (\lambda - \sigma)\partial_3^2] & \Delta^2 + \lambda\Delta(\partial_1^2 + \partial_3^2) + (\lambda^2 - \sigma^2)\partial_1^2\partial_3^2 & -\sigma\partial_2\partial_3[\Delta + (\lambda - \sigma)\partial_1^2] \\ -\sigma\partial_1\partial_3[\Delta + (\lambda - \sigma)\partial_2^2] & -\sigma\partial_2\partial_3[\Delta + (\lambda - \sigma)\partial_1^2] & \Delta^2 + \lambda\Delta(\partial_1^2 + \partial_2^2) + (\lambda^2 - \sigma^2)\partial_1^2\partial_2^2 \end{vmatrix}$$

где для краткости введены обозначения: $\lambda = \varepsilon + \sigma = \frac{A_{11}}{A_{44}} - 1$, $\varepsilon = \frac{A_{11} - A_{12}}{A_{44}} - 2$,

$$\sigma = 1 + \frac{A_{12}}{A_{44}}$$

Обозначим

$$F(\partial_1, \partial_2, \partial_3, k^2) = \det M \quad (4)$$

Из (4) имеем:

$$\begin{aligned} F(\partial_1, \partial_2, \partial_3, k^2) &= (\Delta + k^2)^3 + (\varepsilon + \sigma)f_1(\Delta + k^2)^2 + \varepsilon(\varepsilon + 2\sigma)f_2(\Delta + k^2) + \\ &+ \varepsilon^2(\varepsilon + 3\sigma)f_3 = (\Delta + k^2)^3 + \lambda f_1(\Delta + k^2)^2 + \\ &+ (\lambda^2 - \sigma^2)f_2(\Delta + k^2) + (\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma)f_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Далее рассмотрим следующую граничную задачу

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) - \lambda^2 u(x)E = 0, \quad x \in D, \quad u(x) = 0, \quad x \in S \quad (6)$$

где S – граница области D , $\lambda = const$. Так как система (6) принадлежит к эллиптическому типу, то для нее имеют место общие теоремы о разрешимости граничных задач (Лопатинский). В частности, существует матричная функция Грина [4] $G(x, y, \lambda) = g(x, y, \lambda) - a(x, y, \lambda)$, где $g(x, y, \lambda)$ – главная часть матрицы Грина, $a(x, y, \lambda)$ – ее регулярная часть, для которых справедливы такие оценки:

$$|g(x, y, \lambda)| \leq \frac{C \exp(-\lambda \varepsilon |x - y|)}{|x - y|}, \quad a(x, y, \lambda) \leq C_1 \exp(-\lambda \varepsilon |x - y|)(|\ln|x - y|| + 1) \quad (7)$$

C, C_1 – постоянные. Если $\lambda = 0$, то – есть для системы $M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0$ матрица Грина имеет следующий вид

$$G(x, y) = g(x, y) - a(x, y) \quad (8)$$

и имеют место такие оценки

$$|G(x, y)| \leq C_2/|x - y|, \quad |a(x, y)| \leq C_3/|x - y|^{1-\chi} \quad (9)$$

χ – постоянная Ляпунова для поверхности S .

Так как уравнения (6) имеют постоянные коэффициенты, то матрицы $g(x, y, \lambda)$, $g(x, y)$ можно построить с помощью интегрального преобразования Фурье. Опуская промежуточные выкладки, приведем их окончательный вид

$$g(x - y, \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\infty} \exp(i(x - y, \alpha)) [M(\alpha) + \lambda^2 E]^{-1} d\alpha \quad (10)$$

$$g(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\infty} \exp(i(x - y, \alpha)) [M(\alpha)]^{-1} d\alpha \quad (11)$$

Из общей теории преобразования Фурье [3] имеем

$$\iiint_{\infty} g(x - z, \lambda) g(z - x) dz = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\infty} [M(\alpha)] [M(\alpha + \lambda^2 E)]^{-1} d\alpha$$

или с помощью замены $\alpha = \lambda \tilde{\alpha}$

$$\iiint_{\infty} g(x - z, \lambda) g(z - x) dz = \frac{1}{(2\pi)^3 \lambda} \iiint_{\infty} [M(\tilde{\alpha})] [M(\tilde{\alpha} + E)]^{-1} d\tilde{\alpha}$$

Регулярная часть матрицы $G(x, y)$ определяется как решение такой граничной задачи

$$\begin{cases} M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) a(x, y) = 0, x \in D \\ a(x, y) = g(x, y), x \in S \end{cases}$$

Редукция этой задачи к интегральным уравнениям приводит к такому представлению

$$a(x, y) = \iint_S H(x, z) g(z, y) d_z S$$

причем $H(x, z) = O(1/(x - y)^{2-\chi})$. Откуда $a(x, y) = O(1/|x - y|^{1-\chi})$. Эти выкладки обосновывают формулы (9).

Решение граничной задачи

$$\begin{cases} \left[M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E \right] u(x) = -\Phi(x), x \in D \\ u(x) = 0, x \in S \end{cases} \quad (12)$$

представим в виде

$$u(x) = -\lambda^2 \iiint_D G(x, y)u(y)dy + \iiint_D G(x, y)\Phi(y)dy \quad (13)$$

Обозначим через $R(x, y, \lambda)$ – резольвенту системы интегральных уравнений (13). Тогда решение интегрального уравнения (13) можно представить в виде

$$u(x) = \iiint_D G(x, y)\Phi(y)dy - \lambda^2 \iiint_D R(x, z, \lambda) \left[\iiint_D G(z, y)\Phi(y)dy \right] dz \quad (14)$$

Поскольку решение граничной задачи (12) может быть представлено через матрицу Грина $G(x, y, \lambda)$ оператора $M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$ с нулевым граничным условием, то получим такое равенство

$$u(x) = \iiint_D G(x, y)\Phi(y)dy = \iiint_D R(x, y, \lambda)\Phi(y)dy$$

Поэтому $R(x, y, \lambda) = G(x, y, \lambda)$. Из второй формулы Грина для оператора $M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ следует симметрия матриц Грина $G(x, y) = G(y, x)$, $G(x, y, \lambda) = G(y, x, \lambda)$. Кроме того метод интегральных уравнений для определения $a(x, y, \lambda)$ приводит к следующей формуле

$$a(x, y, \lambda) = \iint_S H(x, z, \lambda)g(z, y, \lambda)d_z S$$

причем

$$H(x, z, \lambda) \leq \frac{C(\lambda)}{|x - z|^{2-\chi}}$$

Из всего выше сказанного вытекает следующие интегральные уравнения для $G(x, y, \lambda) = G(y, x, \lambda)$:

$$G(x, y, \lambda) = G(x, y) - \lambda^2 \iiint_D G(x, z, \lambda)G(z, y)dz$$

$$G(x, y, \lambda) = G(x, y) - \lambda^2 \iiint_D G'(x, z)G(z, y, \lambda)dz$$

Из теории симметричных интегральных уравнений вытекает следующее разложение резольвенты по собственным функциям его ядра [4, 8]:

$$G(x, y, \lambda) = G(x, y) - \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u'_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k + \lambda^2)} \quad (15)$$

Кроме того для матричной функции

$$\Psi(x, \lambda) = \iiint_D G(x, z, \lambda)G(z, y)dz = \iiint_D G'(x, z)G(z, y, \lambda)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u'_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k + \lambda^2)}$$

Очевидными выкладками получим:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u'_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k + \lambda^2)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\infty} ([M(\alpha)][M(\alpha) + E])^{-1} d\alpha$$

Здесь $[M(\alpha)]^{-1}$ обратную матрицу к M . Отсюда следует, что следы матриц справа и слева равны:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Sp u_k(x)u'_k(x)}{\lambda_k(\lambda_k + \lambda)} = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{\infty} Sp([M(\alpha)][M(\alpha) + E])^{-1} d\alpha$$

Введем обозначения

$$Sp u_k(x)u'_k(x) = u'_k(x)u_k(x) = a_k(x)$$

$$C^*(x) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{\infty} Sp([M(\alpha)][M(\alpha) + E])^{-1} d\alpha$$

Воспользуемся такой теоремой Таубера [4]: Пусть ряд

$$s(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k + \lambda}, \quad (c_k \geq 0, \lambda_k > 0)$$

где $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, сходится при $\lambda > 0$ и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda}s(\lambda) = H$. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\lambda_k \leq \lambda} c_k = \frac{2H}{\pi}, \quad \text{причем в последней сумме суммирование распространяется на те}$$

значения k , для которых $\lambda_k \leq \lambda$.

Полагая $c_k = a_k(x)/\lambda_k$, $H = C^*(x)/4\pi$, будем иметь

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \frac{a_k(x)}{4\pi} = \frac{C^*(x)}{2\pi^2} \text{ или}$$

$$\Phi(x, \lambda) \equiv \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \frac{a_k(x)}{4\pi} = \frac{C^*(x)}{2\pi^2} \sqrt{\lambda} + \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda} \quad (16)$$

где $\varepsilon(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Полагая здесь $\lambda = \lambda_n$, получим

$$\sigma_n \equiv \sum_{k=1}^n \frac{a_k(x)}{\lambda_k} = \frac{C^*(x)}{2\pi^2} \sqrt{\lambda_n} + \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n}, \quad (17)$$

$\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Здесь функция $\Phi(x, \lambda)$ не убывает и равна нулю при $\lambda < \lambda_1$, причем $\Phi(x, \lambda) = \sigma_m(x)$ при $\lambda_m \leq \lambda < \lambda_{m+1}$. Поэтому

$$\int_0^{\lambda_n} \Phi(x, \lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma_1(x) d\lambda + \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \sigma_2(x) d\lambda + \dots + \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \sigma_{n-1}(x) d\lambda$$

Отсюда в силу (16) имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \frac{C^*(x)}{3\pi^2} \lambda_n^{3/2} + \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda) \sqrt{\lambda} d\lambda$$

С помощью преобразования Абеля получим

$$\sum_{k=1}^n a_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \frac{C^*(x)}{6\pi^2} \lambda_n^{3/2} + \varepsilon_n'' \lambda_n^{3/2}$$

$\varepsilon_n'' \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из определения $C^*(x)$ вытекает

$$\sum_{k=1}^n u'_k(x) u_k(x) \approx \frac{\lambda_n^{3/2}}{12\pi^4} \iiint_{\infty} Sp([M(\alpha)][M(\alpha) + E])^{-1} d\alpha \quad (18)$$

Так как собственные функции (столбцы) $u_k(x)$ ортонормированны, то

$\iiint_D u'_k(x) u_k(x) dx = 1$. Поэтому, интегрируя (18) по области D , получим

$$n \approx \frac{V}{12\pi^4} \iiint_{\infty} Sp([M(\alpha)][M(\alpha) + E]^{-1}) d\alpha \lambda_n^{3/2} \quad (19)$$

Здесь V – объем области D . Формулы (18), (19) представляют собой асимптотику рассматриваемой задачи. Переходя в них к сферическим координатам $\alpha = \rho\alpha_0$, α_0 – единичный вектор, сонаправленный с α , получим, заменяя α_0 на α

$$\iiint_{\infty} Sp([M(\alpha)][M(\alpha) + E]^{-1}) d\alpha = \frac{1}{2} Sp \int_{|\alpha|=1} [M(\alpha)]^{-1} dS \int_{-\infty}^{+\infty} [\rho^2 M(\alpha) + E]^{-1} d\rho$$

Так как каждый элемент матрицы $[\rho^2 M(\alpha) + E]^{-1}$ является аналитической функцией от ρ в верхней полуплоскости за исключением конечного числа полюсов, а на бесконечности убывает как ρ^{-2} . Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\rho^2 M(\alpha) + E]^{-1} d\rho = 2\pi \sum res [\rho^2 M(\alpha) + E]^{-1}; \quad (20)$$

$$\sum_{k=1}^n u'_k(x) u_k(x) \approx \frac{i\lambda_n^{3/2}}{12\pi^3} \int_{|\alpha|=1} \sum res Sp([M(\alpha)][\rho^2 M(\alpha) + E]^{-1}) dS \quad (21)$$

$$n \approx \frac{iV\lambda_n^{3/2}}{12\pi^3} \int_{|\alpha|=1} \sum res Sp([M(\alpha)][\rho^2 M(\alpha) + E]^{-1}) dS \quad (22)$$

Практическое использование формул (21), (22) опирается на вычисление корней полинома $\det(\rho^2 M(\alpha) + E)$, который был выписан в явном виде в формуле (4). Оно может быть выполнено с помощью разложения F на множители, по методу, указанному в [3, 6]. Для этого будем исходить из следующего равенства

$$\begin{aligned} F(\partial_1, \partial_2, \partial_3, k^2) &= (\Delta + k^2)^3 + (\varepsilon + \sigma) f_1 (\Delta + k^2)^2 + \varepsilon(\varepsilon + 2\sigma) f_2 (\Delta + k^2) + \\ &+ \varepsilon^2(\varepsilon + 3\sigma) f_3 = (\Delta + k^2)^3 + \lambda f_1 (\Delta + k^2)^2 + \\ &+ (\lambda^2 - \sigma^2) f_2 (\Delta + k^2) + (\lambda - \sigma)^2 (\lambda + 2\sigma) f_3 = \\ &= (\Delta + a\partial_1^2 + b\partial_2^2 + m)(\Delta + a\partial_2^2 + b\partial_3^2 + m)(\Delta + a\partial_3^2 + b\partial_1^2 + m) \end{aligned} \quad (23)$$

где a, b, m – постоянные, которые определим из поточечного равенства правых частей. В частности

$$F(0,0,0,k^2) = (k^2)^3 = m^3$$

Откуда $m = k^2 \exp(2\pi ni/3)$, $n = 1, 2, 3$

Далее

$$\begin{aligned} F(1,1,-2,k^2) &= (k^2)^3 - 3(\lambda^2 - \sigma^2)k^2 - 2(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) = \\ &= (a + b + m)(a - 2b + m)(b - 2a + m) \equiv \\ &\equiv m^3 + m(3ab - 3a^2 - 3b^2) + (a + b)(a - 2b)(b - 2a) \end{aligned}$$

Отсюда получим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 - \sigma^2 &= (a^2 + b^2 - ab)e^{\frac{2\pi ni}{3}} \\ -2(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) &= (a + b)(a - 2b)(b - 2a) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (a + b)^2 &= 3ab + (\lambda^2 - \sigma^2)e^{\frac{2\pi ni}{3}} \\ (a + b)[9a - 2(a + b)^2] &= -2(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) \end{aligned} \right\}$$

После очевидных выкладок имеем

$$\left. \begin{aligned} 3ab &= (a + b)^2 - (\lambda^2 - \sigma^2)e^{\frac{2\pi ni}{3}} \\ (a + b) \left[(a + b)^2 - 3(\lambda^2 - \sigma^2)e^{\frac{2\pi ni}{3}} \right] &= -2(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Обозначим

$$a + b = t$$

Тогда (24) принимает следующий вид:

$$3ab = t^2 - (\lambda^2 - \sigma^2)e^{\frac{2\pi ni}{3}}$$

$$t^3 - 3(\lambda^2 - \sigma^2)e^{\frac{2\pi ni}{3}}t + 2(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) = 0$$

Это уравнение решается непосредственно с помощью формул Кардана:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[3]{-(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) + |\sigma(\lambda - \sigma)|\sqrt{(\sigma - \lambda)(3\lambda + 5\sigma)}} + \\ &+ \sqrt[3]{-(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) - |\sigma(\lambda - \sigma)|\sqrt{(\sigma - \lambda)(3\lambda + 5\sigma)}} \end{aligned}$$

Из этих формул имеем:

$$ab = \frac{1}{3} \left(t^2 - (\lambda^2 - \sigma^2) e^{-\frac{2\pi ni}{3}} \right)$$

Эти формулы показывают, что a, b являются корнями квадратного уравнения:

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

или

$$x^2 - tx + \frac{1}{3} \left(t^2 - (\lambda^2 - \sigma^2) e^{-\frac{2\pi ni}{3}} \right) \quad (25)$$

Решая уравнение (25), получим

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ t \pm \sqrt{\frac{4 \left((\lambda^2 - \sigma^2) e^{-\frac{2\pi ni}{3}} \right) - t^2}{3}} \right\}$$

где t определено выше.

В заключение отметим, что асимптотика собственных чисел и собственных функций первой граничной задачи для кубически анизотропных сред с позиций общей теории упругости рассмотрена впервые в данной статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейль Г. Избранные труды. Математика, теоретическая физика. М.: Наука, 1984.
2. Новацкий В. Теория упругости. Москва, "Мир" 1971 г.
3. Мартыненко И.М. Волновые движения в кубически анизотропных телах // Теоретическая и прикладная механика. Минск, "Технопринт" 2004 г. Вып
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики, Москва, "Наука". 1958 г, т.4.
5. Журавков М.А., Мартыненко М.Д. Сингулярные решения и интегральные уравнения в механике деформируемых сред. Минск.: БГУ, 1999.
6. Лопатинский Я.Б. Теория общих граничных задач. "Наукова думка" 1965.
7. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. Москва, "Наука", 1967г.
8. Драпкин А.Б. /Питання механіки і математики. Серія мех.-мат. Изд ЛГУ. Вып 8. Львов 1957. стр 134-147.

ФОРМИРОВАНИЕ СВЕТОЦВЕТОВОГО ИНФОРМАЦИОННОГО ОБРАЗА ПОЧВЫ В ТЕХНОЛОГИИ ТОЧНОГО ЗЕМЛЕДЕЛИЯ

Колешко В. М.*, Гулай А. В.*, Лученок С. А.**

Исследован метод формирования светоцветового информационного образа почвы на основе измерения конечного числа цветочных точек оптической характеристики почвенного горизонта. Изучено влияние основных физических параметров почвы на формирование контролируемых светоцветовых образов почвенных образцов. Проведен анализ изменения светоцветовых информационных образов почвы в зависимости от ее состава, структуры и влажности.

Реализация технологических процессов точного земледелия возможна на основе использования достоверной информации о плодородии почвы по всей обрабатываемой площади. Для получения данной информации разработан метод светоцветового контроля качества почвы, сущность которого заключается в формировании информационного образа в виде оптимального набора оптических параметров обрабатываемой почвы [1, 2]. Разработанный метод контроля реализуется путем внедрения электронно-оптического сенсорного блока в почву на определенную глубину и перемещения его в толще гумусово-аккумулятивного слоя с одновременным периодическим формированием светоцветовых информационных образов почвы.

Учитывая вышеизложенное представляет интерес исследование процесса формирования светоцветовых информационных образов на основе измерения конечного числа цветочных точек оптической характеристики почвы. Более того, поскольку при перемещении оптической сенсорной системы в процессе контроля происходят случайные изменения измеряемых оптических параметров, необходимо изучение вопроса оптимизации набора получаемых информационных точек светоцветового образа почвы. Кроме этого, представляется важным проведение исследований влияния основных физических характеристик почвы (состава, структуры, влажности) на формирование контролируемого светоцветового образа почвенного горизонта.

Концептуальные основы метода формирования светоцветового информационного образа почвы

При решении задачи оптимизации объема контролируемых параметров речь идет о количестве отдельных точек оптического спектра, необходимом для получения достаточной информации о светоцветовом образе контролируемой почвы, и о рациональном расположении измеряемых дискретных значений в определенном диапазоне длин волн оптического излучения. Здесь следует отметить, что чисто статистический подход к исследованию случайных спектров оптического излучения требует достаточно частого расположения измеряемых значений на спектральной оси и, следовательно, обработки значительных массивов экспериментальных данных. Такой подход неприемлем при организации оперативного контроля параметров почвы, когда требуется получение результатов диагностики ее свойств в режиме реального времени при относительно высокой скорости перемещения сенсорной системы.

В основу разработанного метода положен тот факт, что при измерении оптических параметров почвы имеется априорная информация о ее физико-химических свойствах, оказывающих существенное влияние на контролируемые характеристики. Эту информацию целесообразно использовать для того, чтобы сократить число измеряемых цветочных точек и, следовательно, уменьшить объем усилий на формирование светоцветового образа и статистическую обработку результатов контроля. В связи с вышеизложенным целесообразна разработка основных правил формирования информационных образов, претерпевающих случайные изменения во времени в соответствии с изменением цвета почвы в процессе контроля. При

этом возможно также определение некоторых общих принципов оптимизации для расположения контролируемых цветовых точек в выбранном оптическом диапазоне.

Рассмотрим цвето-временное скалярное поле, заданное в некоторой области A , которое для определенности можно считать полем показателя отражения $\rho(\lambda, t)$, где λ — длина волны оптического излучения; t — время. В области A выбираем n точек $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, измеряя в которых реализации поля $\rho(\lambda, t)$ и производя статистическую обработку результатов, находим оценки математических ожиданий и взаимных моментов $\langle \rho(\lambda_j, t) \rangle$, $\langle \rho(\lambda_j, t) \rho(\lambda_k, t') \rangle$, $\langle \rho(\lambda_j, t) \rho(\lambda_k, t') \dots \rho(\lambda_l, t'') \rangle$, ($j, k, l, \dots = 1, 2, \dots, n$); угловые скобки означают усреднение по множеству реализаций поля. Условие оптимизации состоит в том, чтобы указать число цветовых точек n и их расположение в области A , необходимые для оценки математического ожидания и взаимных моментов поля $\rho(\lambda, t)$ во всех точках $\lambda \in A$.

Задача описания поля параметров $\rho(\lambda, t)$ с помощью их конечного числа n в приближенной постановке может считаться вполне корректной. Для решения этой задачи используем разложение поля в ряд по некоторой системе детерминистических базисных функций $\varphi_\alpha(\lambda)$. Эту систему выберем таким образом, чтобы почти любая реализация поля $\rho(\lambda, t)$ могла быть аппроксимирована при помощи ряда

$$\rho(\lambda, t) = \sum_{\alpha} Q_{\alpha}(t) \varphi_{\alpha}(\lambda), \quad (1)$$

где $Q_{\alpha}(t)$ — случайные функции от времени. Если $\varphi_{\alpha}(\lambda)$ — базисные функции для разложения функции измеряемого спектрального показателя отражения поверхности, то $Q_{\alpha}(t)$ имеют смысл интегрального показателя отражения во всем исследуемом оптическом диапазоне. При этом для математического ожидания поля $\rho(\lambda, t)$ получаем выражение

$$\langle \rho(\lambda, t) \rangle = \sum_{\alpha} \langle Q_{\alpha}(t) \rangle \varphi_{\alpha}(\lambda). \quad (2)$$

Полагая в соотношении (2) $\lambda = \lambda_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) и учитывая n членов ряда, получим относительно математических ожиданий $\langle Q_{\alpha}(t) \rangle$ систему уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^n a_{j\alpha} \langle Q_{\alpha}(t) \rangle = \langle \rho(\lambda_j, t) \rangle, \quad (3)$$

($j = 1, 2, \dots, n$). Коэффициенты этой системы

$$a_{j\alpha} = \varphi_{\alpha}(\lambda_j) \quad (4)$$

образуют квадратную матрицу размерностью $n \times n$. Если определитель матрицы отличен от нуля, то из уравнения (3) можно найти математические ожидания интегрального показателя отражения. Подстановка найденных значений $\langle Q_{\alpha}(t) \rangle$ в формулу (2) позволяет вычислить математическое ожидание поля $\rho(\lambda, t)$ во всех точках $\lambda \in A$. Таким образом, число измеряемых цветовых точек информационного образа равно числу членов ряда (1), которое необходимо для удовлетворительной аппроксимации поля $\rho(\lambda, t)$.

Из общего правила следует, что чем больше масштаб неоднородности поля по оптическому диапазону, тем меньшее число цветоцветовых точек данного диапазона необходимо контролировать. Предположим, что контроль параметра отражения производится в оптическом диапазоне шириной $\Delta\lambda = \lambda_n - \lambda_0$, а функции $\varphi_{\alpha}(\lambda)$ ортогональны на отрезке $[\lambda_n, \lambda_0]$; λ_n , λ_0 — соответственно нижнее и верхнее значения длины волны контролируемого оптического диапазона. В этом случае наименьший масштаб неоднородности, который может быть учтен при помощи ряда, содержащего первые n функций, будет иметь порядок $\Delta\lambda/n$. Число цветоцветовых точек, в которых измеряется параметр отражения, должно удовлетворять неравенству:

$$n \geq c \Delta\lambda q, \quad (5)$$

где $c > 1$ — постоянная; q — масштаб неоднородности поля измеряемых параметров.

В процессе практической реализации светоцветового метода контроля при выборе количества информационных цветowych точек априорной информацией являются сведения об интенсивности отражения почвой оптического излучения видимого диапазона длин волн. Так, коэффициент отражения почвенного слоя, а также его зависимость от физических параметров почвы резко снижается с уменьшением длины волны в области фиолетового света. В области инфракрасного (ИК) излучения контролируемый диапазон ограничивается значениями нескольких микрометров, так как при больших длинах волн начинает сказываться влияние спектра колебаний молекул воды в почве, что вносит дополнительные погрешности в результаты диагностики почвенного горизонта. Эти обстоятельства определили ограничения диапазона длины волны, в котором выбираются светоцветовые точки контроля почвы.

Таким образом, контролируемый спектр отраженного излучения лежит в области от фиолетового света до ближнего инфракрасного диапазона, то есть в области длин волн от $\lambda_{\text{н}} = 400$ нм до $\lambda_{\text{к}} = 1\text{--}2$ мкм с шагом ~ 70 нм (фиолетовый–синий свет); ~ 50 нм (синий–зеленый свет); ~ 70 нм (зеленый–желтый свет); ~ 20 нм (желтый–оранжевый свет); ~ 20 нм (оранжевый–красный свет); > 20 нм (красный свет–ИК-излучение). Отсутствие больших неоднородностей в спектре оптических сигналов, отраженных от почвенного слоя, позволяет достаточно эффективно использовать данный вариант дискретизации контролируемого спектрального диапазона при реализации разработанного способа диагностики почвы.

Разработанный метод контроля почвы реализуется с использованием мобильной мультисенсорной системы, выполненной в виде навесного или прицепного агрегата для сельскохозяйственных машин и содержащего электронно-оптический блок, соединенный с устройством обработки информации (рис. 1) [3–6]. Сенсорные сигналы обрабатываются микропроцессорным устройством, формирующим информационные образы, которые характеризуют содержание в почве органических веществ и ее влажность. Продолжительность процедуры формирования светоцветового образа почвы составляет 120 мс (8 информационных импульсов длительностью по 10 мс с временными промежутками между импульсами по 5 мс). Периодичность формирования информационных образов равна 1 с, что при минимальной скорости транспортирующего средства ~ 2 км/час позволяет получить пространственное разрешение контроля почвы от 0,5 м.

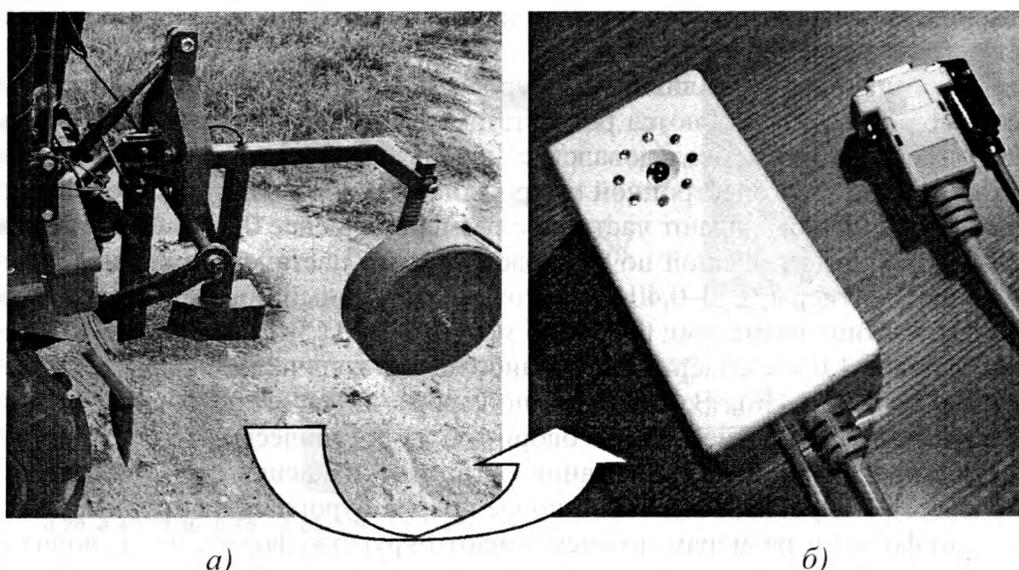


Рис. 1. Мультисенсорная система для светоцветового контроля почвы: а — в составе навесного устройства к мини-трактору; б — электронно-оптический блок мультисенсорной системы.

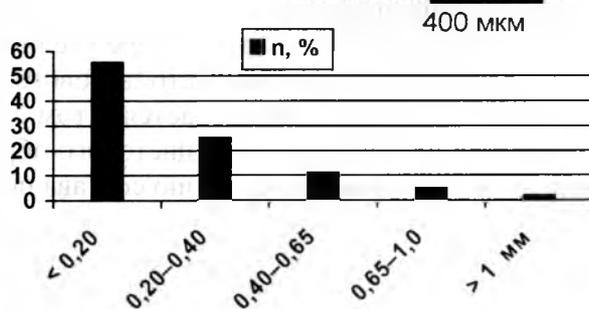
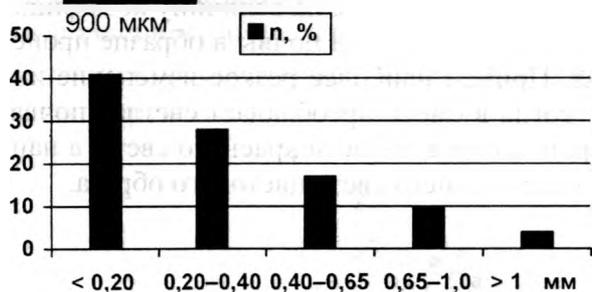
Физико-механические свойства почвы и ее цветоцветовые информационные образы

Цветоцветовые образы почв исследовались с использованием специально подобранных почвенных образцов, имеющих наиболее контрастные цветовые оттенки в соответствии с треугольником почвенных окрасок. Треугольник почвенных окрасок строится исходя из того, что гумус почвы окрашивает ее в серые и темно-серые тона, соединения железа — в бурые, красноватые и желтоватые тона, а многие компоненты почвы (двуокись кремния, кварц, карбонаты и сульфаты кальция) имеют белый цвет. Цветоцветовые образы получали в виде набора значений коэффициента яркости $R = I/I_0$, где I, I_0 — интенсивность света, отраженного соответственно от контролируемого почвенного образца и от эталонной белой поверхности. Проведенные исследования позволили для каждого изучаемого почвенного образца определить свой цветоцветовой образ в виде присущего только данному образцу набора значений показателя отражения оптического излучения (рис. 2).

Лабораторный анализ показал, что содержание органических веществ в отобранных образцах почвы лежит в диапазоне 1,2–12,4%. Влажность почвы не превышает 2,1% и не оказывает существенного влияния на точность измерений. Для почвы темно-серого и светло-серого оттенков, а также песчаной почвы бурого цвета характерно содержание органических веществ соответственно 12,4; 4,8; 1,2%, а значения коэффициента яркости для оптического излучения с разной длиной волны находятся в пределах: 0,154–0,306; 0,189–0,444; 0,172–0,427. Внутри приведенных диапазонов значения измеряемых показателей отражения имеют характерное распределение для каждого почвенного образца. Таким образом, для каждой точки контроля почвы в полевых условиях формируется свой, присущий только данной точке цветоцветовой образ, расшифровывая который судят о качестве почвы.

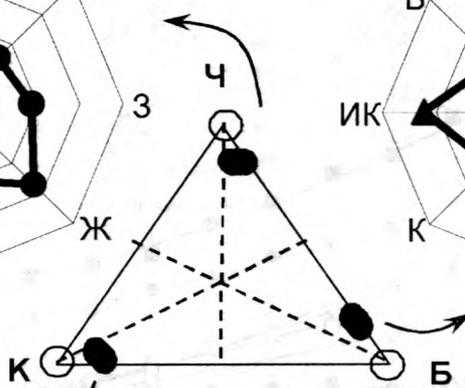
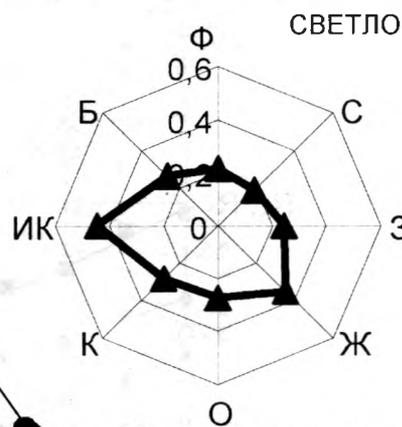
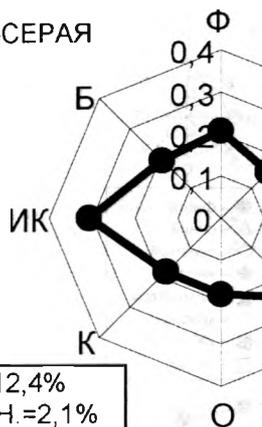
Наряду с содержанием в почве органических веществ, важным фактором, влияющим на отражение оптического излучения от почвенного образца, является структура почвы. Под структурой почвы понимается, как правило, распределение частиц минерального вещества, размеры которых меньше 2 мм. Предполагается, что отражение оптического излучения слоем частиц обусловлено только рассеянием света. Размеры частиц влияют на величину показателя рассеяния s , которая прямо пропорциональна общей площади Q_1 поперечного сечения частиц в единице объема. Представляя частицы почвы в виде сфер диаметром d , получим $Q_1 = (\pi d^2/4)Z_1$, где Z_1 — число частиц в единице объема. При плотной упаковке частиц Z_1 обратно пропорционально объему частицы V : $Z_1 \sim 1/V = 6/(\pi d^3)$, откуда $s \sim Q_1 \sim c/d$, где c — коэффициент. Следовательно, чем больше мелких частиц, тем больше s и тем выше коэффициент отражения. В частности, отражение увеличивается экспоненциально с уменьшением размера частиц от 2,5 мм до 25 мкм.

Учитывая значительное влияние размеров частиц почвы на ее отражательные свойства, цветоцветовые образы дополняются результатами исследования структуры почвы. Гранулометрический состав почвы исследовался с использованием метода сухого просеивания, а также методом растровой электронной микроскопии. В образцах темно-серой, светло-желтой и светло-серой почв преобладают частицы с размерами менее 0,20 мм (соответственно: 41,0; 51,0; 55,5%). В образце песчаной почвы красно-бурого цвета максимальное количество частиц (37%) имеет размеры 0,20–0,40 мм. Этот же почвенный образец содержит больше, чем другие почвы, частицы размерами 0,40–0,65 мм (28%) и 0,65–1,0 мм (14%). Крупные частицы с размерами более 1,0 мм содержатся в наибольшем количестве в образцах темно-серой и красно-бурой почв (по 4%). В почве темно-серого цвета наблюдаются крупные частицы сложной формы, что, вероятнее всего, говорит об их органическом происхождении. Это подтверждается тем фактом, что содержание органических веществ в этой почве составляет 12,4% (по массе). Напротив, в песчаной почве красно-бурого цвета крупные частицы близки друг другу по форме и размерам, причем имеют округлую форму, что говорит об их минеральном происхождении. Подтверждением этому служит тот факт, что данные образцы почвы содержат наименьшее количество органических веществ — 1,2% (по массе).



ТЕМНО-СЕРАЯ ПОЧВА

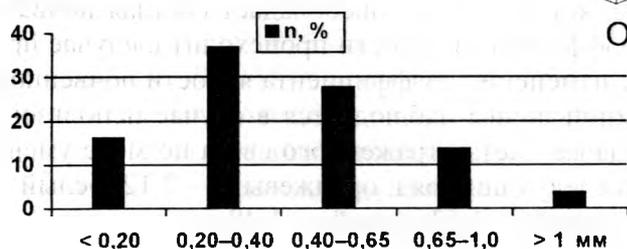
СВЕТЛО-СЕРАЯ ПОЧВА



COB=12,4%
ВЛАЖН.=2,1%

COB=4,8%
ВЛАЖН.=1,1%

КРАСНО-БУРАЯ ПОЧВА



400 МКМ

COB=1,2%
ВЛАЖН.=0,3%

Рис. 2. Информационные образы контролируемой почвы: COB — содержание органических веществ; (цвет почвы на треугольнике почвенных окрасок: Ч — черный, Б — белый, К — красный; отраженный свет: Ф — фиолетовый, С — синий, З — зеленый, Ж — желтый, О — оранжевый, К — красный, Б — белый, ИК — инфракрасное излучение).

Зависимость светоцветового информационного образа почвы от ее состава

Целью разработки светоцветового метода контроля почвы является определение содержания в ней органических веществ, влияющих на цветовые оттенки почвы, на основе анализа ее информационного образа. В связи с этим проведены исследования изменения светоцветового образа почвы в зависимости от состава почвенных образцов (рис. 3). При этом почвенные образцы формировались из темно-серой и светло-желтой почв (точками показаны на треугольнике почвенных окрасок). Анализ влияния состава почвы на величину коэффициента яркости показывает, что по мере увеличения количества темной почвы в образце происходит постепенное сужение светоцветового образа. Причем наиболее резкое изменение информационного образа наблюдается в том случае, когда в смеси преобладает светлая почва. Наибольшая деформация светоцветового образа происходит в области красного света, а наименее чувствительна к изменению состава почвы область синего света цветового образа.

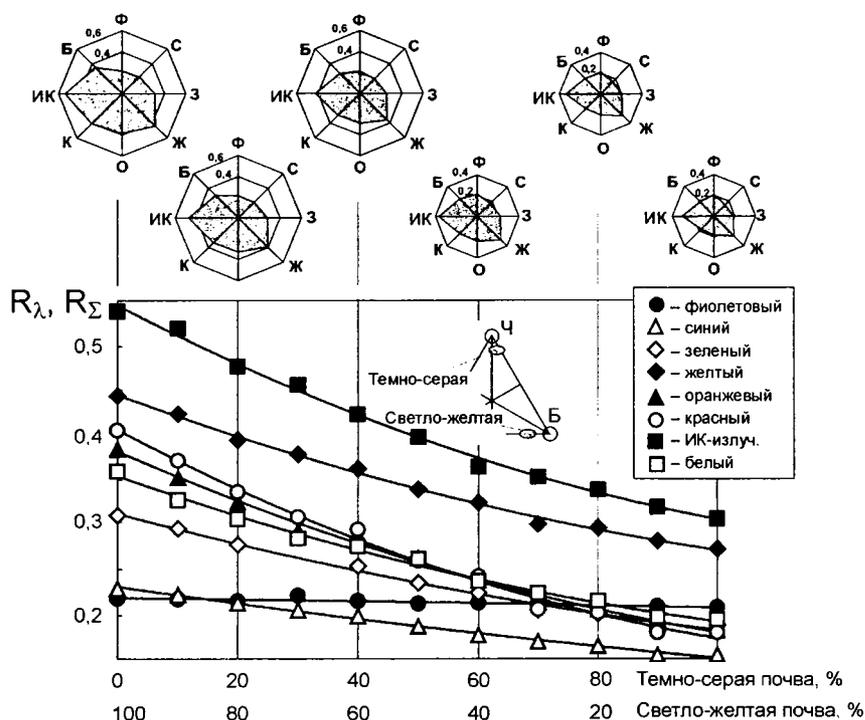


Рис. 3. Взаимосвязь между светоцветовым информационным образом почвы и ее составом.

Диапазон изменения коэффициента яркости, значения которого формируют светоцветовой информационный образ, составляет от 0,154 (почва темной окраски; синий свет) до 0,538 (светлый оттенок почвы; ИК-излучение). По мере увеличения количества темной почвы в образце коэффициент яркости плавно снижается, причем более резкое уменьшение данного коэффициента наблюдается в том случае, когда в смеси преобладает светлая почва и, соответственно, более плавное уменьшение коэффициента яркости происходит в случае преобладания темной почвы в смеси. Наибольшее изменение коэффициента яркости почвенного образца светлого оттенка при добавлении темной почвы наблюдается в случае использования для контроля красного света — 2,26 раз. Далее цвета отраженного света по мере уменьшения коэффициента яркости располагаются в следующий ряд: оранжевый — 2,12; белый — 1,86; ИК-излучение — 1,76; зеленый — 1,65; желтый — 1,63; синий — 1,48 раз.

Изменение цветоцветовых информационных образов почвы в зависимости от ее влажности

Влажность почвы оказывает значительное влияние на ее цветовые характеристики и, следовательно, на точность контроля отражательных свойств, цветоцветовых образов и итоговые показатели качества. С учетом этого исследовали изменение цветоцветовых информационных образов при различной влажности почвенных образцов (рис. 4). Содержание воды выбирали в диапазоне 0–50% (по массе) и измеряли коэффициент яркости почвенного образца при различных цветовых параметрах отраженного оптического излучения. Исследования проводили с использованием почвенных образцов, имеющих светло-серую окраску.

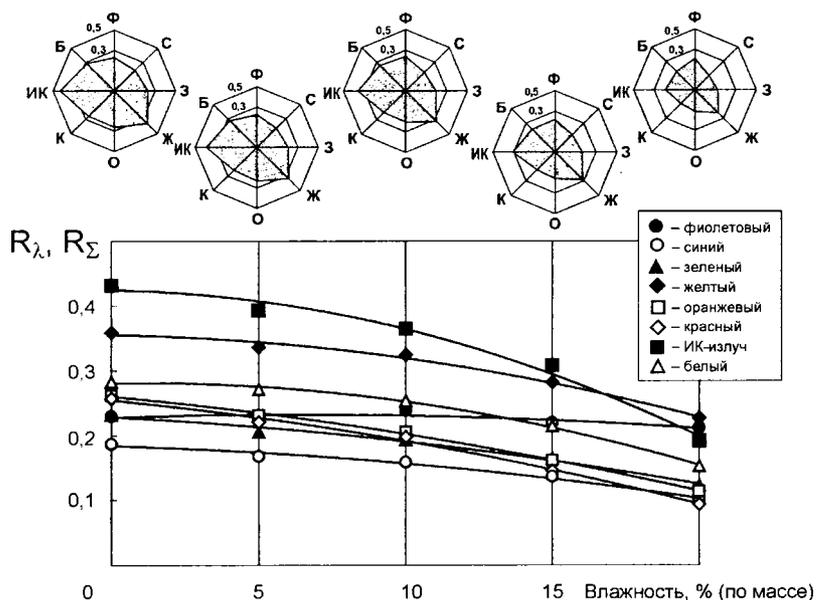


Рис. 4. Зависимость цветоцветового информационного образа почвы от ее влажности.

С увеличением содержания воды коэффициент яркости плавно снижается. Наибольший перепад значений данного коэффициента наблюдается для красного света (63%). Далее цвета отраженного света по мере уменьшения относительного значения изменения коэффициента яркости располагаются в следующий ряд: оранжевый свет (57%), ИК-излучение (56%), зеленый (47%), белый и синий (по 46%), желтый (37%), фиолетовый (8%). Полученная зависимость объясняется тем, что с увеличением влажности почва приобретает более темную окраску.

Увеличение содержания воды с 20 до 35–40% (по массе) приводит к росту коэффициента яркости почвенных образцов, а дальнейшее повышение влажности до 50% (по массе) слабо влияет на все спектральные коэффициенты яркости, кроме случая использования ИК-излучения. В диапазоне влажности 35–50% (по массе) коэффициент яркости для ИК-излучения резко снижается. Указанные зависимости показателя отражения обусловлены тем, что основной отражающей компонентой смеси почва–вода при содержании воды 0–20% (по массе) является увлажненная почва, а при содержании 20–50% (по массе) основная отражающая компонента — вода, скрывающая частицы почвы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колешко В. М., Гулай А. В., Лученок С. А. Светоцветовой метод эволюционной диагностики почв для технологии точного земледелия // Межведомственный сборник научно-методических статей «Теоретическая и прикладная механика» — Вып. 20, 2006 г. — с. 198–208.
2. Колешко В. М., Гулай А. В., Лученок С. А. Сенсорная система для экспресс-диагностики почвы в технологии точного земледелия // Международная научно-техническая конференция «Сенсорная электроника и микросистемные технологии», Одесса, 26–30 июня 2006 г. / Тезисы докладов — с. 246.
3. Колешко В. М., Лученок С. А. Интеллектуальные системы контроля и управления технологией точного земледелия и переработки сельхозпродукции // Торговые и деловые известия белорусских предпринимателей. Приверженность разуму. — 2004, № 13–14. — с. 23.
4. Колешко В. М., Гулай А. В., Лученок С. А. Нейросетевые технологии — базис создания интеллектуальных систем точного земледелия // Материалы Второго Белорусского Космического Конгресса, 25–27 октября 2005 г., Минск — с. 376–380.
5. Колешко В. М., Гулай А. В., Лученок С. А. Интеллектуальные сенсорные системы для технологии точного земледелия // Международная научно-практическая конференция «Научно-инновационная деятельность и предпринимательство в АПК: проблемы эффективности и управления», 16–18 февраля 2006 г., Минск / Сборник статей. — с. 115–118.
6. Колешко В. М., Гулай А. В., Лученок С. А. Интеллектуальные мехатронные системы в машиностроении для точного земледелия / Сб. «Машиностроение», Минск. — 2006 г. — Вып. 22. — с. 105–109.

ПОЛУЧЕНИЕ ТУННЕЛЬНЫХ СЕНСОРНЫХ МДМ-НАНОСТРУКТУР НА ОСНОВЕ ОКСИДОВ РЗЭ

Колешко В. М., Гулай А. В., Гулай В. А.

The vacuum deposition process and electrophysical parameters of super-thin films of rare earth elements (REE) oxides at reactive magnetron dispersion of metallic targets in the mixture of argon and oxygen were investigated. It is established that in the optimum technological regime (voltage discharge 400–440 V, underlayer temperature 573–598 K) the oxides of yttrium and holmium film's growth rate is correspondingly 3,5 and 2,8 nm/min, their specific resistance is more than 10^{13} Ohm/cm, the significance of insulator permeability is within 10,4–16,8 limits. The test module topology and metal–insulator–metal (MIM) contacts of $(0,2–10) \cdot 10^{-3}$ mm² square formation process were worked out to investigate the electric characteristic of tunneling MIM nanostructures on the REE oxides. The worked out test module resulted in obtaining of MIM nanostructure of Al–(REE)₂O₃–Al type for sensor Microsystem on the basis of super-thin films of yttrium and holmium oxides. Non-linear character of the MIM nanostructures' dependences from the quantity of the voltage applied, stipulated by the tunneling mechanism of the insulator layers' conductivity, was investigated. It is established that at the yttrium oxide's film's thickness 5; 16 nm and MIM-contact's square $(1; 2) \cdot 10^{-3}$ mm² voltage raise in the limits from 0,04 to 1,2–1,5 V results in the raise of a volt-ampere characteristic's slope from $(1,5–2,5) \cdot 10^{-8}$ to $(19–22) \cdot 10^{-8}$ A/V. At the increase of electric voltage, resistance of the MIM nanostructures formed decreases in 1,9–4,0 times after some increasing.

Одним из перспективных направлений развития технологии сенсорных микросистем является использование туннельного эффекта в многослойных наноструктурах типа металл-диэлектрик-металл (МДМ) как основного механизма функционирования наносенсоров. В связи с этим актуальны разработка и исследование процессов получения туннельнотонких диэлектрических пленок, а также изучение электрофизических свойств формируемых на их основе наноструктур. Выбор оксидов редкоземельных элементов (РЗЭ) в качестве диэлектрических слоев туннельных МДМ-наноструктур обусловлен их впечатляющими достоинствами, которые позволяют поставить данные тонкие пленки в ряд перспективных материалов для создания сенсорных микросистем. Тонкие пленки оксидов РЗЭ обладают относительно большой удельной емкостью, незначительным температурным коэффициентом емкости, низкими диэлектрическими потерями, высокой термической и химической стойкостью [1]. В частности, диэлектрическая проницаемость тонкопленочных оксидов РЗЭ лежит в диапазоне от 7–12 (Er₂O₃), 8–12 (Gd₂O₃) до 15–17 (Eu₂O₃), 17–20 (Ce₂O₃). Тангенс угла диэлектрических потерь этих материалов находится в пределах 0,7 (Y₂O₃)–2,0 (Eu₂O₃, Yb₂O₃), а напряженность электрического поля пробоя достигает значения $3 \cdot 10^6$ В/см (Y₂O₃, Nd₂O₃, Eu₂O₃, Dy₂O₃).

Следует отметить также существенную особенность редкоземельных элементов, обуславливающую особые свойства тонких пленок оксидов РЗЭ. Атомы редкоземельных элементов имеют сечения поглощения, сечения когерентного рассеяния и сечения рассеяния нейтронов на связанных атомах значительно большие, чем элементы, входящие в состав традиционно используемых в сенсорной технике тонкопленочных материалов [2]. Например, сечения поглощения атомов РЗЭ равны: 1100 барн — для Dy, 4600 барн — для Eu, 5500 барн — для Sm. Наибольшее сечение поглощения имеют атомы гадолиния — 46000 барн, что превышает значение данного параметра для атомов кремния в $3,5 \cdot 10^5$ раз, алюминия — в $2,0 \cdot 10^5$ раз, германия — в $2,0 \cdot 10^4$ раз, бора — в 59,8 раз, фосфора — в $2,4 \cdot 10^5$ раз, азота — в $2,4 \cdot 10^4$ раз. Вышеуказанные свойства редкоземельных элементов и оксидов РЗЭ делают особо привлекательным применение тонкопленочных материалов на их основе в технологии сенсорных МДМ-наноструктур для контроля различных физических параметров.

Реактивное магнетронное распыление мишеней РЗЭ для получения тонких диэлектрических пленок

Для получения сверхтонких пленок оксидов РЗЭ разработан метод реактивного магнетронного распыления металлических мишеней на постоянном токе в среде аргона и кислорода [3]. Мишени из иттрия и гольмия диаметром 95 и толщиной 10 мм получали из слитков металлов марки ИтМ-1 и ГоМ-1. В качестве подложек тестовых структур использовали кремниевые пластины *n*-типа проводимости с удельным сопротивлением 4,5 Ом · см, ориентированные по плоскости (100). Для определения оптимального режима получения туннельнотонких пленок оксидов РЗЭ изучались вольт-амперные характеристики магнетронного разряда в процессе распыления мишеней (рис. 1). При подаче в реакционную камеру только активного газа — кислорода процесс нестабилен и сопровождается возникновением электрических дуговых разрядов на мишени, что приводит к формированию на ее поверхности слоя окисла; скорость осаждения пленок в данном случае составляет порядка 1 нм/мин. При подаче в реакционную камеру только инертного газа (аргона), разряд горит стабильно, ток разряда плавно возрастает с увеличением напряжения. Добавление к аргону кислорода существенно изменяет вид вольт-амперной характеристики: в области низких напряжений имеется участок характеристики с отрицательным динамическим сопротивлением.

В случае низких напряжений ($U = 360\text{--}460$ В) ток разряда в чистом аргоне ниже, чем при добавлении кислорода, а с увеличением $U > 460$ В ток разряда в аргоне становится больше, чем в смеси газов. Это можно объяснить тем, что при низких напряжениях ($U \sim 360$ В) разряд горит в условиях, когда мишень покрыта пленкой диэлектрика. Так как коэффициент вторичной электронной эмиссии из диэлектрика выше, чем из чистой металлической мишени, то ток разряда при использовании смеси газов выше, чем при горении разряда в аргоне. При увеличении напряжения ($U > 360$ В) происходит постепенная очистка поверхности мишени от пленки оксида РЗЭ, что приводит к снижению тока вторичных электронов и общего тока разряда. При $U > 460$ В (давление кислорода $1,3 \cdot 10^{-2}$ Па), когда мишень практически свободна от пленки окисла, ток разряда с увеличением напряжения сначала уменьшается, достигая минимальной величины, а затем начинает возрастать.

При $U \sim 360$ В скорость роста пленки имеет относительно невысокое значение из-за низкого коэффициента распыления оксида РЗЭ с мишени. При высоких напряжениях ($U > 460$ В), когда поверхность мишени, в основном, свободна от оксида, скорость распыления достаточно велика, но в этом случае мало парциальное давление кислорода в реакционной камере, и структура пленок не соответствует стехиометрии оксида РЗЭ. Поэтому для получения пленок оксидов РЗЭ выбирался участок вольт-амперной характеристики $400 \text{ В} < U < 440 \text{ В}$, то есть устанавливались напряжения, при которых мишень только частично покрыта оксидом, а давление кислорода достаточно для получения стехиометрического состава тонких пленок. Из семейства данных характеристик реактивного магнетронного разряда для практического использования наиболее удобна кривая с почти горизонтальным участком в указанной области напряжений. На основании анализа вольт-амперных характеристик были выбраны следующие давления рабочих газов: аргона — $12,5 \cdot 10^{-1}$ Па, кислорода — $8 \cdot 10^{-3}$ Па.

Следует отметить, что по мере распыления материала происходит изменение вольт-амперных характеристик магнетронного разряда, то есть они зависят не только от материала мишени, но и от ее формы. Причем увеличение глубины зоны эрозии в плоской мишени в процессе ее распыления приводит к сдвигу вольт-амперных характеристик в область меньших рабочих напряжений, по-видимому, вследствие улучшения условий локализации плазмы магнетронного разряда. В этом случае определяющим является не только

геометрический фактор, но и смещение зоны разряда в область более сильного поля по мере уменьшения толщины мишени в зоне эрозии.

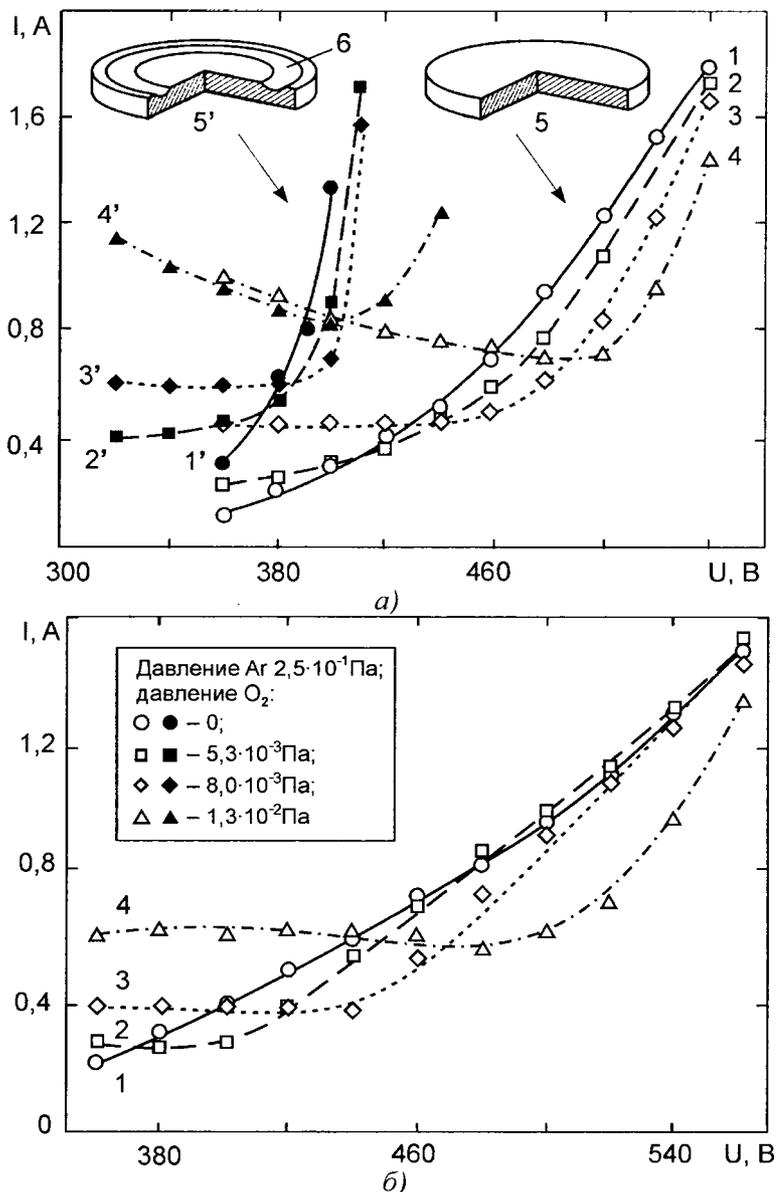


Рис. 1. Зависимость тока I магнетронного разряда от напряжения U : а — мишень иттрия; б — мишень гольмия; 1-4 — до распыления мишени; 1'-4' — после распыления; 1, 1' — чистый аргон; 2, 2' — давление кислорода $5,3 \cdot 10^{-3}$ Па; 3, 3' — $8,0 \cdot 10^{-3}$ Па; 4, 4' — $1,3 \cdot 10^{-2}$ Па; 5, 5' — мишень до и после распыления; 6 — зона эрозии.

Электрофизические свойства тонких пленок оксидов РЗЭ для туннельных МДМ-наноструктур

Важными факторами, определяющими электрофизические свойства получаемых тонких пленок оксидов РЗЭ, являются напряжение разряда и температура подложки. В связи с этим исследовали скорость осаждения пленок, их удельное сопротивление и показатель преломления в зависимости от данных технологических параметров (рис. 2) [3]. Толщина и коэффициент преломления пленок измерялись методом лазерной эллипсометрии с точностью соответственно $\pm 0,5$ нм и $\pm 0,005$; удельное сопротивление пленок контролировалось с помощью тераомметра.

Увеличение температуры подложки от 323 до 673 К способствует получению пленок с более высоким удельным сопротивлением, что объясняется повышением эффективности доокисления осаждаемого слоя. Кроме того, увеличение удельного сопротивления в данном случае является результатом снижения числа электронов в объеме диэлектрика в процессе заполнения кислородом свободных вакансий. Максимальная величина удельного сопротивления достигается при температурах 573–598 К как для иттрия, так и для гольмия. Некоторое уменьшение скорости осаждения при увеличении температуры подложки можно объяснить увеличением плотности пленок за счет повышения подвижности поступающих из области разряда продуктов распыления, а также доокислением образующейся оксидной пленки.

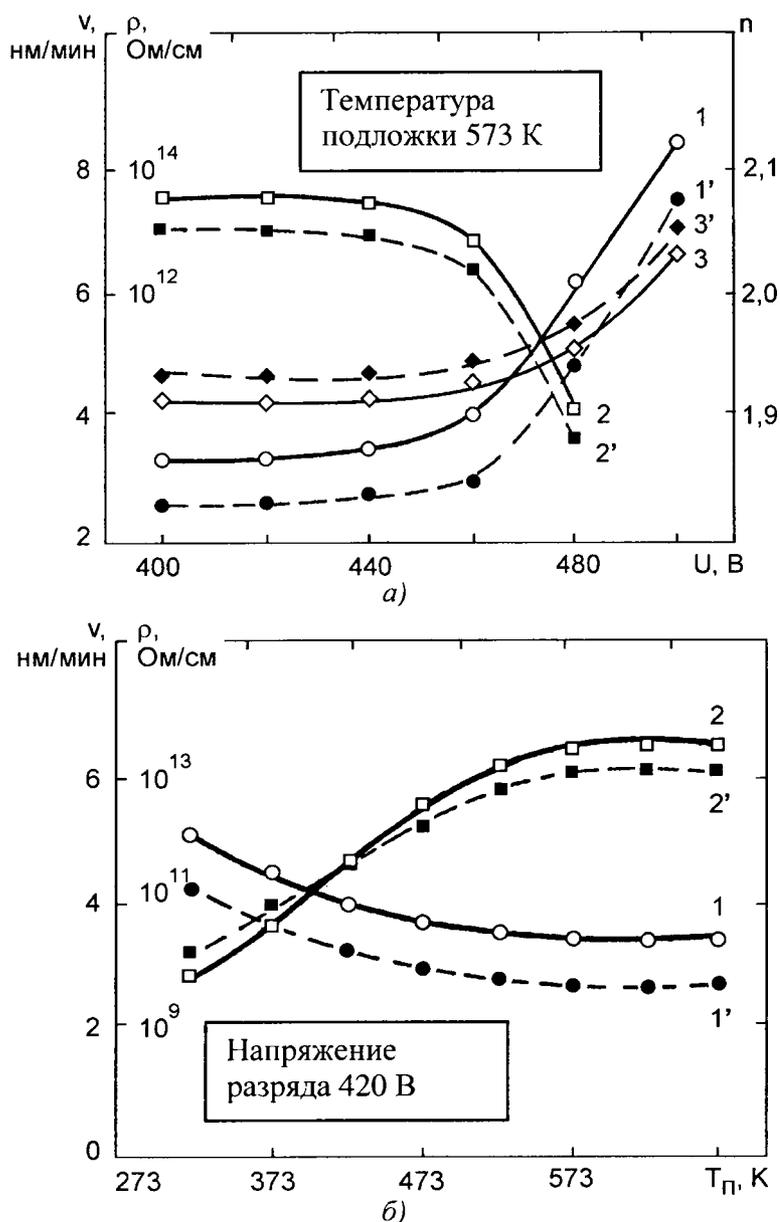


Рис. 2. Зависимость скорости осаждения v , удельного сопротивления ρ и показателя преломления n пленок оксидов РЗЭ от температуры подложки T_n (а) и напряжения разряда U (б): 1, 1' — v ; 2, 2' — ρ ; 3, 3' — n ; 1–3 — оксид иттрия; 1'–3' — оксид гольмия.

Исследования показали, что при использовании горизонтального участка вольт-амперной характеристики разряда ($U = 400\text{--}440$ В) образуются пленки с максимальной

величиной удельного сопротивления большей 10^{13} Ом·см и значениями показателя преломления 1,92 для оксида иттрия и 1,94 для оксида гольмия, характерными для стехиометрических составов. При $U > 440$ В существенно увеличивается скорость осаждения, и пленки, полученные в этих условиях, характеризуются значительно более низким удельным сопротивлением и более высоким показателем преломления, что указывает на избыток атомов РЗЭ в растущей пленке. По данным электронографических исследований пленки оксидов иттрия и гольмия, полученные в оптимальных условиях, являются аморфными.

Результаты исследований параметров тонких пленок на подложках из кремния показали также, что при температуре отжига 293 К и толщине пленок оксида иттрия 54; 79; 140 нм значение их диэлектрической проницаемости равно соответственно 10,6; 13,2; 16,0. Для оксида гольмия при той же температуре отжига характерны следующие значения данного параметра: при толщине 41; 81; 124 нм величина диэлектрической проницаемости составляет 10,4; 14,6; 16,8. Указанные значения существенно выше, чем диэлектрическая проницаемость сверхтонких пленок традиционных диэлектриков, используемых в технологии получения многослойных микроструктур.

Формирование туннельных сенсорных МДМ-наноструктур на основе оксидов РЗЭ

С целью изучения электрофизических параметров МДМ-наноструктур на основе оксидов РЗЭ разработана топология тестового модуля и комплект фотошаблонов для получения МДМ-контактов разной площади (рис. 3). Металлические проводники МДМ-наноструктур в составе модуля имеют различную ширину: нижние — 10; 100 мкм, верхние — 20; 40; 60; 80; 100 мкм. При таком выборе значений ширины металлических полосок в области их пересечения образуются МДМ-контакты, отношение площадей которых имеет величину S_0 : 2:3:4:5:10:20:30:40:50, где $S_0 = 0,2 \cdot 10^{-3}$ мм².

Получение тестовых МДМ-наноструктур выполнялось с использованием разработанного технологического процесса, содержащего следующую совокупность операций. Кремниевые подложки подвергались кипячению в перекисно-аммиачном растворе (7–10 мин), промывались в деионизованной воде, а затем проводилось термическое окисление их в парах воды при температуре 1427 К (толщина слоя оксида 0,5–0,6 мкм). Проводился отжиг полученных окисных пленок в среде кислорода при температуре 1427 К и химическая обработка путем кипячения образцов в изопропиловом спирте в течение 7–10 мин. Electroды МДМ-наноструктуры получались термическим напылением тонких пленок алюминия при температуре подложек 423 К (нижние электроды — толщиной 0,8–1,0 мкм при длительности процесса 60–70 сек, верхние — 0,5 мкм при 30–40 сек).

Травление пленки алюминия после нанесения, экспонирования, задубливания и снятия фоторезиста осуществлялось в смеси CrO_3 : H_2O : NH_4F (40 г : 0,5 л : 3 г) в течение 3 мин. Обработка структур после фотолитографии проводилась в изопропиловом спирте в течение 10 мин. Для травления диэлектрика использовался травитель H_3PO_4 : H_2O (1 : 1), длительность процесса составляла 1 мин. Верхний электрод из алюминия формировался с использованием метода взрывной фотолитографии, снятие фоторезиста проводилось в диметилформамиде. Визуальный контроль качества полученных тестовых модулей МДМ-наноструктур осуществлялся с использованием растровой электронной микроскопии. Толщина пленок оксидов РЗЭ выбиралась в пределах 2–20 нм. При толщинах менее 2 нм диэлектрические пленки имеют островковый характер, что приводит к закорачиванию нижнего и верхнего металлических электродов МДМ-наноструктуры. При увеличении толщины окисных пленок выше 20 нм вклад эффекта туннелирования электронов в проводимость МДМ-наноструктур незначителен.

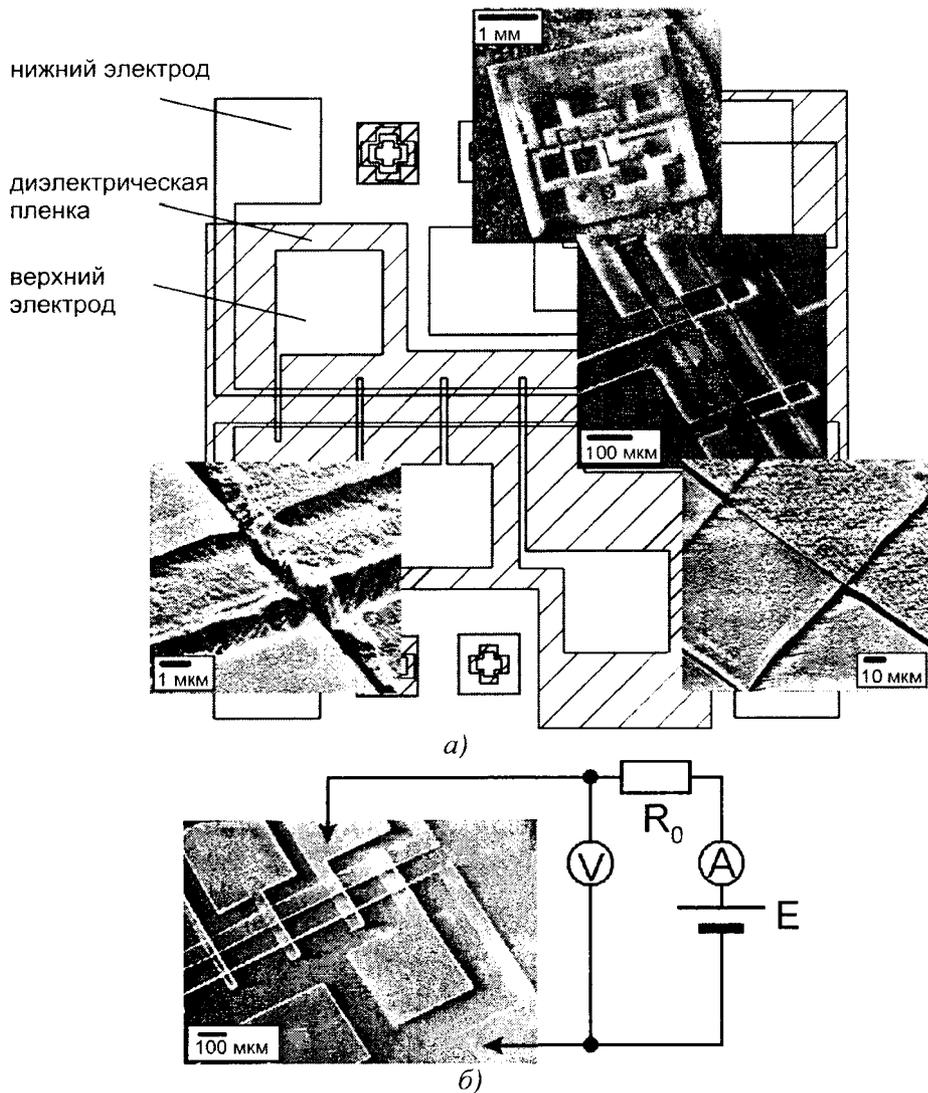


Рис. 3. Топология тестового модуля (а) и схема измерения вольт-амперных характеристик (б) туннельных сенсорных МДМ-наноструктур: E — источник питания; A — амперметр; V — вольтметр; R_0 — измерительное сопротивление; $R_0 \gg R_{МДМ}$; $R_{МДМ}$ — сопротивление МДМ-наноструктуры.

Анализ и моделирование вольт-амперных характеристик туннельных сенсорных МДМ-наноструктур

Измерение вольт-амперных характеристик проводилось при увеличении напряжения на электродах МДМ-наноструктуры от нуля до напряжения пробоя диэлектрической пленки (рис. 4) [4]. При толщине слоя оксида иттрия 5; 16 нм и площади МДМ-контакта $(1; 2) \cdot 10^{-5} \text{ см}^2$ напряженность поля пробоя наноструктур составляет $(1-3) \cdot 10^6 \text{ В/см}$. Рассчитывалась крутизна вольт-амперной характеристики $\Delta I / \Delta U$, где $\Delta U = U_n - U_{n-1}$; $\Delta I = I_n - I_{n-1}$; U_{n-1} , U_n — соответственно напряжение каждой предыдущей и последующей точки измерения; I_{n-1} , I_n — значения тока при напряжениях U_{n-1} , U_n соответственно. Крутизна вольт-амперной характеристики при толщине слоя оксида иттрия 5 нм в пределах 0–0,2 В постоянна, что подтверждает предположение о линейной зависимости между напряжением и током при малых значениях напряжения, характерном для туннельных МДМ-наноструктур. При толщине диэлектрика 16 нм участок с постоянной крутизной на вольт-амперной характеристике не наблюдается. Повышение напряжения до 1,2–1,5 В приводит к росту крутизны вольт-амперной характеристики с $(1,5-2,5) \cdot 10^{-8}$ до $(19-22) \cdot 10^{-8} \text{ А/В}$.

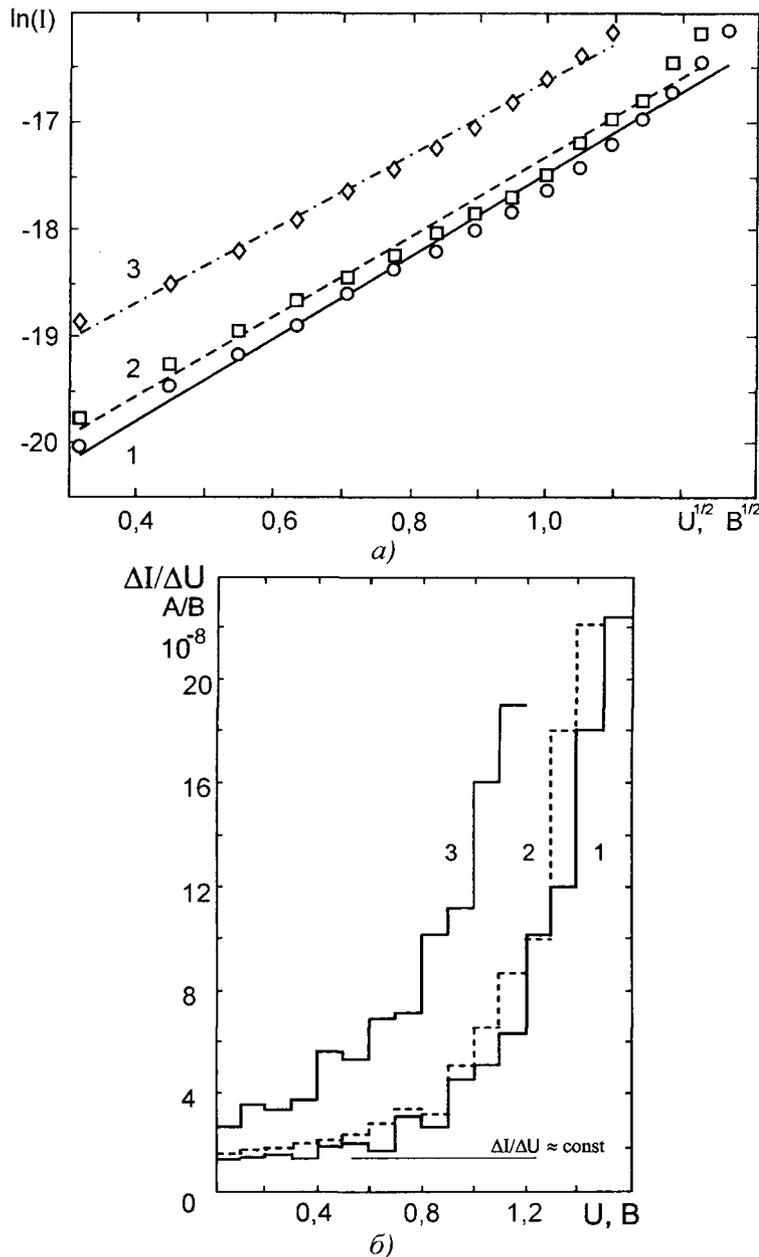


Рис. 4. Вольт-амперные характеристики (а) и крутизна данных характеристик (б) туннельных МДМ-наноструктур при разных топологических параметрах (значения I параметра $\ln(I)$ принимались в амперах): 1 — $d = 5$ нм, $S = 10^{-5}$ см²; 2 — $d = 16$ нм, $S = 10^{-5}$ см²; 3 — $d = 16$ нм, $S = 2 \cdot 10^{-5}$ см².

Считаем, что ток в МДМ-наноструктурах осуществляется переносом электронов и дырок, при этом проводимость диэлектрика определяется одним из механизмов с термической активацией, дающих вольт-амперные характеристики вида:

$$\ln(I) \sim U^{1/2}. \quad (1)$$

Один из распространенных эффектов в рассматриваемых многослойных структурах — эмиссия Шоттки, или облегченная электрическим полем эмиссия электронов над барьером на границе раздела металл-диэлектрик. Данный эффект связан с термической активацией и приводит к выражению для тока в виде:

$$I = AT^2 \exp\{-(\Delta_\delta/kT) - \alpha(E^{1/2}/kT)\}, \quad (2)$$

где A — эффективная постоянная Ричардсона; Δ_δ — высота барьера; E — напряженность приложенного электрического поля [5].

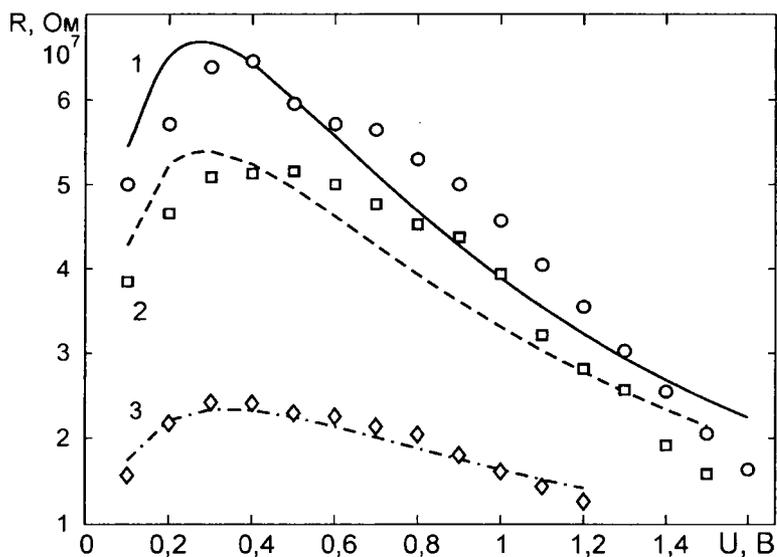
Полученные при измерении вольт-амперных характеристик экспериментальные значения тока, исходя из выражения (2), можно представить следующим образом:

$$\ln(I) = C + BU^{1/2}, \quad (3)$$

где B , C – коэффициенты. Используя линейную аппроксимацию экспериментальной зависимости между $\ln(I)$ и $U^{1/2}$ методом наименьших квадратов, получаем значения данных коэффициентов: при толщине диэлектрика $d = 5$ нм и площади контакта $S = 10^{-5}$ см² — $B = 3,8584102$, $C = -21,334874$; при $d = 16$ нм и $S = 10^{-5}$ см² — $B = 3,7399812$, $C = -21,055727$; при $d = 16$ нм и $S = 2 \cdot 10^{-5}$ см² — $B = 3,4588153$, $C = -20,066326$. Отклонения экспериментальных значений параметров МДМ-наноструктур от аппроксимирующей прямой в области напряжений $U > 1$ В можно объяснить подключением механизмов проводимости диэлектрика, связанных не только с переносом электронов, но и обусловленных, например, ионной проводимостью в предпробойной области диэлектрической пленки.

Зависимость сопротивления туннельных сенсорных МДМ-наноструктур от приложенного напряжения

Важной характеристикой МДМ-наноструктуры является ее электрическое сопротивление, величина которого определяется проводимостью туннельнотонкого диэлектрического слоя (рис. 5) [4]. Изменение проводимости туннельных МДМ-наноструктур при внешнем воздействии используется при создании сенсорных микросистем контроля различных физических параметров. Основными физическими эффектами, приводящими к изменению сопротивления МДМ-наносенсоров в процессе контроля, являются ионизация и образование многокомпонентной плазмы в диэлектрике. В свою очередь, за счет регулирования параметров электрического поля МДМ-наноструктуры производится управление эффектами ионизации и плазмообразования в туннельнотонкой диэлектрической пленке.



a)

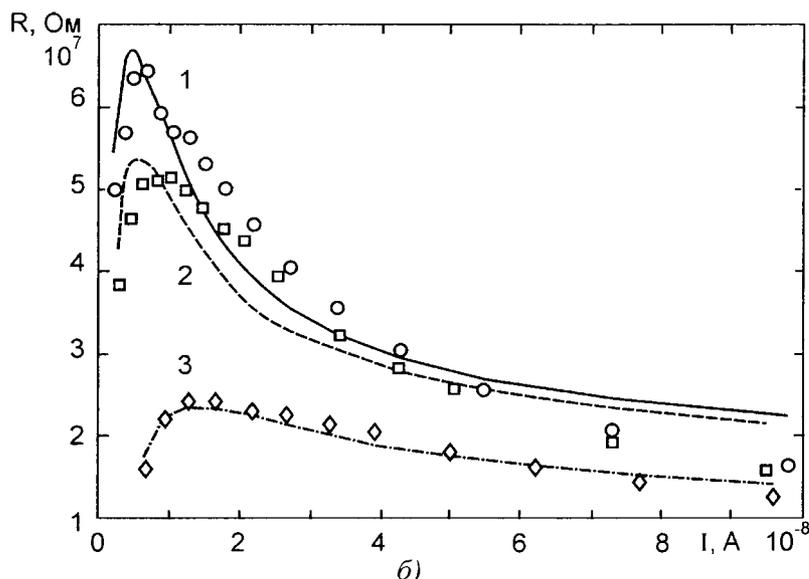


Рис. 5. Зависимость сопротивления туннельных МДМ-наноструктур от приложенного напряжения (а) и взаимосвязь сопротивления с пропускаемым через МДМ-наноструктуру током (б): 1 — $d = 5$ нм, $S = 10^{-5}$ см²; 2 — $d = 16$ нм, $S = 10^{-5}$ см²; 3 — $d = 16$ нм, $S = 2 \cdot 10^{-5}$ см².

Моделирование зависимости сопротивления от величины приложенного напряжения, а также взаимосвязи сопротивления с пропускаемым через МДМ-наноструктуру током проводилось с использованием следующих выражений, полученных из уравнения (3):

$$R = U / \exp(C + BU^{1/2}), \quad (4)$$

$$R = [\ln(I) - C]^2 / B^2 I, \quad (5)$$

где коэффициенты B , C также взяты из условия линейной аппроксимации зависимости $\ln(I)$ от $U^{1/2}$. Экспериментальные значения сопротивления с увеличением напряжения (тока) несколько возрастают: при $d = 5$ нм, $S = 10^{-5}$ см² — с $5,0 \cdot 10^7$ до $6,5 \cdot 10^7$ Ом; при $d = 16$ нм, $S = 10^{-5}$ см² — с $3,8 \cdot 10^7$ до $5,2 \cdot 10^7$ Ом; при $d = 16$ нм, $S = 2 \cdot 10^{-5}$ см² — с $1,6 \cdot 10^7$ до $2,4 \cdot 10^7$ Ом, а затем плавно уменьшаются до уровня соответственно $1,6 \cdot 10^7$; $1,5 \cdot 10^7$; $1,2 \cdot 10^7$ Ом. Увеличение сопротивления МДМ-наноструктур объясняется тем, что при малых уровнях прикладываемого напряжения его рост сопровождается относительно слабым увеличением тока через МДМ-наноструктуру. При напряжениях $U > 0,3-0,4$ В ток достаточно резко увеличивается, что обусловлено уменьшением сопротивления МДМ-контакта.

Выводы. Исследован процесс вакуумного осаждения и электрофизические параметры сверхтонких пленок оксидов РЗЭ при реактивном магнетронном распылении металлических мишеней в смеси аргона и кислорода. Установлено, что в оптимальном технологическом режиме (напряжение разряда 400–440 В, температура подложки 573–598 К) скорость роста пленок оксидов иттрия и гольмия составляет соответственно 3,5 и 2,8 нм/мин, их удельное сопротивление выше 10^{13} Ом·см, значение диэлектрической проницаемости находится в пределах 10,4–16,8. Для исследования электрических характеристик туннельных МДМ-наноструктур на оксидах РЗЭ разработаны топология тестового модуля и процесс формирования МДМ-контактов площадью $(0,2-10) \cdot 10^{-3}$ мм². Получены МДМ-наноструктуры типа Al-(РЗЭ)₂O₃-Al для сенсорных микросистем на основе сверхтонких пленок оксидов иттрия и гольмия. Изучен нелинейный характер зависимостей электрических параметров МДМ-наноструктур от величины приложенного напряжения, обусловленный туннельным механизмом проводимости диэлектрических слоев. На основе линейной

аппроксимации вольт-амперной характеристики туннельных МДМ-наноструктур предложен способ моделирования зависимости сопротивления от приложенного напряжения и взаимосвязи величины сопротивления с пропускаемым через МДМ-наноструктуру током. Установлено, что при толщине пленки оксида иттрия 5; 16 нм и площади МДМ-контакта $(1; 2) \cdot 10^{-3} \text{ мм}^2$ повышение напряжения в пределах от 0,04 до 1,2–1,5 В приводит к росту крутизны вольт-амперной характеристики с $(1,5–2,5) \cdot 10^{-8}$ до $(19–22) \cdot 10^{-8} \text{ А/В}$, сопротивление формируемых МДМ-наноструктур с увеличением электрического напряжения несколько возрастает, а затем снижается в 1,9–4,0 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колешко В. М. и др. Авт. свид. СССР №№ 782604, 1116753, 1626792.
2. Колешко В. М., Гулай А. В. и др. Авт. свид. СССР №№ 860646, 1424636.
3. Колешко В. М., Гулай А. В., Гулай В. А. Получение туннельнотонких пленок оксидов РЗЭ для МДМ-структур // Материалы международной научно-технической конференции «Современные технологии металлообработки», Минск, 14–17 июня 2005 г. — 2005. — с. 117–121.
4. Колешко В. М., Гулай А. В., Гулай В. А. Туннельные МДМ-структуры на основе тонких пленок оксидов РЗЭ // Тезисы докладов 7-й международной конференции «Пленки и покрытия — 2005», Санкт-Петербург, 24–26 мая 2005 г. — 2005. — с. 121–123.
5. Дж. Дирнлей, А. Стоунхэм, Д. Морган Электрические явления в аморфных пленках окислов // Успехи физических наук. — 1974. — т. 112, вып. 1. — с. 83–128.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ АВТОМОБИЛЬНОЙ ШИНЫ

Шилько С.В.¹, Анфиногенов С.Б.¹, Хотько А.В.²

В докладе описано построение и апробация конечноэлементной модели шины, построенной в программном продукте «MSC.Marc». Моделируется комбинированное (поэтапное) нагружение шины и учитывается анизотропия упругих свойств материала с экспериментальной проверкой параметров при статическом нагружении.

Модернизация автомобильных шин предполагает большой объем исследований по определению их деформационно-прочностных и триботехнических характеристик [1]. Оптимизация конструкции шины путем изготовления и испытаний (стендовых, эксплуатационных) экспериментальных образцов в широком диапазоне варьируемых параметров (геометрические размеры и рисунок протектора, схемы армирования, рецептура и распределение материалов и т.д.) является трудоемкими и длительными. Для повышения эффективности ОКР в условиях современного шинного производства необходимо оптимизировать технические показатели изделий на стадии проектирования с использованием адекватных математических моделей. Опыт подобных исследований, проводимых фирмами «Гудьир», «Мишлен» и др. показал, что расчеты автомобильных шин являются весьма трудоемкими, что обусловлено их сложной геометрией, неоднородностью и анизотропией свойств материалов, а также рядом факторов силового воздействия, включая (по порядку возникновения): монтажные напряжения при посадке на обод; внутреннее давление; контактное взаимодействие с дорожным покрытием и ободом колеса в условиях широкого спектра эксплуатационных нагрузок. Расчет должен базироваться на соотношениях, адекватно описывающих нелинейные деформационные свойства армированных резин [2].

В частности, определение деформационно-прочностных характеристик автомобильных шин на стадии проектирования возможно при выполнении следующих условий: 1) полной характеристики вязкоупругих свойств материалов шины (резиновых смесей, армирующего корда); 2) детального анализа напряженно-деформированного состояния шины с учетом профиля и внутренней структуры; 3) проверки адекватности расчетной методики путем проведения испытаний.

Построение методики расчета, учитывающей названные требования, изложено в настоящем сообщении. Характеризация упругих свойств шины производится на основе статических механических испытаний стандартных образцов армированных материалов шины при растяжении и натурных образцов шин на сжатие; показатели вязкости определяются методом динамического контактного индентирования; для анализа напряженно-деформированного контакта используется метод конечных элементов.

В качестве объекта расчета были взяты легковые шины модели Бел-100, Бел-123, включающие ряд деталей (рис. 1), из которых определяющее влияние на деформационные

свойства шины оказывают текстильный каркас; боковина; протектор и брекер, армированный металлической проволокой.

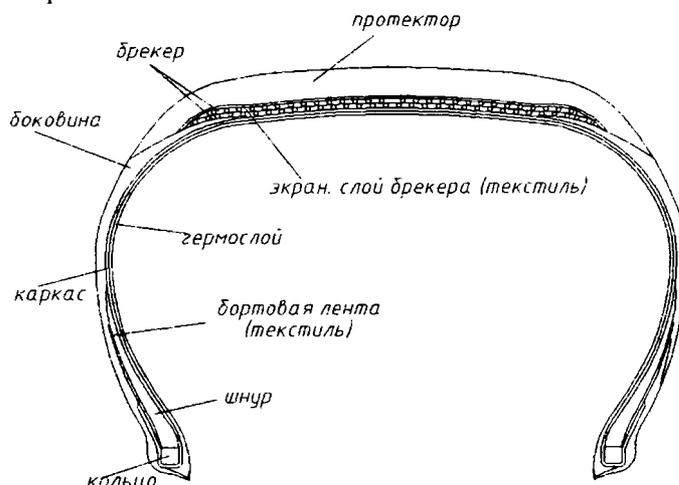


Рис. 1. Распределение материала в шине.

Конечноэлементное моделирование и расчет параметров НДС шины осуществляли в среде специализированных программных комплексов MSC.Patran и MSC.Marc с учетом распределения материала по чертежу, выполненному в ИТЦ ОАО «Белшина» с использованием программного продукта SolidWorks. Использовали чертеж по поперечному сечению шины с указанием бортового кольца, слоев каркаса и брекера. Дискретизация осуществлялась трехмерными шестигранными изопараметрическими девятиузловыми призматическими элементами, применимыми для описания больших деформаций резины. Можно считать, что резина является однородным, изотропным и несжимаемым материалом. Для характеристики упругих свойств резины из опыта на растяжение использовали методику, основанную на модели Муни-Ривлина [3].

Таблица 1

Константы модели Муни-Ривлина.

Константы	Деталь		
	Протектор	Боковина	Борт
c_{10}	0,23	0,14	0,34
c_{01}	0,08	0,06	0,03

В расчете подразумевалось, что матричным материалом остальных деталей шины является вулканизированная резина, аналогичная материалу протектора.

Каркас и брекер, формируемые из резины, армированной тканями, представляют собой сложный класс композитов, поскольку жесткость и напряженное состояние каждого элемента структуры меняется от сечения к сечению. Брекерный слой работает в условиях многократных деформаций растяжения, сжатия и сдвига. Деформации, в особенности деформации сдвига, в этом слое велики и приводят к значительному теплообразованию. Ввиду низкой теплопроводности материала происходит накопление тепла и брекерный слой обыч-

но имеет более высокую температуру по сравнению с другими элементами шины. Прочность шин в основном определяется прочностью корда, имеющего модуль упругости во много раз выше модуля упругости резины и воспринимающего значительную долю нагрузки (модуль упругости металлакорда 19Л22/20 для брекера $E = 130$ ГПа, вязкого корда 17ВХК-Н для каркаса $E = 4,3$ ГПа). Нити корда в шине располагаются спирально и изолированно друг от друга. Технические константы материалов указанных деталей шины определяли по компонентам тензора податливости для однонаправленного армированного композита в соответствии с методикой, описанной в работе [4]. Можно заметить, что константы, найденные ранее для углов армирования $\alpha = +72^0$ и $\alpha = -72^0$, равны (Таблица 2), что уменьшает время расчета и упрощает построение конечноэлементной модели шины в программном продукте Marc.

Таблица 2

Константы модели ортотропного материала

Константы	Брекер($\pm 72^0$)	Каркас(xx)	Каркас(yy)
E_x , МПа	15,77	1397	11,65
E_y , МПа	16,6	11,65	1397
E_z , МПа	68,1	11,65	11,65
ν_{xy}	0,826	0,484	0,004
ν_{yz}	0,092	0,957	0,478
ν_{zx}	0,608	0,004	0,957
G_{xy} , МПа	4,361	3,963	3,936
G_{yz} , МПа	5,866	2,976	3,936
G_{zx} , МПа	7,823	3,036	2,976

Борта, предназначенные для крепления шины на ободе, являются относительно жесткими деталями, что обеспечивается бортовым кольцом из стальной проволоки (модуль упругости $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,33$), работающим в основном на растяжение.

На рис. 2 приведена структура трехмерной конечноэлементной модели шины.

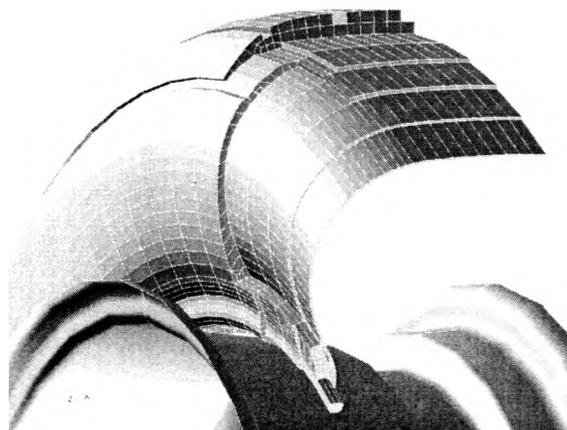


Рис. 2. КЭ - модель шины.

Для решения задачи, характеризующейся осесимметричным нагружением и деформированием шины, например, при посадке на обод или приложении внутреннего давления, могут быть использованы осесимметричные модели (рис. 3), существенно более простые. Геометрия профиля и линии, распределение материала, положение каркаса и брекера в слоях резины после дополнительной оптимизации чертежа, была получена из файла в формате *.igs. Для учета армирующих нитей каркаса и брекера использовали модель ортотропного материала.

Задача решалась в два этапа - посадка шины на обод и прижатие к плоскости, представленной абсолютно твердым телом, принятой за дорожное покрытие, принимая за основную нагрузку – собственный вес автомобиля и груза.

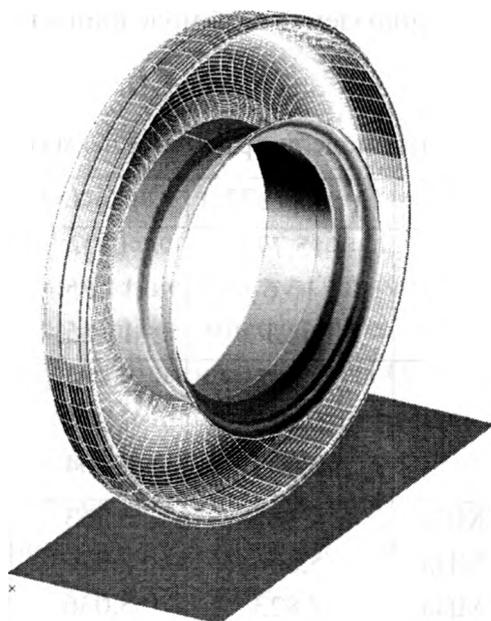


Рис. 3. Объемная осесимметричная модель шины.

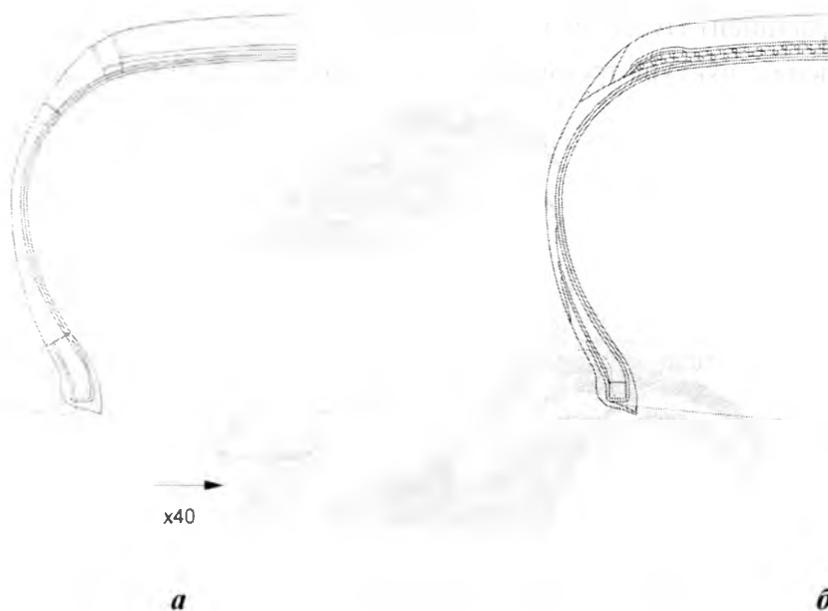


Рис. 4. Начальное (а) и конечное (б) положение обода.

Чертеж распределения материала в шине (рис.4б) был модифицирован для удобства построения конечноэлементной сетки с предварительным разделением на вспомогательные плоскости (рис.4 а). Изначально обод был расположен на позиции со смещением по оси X на -40 мм, как показано на рисунке 4 и был смоделирован преобразованием плоских элементов в трехмерные относительно оси вращения (рис.5). Исходные данные: модуль упругости $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,33$.

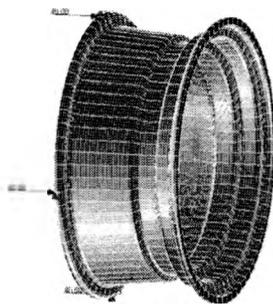


Рис. 5. КЭ - модель обода 5J-13

Отметим, что составляющие элементы шины моделировались слоем резины с известными характеристиками, который заполняет область, образуемую вращением внешнего контура сечения реального сечения шины из плоских элементов, показанных на рисунке 6, вокруг оси колеса в соответствии с рис. 6. Модель включала 37899 узлов, 25919 элементов.

На первом этапе задавалось смещение обода вдоль оси X на расстояние 40 мм, входя в контакт с бортом шины. После этого шина нагружалась давлением по нормали к внутренней поверхности, находясь в контакте только с ободом. В результате были получены компоненты напряженно-деформированного состояния шины, посаженной на обод и нагруженной внутренним давлением.

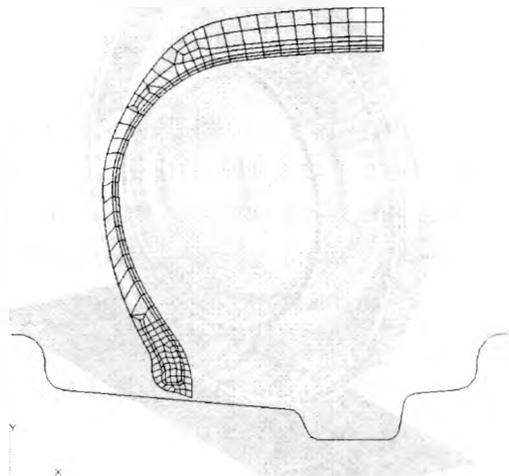


Рис. 6. Двухмерная КЭ - модель шины.

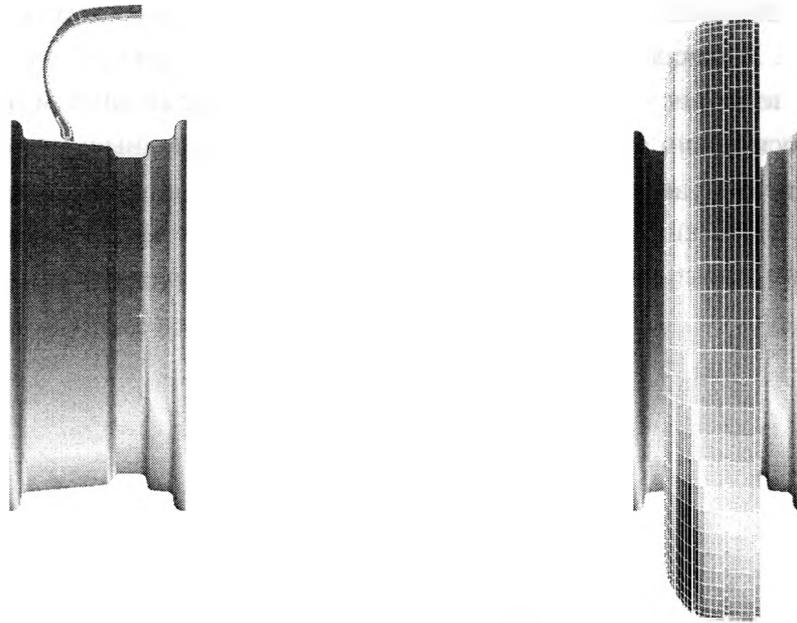


Рис. 7. Начальное положение обода 5J-13 относительно шины 175/70R13 Бел 100.

На следующем этапе происходит прижатие к дорожному покрытию, под действием вертикальной силы приложенной к узлу расположенному на оси вращения обода (рис. 8), это осуществлено жесткой связью с узлами обода, по средствам вспомогательной функции MPC (многоточечное ограничение) в программном комплексе «MSC.Patran». MPCs может использоваться для моделирования определенных физических явлений, которые не могут быть легко смоделированы, используя конечные элементы, типа твердых связей.

$$U_0 = C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3 + \dots + C_nU_n + C_0,$$

где U_0 - зависимая степень свободы, U_i - независимые степени-свободы, C_i - константы. C_0 - независимый параметр.

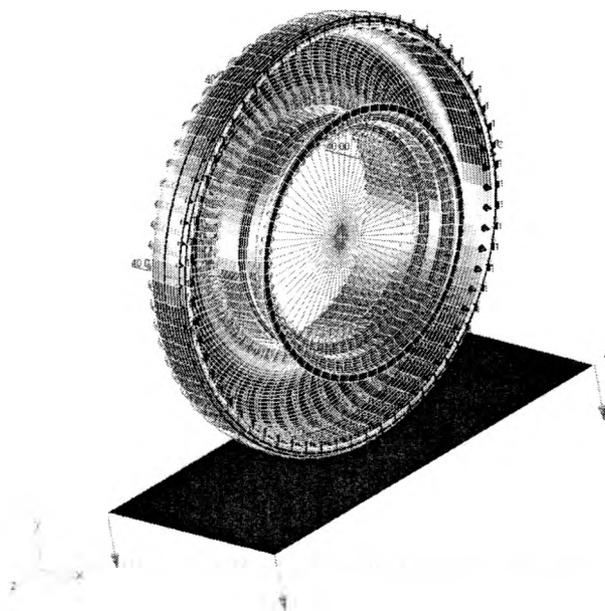


Рис. 8. Конечноэлементный аналог статического нагружения шины.

Сравнение экспериментального и расчетного значения параметров при давлении в шине 0,25 МПа и нагрузке 3700 Н

Наименование параметра	Значение	
	Эксперимент	Расчет
Статический радиус, мм	265±1	276,2
Ширина профиля, мм	189±1	203,7
Размер пятна контакта, мм	164x142	142,8x103,3

В результате расчета получены компоненты НДС шины, посаженной на обод и нагруженной внутренним давлением. Разработанная КЭ-модель позволяет оценить измеримые и важные для потребителей параметры, приведенные в таблице 3. Для повышения точности расчета необходимо более полно учесть анизотропию материала деталей шины, что является предметом дальнейших исследований.

В результате расчета получены компоненты НДС шины, посаженной на обод и нагруженной внутренним давлением. Разработанная КЭ-модель позволяет оценить измеримые и важные для потребителей параметры, приведенные в таблице 3. Для повышения точности расчета необходимо более полно учесть анизотропию материала деталей шины, что является предметом дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате расчета получены компоненты НДС шины, посаженной на обод и нагруженной внутренним давлением. Разработанная КЭ-модель позволяет оценить измеримые и важные для потребителей параметры, приведенные в таблице 3. Для повышения точности расчета необходимо более полно учесть анизотропию материала деталей шины, что является предметом дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кнороз В.И. Работа автомобильной шины. М.: Транспорт, 1976.
2. Тканые конструкционные композиты / Под ред. Т.-В. Чу и Ф. Ко.– М.: Мир, 1991.
3. Гавриленко С.Л. Об устойчивых методах решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений на примере идентификации модели Муни-Ривлина. // Научно-метод. основы примен. инф. техн. в препод. механики и научн. иссл.: Тез. докл. 37 респ. н/м семин., Минск, 2-3 февраля 2006 / Мин. образ. Респ. Беларусь. БНТУ.– Минск, 2006.– С. 157-160.
4. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ЭРИ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Нифагин В.А.

The new real representations a component of stress tensor and deformation tensor are received through the three-dimensional harmonious and biharmonic functions forming stress function tensor. The found expressions allow to reduce the basic boundary problems of the spatial theory of elasticity to boundary problems for the biharmonic equation

В плоских задачах введение функции Эри [1] позволяет статические задачи теории упругости свести к бигармоническим задачам. Так известно представление тензора напряжений через функцию Эри [2]

$$T = E_2 \nabla^2 U - \nabla \nabla U = R^\alpha R_\alpha \nabla^2 U - R^\alpha R^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta U \quad (1)$$

Здесь T – тензор второго ранга напряжений Коши, R^α, R_α – смешанные компоненты этого тензора; U — функция Эри..

В частности в декартовых координатах

$$\sigma_{11} = U,_{x_2^2}, \sigma_{22} = U,_{x_1^2}, \sigma_{12} = U,_{x_1 x_2} \quad (2)$$

Аналогичные представления компонент тензора напряжений можно найти через оставшиеся компоненты функции напряжений для пространственных задач [3-5] (представления Максвелла).

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= Q_{33, x_3^2} + Q_{22, x_3^2}, \sigma_{22} = Q_{33, x_1^2} + Q_{11, x_3^2}, \sigma_{12} = -Q_{33, x_1 x_3} \\ \sigma_{23} &= -Q_{11, x_2 x_3} \\ \sigma_{31} &= -Q_{22, x_3 x_1} \\ \sigma_{33} &= Q_{22, x_1^2} + Q_{11, x_2^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Однако сведение статических трехмерных задач теории упругости к бигармоническим задачам на этом направлении затруднено. Обобщим формулы (3) на случай пространства E_4 .

Пусть Q^0 — тензор функций напряжений в главных осях, т.е. $Q^0 = Q_{ij} \delta_{ij} (i, j = \overline{1,4})$, любая точка $M(x_i) \in E_4$.

Тогда обобщенный на E_4 тензор функции напряжений в форме Максвелла имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= Q_{33}^0,_{x_2^2} + Q_{22}^0,_{x_3^2} + Q_{11}^0,_{x_4^2}; \sigma_{12} = -Q_{33}^0,_{x_1 x_2}, \\ \sigma_{22} &= Q_{33}^0,_{x_1^2} + Q_{22}^0,_{x_4^2} + Q_{11}^0,_{x_3^2}; \sigma_{23} = -Q_{11}^0,_{x_2 x_3}, \\ \sigma_{33} &= Q_{33}^0,_{x_4^2} + Q_{22}^0,_{x_1^2} + Q_{11}^0,_{x_2^2}; \sigma_{34} = -Q_{33}^0,_{x_3 x_4}, \\ \sigma_{44} &= Q_{33}^0,_{x_3^2} + Q_{22}^0,_{x_2^2} + Q_{11}^0,_{x_1^2}; \sigma_{41} = -Q_{11}^0,_{x_1 x_4}, \\ \sigma_{1,3} &= -Q_{22}^0,_{x_1 x_3}; \sigma_{24} = -Q_{22}^0,_{x_2 x_4}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вывод формул (4) основан на вычислении $Ink(Q^0) = rot(rot Q^0)^T$.

Заметим, что при вырождении $x_4 \rightarrow 0$ из (4) получаем (3). Кроме того, диагональные элементы Q_{mm}^0 тензора функции напряжений удовлетворяют уравнениям Бельтрами:

$$\sigma_{ij, jj} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{,ij} = 0, \quad i, j = \overline{1,4} \quad (5)$$

а компоненты σ_{ij} из (4) не зависят от Q_{44}^0 .

Введем в рассмотрение среднее давление $\sigma^{(n)} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii}^{(n)}$, где индекс в скобках сверху

обозначает размерность и соответствует числу аргументов функций и $\sigma_*^{(n)} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii}^{(n)}$. Тогда

для $n = 4$ из (4) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_*^{(4)} = \sigma^{(4)} &= \sum_{i=1}^4 \sigma_{ii}^{(4)} = \Delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^3 Q_{ii}^{0(4)} \right). \\ \sigma^{(3)} &= \sum_{m=1}^3 \sigma_{ii}^{(3)} = \sigma_*^{(3)} - \sigma_{44}^{(3)} \\ \sigma_{44}^{(3)} &= \sum_{i=1}^n Q_{ii}^{0(3)} x_2^2. \end{aligned}$$

Аналогично для $n = 2$ (плоская задача) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_*^{(2)} &= \sum_{i=1}^4 \sigma_{ii}^{(2)} = \Delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^3 Q_{ii}^{0(2)} \right). \\ \sigma^{(2)} &= \sum_{m=1}^2 \sigma_{ii}^{(2)} = \Delta^{(2)} Q_{33}^{0(2)} = \sigma_*^{(2)} - \sigma_{33}^{(2)} - \sigma_{44}^{(2)} \\ \sigma_{33}^{(2)} &= Q_{22}^{0(2)} x_1^2 + Q_{11}^{0(2)} x_2^2 \\ \sigma_{44}^{(2)} &= Q_{11}^{0(2)} x_1^2 + Q_{22}^{0(2)} x_2^2 \end{aligned}$$

Из последних соотношений следуют общие формулы для любой размерности n :

$$\begin{aligned} \sigma_*^{(n)} &= \Delta^{(n)} U^{(n)} \\ U^{(n)} &= \sum_{i=1}^3 Q_{ii}^{(n)0} \end{aligned} \quad (6)$$

С помощью формул (5) и закона Гука в E_4 в тензорной форме для, таким же образом, введенных тензоров деформаций:

$$\begin{aligned} 2\mu \varepsilon^{(n)} &= T^{(n)} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma^{(n)} E \\ 2\mu \varepsilon_*^{(n)} &= T_*^{(n)} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_*^{(n)} E \end{aligned} \quad (7)$$

первые инварианты тензоров деформаций будут:

$$2\mu\theta^{(n)} = \frac{1-(n-1)\nu}{1+\nu} \sigma^{(n)}; \quad (8)$$

$$2\mu\theta_*^{(n)} = \frac{1-3\nu}{1+\nu} \sigma_*^{(n)}$$

здесь $\theta^{(n)} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ii}^{(n)}$, $\theta_*^{(n)} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ii}^{(n)}$.

Учитывая (6), (7) введенный вспомогательный тензор $\varepsilon_*^{(n)}$ можно представить через функцию $U^{(n)}$ или компоненты тензора функций напряжений

$$2\mu\varepsilon_*^{(n)} = Ink(Q^{0(n)}) - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta^{(n)} I_1(Q^{0(n)}) E \quad (9)$$

здесь первый инвариант $I_2(Q^{0(n)})$ совпадает с функцией $U^{(n)}$ из (6).

Вектор смещений, принимая во внимание (9) будет

$$2\mu u_i^{(n)} = \iint \left(Ink(Q^{0(n)})_{,ii} - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta^{(n)} (I_1(Q^{0(n)})) \right) dx_i. \quad (10)$$

В статических задачах средние напряжения и деформации являются гармоническими функциями в ограниченных областях $G^{(n)} \subset E_n$ [6]. В тоже время для плоских задач компоненты вектора перемещения, тензоров напряжений и деформаций выражаются в декартовых координатах через единственную бигармоническую функцию Эри. Для трехмерных областей общие решения основных задач теории упругости реализуются через бигармонический вектор [7]. Но исходя из тензорного дифференциального уравнения $\Delta Q = \frac{1}{1+\nu} (E\Delta(I_1(Q)) - div\,div\,Q) - \frac{1-2\nu}{1+\nu} (def\,div\,\Phi - \Delta(I_1(Q)))$ нельзя получить алгоритм построения функции Эри в E_3 , так как уравнение определяет только первый инвариант $I_1(Q^0)$ и $div\,div(Q^0)$.

Из введенных компонент среднего напряжения $\sigma_*^{(n)}$ и формул (6) заключаем, что функция $U^{(n)}$ — первый инвариант тензора $Q^{0(n)}$ является бигармонической в конечной области $G^{(n)} \subset E_n$. Для касательных напряжений σ_{ij} ($i \neq j$), учитывая (4), (5), (6), заключаем, что выполняются условия

$$\Delta^{(n)} \left(\frac{1}{1+\nu} U^{(n)} - Q_{33}^{0(n)} \right)_{,x_1x_2} = 0 \quad (11)$$

С учетом круговых перестановок $\rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow$ и $\rightarrow Q_{11}^{0(n)} \rightarrow Q_{22}^{0(n)} \rightarrow Q_{33}^{0(n)} \rightarrow$.

Условия (11) выписаны для E_3 , в случае E_4 к ним добавятся еще три аналогичных уравнения.

Таким образом, из (11) вытекает существование трех гармонических функций $g_{mm}^{(n)}$, что

$$-Q_{33}^{(n)}_{,x_1x_2} + \frac{1}{1+\nu} U^{(n)}_{,x_1x_2} = g_{33}^{(n)}$$

с круговой перестановкой индексов $\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow$.

Тогда для функций напряжений

$$Q_{33}^{0(n)} = \frac{1}{1+\nu} U^{(n)} - \iint_{D_{12}} g_{33}^{(n)} dx_1 dx_2 \quad (12)$$

($\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow$)

или

$$Q_{mm}^{0(n)} = \frac{1}{1+\nu} U^{(n)} - F_{mm}^{(n)}, \quad m = \overline{1,3}, \quad (13)$$

где

$$F_{mm} = \iint_{D_{12}} g_{mm}^{(n)} dx_1 dx_2, \quad m = \overline{1,3} \quad (14)$$

($\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow$)

Заметим, что гармонические функции $g_{mm}, m = \overline{1,3}$ выбираются из выполнения условий:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ii}^{(n)} = \frac{2-\nu}{1+\nu} U^{(n)}$$

или

$$\iiint_v \operatorname{div} \vec{g} dv = \frac{2-\nu}{1+\nu} U^{(n)}, \quad (15)$$

где $\vec{g} = (g_{11}, g_{22}, g_{33})$.

Из (4), (5), (13) нормальные напряжения удовлетворяют уравнениям

$$\Delta^{(3)} \left(F_{33}^{(3)} x_2^2 + F_{22}^{(3)} x_3^2 \right) = 0; \quad (16)$$

$$\Delta^{(3)} \left(\sum_{i=1}^3 F_{ii}^{(3)} x_i^2 \right) = 0 \quad (\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow).$$

Тогда из (15), (16) получаем:

$$F_{22}^{(3)} x_1^2 - F_{22}^{(3)} x_2^2 = \frac{2-\nu}{1+\nu} U^{(3)} x_1^2 - F_{33}^{(3)} x_1^2 + F_{33}^{(3)} x_3^2 - P^{(3)}. \quad (17)$$

($\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow$)

Таким образом, функции $F_{mm}^{(3)}$ из (14) и функции напряжений $Q_{mm}^{0(n)}$ из (13) полностью определяются двумя произвольными функциями: гармонической $P^{(3)}$ и бигармонической $U^{(3)}$. Для построения функций напряжений необходимо по определенной гармонической функции $g_{33}^{(n)}$ из (14) найти $F_{33}^{(n)}$, затем из условия (17) найти $F_{22}^{(n)}$ и определить функцию

$$F_{11}^{(n)} = \frac{2-\nu}{1+\nu} U^{(n)} - F_{22}^{(n)} - F_{33}^{(n)}. \quad (18)$$

Наконец, с помощью найденных $F_{mm}^{(n)}$ из (13) получить представления для функций напряжений.

Заметим, что вместо трех различных функций $Q_{mm}^{0(n)}$ можно говорить об одной обобщенной функции, заданной на круговой перестановке. Это же относится к вспомогательным функциям $g_{mm}^{(n)}$ и $F_{mm}^{(n)}$. Кроме того, функции напряжений $Q_{mm}^{0(n)}$ из (13), (14) являются суперпозициями бигармонических и гармонических функций, а для пространственных задач — суперпозициями только бигармонических функций $F_{mm}^{(n)}$.

Например, при вырождении $E_3 \rightarrow E_3 \rightarrow E_2$ (плоские задачи) функции напряжений $Q_{33}^{0(2)} = U^{(2)}$, $Q_{11}^{0(2)} = Q_{22}^{0(2)} = \nu U^{(2)}$, что соответствует известным результатам.

Применяя представления (13), (14) для функций напряжений, выпишем компоненты тензора напряжений через гармонические и бигармонические функции в E_3 :

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(3)} &= \frac{1}{1+\nu} \left(\Delta^{(3)} U^{(3)} - U^{(3)}_{x_1^2} \right) - F_{33}^{(3)} x_2^2 - F_{22}^{(3)} x_3^2, \\ \sigma_{12}^{(3)} &= -\frac{1}{1+\nu} U^{(3)}_{x_1 x_2} + q_{33}^{(3)}, \quad (\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow)\end{aligned}\quad (19)$$

Средние напряжения будут

$$\begin{aligned}\sigma_*^{(n)} &= \frac{3}{1+\nu} \Delta^{(n)} U^{(n)} - q_{23}^{(n)} - q_{31}^{(n)} - q_{12}^{(n)}, \\ \sigma^{(4)} &= \sigma_*^{(4)} \\ \sigma^{(3)} &= \frac{2}{1+\nu} \Delta^{(3)} U^{(3)} - q_{33}^{(3)} - q_{31}^{(3)} - q_{12}^{(3)} = \sigma_*^{(3)},\end{aligned}\quad (20)$$

Здесь гармонические функции $q_{ij}^{(n)}$ определяются через гармонические функции $q_{mm}^{(n)}$ из условий сопряжения Моисила-Теодереско [8].

Полученные выражения (19), (20) можно использовать для нахождения компонент тензора деформаций в E_3 через те же гармонические и бигармонические функции:

$$2\mu u_{1,x_1} = -\frac{\nu}{1+\nu} U^{(3)}_{x_1^2} + \frac{1-\nu}{(1+\nu)^2} \Delta^{(3)} U^{(3)} + \frac{\nu}{1+\nu} (q_{31}^{(3)} + q_{12}^{(3)}) - \frac{1}{1+\nu} q_{23}^{(3)} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}\mu(u_{1,x_2} + u_{2,x_1}) &= \frac{1}{1+\nu} U^{(3)}_{x_1 x_2} + g_{33}^{(3)} \\ (\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow)\end{aligned}$$

$$2\mu\theta^{(3)} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \left(\frac{2}{1+\nu} \Delta^{(3)} U^{(3)} - q_{23}^{(3)} - q_{31}^{(3)} - q_{12}^{(3)} \right) \quad (22)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. М.: Наука, 1966.
2. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
3. Галеркин Б.Г. К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле // Собрание сочинений Б.Г. Галеркина. М.: Изд-во АН СССР, 1953. Т. 1. С. 318—321.
4. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. 3-е изд. М.: Наука, 1984.
5. Александров Л.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1978.
6. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974.
7. Галеркин Б.Г. К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле // Собрание сочинений Б.Г. Галеркина. М.: Изд-во АН СССР, 1953. Т. 1. С. 318—321.
8. Мальгранж Б. Лекции по теории функций комплексных переменных. М.: Наука, 1969.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

Статья должна быть оформлена в стандарте Microsoft Word и представлена в распечатанном виде (на лазерном принтере) в одном экземпляре плюс полная электронная версия (на дискете, CD или выслана по электронной почте на адрес tmec@bntu.by, theormech@rambler.ru).

Объем статьи: полное количество страниц (последняя страница статьи должна быть заполнена не менее 75 %), включая рисунки, список литературы.

Текст статьи набирается шрифтом Times New Roman 12 pt (междустрочный интервал – одинарный) с автоматической расстановкой переносов. Выравнивание текста по ширине. Страницы не нумеруются.

Отступ первой строки абзацев везде постоянный, равный 10 мм.

Поля текста на странице формата А4 (210x297мм): верхнее – 20 мм, нижнее 30 мм, левое и правое 20 мм.

По середине листа прописными буквами (полужирным шрифтом) печатается название статьи. Затем через 1 интервал по середине фамилии и инициалы авторов (полужирным шрифтом). Затем через 1 интервал краткую **аннотацию** (10 pt курсивом) на английском языке (не более 70 слов) и через один интервал текст статьи с абзаца. По окончании текста статьи через 1 интервал печатается прописными буквами «ЛИТЕРАТУРА» и далее через 1 интервал перечисляются в виде списка источники литературы. Литературные ссылки должны быть оформлены в соответствии с ГОСТом.

Рисунки должны быть выполнены в графическом редакторе или отсканированы и включены в текст статьи. Подписи печатаются шрифтом Times New Roman 10 pt курсивом.

Формулы: выполняются в редакторе формул Microsoft Equation, входящей в состав Microsoft Word, таким же шрифтом что и текст. В формулах и обозначениях латинские буквы набираются курсивом, греческие и русские – прямо.

В отдельном файле (на отдельной странице) указываются полные сведения об авторах (полное имя, организация, должность, уч. степ., уч. звание, адрес, телефон, e-mail).

Не рассматриваются и обратно не высылаются статьи, оформленные с нарушением требований и поступившие позднее установленного срока.

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

Белорусский национальный технический университет, Минск (12 pt)

О ПРОЕКТИРОВАНИИ СОЕДИНЕНИЙ С НАТЯГОМ (12 pt)

Иванов О.И., Смирнов В.И. (12 pt)

Results of investigation of three-dimensional wave movements in the elastic bodies, obtained are submitted on the basis of a method of characteristics of the theory of the differential equations with partial derivatives. The analysis of propagation..... (10 pt)

Цилиндрические соединения с натягом находят широкое использование в машиностроении

..., исключить дополнительные крепления, повысить надежность и снизить трудоемкость изготовления. (12 pt)

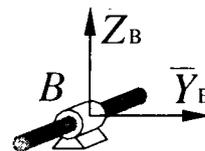


Рис. 1. Цилиндрический шарнир (10 pt)

ЛИТЕРАТУРА (12 pt)

1. Александров Г.Н. Коронный разряд на линиях электропередачи. – М.: Энергия, 1964. – 288 с.
2. А.с. 513351 СССР. Стабилизатор постоянного тока / С.Г. Перминов // Бюл. изобр. – 1976. – №17.
3. Результаты перевода пылеугольного котла паропроизводительностью 89 кг/с на сжигании водоугольной суспензии / А.М. Хидиятов, В.В. Осинцев, С.В. Годеев и др. // Теплоэнергетика. – 1987. №1. – С. 5–10.
4. Братчиков В.Н. Золовой износ труб, наклонно расположенных к потоку // Энергетика. – 1959. – №5. – С. 95–100.

СОДЕРЖАНИЕ

Genady P. Cherepanov, Ivan E. Esparragoza Equirstrong Tower Design.....	3
Немцов В.Б. Упругость нематических эластомеров.....	11
Куликов И.С. Изгиб тонкой пластины при импульсном воздействии потока заряженных частиц.....	18
Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Сулейман М. Напряженное состояние кольцевой трехслойной пластины при изгибе на упругом основании.....	24
Sorko S.A., Karpovich S.E. Solving the oscillating pipe flow problem by the boundary integral equations method.....	32
Широков Б.Н., Альгин В.Б., Иванов В.Г. Модели взаимодействия колеса с опорной поверхностью в продольной плоскости.....	38
Крушевский А.Е. Построение модели формы периодонта на основе овалов четвертой степени.....	48
Колешко В.М., Польшкова Е.В., Паутино А.А. Сенсорные микросистемы с RFID идентификацией.....	51
Михасев Г. И., Ермоченко С. А. Об устойчивости положения равновесия вводимого протеза при реконструкции среднего уха.....	63
Роговцов Н.Н. Применение соотношений инвариантности к выводу новых интегральных уравнений для коэффициентов яркости плоскопараллельной дисперсной среды.....	72
Босяков С.М., Хвисевич В.М. Поверхности скоростей для волн, распространяющихся в идеально проводящей магнитной жидкости.....	78
Любнауер В. А. Безопасность работы автомобильного подъемника-вышки.....	82
Ершов В. И. Оптимизация размеров двутавровых балок из нелинейно-упругих материалов по двум параметрам.....	88

Дубровина О.В. Некоторые свойства интегральных вейвлет-преобразований.....	92
Кушнир В.Н. Критическое состояние многослойных мезоструктур типа сверхпроводник/нормальный металл.....	97
Гладков П.А. Осесимметричные волновые пакеты в цилиндрической оболочке, лежащей на неоднородном вязкоупругом основании.....	102
Sorko S.A., Karpovich S.E. Solving the unsteady heat transfer problem with periodic boundary condition by the boundary integral equations method.....	107
Босяков С.М., Скляр О.Н. Уравнение слабых разрывов для системы уравнений движения термоупругой кубически анизотропной среды с учетом времени релаксации тепловых возмущений.....	114
Веремейчик А.И. Температурное поле в стенке полого цилиндра.....	118
Ершов В.И. Формирование системы дифференциальных уравнений в задаче Буссинеска в переменных Эйлера и определение перемещений.....	125
Колешко В.М., Чашинский А.С., Хмурович Н.В. Сенсорные молекулярные микроанализаторы идентификации веществ.....	131
Цыганов Д.Л. Некоторые аспекты проектирования гомогенных плазмохимических конверторов.....	140
Путято А. В., Шимановский А. О. Нагруженность кузова вагона при транспортировке сыпучих грузов.....	149
Путято А.В. Определение внешнего критического давления оболочки котла вагона-цистерны.....	152
Журавков М.А., Чумак Н.Г. Исследование распространения макротрещин в массивах горных пород.....	157
Каминьски Я.Р., Мишин П.А. Математическая модель функционирования адаптированного почвообрабатывающего агрегата.....	170
Дубовик Д.А. Расчет эффективности ходовых систем многоприводных колесных машин	174

Нагорный Ю.Е., Репченков В.И., Сыроежкин С.В., Чижик С.А. Расчёт механических свойств графена в модели валентно-силового поля.....	182
Бокуть Л.В., Кулешов А.Я. Корреляционный анализ весовых значений векторов направлений.....	187
Чернин И. Л., Сенько Н. Г., Чернин Р. И. Гидропрессовая сборка соединений с гарантированным натягом.....	197
Грибунов Г.А., Куликов И.С. Методы оптимизации технологических циклов и тепловых схем ТЭЦ.....	200
Локтионов А.В. Технология контроля знаний студентов при изучении теоретической механики в УО «ВГТУ».....	217
Каминьски Я.Р., Мишин П.А. Построение карты сельскохозяйственного поля в изолиниях твердости почвы методом Кригинга.....	223
Гурвич Ю.А., Пашенко А.В., Сафронов К.И. Анализ устойчивости подпружиненного физического маятника методами А.М. Ляпунова.....	229
Астахов Э.И., Пирч А.И., Саболевский А.К. Определение параметров физической модели мобильной машины с маховичным двигателем.....	233
Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М. Информационное обеспечение раздела «динамический анализ механизмов» в курсовом проекте по теории механизмов и машин.....	238
Гарах В.А., Астахов Э. И. Динамический анализ движения рычажного механизма стенда для испытания гусениц.....	241
Анципорович П.П., Алейникова О.И., Булгак Т.И., Луцко Н.Я. Обучение студентов использованию Mathcad в профессиональной деятельности.....	247
Анципорович П.П., Дворянчикова А.Б. Особенности применения компьютерных технологий в курсе “Теория механизмов и машин”.....	251
Сухоцкий А.А. Дифференциальное уравнение движения заготовки во время пневмоцентробежной обработки.....	254

Кудин В.В., Астахов Э.И., Кудин М.В. Алгоритмы анимации фрикционных автоколебаний приводов подачи танков.....	256
Авсиевич А.М., Николаев В.А., Герасименко С.А., Адаменко Д.В. Системный анализ факторов при расчете износа в низших кинематических парах.....	259
Карпович С.Е., Голдын Л., Поляковский В.В., Дайняк И.В. Интерактивная визуализация перемещений на плоскости двух планарных позиционеров.....	261
Pronkevich S.A., Senk I. USING of finite element method for solving problems of the resistance of materials.....	266
И. М. Мартыненко Асимптотика собственных значений и собственных функций в кубически анизотропных средах.....	270
Колешко В. М., Гулай А. В., Лученок С. А. Формирование цветоцветового информационного образа почвы в технологии точного земледелия.....	279
Колешко В. М., Гулай А. В., Гулай В. А. Получение туннельных сенсорных МДМ-наноструктур на основе оксидов РЗЭ.....	287
Шилько С.В., Анфиногенов С.Б., Хотько А.В. Численное моделирование напряженного состояния автомобильной шины.....	297
Нифагин В.А. Действительная функция Эри в пространственных задачах теории упругости.....	304
Правила оформления статей.....	309

Научное издание

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

*Межведомственный сборник
научно-методических статей*

Выпуск 22

Ответственный за выпуск М. Г. Ботогова

Подписано в печать 29.12.2006 г.
Формат 60x841/8. Бумага офсетная.
Гарнитура «Times». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 36,3. Уч.-изд. л. 30,6. Тираж 100 экз. Заказ 23.

Издатель Белорусский национальный технический университет.
Лицензия № 02330/0131627 от 01.04.2004 г.
220013, г. Минск, проспект Независимости, 65.

Отпечатано в типографии УП «Промбытсервис».
ЛП № 02330 / 0148738 от 30.04.2004 г.

220114, г. Минск, ул. Ф. Скорины, д. 14, к. 203.
Тел.: +375 /17 / 237-62-89, +375 /17 / 267-27-67.