УДК 539.3

ИЗГИБ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ, ЧАСТИЧНО ОПЕРТОГО НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

Старовойтов Э.И., Поддубный А.А.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

We consider the deformation of an elastic three-layer rod partially supported on elastic foundation of Winkler. To describe the kinematics of asymmetric in thickness of package accepted hypothesis rod broken normal. A system of equilibrium equations and its general analytical solution in displacements. The numerical analysis of solutions.

Введение

Композиционные, в том числе слоистые элементы конструкций широко используются в транспортном машиностроении: в качестве корпусных элементов вагонов, авиационных аппаратов, космических объектов, строительных панелей, и т.д. В связи с этим актуальной является проблема их расчета при различных внешних воздействиях и внутренней конфигурации. Деформирование трехслойных элементов конструкций не связанных с упругим основанием исследовано в [1]. Изгиб трехслойного стержня полностью опертого на упругое основание рассмотрен в работах [2, 3]. Здесь исследован изгиб локально распределенной нагрузкой трехслойного стержня, *частично* опертого на упругое основание.

Постановка задачи

Рассматривается несимметричный по толщине упругий трехслойный стержень с жестким заполнителем (рисунок 1). Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. Для описания кинематики пакета используется *гипотеза «ломаной» нормали*: в тонких несущих слоях *1*, *2* справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе *3* нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Деформации считаются малыми. На внешний слой *1* стержня действует локально распределенная поперечная нагрузка постоянной интенсивности

$$q(x)=q_0\left(H_0(a-x)-H_0(b-x)\right). \qquad (1)$$

Частично стержень опирается на упругое основание Винклера, т. е. реакция

$$q_r=-\kappa w H(x_0-x), \qquad (2)$$

где κ – жесткости упругого основания; $w(x)$ – прогиб стержня; $H_0(x_0)$ – функция Хевисайда.

В силу принятых гипотез прогиб во всех точках поперечного сечения стержня одинаков. На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев. Через $u(x)$ обозначено продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, h_k – толщина k-го слоя ($k = 1, 2, 3$), при этом толщина заполнителя $h_3 = 2c$.

Введенные геометрические гипотезы позволяют выразить продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ через три искомые функции $u(x)$, $\psi(x)$ и $w(x)$:

$$u^{(1)}=u+c\psi-zw,_x \quad (c\le z\le c+h_1),\quad u^{(3)}=u+z\psi-zw,_x \quad (-c\le z\le c),$$

$$u^{(2)}=u-c\psi-zw,_x \qquad (-c-h_2\le z\le -c), \tag{3}$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; z – координата рассматриваемого волокна.

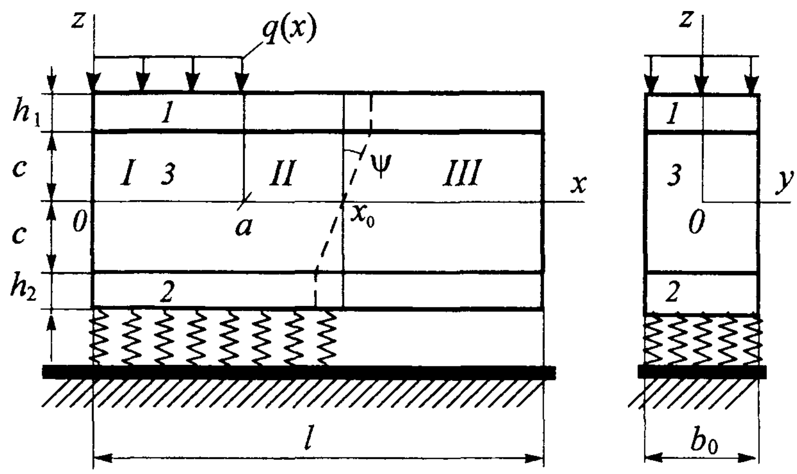


Рис. 1. Расчетная схема трехслойного стержня

В слоях стержня вводятся внутренние силы и моменты:

$$N^{(k)}=b_0\int_{h_k}\sigma_x^{(k)}\,\mathrm{d}z,\quad M^{(k)}=b_0\int_{h_k}\sigma_x^{(k)}z\,\mathrm{d}z,\quad Q^{(3)}=b_0\int_{h_3}\sigma_{xz}^{(3)}\,\mathrm{d}z, \tag{4}$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений, b_0 – ширина поперечного сечения стержня.

Уравнения равновесия трехслойного стержня в усилиях и силовые граничные условия следуют из принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A=\delta W, \tag{5}$$

где δA и δW – вариации работ внешних сил и внутренних напряжений

$$\delta A=\iint_S (q+q_r)\delta w\,\mathrm{d}S=b_0\int_0^l (q+q_r)\delta w\,\mathrm{d}x,$$

$$\delta W=\iint_S\sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}(\sigma_x^{(k)}\delta\varepsilon_x^{(k)}+2\sigma_{xz}^{(3)}\delta\varepsilon_{xz}^{(3)}\delta_{k3})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}S=$$

$$=b_0\int_0^l\left[\sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_x^{(k)}\delta\varepsilon_x^{(k)}\,\mathrm{d}z+2\int_{h_3}\sigma_{xz}^{(3)}\delta\varepsilon_{xz}^{(3)}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x.$$

В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия и граничные условия рассматриваемого трехслойного стержня в усилиях.

$$\begin{cases} N,_x + b_0 p = 0, \\ H,_x - Q = 0, \\ M,_{xx} + b_0(q + q_R H(x_1 - x)) = 0. \end{cases} \quad . \tag{6}$$

При этом должны выполняться следующие силовые граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0:\quad & N = N_0, \quad M = M_0, \quad M,_x = Q_0, \quad H = 0, \\ x = l:\quad & N = N_l, \quad M = M_l, \quad M,_x = Q_l, \quad H = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Применяя соотношения (3), (4) выразим внутренние усилия и моменты через искомые функции $u(x)$, $\psi(x)$, $w(x)$:

$$N^{(1)} = b_0 K_1^+ \left[h_1 \left(u,_x + c\psi,_x\right) - \left(c + \tfrac{1}{2} h_1\right) h_1 w,_{xx} \right],$$
$$N^{(2)} = b_0 K_2^+ \left[h_2 \left(u,_x - c\psi,_x\right) + \left(c + \tfrac{1}{2} h_2\right) h_2 w,_{xx} \right],$$
$$N^{(3)} = 2 b_0 K_3^+ c\, u,_x ,$$
$$M^{(1)} = b_0 K_1^+ \left[h_1 \left(c + \tfrac{1}{2} h_1\right)\left(u,_x + c\psi,_x\right) - \left(c^2 + c h_1 + \tfrac{1}{3} h_1^2\right) h_1 w,_{xx} \right],$$
$$M^{(2)} = b_0 K_2^+ \left[-h_2 \left(c + \tfrac{1}{2} h_2\right)\left(u,_x - c\psi,_x\right) - \left(c^2 + c h_2 + \tfrac{1}{3} h_2^2\right) h_2 w,_{xx} \right],$$
$$M^{(3)} = \tfrac{2}{3} b_0 K_3^+ c^3 \left(\psi,_x - w,_{xx}\right) , \quad Q^{(3)} = 2 b_0 G_3 c \psi ,$$
$$K_k^+ \equiv K_k + \tfrac{4}{3} G_k ,$$

где G_k , K_k – модули сдвиговой и объемной деформации k- го слоя.

С помощью соотношений (3), (4) внутренние усилия и моменты можно выразить через искомые три функции $u(x)$, $\psi(x)$, $w(x)$. Подставив их в силовые уравнения равновесия, получим систему дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемого трехслойного стержня в перемещениях:

$$\begin{aligned} & a_1 u,_{xx} + a_6 \psi,_{xx} - a_7 w,_{xxx} = 0, \quad a_6 u,_{xx} + a_2 \psi,_{xx} - a_3 w,_{xxx} - a_5 \psi = 0, \\ & a_7 u,_{xxx} + a_3 \psi,_{xxx} - a_4 w,_{xxxx} - \kappa w H(x_1 - x) = -q H(a - x), \end{aligned} \tag{8}$$

где
$$a_1 = K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + 2 K_3^+ c, \quad a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + \tfrac{2}{3} K_3^+ c \right],$$
$$a_3 = c\left[K_1^+ h_1 \left(c + \tfrac{1}{2} h_1\right) + K_2^+ h_{20} \left(c + \tfrac{1}{2} h_{20}\right) + \tfrac{2}{3} K_3^+ c^2 \right],$$
$$a_4 = K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \tfrac{1}{3} h_1^2\right) + K_2^+ h_{20} \left(c^2 + c h_{20} + \tfrac{1}{3} h_{20}^2\right) + \tfrac{2}{3} K_3^+ c^3 ,$$
$$a_5 = 2 G_3 c, \quad a_6 = c\left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_{20} \right], \quad a_7 = K_1^+ h_1 \left(c + \tfrac{1}{2} h_1\right) - K_2^+ h_{20} \left(c + \tfrac{1}{2} h_{20}\right).$$

Система уравнений (8) имеет разрывные коэффициенты, обусловленные наличием функций Хевисайда в реакции основания (2) и нагрузке (1).

Решение краевой задачи проводится в зонах непрерывности коэффициентов системы (8): I – $x < a$, область с нагрузкой и опиранием на упругое основание; II – $x < x_0$, область опирания на упругое основание, но без нагрузки; III – область без основания и без нагрузки ($x > x_0$).

В первой области обе функции Хевисайда обращаются в единицу. Искомые перемещения в этой области пометим индексом «1» внизу. Система (8) здесь принимает вид

$$a_1 u_{1,xx} + a_6 \psi_{1,xx} - a_7 w_{1,xxx} = -p,$$
$$a_6 u_{1,xx} + a_2 \psi_{1,xx} - a_3 w_{1,xxx} - a_5 \psi_1 = 0,$$
$$a_7 u_{1,xxx} + a_3 \psi_{1,xxx} - a_4 w_{1,xxxx} - \kappa w_1 = -q. \tag{9}$$

Решение системы уравнений (9), при основании средней жесткости [3] будет:

$$w_1(x) = C_{11} e^{\lambda_1 x} + C_{21} e^{-\lambda_1 x} + C_{31} e^{\lambda_3 x} + C_{41} e^{-\lambda_3 x} + C_{51} e^{\lambda_5 x} + C_{61} e^{-\lambda_5 x} + \frac{q_0}{\kappa},$$
$$\psi_1(x) = C_{11} a_{01} e^{\lambda_1 x} - C_{21} a_{01} e^{-\lambda_1 x} + C_{31} a_{12} e^{\lambda_3 x} - C_{41} a_{12} e^{-\lambda_3 x} + C_{51} a_{13} e^{\lambda_5 x} -$$
$$- C_{61} a_{13} e^{-\lambda_5 x} + b_2 \frac{q_0}{\kappa} x + b_3 q_0 x,$$
$$u_1(x) = C_{11} a_{21} e^{\lambda_1 x} - C_{21} a_{21} e^{-\lambda_1 x} + C_{31} a_{22} e^{\lambda_3 x} - C_{41} a_{22} e^{-\lambda_3 x} + C_{51} a_{23} e^{\lambda_5 x} -$$
$$- C_{61} a_{23} e^{-\lambda_5 x} + b_5 q_0 \left(\frac{b_2}{\kappa} + b_3 \right) x + C_{81} x + C_{91}, \tag{10}$$

где $C_{11}, \ldots, C_{91}$ – константы интегрирования, остальные параметры a_{ij}, b_i выражаются через геометрические и упругие характеристики материалов слоев и совпа

дают с приведенными в [3].

Во второй области нагрузки нет, соответствующая функция Хевисайда в (1) обращается в ноль, опирание присутствует и функция Хевисайда в (2) обращается в единицу.

Решение системы (12) (индекс«2» внизу) следует из (9), при $q = 0$:

$$w_2(x) = C_{12} e^{\lambda_1 x} + C_{22} e^{-\lambda_1 x} + C_{32} e^{\lambda_3 x} + C_{42} e^{-\lambda_3 x} + C_{52} e^{\lambda_5 x} + C_{62} e^{-\lambda_5 x},$$
$$\psi_2(x) = C_{12} a_{01} e^{\lambda_1 x} - C_{22} a_{01} e^{-\lambda_1 x} + C_{32} a_{12} e^{\lambda_3 x} - C_{42} a_{12} e^{-\lambda_3 x} + C_{52} a_{13} e^{\lambda_5 x} - C_{62} a_{13} e^{-\lambda_5 x},$$
$$u_2(x) = C_{12} a_{21} e^{\lambda_1 x} - C_{22} a_{21} e^{-\lambda_1 x} + C_{32} a_{22} e^{\lambda_3 x} - C_{42} a_{22} e^{-\lambda_3 x} + C_{52} a_{23} e^{\lambda_5 x} -$$
$$- C_{62} a_{23} e^{-\lambda_5 x} + C_{82} x + C_{92}, \tag{11}$$

где $C_{12}, \ldots, C_{92}$ – новые константы интегрирования.

Теперь рассмотрим систему уравнений (8) *в области III* – без опирания на основание и без нагрузки. Здесь обе функции Хевисайда равны нулю. Система (8) здесь принимает вид

$$a_1 u_{1,xx} + a_6 \psi_{1,xx} - a_7 w_{1,xxx} = -p,$$
$$a_6 u_{1,xx} + a_2 \psi_{1,xx} - a_3 w_{1,xxx} - a_5 \psi_1 = 0,$$
$$a_7 u_{1,xxx} + a_3 \psi_{1,xxx} - a_4 w_{1,xxxx} = 0. \tag{12}$$

Искомые перемещения в этой области (индекс «3») будут [1]:

$$\psi_3 = C_{23}\mathrm{sh}(\beta_2 x) + C_{33}\mathrm{ch}(\beta_2 x) - \frac{\gamma_{12}}{\beta_2^2}(qx + C_{13}),$$

$$w_3(x) = \frac{1}{\alpha_{22}}\left[\frac{\alpha_{12}}{\beta_2}\left[C_{23}\mathrm{ch}(\beta_2 x) + C_{33}\mathrm{sh}(\beta_2 x) - \frac{\gamma_{12}}{\beta_2}\left(\frac{1}{2}qx + C_{13}\right)x\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{a_1 C_{13}}{6}x^3\right] + \frac{C_{43}}{2}x^2 + C_{53}x + C_{63},$$

$$u_3(x) = \gamma_{32}\left(C_{23}\mathrm{sh}(\beta_2 x) + C_{33}\mathrm{ch}(\beta_2 x) - C_{13}\frac{\gamma_{12}}{\beta_2^2}\right) + \frac{a_7}{2\alpha_{22}}C_{13}x^2 + C_{73}x + C_{83}. \qquad (13)$$

Объединяя (10), (11), (13) получим искомое решение краевой задачи:

$$\psi(x) = \psi_1(x) + (\psi_2(x) - \psi_1(x))H(x-a) + (\psi_3(x) - \psi_2(x))H(x-x_0),$$

$$u(x) = u_1(x) + (u_2(x) - u_1(x))H(x-a) + (u_3(x) - u_2(x))H(x-x_0),$$

$$w(x) = w_1(x) + (w_2(x) - w_1(x))H(x-x_0) + (w_3(x) - w_2(x))H(x-x_0). \qquad (14)$$

Константы интегрирования $C_{11}, \dots, C_{91}, C_{12}, \dots, C_{92}, C_{13}, \dots, C_{83}$ определяются из восьми граничных условий на торцах стержня и дополнительных 16 условий равенства перемещений и их производных в точках нерегулярности $x = a$, $x = x_0$ ($C_{71} = C_{72} = 0$).

1. $\langle \psi_2(x) - \psi_1(x) \rangle\big|_{x=x_1} = 0$
2. $\langle \psi_{2,x}(x) - \psi_{1,x}(x) \rangle\big|_{x=x_1} = 0$
3. $\langle \psi_{2,xx}(x) - \psi_{1,xx}(x) \rangle\big|_{x=x_1} = 0$
4. $\langle w_1(x) - w_2(x) \rangle\big|_{x=x_1} = 0$
5. $\langle w_{1,x}(x) - w_{2,x}(x) \rangle\big|_{x=x_1} = 0$
6. $\langle w_{1,xx}(x) - w_{2,xx}(x) \rangle\big|_{x=x_1} = 0$
7. $\langle u_1(x) - u_2(x) \rangle\big|_{x=x_1} = 0$
8. $\langle u_{1,x}(x) - u_{2,x}(x) \rangle\big|_{x=x_1} = 0$
9. $(x = 0,\ \psi_1 = 0)$
10. $(x = 0:\ u_1 = 0)$
11. $(x = 0:\ w_1 = 0)$
12. $(x = 0:\ w_{1,x} = 0)$
13. $(x = l:\ \psi_2 = 0)$
14. $(x = l:\ u_2 = 0)$
15. $(x = l:\ w_2 = 0)$
16. $(x = l:\ w_{2,x} = 0)$

Численные результаты

При численной реализации решений (14), (10)–(13) принималась *жесткая заделка* торцов стержня; интенсивность нагрузки $q_0 = 2$ МПа; пакет материалов слоев Д16Т–фторопласт–Д16Т; относительные толщины слоев $h_1 = 0{,}02$, $h_2 = 0{,}02$, $h_3 = 0{,}09$; модули упругости материалов (МПа): $G_1 = G_2 = 0{,}267 \cdot 10^5$; $G_3 = 90$; $K_1 = K_2 = 0{,}8 \cdot 10^5$; $K_3 = 4700$.

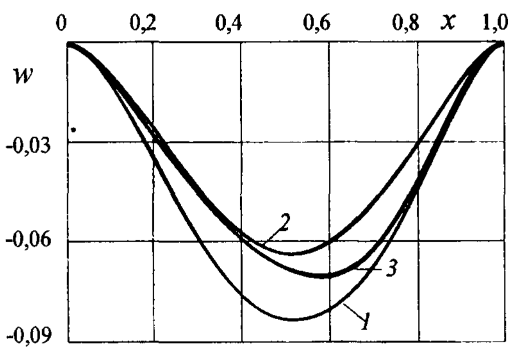
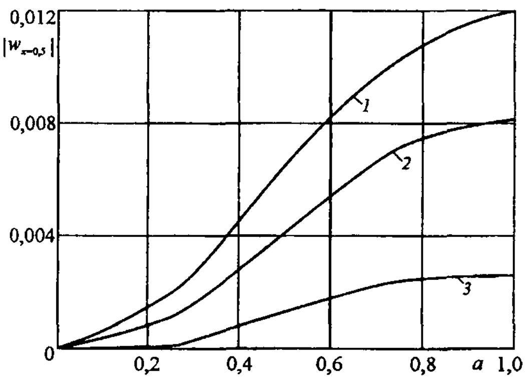


Рис. 2. Прогиб трехслойного стержня при непрерывной нагрузке

Рис. 2 показывает изменение прогиба вдоль оси при нагрузке распределенной по всей поверхности стержня ($a = l$): *1* – $\kappa = 0$; *2* – опирание всего стержня; *3* – оперта левая половина нижнего слоя ($\kappa = 100$ МПа/м). С увеличением области опирания перемещения уменьшаются, полное опирание приводит к уменьшения прогиба на 24 %, частичное – на 10 %.



1 – к = 1; *2* – к = 100; *3* – к = 10^5 МПа/м, величина прогибов *3* увеличена в 100 раз

Рис. 3. Прогибы (x = 0,5) в зависимости от длины интервала нагрузки a

На рис. 3 приведены графики изменения прогиба по середине стержня ($x = 0,5$) в зависимости от длины интервала нагрузки a ($b = 0$) при различных жесткостях упругого основания. Линейное увеличение интервала нагрузки вызывает нелинейный рост прогибов. При переходе от основания малой жесткости к средней (от *1* к *2*) прогиб уменьшается на 30 %. Если основание высокой жесткости *3*, то максимальный прогиб стержня составляет 0,23 % от первоначального прогиба (*1*).

Выводы

Приведенная методика и решение краевой задачи позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния при изгибе частично опертого трехслойного стержня при локальных нагрузках в зависимости от прочностных и геометрических параметров слоев и основания.

ЛИТЕРАТУРА

1 Плескачевский, Ю.М. Деформирование металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. навука, 2004. – 386 с.

2 Старовойтов, С.А. Напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня на упругом основании / Старовойтов С. А. // Вестник БелГУТа «Наука и транспорт».– 2004.– № 1 (10).– С. 25–28.

3 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 379 с.