КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The article is devoted to the features of use of a method of transformation of coordinates at the kinematic analysis of the closed spatial mechanism.

В настоящей работе решается задача кинематического анализа пространственного 4-звенного рычажного механизма методом преобразования координат с использованием аппарата матриц.

Механизм (рис.1) преобразует вращательное движение кривошипа 1 в горизонтальной плоскости $x_0 A y_0$ посредством шатуна 2 в качательное движение коромысла 3 в вертикальной плоскости $z_0 A x_0$. Шатун 2 образует 3-подвижную пару C (сферическую) с коромыслом 3 и 2-подвижную пару B (сферическую с пальцем) с кривошипом 1. На рис.1 изображены используемые системы координат и параметры относительного движения звеньев. Система координат $S_0(x_0, y_0, z_0)$, связанная со стойкой, является неподвижной, а система $S_1(x_1, y_1, z_1)$, связанная с кривошипом, системы $S_2(x_2, y_2, z_2)$, $S_2^{/}(x_2^{/}, y_2^{/}, z_2^{/})$, связанные с шатуном, и система $S_3(x_3, y_3, z_3)$, связанная с коромыслом, являются подвижными. Все системы координат являются правыми, и, следовательно, положительным направлением отсчёта поворота углов является направление против часовой стрелки. Обобщённая координата механизма – угол φ_1 поворота кривошипа 1 вокруг оси z_0.

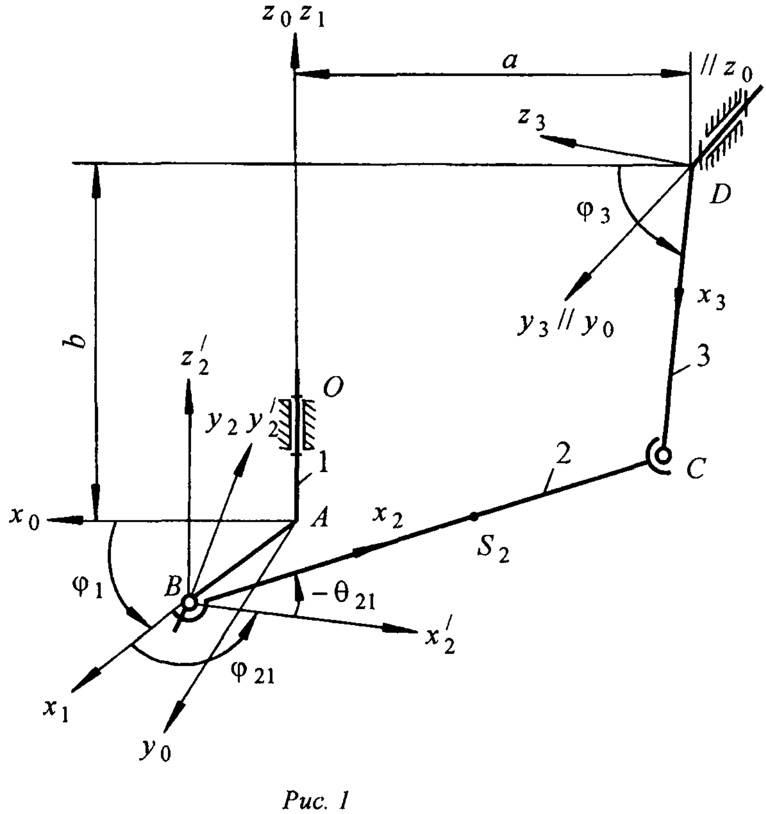

Рис. 1

Для получения матричного уравнения, выражающего зависимость угловых параметров относительного движения звеньев механизма, воспользуемся методом размыкания замкнутой кинематической цепи 1-2-3-0 в центре сферической пары C [2]. Тогда, используя два противоположных направления обхода замкнутого контура, можно записать следующее матричное уравнение замкнутости контура звеньев механизма, выражающее преобразование координат точки C в неподвижную систему двояким образом:

$$M_{01} M_{12'} M_{2'2} r_C^{(2)} = M_{03} r_C^{(3)}$$

или, так как $M_{01} M_{12'} M_{2'2} = M_{02}$,

$$M_{02} r_C^{(2)} = M_{03} r_C^{(3)}, \qquad (1)$$

где M_{01}, $M_{12'}$, $M_{2'2}$, M_{03} - матрицы преобразования координат (4-го порядка), учитывающие одновременно повороты и параллельные переносы координатных осей; $r_C^{(2)}$ и $r_C^{(3)}$ – столбцовые матрицы координат точки C в подвижных системах координат S_2 и S_3.

Выражения матриц перехода получаются в соответствии с известными правилами составления таких матриц [1]. Матрица M_{01} выражает переход от системы координат $x_1 y_1 z_1$ к системе $x_0 y_0 z_0$ при вращении системы $x_1 y_1 z_1$ вокруг общей оси $z_1 (z_0)$. Матрица $M_{12'}$ учитывает поворот системы $x_2' y_2' z_2'$ вокруг оси z_2', параллельной оси z_1, на угол φ_{21} и сдвиг вдоль оси x_1 на расстояние l_{AB}. Матрица $M_{2'2}$ учитывает поворот системы $x_2 y_2 z_2$ вокруг общей оси $y_2 (y_2')$ на угол θ_{21}. Матрица M_{03} учитывает поворот системы $x_3 y_3 z_3$ на угол φ_3 вокруг общей оси $y_3 (y_0)$, сдвиг вдоль оси x_0 на расстояние a и сдвиг вдоль оси z_0 на расстояние b.

Таким образом,

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad M_{12'} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{21} & -\sin\varphi_{21} & 0 & l_{AB} \\ \sin\varphi_{21} & \cos\varphi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$M_{2'2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{21} & 0 & \sin\theta_{21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_{21} & 0 & \cos\theta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; M_{03} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & 0 & \sin\varphi_3 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_3 & 0 & \cos\varphi_3 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$r_C^{(2)} = \begin{bmatrix} l_{BC} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad r_C^{(3)} = \begin{bmatrix} l_{CD} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Выполнив умножение матриц в соответствии с уравнением (1) и приравняв соответствующие элементы, получим систему нелинейных уравнений с 3 неизвестными θ_{21}, φ_{21} и φ_3 в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &l_{AB}\cos\varphi_1 + l_{BC}\cos\theta_{21}\cos(\varphi_{21}+\varphi_1) = l_{CD}\cos\varphi_3 - a, \\ &l_{AB}\sin\varphi_1 + l_{BC}\cos\theta_{21}\sin(\varphi_{21}+\varphi_1) = 0, \\ &-l_{BC}\sin\theta_{21} = l_{CD}\sin\varphi_3 + b. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Для решения системы уравнений (2) целесообразно использовать один из итерационных методов, например Ньютона или Зейделя.

Для получения производных $\dot\theta_{21}$, $\dot\varphi_{21}$, $\dot\varphi_3$, $\ddot\theta_{21}$, $\ddot\varphi_{21}$, $\ddot\varphi_3$ следует продифференцировать по времени уравнения (2), при этом получаются системы линейных уравнений относительно указанных параметров.

Угловая скорость ω_2 звена 2 в проекциях на оси неподвижной системы координат может быть получена на основании матричной формулы [3]

$$\Omega_2^{(0)} = \dot A_{02} A_{20}, \tag{3}$$

где $\Omega_2^{(0)}$ – кососимметричная матрица, составленная из проекций вектора $\overline{\omega}_2$ и имеющая вид

$$\Omega_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2^{z_0} & \omega_2^{y_0} \\ \omega_2^{z_0} & 0 & -\omega_2^{x_0} \\ -\omega_2^{y_0} & \omega_2^{x_0} & 0 \end{bmatrix}; \tag{4}$$

A_{02} и A_{20} – матрицы поворота (3-го порядка), которые получаются из матриц M_{02} и M_{20} исключением 4- й строки и 4-го столбца, причём матрица A_{20} есть транспонированная матрица по отношению к A_{02}, то есть $A_{20} = A_{02}^T$; $\dot A_{02}$ – производная по времени матрицы A_{02}.

После получения выражений матриц $\dot A_{02}$ и A_{20} и их перемножения согласно формуле (3) на основании выражения (4) имеем

$$\omega_2^{x_0} = -\dot\theta_{21}\sin(\varphi_{21}+\varphi_1),$$

$$\omega_2^{y_0} = \dot\theta_{21}\cos(\varphi_{21}+\varphi_1),$$

$$\omega_2^{z_0} = \dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1 .$$

Угловая скорость ω_3 звена 3 в проекциях на оси неподвижной системы координат получается непосредственно на основании рис.1:

$$\omega_3^{x_0} = 0, \quad \omega_3^{y_0} = \dot{\varphi}_3, \quad \omega_3^{z_0} = 0 .$$

Угловые ускорения ε_2 и ε_3 находятся путём дифференцирования проекций угловых скоростей:

$$\varepsilon_2^{(0)} = \dot{\omega}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_{21}\sin\left(\varphi_{21}+\varphi_1\right) - \dot{\theta}_{21}\left(\dot{\varphi}_{21}+\dot{\varphi}_1\right)\cos\left(\varphi_{21}+\varphi_1\right) \\ \dot{\theta}_{21}\cos\left(\varphi_{21}+\varphi_1\right) - \dot{\theta}_{21}\left(\dot{\varphi}_{21}+\dot{\varphi}_1\right)\sin\left(\varphi_{21}+\varphi_1\right) \\ \ddot{\varphi}_{21}+\ddot{\varphi}_1 \end{bmatrix};$$

$$\varepsilon_3^{(0)} = \dot{\omega}_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для центра масс S_2 звена 2 имеем следующее соотношение:

$$r_{S_2}^{(0)} = M_{02}\, r_{S_2}^{(2)} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} x_{S_2}^{(0)} \\ y_{S_2}^{(0)} \\ z_{S_2}^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = M_{02} \begin{bmatrix} l_{AS_2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

откуда могут быть получены выражения координат $x_{S_2}^{(0)}$, $y_{S_2}^{(0)}$, $z_{S_2}^{(0)}$. Путём дифференцирования этих выражений можно получить проекции скорости и ускорения точки S_2:

$$V_{S_2}^{x_0} = \dot{x}_{S_2}, \quad V_{S_2}^{y_0} = \dot{y}_{S_2}, \quad V_{S_2}^{z_0} = \dot{z}_{S_2};$$

$$a_{S_2}^{x_0} = \ddot{x}_{S_2}, \quad a_{S_2}^{y_0} = \ddot{y}_{S_2}, \quad a_{S_2}^{z_0} = \ddot{z}_{S_2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев, П.А. Кинематика пространственных механизмов / П.А. Лебедев. – М.; Л.: Машиностроение, 1966. – 280 с.
2. Литвин, Ф.Л. Определение функции положения пространственного механизма способом условного размыкания контура / Ф.Л. Литвин // Машиноведение. – 1970. – № 3. – С. 51–57.
3. Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
4. Механика машин / И.И. Вульфсон [и др.]; под ред. Г.А. Смирнова. – М.: Высш. шк., 1996. – 511 с.