

# ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ДВУХШАРНИРНОЙ КАРДАННОЙ ПЕРЕДАЧИ С ПОМОЩЬЮ КОРРЕЛЯЦИОННО- РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Гурвич Ю.А., Вареник А.А., Августиневич А.Г., Старовойтова О.Л.

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

*This article contains a description of a new method of unevenness definition in dependence of obliquity angle and its influence on output cinematic characteristics of two-joint cardan shafts. Also conducted a study of cardan shafts using correlation-regression analysis.*

В отличие от работ [1-7] здесь впервые сделана попытка исследовать влияние угла поворота  $\alpha$  ведущего вала I, угла излома  $\gamma_2$  и угла между вилками  $\psi$ , расположенными на одном валу II, на угловое ускорение  $\varepsilon_3$  ведомого вала III двухшарнирной карданной передачи, схема которой представлена на рис. 1, с помощью корреляционно-регрессионного анализа и программного пакета STATISTICA.

Корреляционно-регрессионный анализ широко используется при исследовании различных зависимостей между статистическими рядами. В зависимости от количества рассматриваемых факторов корреляционно-регрессионный анализ подразделяется на два вида: парный и множественный. Парный корреляционно-регрессионный анализ устанавливает связь между двумя факторами:  $y_i = x_i$ ; многофакторный – между  $n$  факторами, один из которых – зависимый, а остальные – независимые:  $y_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$  [8-10].

При изучении кинематики плоской двухшарнирной карданной передачи сначала был проведён парный, а затем многофакторный корреляционно-регрессионный анализ.

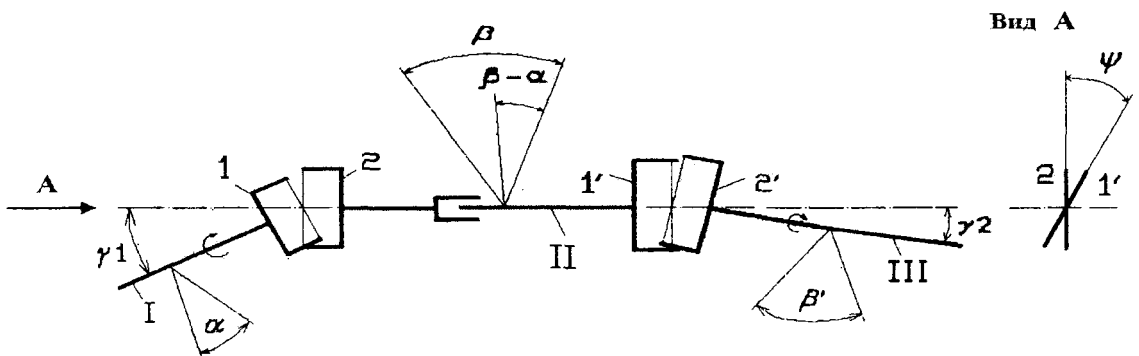


Рис. 1. Схема плоской двухшарнирной карданной передачи с двумя карданами

Для определения углового ускорения  $\varepsilon_3$  вала III двухшарнирной карданной передачи в качестве исходной информации используем формулу угла поворота ведомого вала  $\beta'$ , приведенную в [2]:

$$\beta' = \arctan \left( \frac{\cos \gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)}{\cos \gamma_1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \psi + \cos^2 \gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \psi (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \gamma_1)} \right), \quad (1)$$

где  $\alpha$  – угол поворота вала I;  $\beta'$  – угол поворота вала III;  $\gamma_1$  – угол излома вала I;  $\gamma_2$  – угол излома вала III;  $\psi$  – угол между вилками 2 и 1', расположенными на валу II.

Сначала определим угловую скорость ведомого вала. Так как угол  $\beta'$  является функцией двух переменных  $\alpha, \gamma_2$ , то полная первая производная по времени от (1) представляет собой сумму двух слагаемых

$$\frac{d\beta'}{dt} = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2} \cdot \frac{d\gamma_2}{dt}.$$

Введем замены:

$$L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}, \quad L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2}, \quad \omega_3 = \frac{d\beta'}{dt} - \text{угловая скорость}$$

вращения вала III;  $\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt}$  – угловая скорость вала I;  $\omega_{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{dt}$  – угловая скорость вала III при переменном угле  $\gamma_2$ .

Выражение (1) перепишем в виде

$$\omega_3 = \omega_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi). \quad (2)$$

Теперь определим угловое ускорение ведомого вала  $\varepsilon_3$ , взяв полную производную по времени от левой и правой частей выражения (2) (в [7] приведен вывод формулы  $\varepsilon_3$ ):

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_1 \cdot \left( \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial\alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial\gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right) + \\ + \varepsilon_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot \left( \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial\alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial\gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right), \quad (3) \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_1$  – угловое ускорение вала I;  $\varepsilon_{\gamma_2}$  – угловое ускорение вала III при переменном угле  $\gamma_2$ .

В работе исследование углового ускорения  $\ddot{\beta}' = \varepsilon_3$  с помощью парного корреляционно-регрессионного анализа было выполнено при переменных углах:

1.  $\alpha$  (при фиксированных углах  $\gamma_1, \gamma_2, \psi$ ). Примем, например,  $\gamma_1 = \pi/36$ ,  $\gamma_2 = \pi/36$ ,  $\psi = \pi/90$ ;
2.  $\gamma_1$  (при фиксированных углах  $\alpha, \gamma_2, \psi$ ). Примем, например,  $\alpha = \pi/6$ ,  $\gamma_2 = \pi/36$ ,  $\psi = \pi/90$ ;
3.  $\gamma_2$  (при фиксированных углах  $\alpha, \gamma_1, \psi$ ). Примем, например,  $\alpha = \pi/6$ ,  $\gamma_1 = \pi/36$ ,  $\psi = \pi/90$ ;
4.  $\psi$  (при фиксированных углах  $\alpha, \gamma_1, \gamma_2$ ). Примем, например,  $\alpha = \pi/6$ ,  $\gamma_1 = \pi/36$ ,  $\gamma_2 = \pi/36$ .

Значения углов  $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi$  и углового ускорения  $\ddot{\beta}'$  в функции этих углов или  $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\alpha)$ ,  $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\gamma_1)$ ,  $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\gamma_2)$ ,  $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\psi)$  определим по формуле (3), используя программный пакет MATHCAD (рис. 2). Тогда в обозначениях MATHCAD:

- $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi$  (рад);
- $\ddot{\beta}'(\alpha) = b2\alpha$ ,  $\ddot{\beta}'(\gamma_1) = b2\gamma_1$ ,  $\ddot{\beta}'(\gamma_2) = b2\gamma_2$ ,  $\ddot{\beta}'(\psi) = b2\psi$  (рад/с<sup>2</sup>).

В столбце исходных данных угол  $\alpha$  принимает значения  $91\pi/180$  и  $271\pi/180$ , вместо  $\alpha = 90\pi/180$  и  $\alpha = 270\pi/180$ , так как  $\text{tg}\alpha$ , входящий в формулу  $\varepsilon_3$  [7], при значениях этих углов стремится к  $\pm \infty$ .

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/6 \\ \pi/3 \\ 91\pi/180 \\ 2\pi/3 \\ \pi \\ 5\pi/4 \\ 271\pi/180 \\ 7\pi/4 \\ 2\pi \end{bmatrix}, \quad b2\alpha = \begin{bmatrix} 4.002 \\ 2.422 \\ -0.577 \\ -1.99 \\ -0.414 \\ 4.002 \\ 0.91 \\ -1.99 \\ 1.097 \\ 4.002 \end{bmatrix};$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} \pi/180 \\ 2\pi/180 \\ 3\pi/180 \\ 4\pi/180 \\ 5\pi/180 \\ 6\pi/180 \\ 7\pi/180 \\ 8\pi/180 \\ 9\pi/180 \\ 10\pi/180 \end{bmatrix}, \quad b2\gamma_1 = \begin{bmatrix} 58.543 \\ 51.558 \\ 39.897 \\ 23.532 \\ 2.422 \\ -23.483 \\ -54.249 \\ -89.951 \\ -130.675 \\ -176.523 \end{bmatrix};$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} \pi/180 \\ 2\pi/180 \\ 3\pi/180 \\ 4\pi/180 \\ 5\pi/180 \\ 6\pi/180 \\ 7\pi/180 \\ 8\pi/180 \\ 9\pi/180 \\ 10\pi/180 \end{bmatrix}, \quad b2\gamma_2 = \begin{bmatrix} -55.592 \\ -48.406 \\ -36.332 \\ -19.384 \\ 2.422 \\ 29.064 \\ 60.514 \\ 96.74 \\ 137.702 \\ 183.359 \end{bmatrix};$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \pi/360 \\ \pi/180 \\ 3\pi/360 \\ 2\pi/180 \\ 5\pi/360 \\ 3\pi/180 \\ 7\pi/360 \\ 4\pi/180 \\ 9\pi/360 \\ 5\pi/180 \end{bmatrix}, \quad b2\psi = \begin{bmatrix} 0.703 \\ 1.294 \\ 1.867 \\ 2.422 \\ 2.96 \\ 3.478 \\ 3.979 \\ 4.46 \\ 4.923 \\ 5.367 \end{bmatrix}.$$

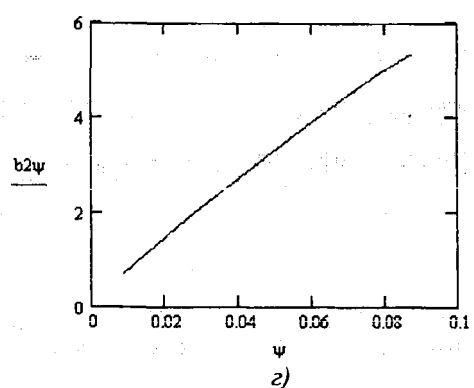
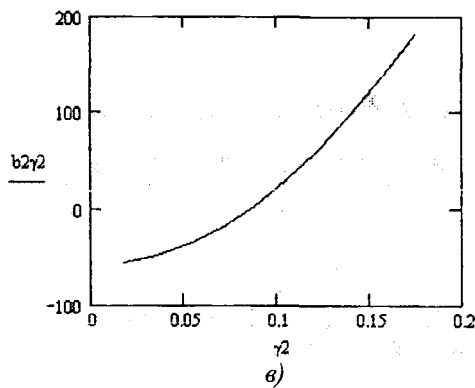
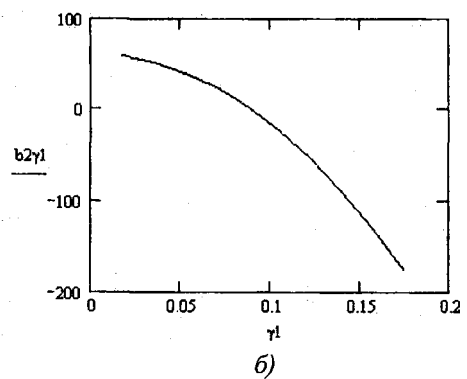
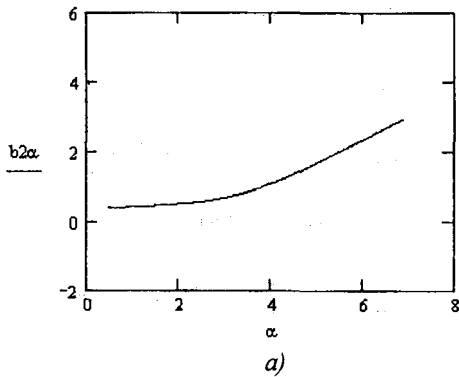


Рис. 2. Графики зависимости углового ускорения от углов  $\alpha$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\psi$ :

а)  $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\alpha)$ , б)  $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\gamma_1)$ , в)  $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\gamma_2)$ , г)  $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\psi)$

Из графика, представленного на рис. 2, видно, что зависимость между угловым ускорением  $\beta'$  и углом  $\alpha$  близка к параболической; между  $\beta'$  и углом  $\gamma_1$  близка к гиперболической; между  $\beta'$  и углом  $\gamma_2$  близка к параболической; между  $\beta'$  и углом  $\psi$  близка к линейной. Поэтому при выводе формулы парной регрессии с помощью программного пакета STATISTICA будем использовать параболическую, гиперболическую и линейную функции.

Итоги регрессии для зависимой переменной: b2 (Таблица d)						
R= .51420124 R2= .26440292 Скорректир. R2= .05423232						
F(2,7)=1,2580 p<.34138 Станд. ошибка оценки: 2,3202						
N=10	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	В	Стд.Ош. В	t(7)	p-уров.
Св.член			2,839761	1,695868	1,67452	0,137940
alfa	-1,87221	1,245710	-0,035869	0,023686	-1,50293	0,176561
V1**2	1,97214	1,245710	0,000103	0,000065	1,58314	0,157405

Итоги регрессии для зависимой переменной: b2 (Таблица d)						
R= .99200825 R2= .98408038 Скорректир. R2= .97953191						
F(2,7)=216,35 p<.00000 Станд. ошибка оценки: 11,596						
N=10	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	В	Стд.Ош. В	t(7)	p-уров.
Св.член			179,9129	18,38532	9,7857	0,000025
gamma1	-1,23608	0,081060	-33,0901	2,16999	-15,2490	0,000001
1/V1	-0,32481	0,061060	-94,9492	23,69563	-4,0070	0,005144

Итоги регрессии для зависимой переменной: b2 (Таблица d)						
R= .99999946 R2= .99999893 Скорректир. R2= .99999862						
F(2,7)=3258E3 p<.0,0000 Станд. ошибка оценки: .09701						
N=10	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	В	Стд.Ош. В	t(7)	p-уров.
Св.член			-58,2040	0,114103	-510,102	0,000000
V1**2	0,996473	0,001748	2,4070	0,004222	570,116	0,000000
gamma2	0,003619	0,001748	0,0987	0,047654	2,070	0,077184

Итоги регрессии для зависимой переменной: b2 (Таблица d)						
R= .99899418 R2= .99796938 Скорректир. R2= .99773805						
F(1,8)=3970,9 p<.00000 Станд. ошибка оценки: .07472						
N=10	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	В	Стд.Ош. В	t(8)	p-уров.
Св.член			0,294200	0,051043	5,76375	0,000422
psi	0,998994	0,015853		0,016453	63,01480	0,000000

Рис. 3. Результаты парной регрессии для углов  $\alpha$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\psi$

Из рис. 3 видно, что зависимости  $\beta'$  от углов  $\alpha$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\psi$  выражаются моделями:

$$\begin{aligned} \beta' &= 2.839761 - 0.0358 \cdot \alpha^2 - 0.000103 \cdot \alpha; \\ \beta' &= 179.9129 - 33.0901 \cdot \gamma_1 - 94.9492 \cdot 1/\gamma_1; \\ \beta' &= -58.2040 + 2.4070 \cdot \gamma_2^2 + 0.0987 \cdot \gamma_2; \\ \beta' &= 0.2942 + 1.036764 \cdot \psi. \end{aligned}$$

Применим многофакторный корреляционно-регрессионный анализ для установления одновременной функциональной зависимости между исследуемой случайной величиной и факторами  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  или  $\beta' = \beta'(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)$ .

На стадии количественного анализа отберем факторы, влияние которых на исследуемую зависимость  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  существенно. В уравнении множественной регрессии существенными обычно оказываются те факторы, которые имеют существенную корреляционную связь с результативным признаком, т. е. с  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (большое значение коэффициента корреляции), а между собой – несущественную (малое значение коэффициента корреляции). На данной стадии рассчитывается корреляционная матрица (табл. 1).

Таблица 1

	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	...	x <sub>n</sub>
y	1	r <sub>yx1</sub>	r <sub>yx2</sub>	...	r <sub>yxn</sub>
x <sub>1</sub>		1	r <sub>x1x2</sub>	...	r <sub>x1xn</sub>
x <sub>2</sub>			1	...	r <sub>x2xn</sub>
x <sub>3</sub>				...	r <sub>x3xn</sub>
⋮					⋮
x <sub>n</sub>					1

Коэффициент корреляции между факторами  $x_i$  и  $x_j$  определяется по формуле

$$r_{x_i x_j} = \frac{\sum_{k=1}^n [(x_{ik} - \bar{x}_i) \cdot (x_{jk} - \bar{x}_j)]}{\sqrt{\sum_{k=1}^n [(x_{ik} - \bar{x}_i)^2 \cdot (x_{jk} - \bar{x}_j)^2]}} \quad (4)$$

где  $\bar{x}_i$  и  $\bar{x}_j$  - соответственно, среднее по строкам и столбцам.

В нашем случае корреляционная матрица между углами  $\alpha$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\psi$  и угловым ускорением  $\varepsilon_3 = \ddot{\beta}'$  примет следующий вид:

$$Matriza = \begin{bmatrix} 1 & r_{\varepsilon_3 \alpha} & r_{\varepsilon_3 \gamma_1} & r_{\varepsilon_3 \gamma_2} & r_{\varepsilon_3 \psi} \\ r_{\varepsilon_3 \alpha} & 1 & r_{\alpha \gamma_1} & r_{\alpha \gamma_2} & r_{\alpha \psi} \\ r_{\varepsilon_3 \gamma_1} & r_{\alpha \gamma_1} & 1 & r_{\gamma_2 \gamma_1} & r_{\psi \gamma_1} \\ r_{\varepsilon_3 \gamma_2} & r_{\alpha \gamma_2} & r_{\gamma_2 \gamma_1} & 1 & r_{\gamma_2 \psi} \\ r_{\varepsilon_3 \psi} & r_{\alpha \psi} & r_{\psi \gamma_1} & r_{\gamma_2 \psi} & 1 \end{bmatrix},$$

$$Matriza = \begin{bmatrix} 1 & 0.032 & -0.973 & 0.975 & 0.999 \\ 0.032 & 1 & 0.955 & 0.965 & 0.995 \\ -0.973 & 0.955 & 1 & 1 & 0.02 \\ 0.975 & 0.965 & 1 & 1 & 1 \\ 0.999 & 0.995 & 0.02 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из матрицы видно, что коэффициент корреляции:

- между  $\ddot{\beta}'$  и  $\alpha$  равен 0.032;
- между  $\ddot{\beta}'$  и  $\gamma_1$  равен -0.973;
- между  $\ddot{\beta}'$  и  $\gamma_2$  равен 0.975;
- между  $\ddot{\beta}'$  и  $\psi$  равен 0.999.

Для фактора  $\alpha$  (матрицу рассматриваем по столбцам) связь с фактором  $\gamma_1$  сильнее, чем с функцией  $\ddot{\beta}'$ , потому что  $r_{\alpha \gamma_1} = 0.955 > r_{\varepsilon_3 \alpha} = 0.032$ . Следовательно, фактор  $\alpha$  является несущественным и его нужно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Исходные данные  $\ddot{\beta}'$  для множественной корреляции получим из формулы (3) по 29 значениям углов  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\psi$  (в градусах):

$\gamma_1 =$	0	$\gamma_2 =$	0.5	$\psi =$	0.2	$\beta' =$	0.832
	0.5		1		0.3		1.735
	1		1.5		0.8		3.095
	1.5		1.75		1.1		2.609
	2		2		1.3		0.899
	2.5		2.25		1.7		-1.924
	3		2.5		2.2		-6.13
	3.5		2.75		2.5		-11.565
	4		3		2.7		-18.047
	4.5		3.25		3		-25.128
	5		3.5		3.3		-32.092
	5.5		3.75		3.8		-38.979
	6		4		4.5		-46.214
	6.5		4.25		4.9		-51.116
	7		4.5		5.3		-51.857
	7.5		4.75		5.9		-43.329
	8		5		6.1		-36.733
	8.5		5.25		6.5		-22.233
	9		5.5		7		-11.848
	9.5		5.75		7.7		1.416
	10		6		7.9		19.769
	10.5		6.25		8.3		61.176
	11		6.5		9.1		94.006
	11.5		6.75		9.5		145.979
	12		7		9.7		200.717
	12.5		7.25		10.1		243.717
	13		7.5		10.3		296.951
	13.5		7.75		10.7		341.095
	14		8		11.1		378.234

В работе были рассмотрены:

- линейная модель, для которой коэффициент множественной корреляции  $R = 0,754$ ;
- параболическая модель, для которой коэффициент множественной корреляции  $R = 0,964$ ;
- гиперболическая модель, для которой коэффициент множественной корреляции  $R = 0,597$ .

Так как коэффициент множественной корреляции у параболической модели наибольший, то она наиболее точно описывает связь между  $\beta'$  и углами  $\gamma_1, \gamma_2, \psi$ .

Приведем расчет параболической модели.

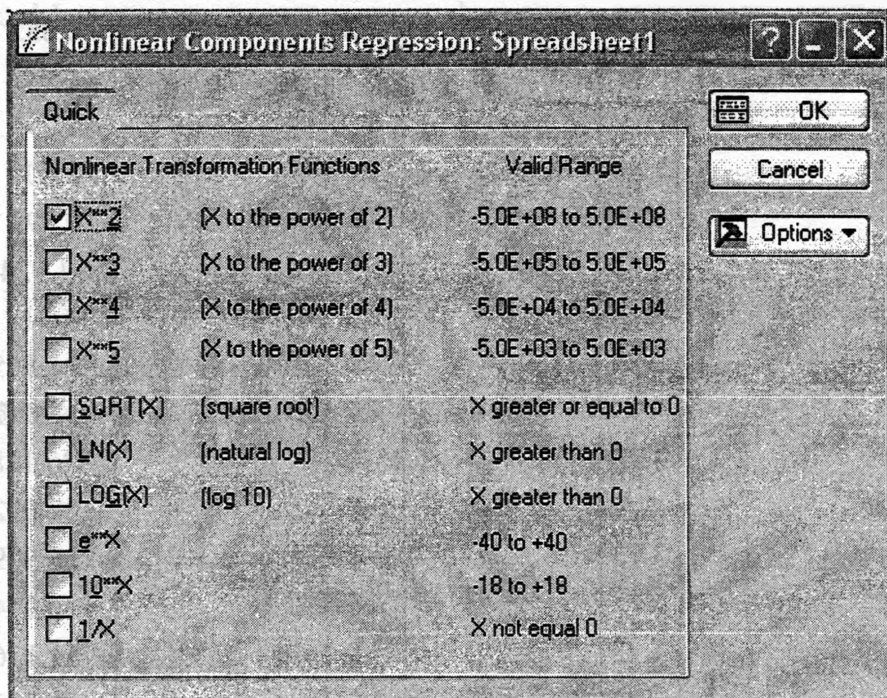


Рис. 4. Выбор модели для нелинейной многофакторной регрессии

Произведя все необходимые вычисления в программе STATISTICA, получим таблицу результатов.

**Multiple Regression Results**

Dependent: beta Multiple R = .96423730 F = 110.2967  
 R<sup>2</sup> = .92975357 df = 3,25  
 No. of cases: 29 adjusted R<sup>2</sup> = .92132400 p = .000000  
 Standard error of estimate: 34.737408558  
 Intercept: 89.164869002 Std. Error: 21.18733 t( 25) = 4.2084 p = .0003

V2\*\*2 b\*=9.60

V3\*\*2 b\*=-7.5

V4\*\*2 b\*=-1.3

Regression Summary for Dependent Variable: beta (Spreadsheet1)  
 R= .96423730 R<sup>2</sup>= .92975357 Adjusted R<sup>2</sup>= .92132400  
 F(3,25)=110.30 p<.00000 Std. Error of estimate: 34.737

	b*	Std. Err. of b*	b	Std. Err. of b	t(25)	p-value
N=29						
<b>Intercept</b>			89.1649	21.18733	4.20841	0.000290
V2**2	9.60361	1.477173	19.2803	2.96559	6.50134	0.000001
V3**2	-7.48370	0.913547	-47.2314	5.76561	-8.19192	0.000000
V4**2	-1.27852	0.901895	-3.9265	2.76986	-1.41759	0.168655

Рис. 5. Результаты многофакторной регрессии для параболической модели

Полученная многофакторная модель зависимости функции отклика от предикторов  $\hat{\beta}' = \hat{\beta}'(\gamma_1, \gamma_2, \psi)$  имеет вид

$$\hat{\beta}' = 89.1649 + 19.2803 \cdot \gamma_1^2 - 47.2314 \cdot \gamma_2^2 - 3.9265 \cdot \psi^2.$$

Из приведенных результатов, полученных с помощью корреляционно-регрессионного анализа, следует, что:

- зависимость между откликом и предикторами сильная, так как  $R = 0,964 > 0,75$ ;
- построенная параболическая регрессия адекватно описывает взаимосвязь между откликом и предикторами;
- свободный член статистически значим [9].

Полученная модель может быть использована:

- для прогнозирования значений углового ускорения  $\ddot{\beta}'$ ;
- для определения исходных значений углов  $\gamma_1, \gamma_2, \psi$  при заданном значении углового ускорения  $\ddot{\beta}'$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. – М., 1954. – 379 с.
2. Малаховский Я. Э., Лапин А. А. Карданные передачи. – М.: Машгиз, 1962. – 153 с.
3. Островерхов Н. Л., Русецкий И. К., Бойко Л. И. Динамическая нагруженность трансмиссий колёсных машин. – Минск: Наука и техника, 1977. – 191 с.
4. Проектирование универсальных шарниров и ведущих мостов. Пер. с англ. Попова Ю. В. – Л.: Машиностроение. – 1984. – 463 с.
5. Бойко Л. И. Механика приводов колеблющихся рабочих органов машин. – Мн.: ООО «Мэджик бук». – 2003 г. – 239 с.
6. Гурвич Ю. А., Сафронов К. И., Пащенко А. В. Анализ кинематических характеристик карданных передач // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 24. – С. 261–266.
7. Гурвич Ю. А., Вареник А. А. Анализ кинематических характеристик одношарнирной и двухшарнирной карданных передач / Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ, 2010. – № 25. – С. 258–262.
8. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем. – Минск: Дизайн ПРО, 2004. – 640 с.
9. Халафян А. А. Учебник STATISTICA 6 Статистический анализ данных. – М.: Бином, 2007. – 508 с.
10. Лебедева Г. И., Микулик Н. А. Прикладная математика. – Минск: Асар, 2009. – 512 с.