УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В РЯД ПО КОРНЯМ ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ

Акимов В.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In the given work use of classical integrals at decomposition of functions in not orthogonal number on roots of the transcendental equations is shown.

При решении задачи о растяжении (сжатии) упругого квадрата в точной постановке при выполнении краевых условий необходимо разложить заданную функцию в неортогональный ряд по корням трансцендентного уравнения $\operatorname{sh}\lambda a + \lambda a = 0$ [1]. Исследуем некоторые малоизученные на сегодняшний день некоторые характерные аспекты данного разложения.

Представим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sh}\lambda_n x, \qquad (1)$$

где λ_n – корни уравнения $\operatorname{sech}\lambda a + \lambda a = 0$.

Первоначально определим коэффициенты этого разложения операторным методом. Для достижения этой цели подействуем на обе части равенства (1) оператором $D(d_x) = \frac{sh a d_x + a d_x}{d_x{}^2 - \lambda_n{}^2}$, где $d_x = \frac{d}{dx}$.

При таком подходе приходится решать задачу об обратном операторе вида

$$D_2^{-1} = d_x{}^2 - \lambda_m{}^2 f(x) = \frac{f(x)}{d_x{}^2 - \lambda_m{}^2}.$$

Решение этой задачи рассмотрено в [2]. Здесь, кроме этого, укажем на другой, теперь уже чисто классический случай. Итак, запишем $\frac{f(x)}{d_x{}^2 - \lambda_n{}^2} = g(x)$. Находим $g(x)$ из соотношения $d_x{}^2 - \lambda_n{}^2\, g(x) = f(x)$. Сперва решим однородное уравнение $d_x{}^2 - \lambda_n{}^2\, g(x) = 0$. Получим: $\bar{g}(x) = C_1 \operatorname{sh}\lambda_n x + C_2 \operatorname{ch}\lambda_n x$. Частное решение $g^*(x)$ ищем методом вариации произвольных постоянных Лагранжа [3]. В результате получим $g(x) = \bar{g}(x) + g^*(x)$.

$$\frac{f(x)}{d_x{}^2 - \lambda_n{}^2} = C_1 \operatorname{sh}\lambda_n x + C_2 \operatorname{ch}\lambda_n x + \frac{1}{\lambda_n}\int_{x_0}^{x} f(\xi) \operatorname{sh}\lambda_n (x-\xi) d\xi. \qquad (2)$$

Сделаем по поводу формулы (2) одно замечание. Заметим, что переменная х входит в правую часть двояким образом. Во-первых, х является верхним пределом интеграла, во-вторых, она входит под знак интеграла не как переменная интегрирования, а как добавочный параметр, который считается постоянным при интегрировании. Далее нетрудно показать, что частное решение удовлетворяет нулевым начальным условиям при $x = x_0$, то есть $g^*(x)|_{x=x_0} = 0$, $(g^*(x))'|_{x=x_0} = 0$. Первое из этих равенств непосредственно вытекает из (2), так что при $x = x_0$ верхний предел интеграла совпадает с нижним, интеграл равен нулю. Чтобы проверить второе равенство, определим $g'(x)$, помня, что производная интегралов данного типа равна подъинтегральной функции при верхнем пределе плюс интеграл от производной подъинтегральной функции [3]. Тогда получим

$(g^*(x))' = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{ch}\,\lambda_n(x-\xi)\,d\xi$ откуда непосредственно и вытекает второе утверждение.

Что касается оператора $D_1 = shad_x + ad_x$, состоящего стоящего в числителе оператора $D = \frac{D_1}{D_2}$, то для него можно использовать соотношение вида

$$(shad_x + ad_x)[f(x)] = \left[\frac{1}{2}(e^{ad_x} - e^{-ad_x}) + ad_x\right][f(x)] = \frac{1}{2}[f(x+a) - \\ - f(x-a)] + a(f(x))'; \tag{3}$$

так как для произвольных функций верно соотношение $e^{ad_x} f(x) = f(x+a)$.

Если взять, например, $f(x) = \mathrm{sh}\,\lambda_n x$, то на основании (3) можно получить формулу, установленную в [2] операторным методом:

$$D[\mathrm{sh}\,\lambda_n x] = \frac{a}{\lambda_n}(\mathrm{ch}\,\lambda_n x + 1)\,\mathrm{ch}\,\lambda_n x. \tag{4}$$

В свою очередь соотношение (4) проверяется непосредственным интегрированием [1,2]

$$\int_0^a \mathrm{sh}\,\lambda_n x\,\mathrm{sh}\lambda_m(a-x)dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{a}{2}(\mathrm{ch}\lambda_n a + 1) \end{cases}$$

Итак, для исследования разложения функций в ряд по корням трансцендентных уравнений, наряду с операторным методом показано применение известных классических интегральных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Введение в аналитическую механику упругих тел. – Минск: БНТУ, 2004. – 335 с.
2. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. – Минск: Технопринт, 2003. – 101 с.
3. Смирнов, И.С. Курс высшей математики. – 21-е изд., стереотип. – М., 1974. – Т. 2. – 656 с.