

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕКОНСТРУИРОВАННОГО СРЕДНЕГО УША, ПОДВЕРГНУТОГО ТИМПАНОСТАПЕДОПЛАСТИКЕ И ПЕРФОРАЦИИ ПОДНОЖНОЙ ПЛАСТИНЫ СТРЕМЕНИ

Славашевич И.Л., Михасев Г.И., Петрова Л.Г.

Белорусский государственный университет, Минск

Biomechanical model of the reconstructed middle ear subjected to tympanostapedoplasty and the stapes footplate perforation is proposed. The basic goal of this study is to clear up the influence of the tangential displacements in an eardrum at modes and fundamental frequencies of the reconstructed middle ear. The reconstructed tympanic membrane is modeled as an isotropic elastic annular plate.

Механические повреждения барабанной перепонки, патологические изменения ее механических свойств, вызванные воспалительными процессами в среднем ухе, могут привести к перфорации барабанной перепонки, повреждению слизистой оболочки, слухового нерва. Тимпаноластика – это операция, направленная на ликвидацию воспалительного (гнойного) процесса в ухе, закрытие перфорации барабанной перепонки и восстановление трансмиссионного механизма слуховых косточек. Ограничение подвижности цепи звукопроводящих косточек при отосклеротическом анкилозе может привести к частичной или полной фиксации стремени. При данной патологии в клинической практике часто прибегают к стапедопластике, которая предполагает фенестрацию овального окна, заключающуюся в высверливании отверстия в подножной пластинке стремени, через которое вводится ствол протеза в улитку внутреннего уха [1]. Наиболее сложным является случай тотальной реконструкции, предполагающий одновременно тимпаноластику и стапедопластику с фенестрацией подножной пластинки [2]. В данном случае основание введенного протеза типа TORP [3] упирается в восстановленную барабанную перепонку, а конец покоится в кохлеарной жидкости улитки.

Целью работы является построение динамической модели звукопроводящей системы реконструированного среднего уха с учетом тангенциальных деформаций ТМ и, соответственно мембранных усилий. Излишние напряжения в ТМ приводят к смещению спектра собственных частот восстановленной колебательной системы [4]. Степень искажения собственных частот может быть значительной и приводить к заметной потере порога восприимчивости звукового сигнала.

Восстановленную колебательную систему среднего уха будем моделировать как систему, состоящую из тонкой (толщиной h) круглой пластинки (с модулем упругости Юнга E и коэффициентом Пуассона ν) радиуса a , изготовленной из хрящевого имплантата, и сопряженного с ней твердого тела, моделирующего протез типа TORP (рис. 1). Данный протез состоит из круглой недеформированной пластинки, (основания) радиуса b и стержня, жестко сопряженного с ней под некоторым углом γ (рис. 2).

Постановка задачи. Разрешающие уравнения

В работах [5, 6] показано, что наиболее предпочтительной технологией установки протеза, с точки зрения минимизации начальных напряжений, является такая технология, когда основание протеза размещается на восстановленной тимпанальной мембране (ТМ) как можно ближе к центру.

Рассмотрим здесь случай, когда центры восстановленной ТМ и основания протеза совпадают. Будем считать, что основание протеза и хрящевой имплантат жестко склеены, при этом пластину рассматриваем как кольцевую с внутренним радиусом b и внешним радиусом a .

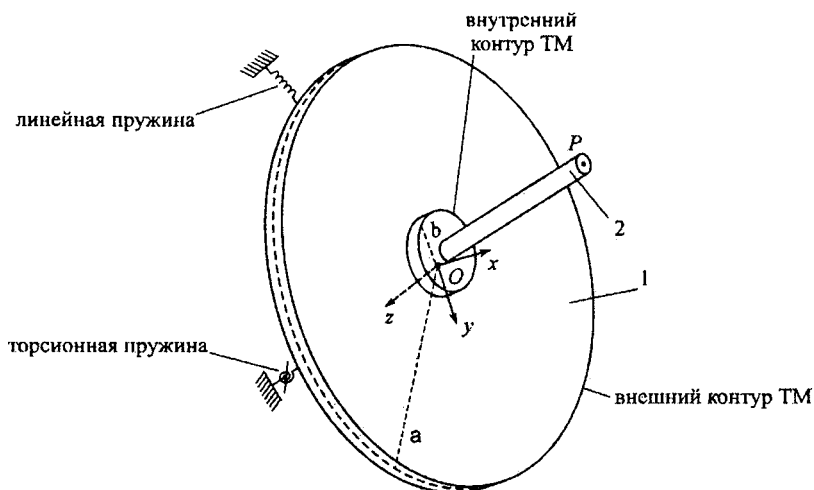


Рис. 1. Реконструированная ТМ радиуса a (1) и протез типа TORP (2)

Состояние равновесия реконструированной колебательной системы описывается уравнениями равновесия пластины и протеза. Введем глобальную декартову систему координат (СК) $Oxyz$, связанную с центром пластины (рис. 1).

Уравнение колебаний кольцевой изотропной пластинки, моделирующей реконструированную ТМ, имеет вид [7]:

$$D\Delta^2 W(r,t) + \rho h \frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

$$r \frac{\partial T_1}{\partial r} + T_1 - T_2 + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad r \frac{\partial S}{\partial r} + 2S + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = \rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где $T_1 = K \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\nu}{r} U + \frac{\nu}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$, $T_2 = K \left(\nu \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$,

$S = \frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} V + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)$ – мембранные усилия,

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ – жесткости пластины,

E – модуль упругости Юнга,

ν – коэффициент Пуассона,

h – толщина пластины,

w, u, v – нормальное, радиальное и касательное смещения точек пластины соответственно,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат r, φ .

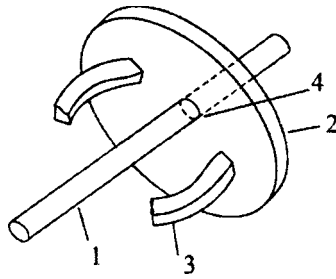


Рис. 2. Ствол протеза, введенный в отверстие подножной пластинки стремени:
 1 – восстановленная тимпанальная мембрана; 2 – подножная пластинка;
 3 – остатки ножек стремени; 4 – отверстие в подножной пластинке

Рассмотрим случай радиально-симметричных колебаний пластинки, тогда граничные условия на внутреннем контуре сопряжения пластины с основанием протеза при $r = b$ в случае жесткой заделки примут вид

$$W|_{r=b} = W_p, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=b} = 0. \quad (3)$$

$$U|_{r=b} = -U_p \cos \varphi, \quad V|_{r=b} = U_p \sin \varphi. \quad (4)$$

где U_p, W_p – перемещение центра внутреннего контура вдоль осей Or, Oz соответственно.

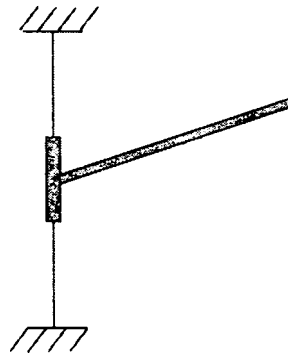
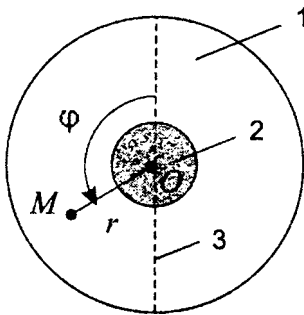


Рис. 3. Полярная система координат с центром в точке: 1 – ТМ;
 2 – основание протеза; 3 – линия, вдоль которой происходит тангенциальное смещение основания протеза

На внешнем контуре восстановленной ТМ рассмотрим условия упругой заделки [7]:

$$(k_l W + Q)|_{r=a} = 0, \quad \left(k_t \frac{\partial W}{\partial r} + M_1 \right) \Big|_{r=a} = 0; \quad (5)$$

$$U|_{r=a} = 0, \quad V|_{r=a} = 0, \quad (6)$$

где k_l, k_t – коэффициенты линейной и торсионной жесткости внешнего края. Значения k_l, k_t для нижней и верхней частей мембранного кольца, найденные экспериментально для среднего уха в норме, приведены в работе [8]. Здесь [7]

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right), \quad (7)$$

$$M_1 = D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) -$$

перерезывающая сила и изгибающий момент соответственно, действующие в срединной поверхности пластинки.

Будем считать, что стержень совершает лишь поступательные движения. В случае радиально-симметричных колебаний пластинки, уравнение движения присоединенного стержня имеет вид

$$Q_p - F_{st} \cos \gamma - R \sin \gamma = m \frac{\partial^2 W_p}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$T_p - F_{st} \sin \gamma + R \cos \gamma = m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

где Q_p – равнодействующая перерезывающих сил, возникающих вдоль внутреннего контура $r = b$ со стороны ТМ, а

$$F_{st} = k\delta \quad (9)$$

– сила, являющаяся мерой взаимодействия внутреннего уха и основания стремени и возникающая в результате деформации мембраны круглого (рис. 4),

$\delta = w_p / \cos \gamma$ – смещение стержня, $k = 8\pi T_0 (S/S_0)^2$ – коэффициент «жесткости» системы «кохлеарная жидкость – мембрана круглого окна» [9], $S_0 = \pi R_0^2$ – площадь мембраны круглого окна, T_0 – сила натяжения мембраны круглого окна.

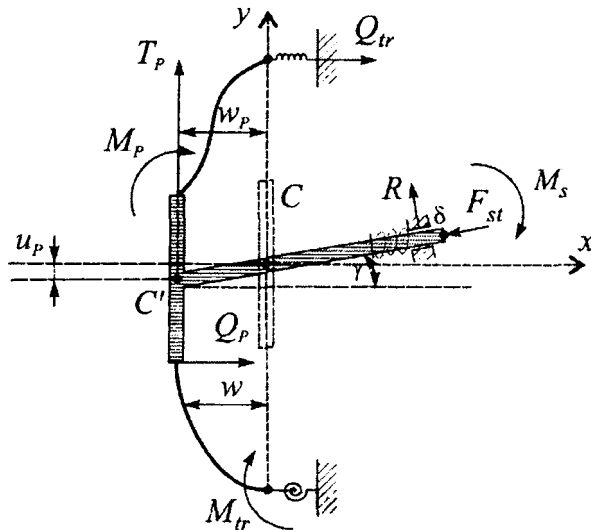


Рис. 4. Механическая модель колебательной системы ТМ-протез

Найдем равнодействующие сил, действующих на протез со стороны ТМ. Данные величины находятся путем интегрирования обобщенной перерезывающей силы и соответствующих моментов, приходящихся на единицу длины края, по всему внутреннему контуру ТМ:

$$Q_p = \int_0^{2\pi} [Q_1 b]_{r=b} d\varphi, \quad T_p = b \int_0^{2\pi} [T_1 \cos \varphi + S \sin \varphi]_{r=b} d\varphi. \quad (10)$$

Решение краевой задачи

Проведем разделение переменных по формулам:

$$W = w(r, t) \cos \omega t, \quad W_p = w_p(r, t) \cos \omega t. \quad (11)$$

$$U = u(r, \varphi) \cos \omega t, \quad V = v(r, \varphi) \cos \omega t, \quad (12)$$

$$U_p = u_p(r, \varphi) \cos \omega t,$$

где ω – искомая частота колебаний.

При подставке (11) в (1), (3) и (5) уравнение (1) сводится к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\right)^2 w - \lambda^4 w = 0 \quad (13)$$

относительно нормального прогиба пластины w с граничными условиями

$$\begin{aligned} \left(k_1 w(r) + \frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial w(r)}{\partial r} - a \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} - a^2 \frac{\partial^3 w(r)}{\partial r^3}\right)\right) \Big|_{r=a} &= 0, \\ \left(k_1 \frac{\partial w(r)}{\partial r} + \frac{D}{a} \left(a \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} + v \frac{\partial w(r)}{\partial r}\right)\right) \Big|_{r=a} &= 0, \\ w(b) = w_p, \quad \frac{\partial w(r)}{\partial r} \Big|_{r=b} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\lambda^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}$.

Перейдем к рассмотрению системы уравнений (2). При исследовании низкочастотных изгибных колебаний пластинки, силами инерции тангенциальных перемещений протеза можно пренебречь. Тогда, используя выражения мембранных усилий через тангенциальные смещения u и v , и учитывая (11), получим систему уравнений

$$\begin{cases} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} u + \frac{1-v}{2r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} - \frac{3-v}{2r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{1-v}{2} r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1-v}{2r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{3-v}{2r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Полученная система с учетом уравнения (1) описывает радиально-симметричные изгибно-плоскостные колебания пластины. Граничные условия полученной системы дифференциальных уравнений имеет вид (4),(6) с заменой U, V, U_p на u, v и u_p соответственно:

$$\begin{aligned} u|_{r=b} &= -u_p \cos \varphi, \quad v|_{r=b} = v_p \sin \varphi. \\ u|_{r=a} &= 0, \quad v|_{r=a} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, имеем краевую задачу (13), (15) с граничными условиями (14), (16), и системой уравнений (8).

Задача (13), (14) имеет решение в виде

$$w = \frac{w_p}{|M|} [\bar{M}_{11} J_0(\lambda r) + \bar{M}_{12} Y_0(\lambda r) + \bar{M}_{13} I_0(\lambda r) + \bar{M}_{14} K_0(\lambda r)], \quad (17)$$

где M – матрица размерности 4×4 с элементами:

$$\begin{aligned} M_{11} &= J_0(\lambda b), \quad M_{12} = Y_0(\lambda b), \quad M_{13} = I_0(\lambda b), \quad M_{14} = K_0(\lambda b), \\ M_{21} &= J'_0(\lambda b), \quad M_{22} = Y'_0(\lambda b), \quad M_{23} = I'_0(\lambda b), \quad M_{24} = K'_0(\lambda b), \\ M_{31} &= k_1 J_0(\lambda a) + \frac{D}{a^2} J'_0(\lambda a) - \frac{D}{a} J''_0(\lambda a) - D J''''_0(\lambda a), \\ M_{32} &= k_1 Y_0(\lambda a) + \frac{D}{a^2} Y'_0(\lambda a) - \frac{D}{a} Y''_0(\lambda a) - D Y''''_0(\lambda a), \\ M_{33} &= k_1 I_0(\lambda a) + \frac{D}{a^2} I'_0(\lambda a) - \frac{D}{a} I''_0(\lambda a) - D I''''_0(\lambda a), \end{aligned}$$

$$M_{34} = k_l K_0(\lambda a) + \frac{D}{a^2} K_0'(\lambda a) - \frac{D}{a} K_0''(\lambda a) - DK_0'''(\lambda a)$$

$$M_{41} = k_l J_0'(\lambda a) + DJ_0''(\lambda a) + \frac{D\nu}{a} J_0'(\lambda a),$$

$$M_{42} = k_l Y_0'(\lambda a) + DY_0''(\lambda a) + \frac{D\nu}{a} Y_0'(\lambda a),$$

$$M_{43} = k_l I_0'(\lambda a) + DI_0''(\lambda a) + \frac{D\nu}{a} I_0'(\lambda a),$$

$$M_{44} = k_l K_0'(\lambda a) + DK_0''(\lambda a) + \frac{D\nu}{a} K_0'(\lambda a),$$

J_0, Y_0 – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, а \overline{M}_{1j} ($j=1, \dots, 4$) – соответствующие миноры матрицы \mathbf{M} .

С учетом граничных условий для тангенциальных перемещений (16), решение уравнений (15) будем искать в виде:

$$u = u_0(r) + u_0^c(r) \cos \varphi + u_0^s(r) \sin \varphi, \quad (18)$$

$$v = v_0(r) + v_0^c(r) \cos \varphi + v_0^s(r) \sin \varphi.$$

Частные решения уравнений (15) имеют вид:

$$u_0(r) = C_{0,1}r + C_{0,2} \frac{1}{r}, \quad v_0(r) = C_{0,3}r + C_{0,4} \frac{1}{r},$$

$$u_0^c(r) = (1-3\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1-\nu^2) - C_{1,4},$$

$$v_0^c(r) = -(5+\nu)C_{1,5}r^2 - C_{1,6} \frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3-\nu)^2 \ln r + 2C_{1,7}(1+\nu) - C_{1,8}, \quad (19)$$

$$u_0^s(r) = (1-3\nu)C_{1,5}r^2 + C_{1,6} \frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,7}(1-\nu^2) - C_{1,8},$$

$$v_0^s(r) = (5+\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1+\nu) + C_{1,4}.$$

Подставляя соотношения (19) в граничные условия (16), получим значения неизвестных постоянных C_{ij} , которые в силу громоздкости не приводятся. Полученные решения описывают деформацию реконструированной тимпанальной мембраны.

Подстановка (17), (18) в систему (8) позволяет получить трансцендентное уравнение относительно искомой частоты ω свободных колебаний системы реконструированного среднего уха:

$$\begin{aligned} & 2\pi b D \frac{1}{|M|} \left[\frac{\partial^3}{\partial r^3} \left(\overline{M}_{11} J_0(\lambda r) + \overline{M}_{12} Y_0(\lambda r) + \overline{M}_{13} I_0(\lambda r) + \overline{M}_{14} K_0(\lambda r) \right) \right]_{r=b} + \\ & + \frac{1}{b} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\overline{M}_{11} J_0(\lambda r) + \overline{M}_{12} Y_0(\lambda r) + \overline{M}_{13} I_0(\lambda r) + \overline{M}_{14} K_0(\lambda r) \right) \Big|_{r=b} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\overline{M}_{11} J_0(\lambda r) + \right. \\ & \left. + \overline{M}_{12} Y_0(\lambda r) + \overline{M}_{13} I_0(\lambda r) + \overline{M}_{14} K_0(\lambda r) \right) \Big|_{r=b} \Big] + k - m\omega^2 + t\gamma \left[kt\gamma - mt\gamma\omega^2 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{bK\pi(3\nu-1)}{2bw_p} \left((1-3\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1-\nu^2) - C_{1,4} \right) \Big|_{r=b} - \\
& -\frac{bK\pi(3\nu-1)}{2bw_p} \left((5+\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1+\nu) + C_{1,4} \right) \Big|_{r=b} - \\
& -bK\pi \frac{1}{w_p} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[(1-3\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1+\nu) - C_{1,4} \right] \right) \Big|_{r=b} + \\
& + \frac{bK\pi(\nu-1)}{2w_p} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[(5+\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1+\nu) + C_{1,4} \right] \right) \Big|_{r=b} \Big] = 0
\end{aligned}$$

Полученное уравнение позволяет определить собственные частоты системы, соответствующие радиально-симметричным изгибно-плоскостным колебаниям, при различных входящих в задачу геометрических и физических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hüttenbrink, К.-В. Mechanical aspects of middle ear reconstruction / К.-В. Hüttenbrink // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, К.-В., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 165-168.
2. Вульштейн, Х. Слухулучшающие операции/ Х. Вульштейн. – М: Медицина, 1972.
3. <http://www.kurz.med.com/>
4. Любина, Е.А. Влияние сил натяжения восстановленной барабанной перепонки, вызванных введением протеза, на собственные частоты колебательной системы реконструированного среднего уха / Е.А. Любина, Г.И. Михасев // Механика-2007: Сб. науч. тр. III Белорусского конгресса по теорет. и прикл. механике (под общ. ред. акад. М.С. Высоцкого), Минск, 16-18 окт., 2007г. – Минск: ОИМ НАН Беларуси, 2007. – С. 339–405.
5. Ермоченко, С.А. Расчет напряженно-деформированного состояния среднего уха при его тотальной реконструкции с учетом влияния остатков тимпанальной мембраны / С.А. Ермоченко, Г.И. Михасев, Л.Г. Петрова // Российский журнал биомеханики. – 2008. – Т.12, №3 (41). – С. 24–36.
6. Mikhasev, G. On the strain–stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus–incus prosthesis/ G. Mikhasev, S. Ermochenko, M. Bornitz // Mathematical Medicine and Biology, Nov 2009; doi:10.1093 /imammb/dqp020. - P. 1 - 24.
7. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы/ Г.И. Михасев, П.Е. Товстик. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 290 с.
8. Wada, H. Three-dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle ear / H. Wada, T. Koike, T. Kobayashi // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, К.-В., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 76–81.
9. Чигарев, А.В. Биомеханика: Учебник/ А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, А.В. Борисов. – Минск: Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.