

# ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ОРТОТРОПНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С НЕЛИНЕЙНО УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Протуро И.И.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

*Cylindrical bending of a three-layer orthotropic plate with a nonlinear elastic filler is considered. For the kinematics description of carryings layers accepted the Kirchhoff hypotheses. To describe kinematics of pack of the plate hypotheses of the broken normal are accepted. We obtain the system of equilibrium equations, and applied Ilyushin's experimental-theoretic method to solve it.*

## Введение

В области малых упругопластических деформаций [1] изгиб трехслойных стержней и круговых пластин был изучен в [2, 3]. Изгиб упругих прямоугольных ортотропных трехслойных пластин исследован в [4, 5]. Здесь рассмотрен цилиндрический изгиб ортотропной прямоугольной пластины с нелинейно упругим наполнителем.

## Постановка задачи

Рассматривается несимметричная по толщине упругая трехслойная ортотропная прямоугольная пластина с жестким наполнителем (работающим в тангенциальном направлении). Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью наполнителя. Для описания кинематики пакета использована гипотеза «ломаной» нормали: в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом наполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол относительно осей координат  $\psi_x(x, y), \psi_y(x, y)$ . Деформации малые.

На внешний слой стержня действует распределенная силовая нагрузка  $p_x(x, y), p_y(x, y), q(x, y)$ . Через  $w(x, y)$  и  $u_x(x, y), u_y(x, y)$  обозначен прогиб и продольное перемещение средней плоскости наполнителя соответственно. Так как материалы всех слоев несжимаемы в поперечном направлении, то прогиб в остальных точках нормали к срединной поверхности совпадает с  $w(x, y)$ . По контуру предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительно сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости.

Толщина  $k$ -го слоя ( $k = 1, 2, 3$ ) обозначена через  $h_k$ , при этом  $h_3 = 2c$ . С помощью введенных геометрических гипотез, продольные перемещения в слоях выражаются через пять искомых функции  $w(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y), \psi_x(x, y), \psi_y(x, y)$ :

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= u_x + c\psi_x - zw_{,x}, \quad (c \leq z \leq c + h_1); \quad u_x^{(3)} = u_x + z\psi_x - zw_{,x}, \quad (-c \leq z \leq c); \\ u_x^{(2)} &= u_x - c\psi_x - zw_{,x}, \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \quad u_y^{(1)} = u_y + c\psi_y - zw_{,y}, \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ u_y^{(3)} &= u_y + z\psi_y - zw_{,y}, \quad (-c \leq z \leq c); \quad u_y^{(2)} = u_y - c\psi_y - zw_{,y}, \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z$  – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости наполнителя. Запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Уравнения равновесия трёхслойной пластины получим, используя принцип возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta W = \delta A, \quad (2)$$

где  $\delta W, \delta A$  – вариации работ внутренних усилий и внешних сил соответственно.

При определении работы внешних сил считаем, что к срединной поверхности наполнителя приложены произвольные распределённые нагрузки, а по контуру

пластины – распределённые по кромкам сторон силы и моменты.

После некоторых преобразований из выражения (2) получим систему уравнений равновесия рассматриваемой пластины в усилиях:

$$\begin{aligned} N_{x^2x} + Q_{xy^2y} + p_x = 0; \quad N_{y^2y} + Q_{xy^2x} + p_y = 0; \quad M_{xx^2xx} + M_{yy^2yy} + 2M_{xy^2xy} + q - q_r = 0; \\ H_{xx^2x} + H_{xy^2y} - Q_{xx} = 0; \quad H_{yy^2y} + H_{xy^2x} - Q_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь суммарные внутренние усилия и моменты введены соотношениями:

$$\begin{aligned} N_x = \sum_{k=1}^3 N_x^{(k)}; \quad N_y = \sum_{k=1}^3 N_y^{(k)}; \quad M_y = \sum_{k=1}^3 M_y^{(k)}; \quad M_x = \sum_{k=1}^3 M_x^{(k)}; \quad M_{xy} = \sum_{k=1}^3 M_{xy}^{(k)}; \\ Q_{xy} = \sum_{k=1}^3 Q_{xy}^{(k)}; \end{aligned}$$

$$H_{xx} = c(N_x^{(1)} - N_x^{(2)}) + M_{xx}^{(3)}; \quad H_{yy} = c(N_y^{(1)} - N_y^{(2)}) + M_{yy}^{(3)}; \quad H_{xy} = c(Q_{xy}^{(1)} - Q_{xy}^{(2)}) + M_{xy}^{(3)}. \quad (4)$$

Так как материалы слоёв пластины ортотропны, соотношения между деформациями и напряжениями представимы в форме [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(k)} = \frac{1}{E_x^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} - \frac{\nu_{xy}^{(k)}}{E_y^{(k)}} \sigma_{yy}^{(k)} - \frac{\nu_{xz}^{(k)}}{E_z^{(k)}} \sigma_{zz}^{(k)}, \quad \varepsilon_{yy}^{(k)} = -\frac{\nu_{yx}^{(k)}}{E_x^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} + \frac{1}{E_y^{(k)}} \sigma_{yy}^{(k)} - \frac{\nu_{yz}^{(k)}}{E_z^{(k)}} \sigma_{zz}^{(k)}, \\ \varepsilon_{zz}^{(k)} = -\frac{\nu_{zx}^{(k)}}{E_x^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} - \frac{\nu_{zy}^{(k)}}{E_y^{(k)}} \sigma_{yy}^{(k)} + \frac{1}{E_z^{(k)}} \sigma_{zz}^{(k)}, \\ \varepsilon_{xy}^{(k)} = \frac{1}{G_{xy}^{(k)}} \sigma_{xy}^{(k)}, \quad \varepsilon_{yz}^{(k)} = \frac{1}{G_{yz}^{(k)}} \sigma_{yz}^{(k)}, \quad \varepsilon_{zx}^{(k)} = \frac{1}{G_{zx}^{(k)}} \sigma_{zx}^{(k)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E_i, \nu_{ij}, G_{ij}$  – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига материала соответствующего слоя.

Применив (5), (1), соотношения Коши, выразим внутренние усилия и моменты, входящие в (3), через искомые функции  $u_x(x, y), u_y(x, y), \psi_x(x, y), \psi_y(x, y), w(x, y)$ . В итоге получим систему уравнений равновесия прямоугольной ортотропной трехслойной пластины в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_{x^2yy} + a_2 u_{y^2xy} + a_3 u_{x^2xx} + a_4 \psi_{x^2yy} + a_5 \psi_{y^2xy} + a_6 \psi_{x^2xx} - a_7 w_{,xxx} - a_8 w_{,xyy} + p_x = 0; \\ a_1 u_{y^2xx} + a_9 u_{x^2xy} + a_{10} u_{y^2yy} + a_4 \psi_{y^2xx} + a_{11} \psi_{x^2xy} + a_{12} \psi_{y^2yy} - a_{13} w_{,yyy} - a_{14} w_{,xyy} + p_y = 0; \\ a_7 u_{x^2xxx} + a_{13} u_{y^2yyy} + a_{15} u_{x^2xyy} + a_{16} u_{y^2xxy} + a_{17} \psi_{x^2xxx} + a_{18} \psi_{y^2yyy} + \\ + a_{19} \psi_{x^2xyy} + a_{20} \psi_{y^2xxy} - a_{21} w_{,xxx} - a_{22} w_{,yyy} - a_{23} w_{,xyy} + q = 0; \\ a_6 u_{x^2xx} + a_5 u_{y^2xy} + a_4 u_{x^2yy} + a_{24} \psi_{x^2xx} + a_{25} \psi_{y^2xy} + a_{30} \psi_{x^2yy} - a_{26} w_{,xyy} - a_{27} w_{,xxx} - G_{xz}^{(3)} c \psi_x = 0; \\ a_{12} u_{y^2yy} + a_{11} u_{x^2xy} + a_4 u_{y^2xx} + a_{28} \psi_{y^2yy} + a_{29} \psi_{x^2xy} + a_{30} \psi_{y^2xx} - a_{31} w_{,yxx} - a_{32} w_{,yyy} - G_{yz}^{(3)} c \psi_y = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты  $a_i$  выражаются через геометрические и упругие характеристики материалов слоёв [5].

### Решение линейной задачи.

Рассмотрим несимметричную по толщине упругую прямоугольную трехслойную ортотропную пластину, достаточно длинную в направлении оси  $Oy$ . Она нагружена постоянной в направлении этой оси поперечной нагрузкой  $p = p(x), q = q(x)$ . Вдоль оси  $Ox$  нагрузка может меняться произвольно.

Уравнения равновесия в перемещениях прямоугольной трехслойной ортотропной пластины при цилиндрическом изгибе следуют из уравнений (6), если

положить  $u_y = \psi_y = 0$  и производные по  $y$  равными нулю:

$$\begin{aligned} a_3 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} + p &= 0; \\ a_7 u_{,xxx} + a_{17} \psi_{,xxx} - a_{21} w_{,xxx} + q &= 0; \\ a_6 u_{,xx} + a_{24} \psi_{,xx} - a_{17} w_{,xxx} - G_{xz}^{(3)} c \psi &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь нижний индекс « $x$ » в продольном перемещении, относительном сдвиге и в продольной силе опущен.

После однократного интегрирования первого из уравнений в (7) и исключения из третьего уравнения с помощью остальных продольного перемещения  $u(x)$  и прогиба  $w(x)$  получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение для нахождения функции сдвига  $\psi(x)$ :

$$\psi_{,xx} - \beta^2 \psi = g(x). \quad (8)$$

Здесь

$$g(x) = \gamma_2 p + \gamma_1 \left( \int q dx + C_1 \right), \quad (9)$$

где  $C_1$  – константа интегрирования,

$$\beta^2 = \frac{a_3 G_{xz}^{(3)} c \cdot \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2} > 0, \quad \gamma_1 = \frac{a_3 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_{21} = \frac{a_6 \alpha_2 - a_7 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2},$$

$$\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2 \neq 0, \quad \alpha_1 = a_3 a_{17} - a_6 a_7, \quad \alpha_2 = a_3 a_{21} - a_7^2, \quad \alpha_3 = a_3 a_{24} - a_6^2, \quad a_{33} = c G_{xz}^{(3)}.$$

Общее решение  $\psi_0(x)$  однородного дифференциального уравнения второго порядка, соответствующего неоднородному уравнению (8) можно выписать в виде:

$$\psi_0 = A \operatorname{sh}(\beta x) + B \operatorname{ch}(\beta x),$$

где  $\operatorname{sh}(\beta x)$ ,  $\operatorname{ch}(\beta x)$  – функции гиперболического синуса и косинуса.

Решение данного неоднородного уравнения получено методом вариации произвольных постоянных:

$$\psi(x) = A(x) \operatorname{sh}(\beta x) + B(x) \operatorname{ch}(\beta x).$$

Параметры  $A(x)$  и  $B(x)$  определяются из системы уравнений:

$$A_{,x} \operatorname{sh}(\beta x) + B_{,x} \operatorname{ch}(\beta x) = 0; \quad A_{,x} \beta \operatorname{ch}(\beta x) + B_{,x} \beta \operatorname{sh}(\beta x) = g(x).$$

Тогда

$$A(x) = \frac{1}{\beta} \int g(x) \operatorname{ch}(\beta x) dx + C_2; \quad B(x) = -\frac{1}{\beta} \int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx + C_3. \quad (10)$$

Подставив полученные выражения (10) в (9) получим относительный сдвиг в заполнителе  $\psi(x)$ . Прогиб  $w(x)$  и продольное перемещение  $u(x)$  найдем из остальных уравнений системы (7).

В результате имеем аналитическое решение задачи о цилиндрическом изгибе трехслойной ортотропной пластины под действием нагрузки  $q(x)$  и  $p(x)$ , распределенной по всей поверхности:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= C_2 \operatorname{sh}(\beta x) + C_3 \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta} \left[ \operatorname{sh}(\beta x) \int g(x) \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx \right]; \\ w(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[ \alpha_1 \int \psi dx - a_7 L_3^{-1}(p) + a_3 L_4^{-1}(q) + \frac{a_3 C_1}{6} x^3 \right] + \frac{C_4}{2} x^2 + C_5 x + C_6; \\ u(x) &= \gamma_3 \psi + \frac{1}{\alpha_2} \left[ -a_{21} L_2^{-1}(p) + a_7 L_3^{-1}(q) + \frac{a_7}{2} C_1 x^2 \right] + C_7 x + C_8, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $L_1^{-1}$ ,  $L_2^{-1}$ ,  $L_3^{-1}$  – обозначены линейные интегральные операторы

$$L_1^{-1}(f) = \int f dx; \quad L_2^{-1}(f) = \iint f dx dx; \quad L_3^{-1}(f) = \iiint f dx dx dx.$$

Константы интегрирования  $C_1, \dots, C_8$  определяются из граничных условий.

Для шарнирно опертой по обеим сторонам ( $x = 0, x = l$ ) пластины граничные условия принимают вид:

$$x = 0, x = l: u = \psi = w = M = 0. \quad (12)$$

В случае жесткой заделки левого конца пластины ( $x = 0$ ) при свободном правом ( $x = l$ ) (консольное опирание) граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad w = w_{,x} = \psi = u = 0; \\ x = l: \quad M = M_{,x} = N = \psi = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В случае жесткой заделки обоих концов:

$$x = 0, x = l: w = w_{,x} = \psi = u = 0. \quad (14)$$

### Постановка и решение нелинейной задачи

Рассмотрим случай, когда наружные несущие слои пластины, выполнены из упругого ортотропного материала, а несжимаемый по толщине изотропный наполнитель – нелинейно-упругий. Для материала наполнителя используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(3)} &= 2G_3 f^{(3)} \vartheta_{ij}^{(3)} = 2G_3 (1 - \omega^{(3)}) \vartheta_{ij}^{(3)}, \\ \sigma^{(3)} &= 3K_3 3\varepsilon^{(3)} \quad (i, j = x, y, z). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $s_{ij}^{(3)}, \sigma^{(3)}$  и  $\vartheta_{ij}^{(3)}, \varepsilon^{(3)}$  – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций в наполнителе,  $G_3, K_3$  – модули сдвиговой и объемной деформации,  $f^{(3)}, \omega^{(3)}$  – универсальные функции, описывающие физическую нелинейность наполнителя:

$$f^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_i^{(3)} \leq \varepsilon_{i0}^{(3)}, \\ 1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}), & \varepsilon_i^{(3)} > \varepsilon_{i0}^{(3)}, \end{cases}$$

где  $\varepsilon_i^{(3)}$  – интенсивность деформаций;  $\varepsilon_{i0}^{(3)}$  – предельная интенсивность деформаций, до которой сохраняется физическая линейность (аналог предела текучести).

Рассмотрим методику решения поставленной краевой задачи. Напомним, что силовые уравнения равновесия (3) и граничные условия были получены независимо от физических уравнений состояния. Поэтому мы можем воспользоваться ими и в рассматриваемом случае. Если во внутренних силовых факторах, входящих в уравнения (3), выразить напряжения через деформации, используя соотношения (15), а затем деформации через три линейно независимые функции  $u(x), \psi(x), w(x)$ , то в результате получим систему нелинейных дифференциальных уравнений. О точном ее решении в данном случае говорить не приходится. Поэтому воспользуемся методом «упругих» решений Ильюшина, который распространим на исследуемую конструкцию.

Компоненты тензора напряжений в третьем слое, используя (15), представим через девиатор и шаровую часть тензора деформаций в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(3)} &= s_x^{(3)} + \sigma^{(3)} = 2G_3 \vartheta_x^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)} - 2G_3 \vartheta_x^{(3)} \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}), \\ \sigma_{xz}^{(3)} &= s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} - 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}). \end{aligned}$$

Выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «e») и неупругие (с индексом «ω») слагаемые:

$$\sigma_x^{(3)} = \sigma_x^{(3)e} - \sigma_x^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega},$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(3)e} &= 2G_3 \vartheta_x^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)}, \quad \sigma_x^{(3)\omega} = 2G_3 \vartheta_x^{(3)} \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}), \\ \sigma_{xz}^{(3)\omega} &= 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}), \quad \sigma_{xz}^{(3)e} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (8), получим

$$N^{(3)} = N^{(3)e} - N^{(3)\omega}, \quad M^{(3)} = M^{(3)e} - M^{(3)\omega}, \quad Q^{(3)} = Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}. \quad (17)$$

Упругие (с индексом «e») и неупругие (с индексом «ω») составляющие в (17) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} N^{(3)e} &= \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)e} dz, & N^{(3)\omega} &= \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)\omega} dz, & M^{(3)e} &= \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)e} z dz, \\ M^{(3)\omega} &= \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)\omega} z dz, & Q^{(3)e} &= \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)e} dz, & Q^{(3)\omega} &= \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив внутренние усилия (17) в уравнения равновесия (3), приводим систему к виду:

$$N_{,x}^e = -p + N_{,x}^{(3)\omega}, \quad H_{,x}^e - Q^e = M_{,x}^{(3)\omega} - Q^{(3)\omega}, \quad M_{,xx}^e = -q + M_{,xx}^{(3)\omega} \quad (19)$$

где  $N^e = N^{(1)} + N^{(2)} + N^{(3)e}$ ,  $M^e = M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)e}$ ,  $Q^e = Q^{(3)e}$ ,

$$H^e = c(N^{(1)} - N^{(2)}) + M^{(3)e}.$$

Окончательные формулы для вычисления неупругих составляющих в (19) получим, используя соотношения (16) и (18):

$$N^{(3)\omega} = \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \omega_3 \varepsilon_x^{(3)} dz, \quad M^{(3)\omega} = \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \omega_3 \varepsilon_x^{(3)} z dz, \quad Q^{(3)\omega} = 2G_3 \int_{-c}^c \omega_3 \psi dz. \quad (20)$$

Здесь принято обозначение:  $\omega_3 = \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)})$ .

Систему уравнений для определения искомым перемещений получим, подставив в уравнения равновесия (19) соотношения, выражающие упругие составляющие внутренних усилий через  $u$ ,  $\psi$  и  $w$ :

$$\begin{cases} a_3 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} = -p + p_\omega, \\ a_6 u_{,xx} + a_{24} \psi_{,xx} - a_{17} w_{,xxx} - G_3 c \psi = h_\omega, \\ a_7 u_{,xxx} + a_{17} \psi_{,xxx} - a_{24} w_{,xxxx} = -q + q_\omega. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь коэффициенты  $a_i$  те же, что и в (6),

$$p_\omega = N_{,x}^{(3)\omega}, \quad h_\omega = (M_{,x}^{(3)\omega} - Q^{(3)\omega}), \quad q_\omega = M_{,xx}^{(3)\omega}. \quad (22)$$

Предположим, что в (21), (22) содержится малый параметр, например функция  $\omega_3 < 1$ . Тогда возможен метод итераций, при котором для любого  $n$ -го приближения получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_3 u_{,xx}^{(n)} + a_6 \psi_{,xx}^{(n)} - a_7 w_{,xxx}^{(n)} = -p + p_\omega^{(n-1)}, \\ a_6 u_{,xx}^{(n)} + a_{24} \psi_{,xx}^{(n)} - a_{17} w_{,xxx}^{(n)} - G_3 c \psi^{(n)} = h_\omega^{(n-1)}, \\ a_7 u_{,xxx}^{(n)} + a_{17} \psi_{,xxx}^{(n)} - a_{24} w_{,xxxx}^{(n)} = -q + q_\omega^{(n-1)}. \end{cases} \quad (23)$$

Величины  $p_\omega^{(n-1)}$ ,  $h_\omega^{(n-1)}$ ,  $q_\omega^{(n-1)}$ , соответствующие неупругим составляющим (20), на первом шаге ( $n = 1$ ) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название *дополнительных «внешних» нагрузок*. Они служат поправками на физическую нелинейность материала заполнителя:

$$\begin{aligned} p_\omega^{(n-1)} &= N_{,x}^{(3)\omega(n-1)}, & h_\omega^{(n-1)} &= (M_{,x}^{(3)\omega(n-1)} - Q^{(3)\omega(n-1)}), & q_\omega^{(n-1)} &= M_{,xx}^{(3)\omega(n-1)}, \\ N^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} \int_{h_3} G_3 \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)(n-1)}) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} dz, & M^{\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} \int_{h_3} G_3 \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)(n-1)}) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} z dz, \\ Q^{\omega(n-1)} &= 2 \int_{h_3} G_3 \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)(n-1)}) \psi^{(n-1)} dz. \end{aligned} \quad (24)$$

Применение указанного метода последовательных приближений позволяет на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу сводить к линейной задаче

теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками.

Процедура получения решения системы уравнений (23) не отличается от примененной для соответствующей задачи теории упругости (7)–(11). В результате получаем искомое решение в рекуррентном виде:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(x) &= C_2^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta} \left[ \operatorname{sh}(\beta x) \int g^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ u^{(n)}(x) &= \gamma_3 \psi^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2} \left[ -a_{21} L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)} x^2 \right] \\ &\quad + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)}, \\ w^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[ \alpha_1 \int \psi^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_3 L_4^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} a_3 C_1^{(n)} x^3 \right] + \frac{1}{2} C_4^{(n)} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta^2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и линейные интегральные операторы  $L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}$  определены в (9)–(11). Константы интегрирования  $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$  определяются из условий закрепления пластины.

### Численные результаты

Для численной реализации решений (25), удовлетворяющих граничным условиям (14) создана компьютерная программа, использующая пакет Maple. С ее помощью проведен анализ параметров напряженно-деформированного состояния рассматриваемой трехслойной нелинейно упругой пластины с материалами слоев УВЭС–фторопласт–УВЭС. Механические характеристики материалов приведены в [2, 4].

Величина внешней нагрузки  $q$  принимались таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов проявились в достаточной степени в каждом из слоев, а деформации не выходили за рамки теории малых упругопластических деформаций. Толщины слоев  $c = 0,09, h_1 = h_2 = 0,03$ ; интенсивности нагрузок  $p = 0, q = -15$  МПа.

Рис. 1 иллюстрирует практическую сходимость процесса последовательных приближений. Номер кривой соответствует номеру итерации. Здесь второе приближение отличается от первого примерно на 10 % для прогиба и сдвига. За искомое решение принято 6-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1 %. Если продолжать итерационный процесс, то разность между последующим и предыдущим приближениями уменьшается и стремится к нулю.

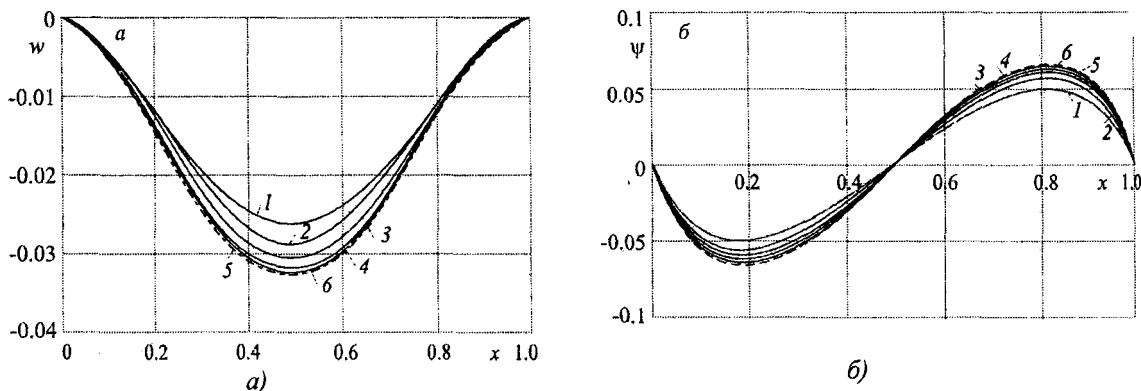


Рис. 1. Сходимость метода последовательных приближений  
а – прогиба  $w$ , б – относительного сдвига  $\psi$

## Выводы

Приведенное решение позволяет с достаточной точностью описывать перемещения в трехслойных ортотропных пластинах с физически нелинейным наполнителем при цилиндрическом изгибе. Его можно использовать для соответствующих инженерных расчетов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. – 280 с.
2. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.
3. Плескачевский Ю. М., Старовойтов, Э. И., Яровая, А. В. Деформирование металлополимерных систем. – Минск: Беларуская навука, 2004. – 342 с.
4. Старовойтов Э. И., Протуро И. И. Напряженно-деформированное состояние прямоугольной трехслойной композитной пластины // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – № 1 (18). – С. 34–38.
5. Протуро И.И. Изгиб прямоугольной трехслойной ортотропной пластины // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2010. – Т. 15. – №1. – С. 9–13.
6. Амбарцумян, С. А. Некоторые вопросы теории анизотропных оболочек // Изв. АН АрмССР. – 1947. – № 9. – С. 48–54.