

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНСТРУКТИВНО АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Ван Чживэй, Босяков С.М.

Белорусский государственный университет, Минск

The analytical solution of approximate natural frequencies for the free vibration of cylindrical shells of GFRP (glass fiber reinforced plastic) with clamped boundary conditions at one end and simple supported boundary conditions at another end is presented using the Rayleigh-Ritz method, while the winding angle varies. Frequency variations for different vibration modes with certain shell's geometrical parameters are discussed. The effect of shell's geometrical parameters is also investigated on natural frequencies.

Введение

Одной из важнейших задач на стадии проектирования тонкостенных оболочечных конструкций, широко применяемых в авиационной, ракетно-космической технике и различных областях промышленности, является динамический расчет. Необходимым элементом исследования динамики оболочек является определение собственных частот и форм малых колебаний, причем наибольший интерес для приложений представляют частоты из нижнего спектра. Использование в инженерной практике полимерных материалов, в частности стеклопластиков, делает обязательным учета анизотропии упругих свойств при исследовании низкочастотных колебаний оболочек. Результаты нахождения собственных частот свободных колебаний для ортотропных оболочек представлены в работах [1]. В то же время, сведения о частотах свободных колебаний в случае, когда основные направления упругости составляют некоторый угол с координатными линиями, практически отсутствуют, что обусловлено высокой сложностью соответствующих определяющих соотношений. В настоящей работе представлены результаты определения собственных частот свободных колебаний цилиндрических оболочек из ориентированного стеклопластика на основании метода Рэлея – Ритца для случая шарнирного опирания двух концов оболочки, а также при граничных условиях, соответствующих заделке одного конца и шарнирному опиранию другого конца оболочки.

Уравнение частот

В случае заделки на одном конце и шарнирного опирания другого конца оболочки имеем граничные условия

$$\begin{aligned} u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0 \text{ при } \alpha = 0, \\ v = w = M_{11} = N_{11} = 0 \text{ при } \alpha = l/R. \end{aligned} \quad (1)$$

Для защемленной двумя концами оболочки граничные условия сформулируем следующим образом:

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0, \text{ при } \alpha = 0 \text{ и } \alpha = l/R, \quad (2)$$

где u , v и w – перемещения срединной поверхности оболочки в продольном, окружном и радиальном направлениях соответственно, l – длина оболочки, R – радиус срединной поверхности оболочки, α – выраженное в долях радиуса срединной поверхности оболочки R расстояние по образующей, N_{11} и M_{11} – внутренняя

сила и момент.

Компоненты перемещений u , v и w , удовлетворяющие граничным условиям (1) и (2), а также приближенно описывающие форму изогнутой поверхности колеблющейся оболочки, зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= A_{mn} \varphi(\alpha) \cos(n\theta) \sin(\omega t), \\ v &= B_{mn} \psi(\alpha) \sin(n\theta) \sin(\omega t), \\ w &= C_{mn} \psi(\alpha) \cos(n\theta) \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь n – число волн в окружном направлении, θ – угловая координата в окружном направлении, A_{mn} , B_{mn} и C_{mn} – амплитуды колебания вдоль соответствующих направлений, ω – циклическая частота колебаний, t – время, $\psi(\alpha) = \cosh(\lambda_m R \pi \alpha / l) - \cos(\lambda_m R \pi \alpha / l) -$

$-\sigma_m (\sinh(\lambda_m R \pi \alpha / l) - \sin(\lambda_m R \pi \alpha / l))$ – балочная функция, описывающая продольные колебания оболочки, $\varphi(\alpha) = \frac{l}{\lambda_m R \pi} \psi'(\alpha)$, λ_m – число, которое зависит

от числа волн вдоль образующей цилиндра и определяется граничными условиями на концах оболочки, σ_m – величина, определяемая коэффициентом λ_m .

Потенциальная энергия, накапливаемая всей оболочкой при ее упругой деформации, имеет следующее выражение [5]:

$$U = \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{l/R} (N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} + M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12}) d\alpha d\theta. \quad (4)$$

Выражения для внутренних сил и моментов имеют вид [4]:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) dz, \quad M_{11} = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + w_{ij} z) z dz, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} w_{11} &= B_{11} \chi_{11} + B_{12} \chi_{22} + B_{16} \chi_{12}, \quad w_{22} = B_{12} \chi_{11} + B_{22} \chi_{22} + B_{26} \chi_{12}, \\ w_{12} &= w_{21} = B_{16} \chi_{11} + B_{26} \chi_{22} + B_{66} \chi_{12}. \end{aligned}$$

Здесь напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} , χ_{ij} , $i, j = 1, 2$ в срединной поверхности в соотношениях (5) определяются следующим образом [4, 5]:

$$\sigma_{11} = B_{11} \varepsilon_{11} + B_{12} \varepsilon_{22} + B_{16} \varepsilon_{12}, \quad \sigma_{22} = B_{12} \varepsilon_{11} + B_{22} \varepsilon_{22} + B_{26} \varepsilon_{12},$$

$$\sigma_{12} = B_{16} \varepsilon_{11} + B_{26} \varepsilon_{22} + B_{66} \varepsilon_{12},$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right), \quad (6)$$

$$\chi_{11} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \chi_{22} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad \chi_{12} = -\frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \theta}.$$

Постоянные упругости зависят от угла φ намотки стекловолокна и определяются следующим образом [4]:

$$B_{11} = b_{11} \cos^4(\varphi) + b_{22} \sin^4(\varphi) + \left(b_{66} + \frac{1}{2} b_{12} \right) \sin^2(2\varphi),$$

$$B_{22} = b_{11} \sin^4(\varphi) + b_{22} \cos^4(\varphi) + \left(b_{66} + \frac{1}{2} b_{12} \right) \sin^2(2\varphi),$$

$$B_{12} = (b_{11} + b_{22} - 2b_{66}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + b_{12} (\sin^4(\varphi) + \cos^4(\varphi)),$$

$$B_{66} = (b_{11} + b_{22} - 2b_{12})\sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi) + b_{66}\cos^2(2\varphi),$$

$$B_{26} = \frac{1}{2}(b_{22}\cos^2(\varphi) - b_{11}\sin^2(\varphi))\sin(2\varphi) - \frac{1}{4}(b_{12} + 2b_{66})\sin(4\varphi),$$

$$B_{16} = \frac{1}{2}(b_{22}\sin^2(\varphi) - b_{11}\cos^2(\varphi))\sin(2\varphi) - \frac{1}{4}(b_{12} + 2b_{66})\sin(4\varphi),$$

где b_{11} , b_{22} , b_{12} и b_{66} – основные модули упругости ортотропного материала, φ – угол между основными направлениями упругости и координатными линиями (угол ориентации стекловолокна относительно основы стеклоткани).

Кинетическая энергия всей оболочки

$$T = \frac{1}{2}\rho R^2 \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{l/R} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) d\alpha d\theta dz, \quad (7)$$

где ρ – плотность стеклопластика, h – толщина оболочки.

Подставим соотношения (5) и (6) в выражения (4) и (7) с учетом равенств (3). После соответствующих преобразований будем иметь потенциальную энергию и кинетическую энергию всей оболочки. Подставим полученные выражения в следующее уравнение движения оболочки [4]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{mn}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{mn}} + \frac{\partial U}{\partial q_{mn}} = 0.$$

Здесь $q_{mn} = \{A_{mn} \sin(\omega t), B_{mn} \sin(\omega t), C_{mn} \sin(\omega t)\}^T$.

Приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при переменных q_{mn} полученной системы уравнений, будем иметь следующее характеристическое уравнение для нахождения собственных частот свободных колебаний

$$|M\omega^2 - K| = 0, \quad (8)$$

где M – матрица массы, K – матрица жесткости.

Расчет частот при жестком заземлении концов оболочки

Для нахождения параметра λ_m в этом случае подставим выражения (3) в граничные условия (1). После несложных преобразований будем иметь

$$\tan(\pi\lambda_m) - \tanh(\pi\lambda_m) = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) получим (случай $\lambda_m = 0$, соответствующий тривиальному случаю нулевых перемещений не рассматриваем):

$$\lambda_m = m + 1/4, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

$$\sigma_m = \frac{\cosh(\pi\lambda_m) - \cos(\pi\lambda_m)}{\sinh(\pi\lambda_m) - \sin(\pi\lambda_m)}. \quad (11)$$

Подставив различные значения λ_m в соотношение (8), получим $\sigma_m \approx 1$.

Расчет собственных частот на основании численного решения уравнения (8) с учетом решений (10) и (11) проведем для оболочки из тканевого стеклопластика, упругие свойства которого описываются основными константами упругости $b_{11} = 18.3$, $b_{22} = 25.2$, $b_{66} = 3.5$, $b_{12} = 2.77$ ГПа; плотность $\rho = 1850$ кг/м³. Геометрические размеры оболочки описываются постоянными $h = 1$ мм, $R = 0.5$ м, $l = 10$ м. Зависимость собственных частот ω_{mn} от угла намотки стекловолокна φ при $m = 1$, $n = 1, 5$ и при $n = 1$, $m = 1, 2$ для различных мод колебаний представлены на рис. 1 и 2.

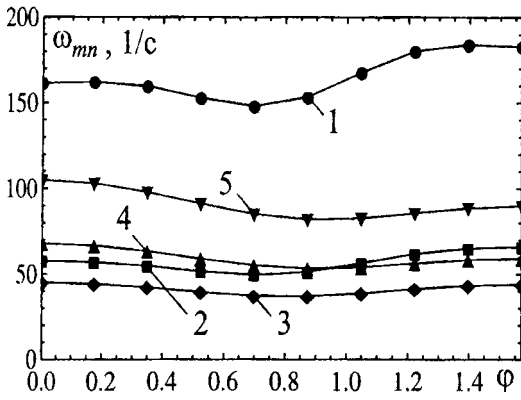


Рис. 1. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m = 1$: 1 - $n = 1$; 2 - $n = 2$; 3 - $n = 3$; 4 - $n = 4$; 5 - $n = 5$

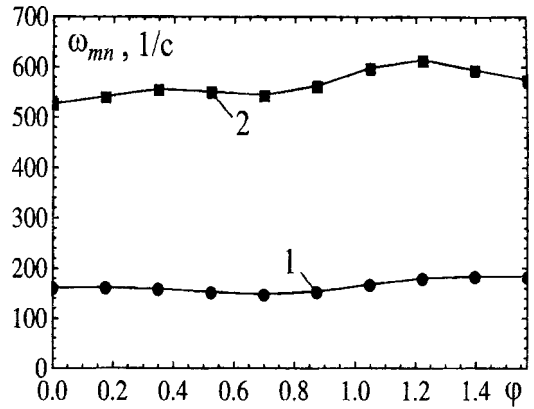


Рис. 2. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $n = 1$: 1 - $m = 1$; 2 - $m = 2$

Из рис. 1 видно, что минимумы частот для различных мод колебаний соответствуют различным углам намотки. В частности, минимум частот ω_{11} и ω_{12} соответствует углу $\varphi = 40^\circ$, для других мод минимум частоты достигается при $\varphi \approx 50^\circ$. Зависимости низших собственных частот от угла намотки φ аналогичны. При $m = 1$ и $n = 3$ получаем частоту основного тона.

Из рис. 2 видно, что зависимости частот от угла намотки аналогичны для двух рассмотренных мод колебаний. В то же время, при $n = m = 1$ минимум частот достигается при $\varphi = 39^\circ$, тогда как при $n = 1$ и $m = 2$ наименьшее значение частоты соответствует углу $\varphi = 0^\circ$. Также отметим, что минимальное значение собственной частоты ω_{31} наблюдается при $\varphi = 90^\circ$ и составляет $\approx 78 \cdot 10^3$ 1/с. Таким образом, можно сделать вывод, что влияние изменения параметра m на величины собственных частот свободных колебаний более существенно, чем параметра n .

На рис. 3 и 4 показаны зависимость частоты ω_{11} от угла намотки φ для различных отношений h/R и R/l .

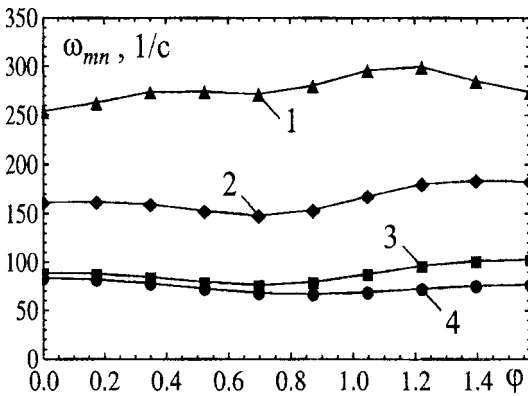


Рис. 3. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m = n = 1$ для различных отношений h/R : 1 - $h/R = 0.001$; 2 - $h/R = 0.002$; 3 - $h/R = 0.004$; 4 - $h/R = 0.01$

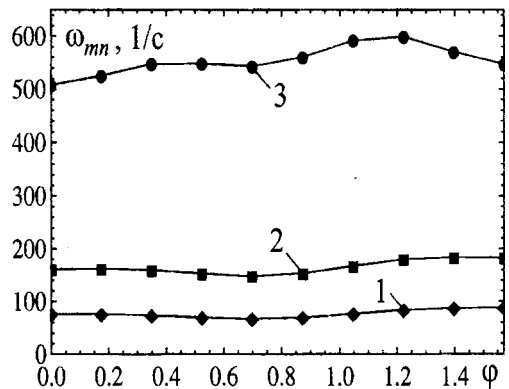


Рис. 4. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m = n = 1$ для различных отношений R/l : 1 - $R/l = 1/30$; 2 - $R/l = 1/20$; 3 - $R/l = 1/10$

Из рис. 3 следует, что зависимости собственных частот свободных колебаний от угла намотки стекловолокна имеют различный характер для различных отношений h/R . Значения частот с увеличением значений отношения h/R уменьшаются.

Как видно из рис. 4 при малых значениях отношения R/l величины собственных частот свободных колебаний практически не изменяются для различных углов намотки стекловолокна. При увеличении значения R/l зависимость $\omega_{11}(\varphi)$ приобретает более сложный характер, и возрастают значения частот.

Расчет частот при жестком заземлении одного конца и шарнирном закреплении другого конца оболочки

В этом случае параметр λ_m найдем, подставив выражения (3) в граничные условия (2). В результате получим

$$\cos(\pi\lambda_m)\cosh(\pi\lambda_m) - 1 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_m = m + 1/2, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Параметр σ_m определяется выражением (11). Так же как и в предыдущем случае, для различных значений λ_m , определяемых равенством (12), будем иметь $\sigma_m \approx 1$.

С учетом полученного решения (12) выполним расчет собственных частот на основании численного решения уравнения (10) для цилиндрической оболочки из тканевого стеклопластика (при вычислениях принимаем прежние постоянные упругости и геометрические размеры оболочки). Зависимости собственных частот ω_{mn} от угла намотки стекловолокна φ при $m=1, n=\overline{1,5}$ и $n=1, m=\overline{1,3}$ представлены на рис. 5 и 6 соответственно.

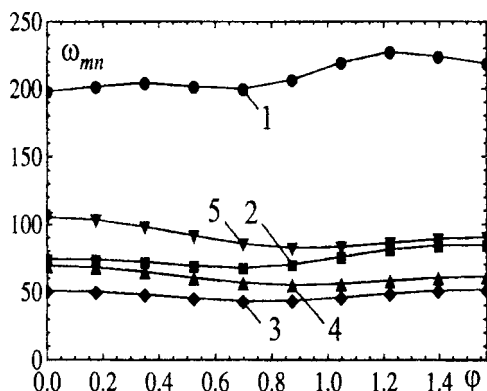


Рис. 5. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m = 1$: 1 - $n = 1$; 2 - $n = 2$; 3 - $n = 3$; 4 - $n = 4$; 5 - $n = 5$

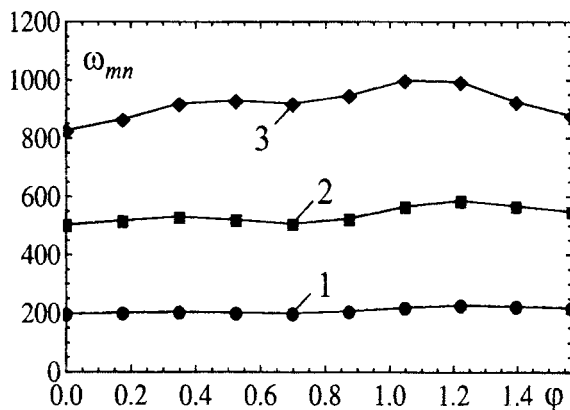


Рис. 6. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $n = 1$: 1 - $m = 1$; 2 - $m = 2$; 3 - $m = 3$

Из рис. 5 видно, что с увеличением угла намотки частоты ω_{11} и ω_{12} постепенно уменьшаются, достигая минимума при $\varphi \approx 40^\circ$. Для других мод наименьшее значение частоты наблюдается при $\varphi \approx 50^\circ$. Таким образом, минимальные значения частот для различных мод имеют место при различных углах намотки. Также заметим, что из рис. 5 следует, что частота ω_{13} является частотой основного тона.

Как показывает рис. 6, характер изменений частот аналогичен для различных мод. Частоты ω_{21} и ω_{31} достигают минимальных значений при углах намотки $\varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 90^\circ$. Частота ω_{11} имеет наименьшее значение при $\varphi = 40^\circ$. Сравнивая зависимости частот ω_{mn} , представленные на рисунках 5 и 6, можно сделать вывод, что влияние изменения параметра m на изменение собственных частот более велико, чем изменения параметра n .

На рис. 7 и 8 показаны зависимости частоты ω_{11} от угла намотки φ для различных отношений h/R и R/l .

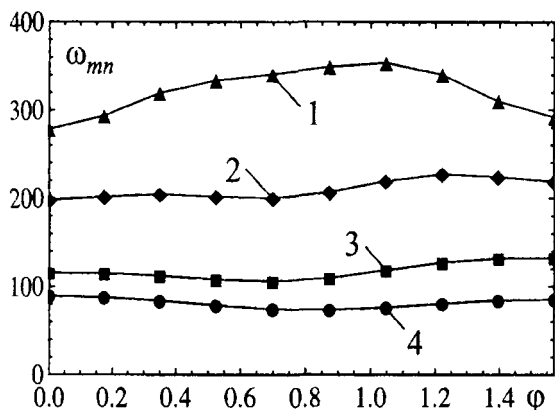


Рис. 7. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m = n = 1$ для различных отношений h/R : 1 – $h/R = 0.001$; 2 – $h/R = 0.002$; 3 – $h/R = 0.004$; 4 – $h/R = 0.01$

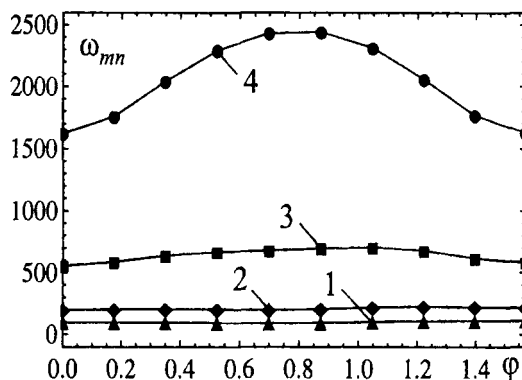


Рис. 8. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m = n = 1$ для различных отношений R/l : 1 – $R/l = 1/30$; 2 – $R/l = 1/20$; 3 – $R/l = 1/10$; 4 – $R/l = 1/4$

Из рис. 7 видно, что при увеличении отношения h/R значение угла намотки, соответствующее минимальному значению частоты свободных колебаний изменяется, в частности, при $h/R = 0.001$ и $h/R = 0.002$ наименьшее значение ω_{11} наблюдается для угла $\varphi \approx 40^\circ$. При дальнейшем увеличении отношения h/R минимум частоты имеет место для $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$; для углов намотки близких к 45° частота свободных колебаний приобретает наибольшие значения. Как следует из рисунка 8, при значениях $R/l = 1/30$ и $R/l = 1/20$ угол намотки на частоту свободных колебаний практически не влияет; при увеличении значений отношения R/l наименьшие частоты наблюдаются при углах $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$, а максимальная частота наблюдается для углов $\varphi \approx 45^\circ$.

Заключение

Приближенный расчет собственных частот свободных колебаний нижнего спектра цилиндрических оболочек из стеклопластика, выполненный на основании метода Рэлея – Ритца, показывает, что значения частот существенно зависят от угла намотки стекловолокна. Полученные результаты можно использовать при проектировании таких оболочек в случае жесткого защемления двух концов оболочки, а также жесткой заделки одного из ее концов и шарнирного опирания дру-

гого конца. Также отметим, что значения собственных частот ω_{mn} для одних и тех же углов намотки стекловолокна, находятся в соотношении, которое соответствует результатам натуральных экспериментов и результатам, полученным для анизотропных и изотропных оболочек [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Михасев Г. И. Асимптотические методы в теории тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1997. 304 с.
2. Lee Y. S., Kim Y. W. Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners // *Advances in Engineering Software* 1999; Vol. 30 (9–11). P. 649–655.
3. Сопротивление стеклопластиков / Бажанов В.Л. и [др.] // М.: Машиностроение. 1968. – 304 с.
4. Пластинки и оболочки из стеклопластиков/ Бажанов В.Л. и [др.] // М.: Москва, 1970. – 404 с.
5. Xu Zhilun. *Elasticity (Volume II)*. – Beijing: Higher Education Press, 2006. – 287 p.